



**Departamento de  
Engenharia Civil**

# ANÁLISE DE ESTRUTURAS I

Tabelas de Análise de Estruturas

Grupo de Análise de Estruturas  
IST, 2011

## Formulário de Lajes

Rotações:  $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$      $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$   
 $\theta_n = \theta_x n_x + \theta_y n_y$

Relação curvatura-deslocamento:

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Relações constitutivas:

$$\begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D_f \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}$$

Integrabilidade de curvaturas:

$$\frac{\partial \chi_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \chi_{yy}}{\partial x} = \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial y}$$

$$\begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu^2)D_f} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix}$$

Rigidez de flexão da laje:  $D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Momentos em faceta de orientação arbitrária:  $m_{nn} = m_{xx} n_x^2 + 2m_{xy} n_x n_y + m_{yy} n_y^2$   
 $m_{nt} = (m_{yy} - m_{xx}) n_x n_y + m_{xy} (n_x^2 - n_y^2)$

Força de canto:  $R = \llbracket m_{nt} \rrbracket = m_{nt}^+ - m_{nt}^-$

Esforço transversal:  $v_x = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$      $v_y = \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$   
 $v_n = v_x n_x + v_y n_y$

Esforço transversal efectivo:  $r_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$      $r_y = v_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$   
 $r_n = v_n + \frac{\partial m_{nt}}{\partial t}$

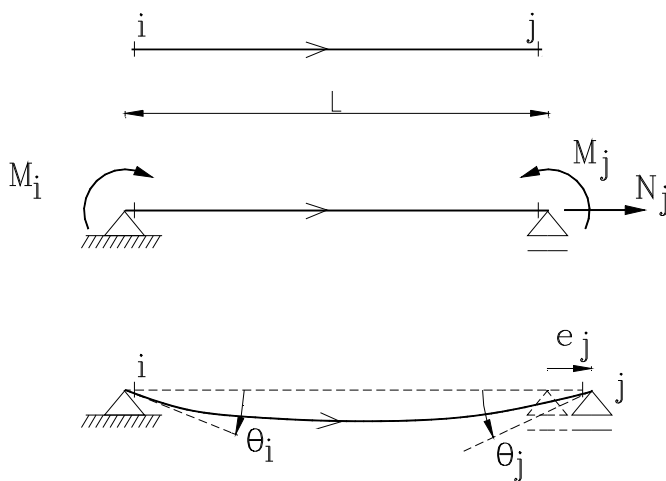
Equação de equilíbrio:  $\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q$

Eq. de Lagrange:  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D_f}$

Derivadas direccionais  $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} n_x + \frac{\partial f}{\partial y} n_y$   
 $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} (-n_y) + \frac{\partial f}{\partial y} n_x$

Formulário

Elemento de barra (viga)



Esforços e deformações independentes

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \\ N_j \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ e_j \end{bmatrix}$$

Matriz de flexibilidade elementar

$$\underline{F} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ & & 6I/A \end{bmatrix}$$

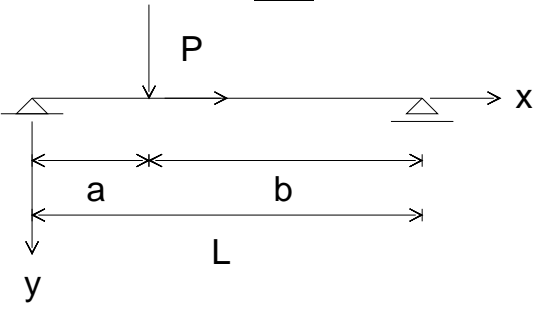
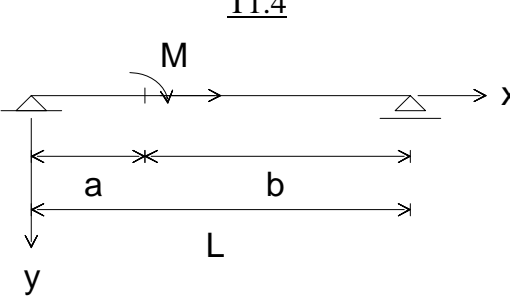
Relações deformações-esforços

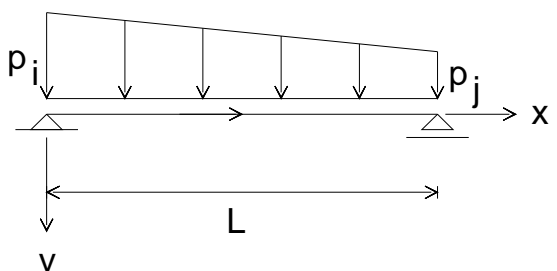
$$\underline{u} = \underline{F}\underline{X} + \underline{u}$$

Viga simplesmente apoiada

Deslocamentos transversais  $y(x)$  e momentos flectores  $M(x)$

<p style="text-align: center;"><u>T1.1</u></p>	<p><math>M(x) = 0</math></p> $y(x) = \delta_i + \frac{\delta_j - \delta_i}{L} x$
<p style="text-align: center;"><u>T1.2</u></p>	<p><math>M(x) = M_i + \frac{M_j - M_i}{L} x</math></p> $y(x) = \frac{L}{6EI} \left[ (2M_i + M_j)x - \frac{3M_i}{L} x^2 + \frac{M_i - M_j}{L^2} x^3 \right]$

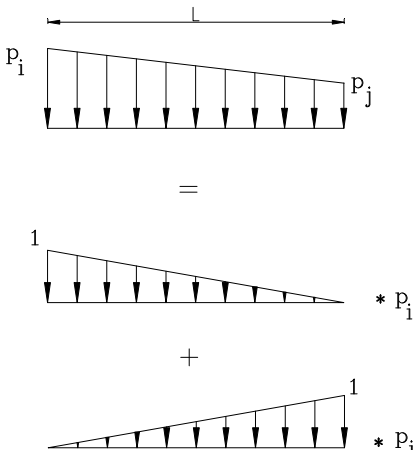
<p style="text-align: center;"><u>T1.3</u></p> 	<p>Caso particular: <math>a=b=L/2</math></p> $M(x = \frac{L}{2}) = \frac{PL}{4}$ $y(x = \frac{L}{2}) = \frac{PL^3}{48EI}$
$M(x) = \begin{cases} P \frac{b}{L} x & 0 \leq x \leq a \\ P \left[ a - \frac{a}{L} x \right] & a \leq x \leq L \end{cases}$ $y(x) = \begin{cases} \frac{P}{6LEI} [ab(2b+a)x - bx^3] & 0 \leq x \leq a \\ \frac{P}{6LEI} [-a^3(b+a) + a(2b^2 + 4ab + 3a^2)x - 3a(b+a)x^2 + ax^3] & a \leq x \leq L \end{cases}$	
<p style="text-align: center;"><u>T1.4</u></p> 	<p>Caso particular: momento a meio-vão</p> $y(x) = \begin{cases} \frac{M}{6LEI} \left[ -\frac{L^2}{4} x + x^3 \right] & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{M}{6LEI} \left[ -\frac{3L^3}{4} + \frac{11L^2}{4} x - 3Lx^2 + x^3 \right] & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$
$M(x) = \begin{cases} -\frac{M}{L} x & 0 \leq x \leq a \\ M - \frac{M}{L} x & a \leq x \leq L \end{cases}$ $y(x) = \begin{cases} \frac{M}{6LEI} [(2b^2 - 2ba - a^2)x + x^3] & 0 \leq x \leq a \\ \frac{M}{6LEI} [-3a^2(a+b) + (5a^2 + 2b^2 + 4ba)x - 3(a+b)x^2 + x^3] & a \leq x \leq L \end{cases}$	

<p><u>T1.5</u></p> 	<p>Caso particular: <math>p</math> uniforme</p> $M(x) = \frac{p}{2}(Lx - x^2)$ $y(x) = \frac{p}{EI} \left[ \frac{L^3}{24}x - \frac{L}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \right]$ $y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{5pL^4}{384EI}$
$M(x) = \left[ \left( p_i \frac{L}{3} + p_j \frac{L}{6} \right) x - p_i \frac{1}{2} x^2 + (p_i - p_j) \frac{1}{6L} x^3 \right]$ $y(x) = \frac{1}{EI} \left[ \left( p_i \frac{8L^3}{360} + p_j \frac{7L^3}{360} \right) x - \left( p_i \frac{L}{18} + p_j \frac{L}{36} \right) x^3 + p_i \frac{1}{24} x^4 - (p_i - p_j) \frac{1}{120L} x^5 \right]$	

### Utilização das tabelas

Sendo válida a sobreposição é conveniente decompôr as acções (ou os seus efeitos) em parcelas mais simples. Seja, por exemplo, a acção representada na tabela anterior, Tabela 1.5.

Esta carga trapezoidal pode ser representada pela recta  $p = mx + b$  com  $m = \frac{p_j - p_i}{L}$  e  $b = p_i$ . É fácil observar que a mesma recta pode ser obtida pela sobreposição de duas rectas particulares (que tomem o valor unitário numa das extremidades e o valor nulo na outra) devidamente escaladas:



$$p = \frac{p_j - p_i}{L}x + p_i =$$

$$= \left(1 - \frac{x}{L}\right)p_i + \frac{x}{L}p_j$$

Nas tabelas seguintes recorrer-se-á a esta decomposição ou à decomposição alternativa em que se separa o termo constante (o  $b$  no caso anterior) do termo linear (o  $mx$  no caso anterior).

Viga simplesmente apoiada sujeita a variações de temperatura

T1.6

Variações de Temperatura

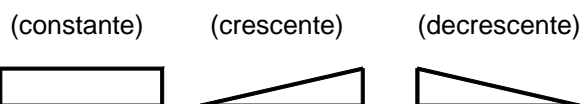
Deve identificar-se claramente a:

- variação no vão;
- variação na (altura da) secção.

Os 3 casos de variação no vão que constam das tabelas são:

1. variação **uniforme** no vão o que significa que todas as secções da viga têm a mesma variação de temperatura;
2. variação **crescente** no vão a qual varia linearmente desde um valor zero até ao valor máximo na extremidade oposta;
3. variação **decrecente** no vão a qual varia linearmente desde um valor máximo até ao valor zero na extremidade oposta.

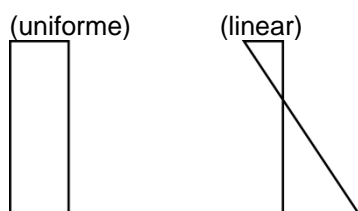
Graficamente representam-se estes casos de variação no vão na forma seguinte:



A variação na secção deverá, quando necessário e para utilização da tabela, ser decomposta em:

1. variação **uniforme** em altura, a qual se denota por  $\Delta T_U$  e é dada pela variação de temperatura no centro de rigidez da secção.
2. variação **linear** na altura da secção, com valores de sinal contrário para a variação de temperatura nas fibras inferiores e superiores, relativamente ao centro de rigidez. Denota-se a diferença entre as variações de temperatura das fibras extremas por  $\Delta T_L$ , a qual se considera positiva quando a diferença das variações de temperatura entre as fibras extremas inferior e superior for positiva.

Graficamente representam-se estes casos de variação na secção na forma seguinte:

Exemplo (de variação na secção):

Considere-se uma secção transversal de altura  $h$  cujo centro de rigidez se encontra à distância de  $h/3$  da fibra superior. Se a variação de temperatura na fibra inferior for de  $5^\circ\text{C}$  e a variação de temperatura na fibra superior de  $20^\circ\text{C}$  (ambas positivas), então  $\Delta T_L = -15^\circ\text{C}$  e  $\Delta T_U = 15^\circ\text{C}$ .

Distribuição de temperatura linear na secção,  $\Delta T_L$  :

$$M(x) = 0$$

Caso de variação constante no vão:

$$y(x) = \frac{\alpha \Delta T_L}{2h} [Lx - x^2]$$

Caso de variação crescente no vão:

$$y(x) = \frac{\alpha \Delta T_L}{2h} \left[ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3L}x^3 \right]$$

Caso de variação decrescente no vão:

$$y(x) = \frac{\alpha \Delta T_L}{2h} \left[ \frac{2L}{3}x - x^2 + \frac{1}{3L}x^3 \right]$$

em que  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica do material e  $h$  é a altura da secção

Distribuição de temperatura uniforme na secção,  $\Delta T_U$  :

$$N(x) = 0$$

Caso de variação constante no vão:

$$u(L) = \alpha \Delta T_U L$$

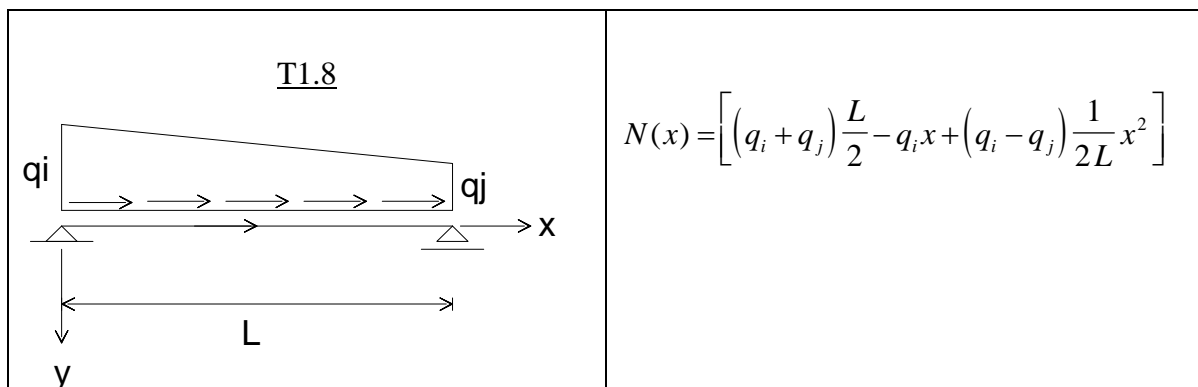
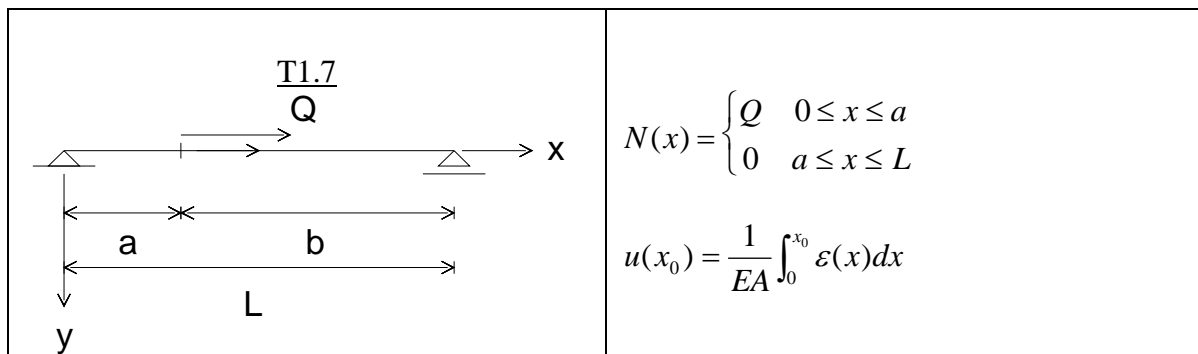
Caso de variação crescente no vão:

$$u(L) = \alpha \Delta T_U \frac{L}{2}$$

Caso de variação decrescente no vão:

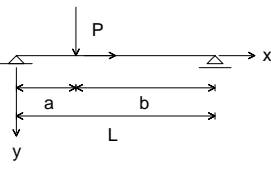
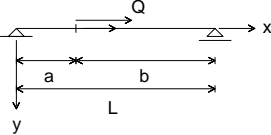
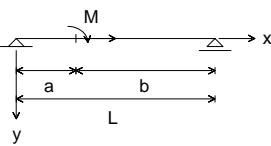
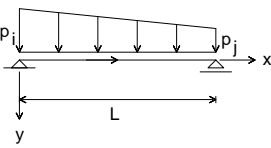
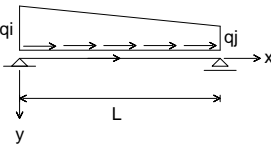
$$u(L) = \alpha \Delta T_U \frac{L}{2}$$

## Viga simplesmente apoiada sujeita a cargas axiais

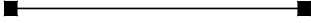
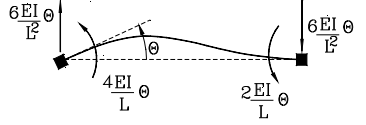
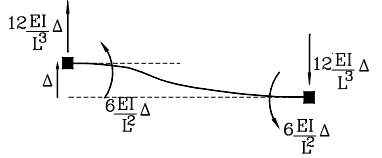

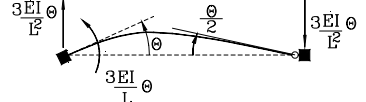


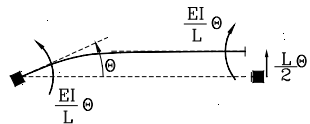
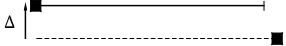


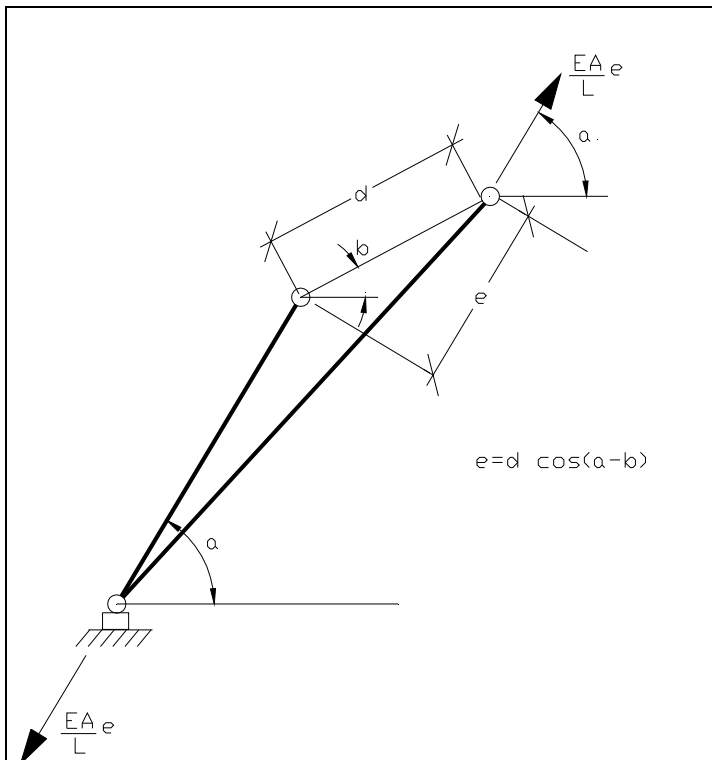


T2 Deformações independentes em barras com cargas de vão - Termos correctores

Carga de vão	$\bar{\theta}_i$	$\bar{\theta}_j$	$\bar{e}_j$
	$\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$	$\frac{Pab(L+a)}{6LEI}$	0
	Caso particular a=L/2 $\frac{PL^2}{16EI}$	Caso particular a=L/2 $\frac{PL^2}{16EI}$	
	0	0	$\frac{Qa}{EA}$
	$\frac{M(3b^2 - L^2)}{6LEI}$	$\frac{M(L^2 - 3a^2)}{6LEI}$	0
	Caso particular a=L/2 $-\frac{ML}{24EI}$	Caso particular a=L/2 $\frac{ML}{24EI}$	
	$\frac{1}{EI} \left[ p_i \frac{8L^3}{360} + p_j \frac{7L^3}{360} \right]$	$\frac{1}{EI} \left[ p_i \frac{7L^3}{360} + p_j \frac{8L^3}{360} \right]$	0
	Caso particular $p_i = p_j$ $\frac{p_i L^3}{24EI}$	Caso particular $p_i = p_j$ $\frac{p_i L^3}{24EI}$	
	0	0	$\frac{q_i L^2}{6EA} + \frac{2q_j L^2}{6EA}$
Varição de temperatura uniforme no vão	$\frac{\alpha \Delta T_L L}{2h}$	$\frac{\alpha \Delta T_L L}{2h}$	$\alpha \Delta T_v L$
Varição de temperatura crescente no vão	$\frac{\alpha \Delta T_L L}{6h}$	$\frac{\alpha \Delta T_L L}{3h}$	$\frac{1}{2} \alpha \Delta T_v L$
Varição de temperatura decrescente no vão	$\frac{\alpha \Delta T_L L}{3h}$	$\frac{\alpha \Delta T_L L}{6h}$	$\frac{1}{2} \alpha \Delta T_v L$

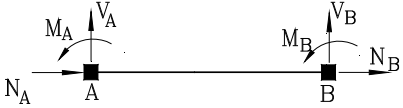
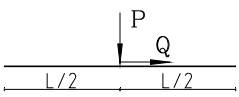
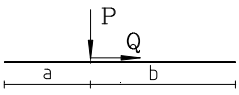
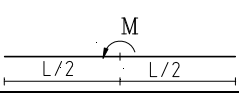
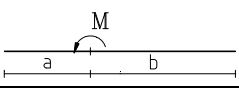
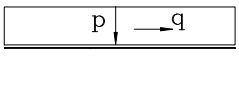
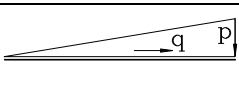
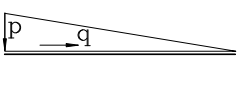
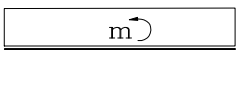
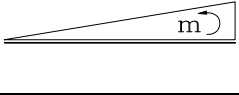
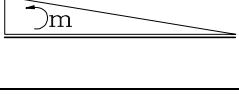
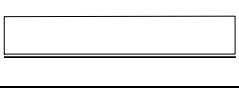
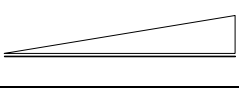
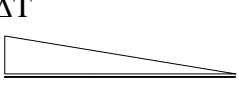
T.3 Deformadas para deslocamentos impostos

Tipo de barra	Imposição de rotação à esquerda	Imposição de deslocamento transversal
<p>bi-encastada</p> 		
<p>encastada-rotulada</p> 		
<p>encastada-enc desliz.</p> 		

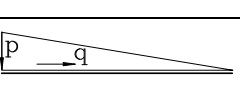


Deformada da barra sujeita apenas a esforço normal

- NOTA:
- A deformada final da barra é sempre obtida considerando a sobreposição dos diversos efeitos nomeadamente:
- a(s) rotação(ões) independentes;
  - o deslocamento transversal relativo entre extremidades;
  - o deslocamento axial relativo entre extremidades;
  - o efeito das solicitações de vão.

Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra bi-encastada						
	$M_A$	$M_B$	$V_A$	$V_B$	$N_A$	$N_B$
	$\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{Q}{2}$	$-\frac{Q}{2}$
	$\frac{Pab^2}{L^2}$	$-\frac{Pba^2}{L^2}$	$\frac{Pb^2(3a+b)}{L^3}$	$\frac{Pa^2(a+3b)}{L^3}$	$-\frac{Qb}{L}$	$-\frac{Qa}{L}$
	$\frac{M}{4}$	$\frac{M}{4}$	$\frac{3M}{2L}$	$-\frac{3M}{2L}$	0	0
	$\frac{Mb(2a-b)}{L^2}$	$\frac{Ma(2b-a)}{L^2}$	$\frac{6Mab}{L^3}$	$-\frac{6Mab}{L^3}$	0	0
	$\frac{pL^2}{12}$	$-\frac{pL^2}{12}$	$\frac{pL}{2}$	$\frac{pL}{2}$	$-\frac{qL}{2}$	$-\frac{qL}{2}$
	$\frac{pL^2}{30}$	$-\frac{pL^2}{20}$	$\frac{3pL}{20}$	$\frac{7pL}{20}$	$-\frac{qL}{6}$	$-\frac{qL}{3}$
	$\frac{pL^2}{20}$	$-\frac{pL^2}{30}$	$\frac{7pL}{20}$	$\frac{3pL}{20}$	$-\frac{qL}{3}$	$-\frac{qL}{6}$
	0	0	m	-m	0	0
	$\frac{mL}{12}$	$-\frac{mL}{12}$	$\frac{m}{2}$	$-\frac{m}{2}$	0	0
	$-\frac{mL}{12}$	$\frac{mL}{12}$	$-\frac{m}{2}$	$\frac{m}{2}$	0	0
$\Delta T$ 	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{h}$	$-\frac{\alpha \Delta T_L EI}{h}$	0	0	$\alpha \Delta T_U EA$	$-\alpha \Delta T_U EA$
$\Delta T$ 	0	$-\frac{\alpha \Delta T_L EI}{h}$	$-\frac{\alpha \Delta T_L EI}{Lh}$	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{Lh}$	$\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$	$-\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$
$\Delta T$ 	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{h}$	0	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{Lh}$	$-\frac{\alpha \Delta T_L EI}{Lh}$	$\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$	$-\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$

Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra encastrada-rotulada						
	$M_A$	$\theta_B$	$V_A$	$V_B$	$N_A$	$N_B$
	$\frac{3PL}{16}$	$\frac{PL^2}{32EI}$	$\frac{11P}{16}$	$\frac{5P}{16}$	$-\frac{Q}{2}$	$-\frac{Q}{2}$
	$\frac{Pab(L+b)}{2L^2}$	$\frac{Pba^2}{4EIL}$	$\frac{Pb(3L^2-b^2)}{2L^3}$	$\frac{Pa^2(3L-a)}{2L^3}$	$-\frac{Qb}{L}$	$-\frac{Qa}{L}$
	$\frac{M}{8}$	$-\frac{ML}{16EI}$	$\frac{9M}{8L}$	$-\frac{9M}{8L}$	0	0
	$\frac{M(L^2-3b^2)}{2L^2}$	$-\frac{Ma(2b-a)}{4EIL}$	$\frac{3Ma(L+b)}{2L^3}$	$-\frac{3Ma(L+b)}{2L^3}$	0	0
	$\frac{pL^2}{8}$	$\frac{pL^3}{48EI}$	$\frac{5pL}{8}$	$\frac{3pL}{8}$	$-\frac{qL}{2}$	$-\frac{qL}{2}$
	$\frac{7pL^2}{120}$	$\frac{pL^3}{80EI}$	$\frac{27pL}{120}$	$\frac{33pL}{120}$	$-\frac{qL}{6}$	$-\frac{qL}{3}$
	$\frac{8pL^2}{120}$	$\frac{pL^3}{120EI}$	$\frac{48pL}{120}$	$\frac{12pL}{120}$	$-\frac{qL}{3}$	$-\frac{qL}{6}$
	0	0	$m$	$-m$	0	0
	$\frac{mL}{8}$	$\frac{mL^2}{48EI}$	$\frac{5m}{8}$	$-\frac{5m}{8}$	0	0
	$-\frac{mL}{8}$	$-\frac{mL^2}{48EI}$	$\frac{3m}{8}$	$-\frac{3m}{8}$	0	0
$\Delta T$ 	$\frac{3\alpha \Delta T_L EI}{2h}$	$\frac{\alpha \Delta T_L L}{4h}$	$\frac{3\alpha \Delta T_L EI}{2Lh}$	$-\frac{3\alpha \Delta T_L EI}{2Lh}$	$\alpha \Delta T_U EA$	$-\alpha \Delta T_U EA$
$\Delta T$ 	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{2h}$	$\frac{\alpha \Delta T_L L}{4h}$	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{2Lh}$	$-\frac{\alpha \Delta T_L EI}{2Lh}$	$\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$	$-\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$
$\Delta T$ 	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{h}$	0	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{Lh}$	$-\frac{\alpha \Delta T_L EI}{Lh}$	$\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$	$-\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$

Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra encastrada-encastrada deslizante						
	$M_A$	$M_B$	$V_A$	$\delta_B$	$N_A$	$N_B$
	$\frac{3PL}{8}$	$\frac{PL}{8}$	$P$	$\frac{PL^3}{24EI}$	$-\frac{Q}{2}$	$-\frac{Q}{2}$
	$\frac{Pa(b+L)}{2L}$	$\frac{Pa^2}{2L}$	$P$	$\frac{Pa^2(a+3b)}{12EI}$	$-\frac{Qb}{L}$	$-\frac{Qa}{L}$
	$-\frac{M}{2}$	$-\frac{M}{2}$	0	$-\frac{ML^2}{8EI}$	0	0
	$-\frac{Mb}{L}$	$-\frac{Ma}{L}$	0	$-\frac{Mab}{2EI}$	0	0
	$\frac{pL^2}{3}$	$\frac{pL^2}{6}$	$pL$	$\frac{pL^4}{24EI}$	$-\frac{qL}{2}$	$-\frac{qL}{2}$
	$\frac{5pL^2}{24}$	$\frac{3pL^2}{24}$	$\frac{pL}{2}$	$\frac{7pL^4}{240EI}$	$-\frac{qL}{6}$	$-\frac{qL}{3}$
	$\frac{3pL^2}{24}$	$\frac{pL^2}{24}$	$\frac{pL}{2}$	$\frac{3pL^4}{240EI}$	$-\frac{qL}{3}$	$-\frac{qL}{6}$
	$-\frac{mL}{2}$	$-\frac{mL}{2}$	0	$-\frac{mL^3}{12EI}$	0	0
	$-\frac{mL}{6}$	$-\frac{mL}{3}$	0	$-\frac{mL^3}{24EI}$	0	0
	$-\frac{mL}{3}$	$-\frac{mL}{6}$	0	$-\frac{mL^3}{24EI}$	0	0
$\Delta T$ 	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{h}$	$-\frac{\alpha \Delta T_L EI}{h}$	0	0	$\alpha \Delta T_U EA$	$-\alpha \Delta T_U EA$
$\Delta T$ 	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{2h}$	$-\frac{\alpha \Delta T_L EI}{2h}$	0	$\frac{\alpha \Delta T_L L^2}{12h}$	$\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$	$-\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$
$\Delta T$ 	$\frac{\alpha \Delta T_L EI}{2h}$	$-\frac{\alpha \Delta T_L EI}{2h}$	0	$-\frac{\alpha \Delta T_L L^2}{12h}$	$\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$	$-\frac{\alpha \Delta T_U EA}{2}$

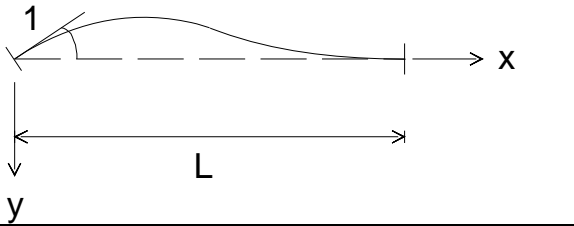
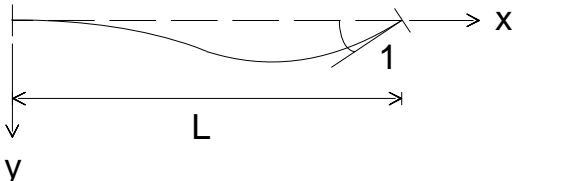
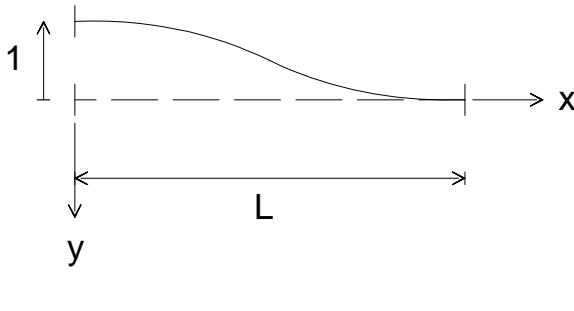
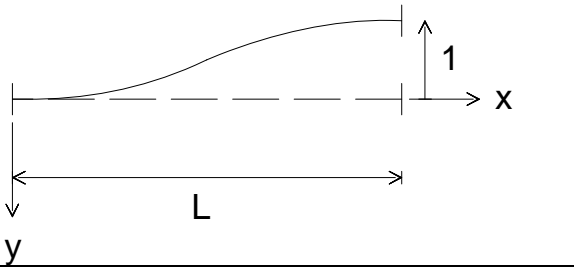
## Elemento de barra - deslocamentos prescritos

Deslocamentos independentes a considerar em cada nó

- rotação;
- deslocamento transversal.

A deformada obtém-se por sobreposição das 4 deformadas, correspondentes a cada um dos 4 deslocamentos considerados:

$$y(x) = \sum_{i=1}^4 \delta_i \varphi_i(x)$$

<p>Efeito de <math>\delta_1=1, \delta_i=0 \forall i \neq 1</math></p> 	<p><u>T4.1</u></p> $\varphi_1(x) = -\frac{1}{L^2}(L^2x - 2Lx^2 + x^3)$
<p>Efeito de <math>\delta_2=1, \delta_i=0 \forall i \neq 2</math></p> 	<p><u>T4.2</u></p> $\varphi_2(x) = -\frac{1}{L^2}(-Lx^2 + x^3)$
<p>Efeito de <math>\delta_3=1, \delta_i=0 \forall i \neq 3</math></p> 	<p><u>T4.3</u></p> $\varphi_3(x) = -\frac{1}{L^3}(L^3 - 3Lx^2 + 2x^3)$
<p>Efeito de <math>\delta_4=1, \delta_i=0 \forall i \neq 4</math></p> 	<p><u>T4.4</u></p> $\varphi_4(x) = -\frac{1}{L^3}(3Lx^2 - 2x^3)$

Existindo deformação axial também se devem considerar os modos de deformação associados aos deslocamentos independentes axiais. Contudo, estes modos não alteram a função  $y(x)$ , a distância da corda à posição deformada em cada ponto, que é o que se designa por *deformada*.

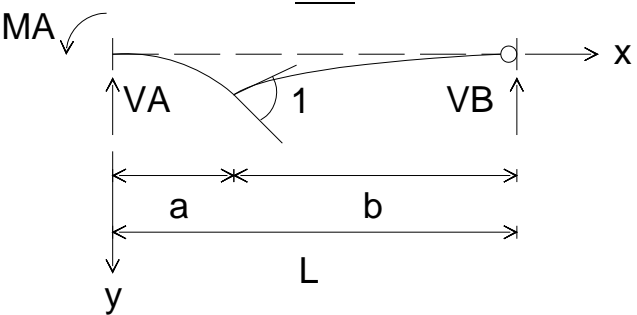
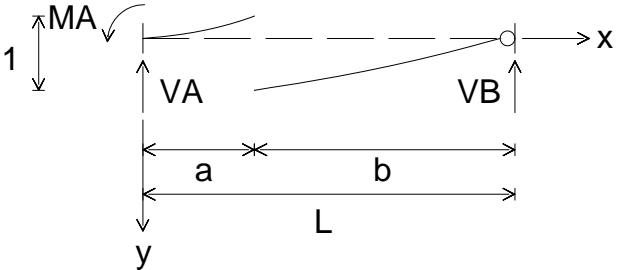
Deformadas e forças de fixação na barra bi-encastada

<p style="text-align: center;"><u>T5.1</u></p>	$M_A = -\frac{2EI}{L^2}(a-2b)$ $M_B = \frac{2EI}{L^2}(b-2a)$ $V_A = \frac{6EI}{L^3}(b-a)$ $V_B = \frac{6EI}{L^3}(a-b)$
$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{2L-3a}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{2a-L}{L^3}\right)x^3 & 0 \leq x \leq a \\ a-x + \left(\frac{2L-3a}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{2a-L}{L^3}\right)x^3 & a \leq x \leq L \end{cases}$	
<p style="text-align: center;"><u>T5.2</u></p>	$M_A = -\frac{6EI}{L^2} \quad M_B = -\frac{6EI}{L^2}$ $V_A = -\frac{12EI}{L^3} \quad V_B = \frac{12EI}{L^3}$ $y(x) = \begin{cases} -\frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 & 0 \leq x \leq a \\ 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 & a \leq x \leq L \end{cases}$

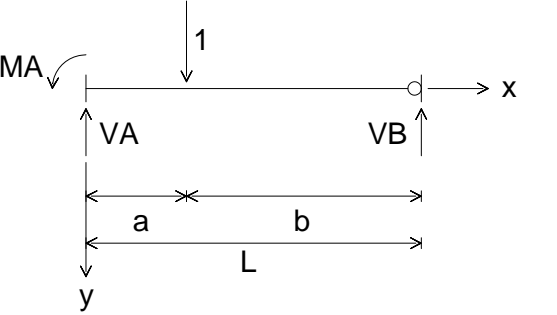
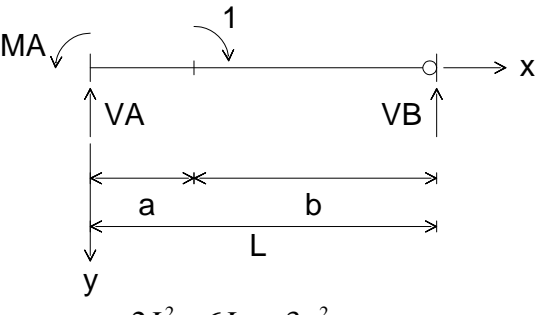
Forças de fixação para força e momento unitários

<p style="text-align: center;"><u>T5.3</u></p> $M_A = -\frac{-L^2a + 2La^2 - a^3}{L^2}$ $M_B = \frac{-La^2 + a^3}{L^2}$ $V_A = \frac{L^3 - 3La^2 + 2a^3}{L^3} \quad V_B = \frac{3La^2 - 2a^3}{L^3}$	<p style="text-align: center;"><u>T5.4</u></p> $M_A = -\frac{-L^2 + 4La - 3a^2}{L^2}$ $M_B = \frac{-2La + 3a^2}{L^2}$ $V_A = \frac{-6La + 6a^2}{L^3} \quad V_B = \frac{6La - 6a^2}{L^3}$
---	--

Deformadas e forças de fixação na barra encastrada-apoiada

<p style="text-align: center;"><u>T6.1</u></p>  <p><b>Libertação em B:</b>  <math>M_A = \frac{3EI}{L^2} b \quad V_A = \frac{3EI}{L^3} b \quad V_B = -\frac{3EI}{L^3} b</math></p> <p><b>Libertação em A:</b>  <math>M_B = \frac{3EI}{L^2} a \quad V_A = -\frac{3EI}{L^3} a \quad V_B = \frac{3EI}{L^3} a</math></p>	<p><b>Libertação em B:</b></p> $y(x) = \begin{cases} \left(\frac{3L-3a}{2L^2}\right)x^2 + \left(\frac{a-L}{2L^3}\right)x^3 & 0 \leq x \leq a \\ a-x + \left(\frac{3L-3a}{2L^2}\right)x^2 + \left(\frac{a-L}{2L^3}\right)x^3 & a \leq x \leq L \end{cases}$ <p><b>Libertação em A:</b></p> $y(x) = \begin{cases} \left(-\frac{3L-3b}{2L}\right)x + \left(\frac{L-b}{2L^3}\right)x^3 + L-b & a \leq x \leq L \\ \left(\frac{3b-L}{2L}\right)x + \left(\frac{L-b}{2L^3}\right)x^3 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$ <p>Notar que a (b) é a distância desde a extremidade inicial (final) à secção da descontinuidade.</p>
<p style="text-align: center;"><u>T6.2</u></p>  <p><b>Libertação em B:</b>  <math>M_A = -\frac{3EI}{L^2} \quad V_A = -\frac{3EI}{L^3} \quad V_B = \frac{3EI}{L^3}</math></p> <p><b>Libertação em A:</b>  <math>M_B = -\frac{3EI}{L^2} \quad V_A = -\frac{3EI}{L^3} \quad V_B = \frac{3EI}{L^3}</math></p>	<p><b>Libertação em B:</b></p> $y(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2L^2}x^2 + \frac{1}{2L^3}x^3 & 0 \leq x \leq a \\ 1 - \frac{3}{2L^2}x^2 + \frac{1}{2L^3}x^3 & a \leq x \leq L \end{cases}$ <p><b>Libertação em A:</b></p> $y(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2L}x + \frac{1}{2L^3}x^3 & a \leq x \leq L \\ -\frac{3}{2L}x + \frac{1}{2L^3}x^3 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$

Forças de fixação para força e momento unitários

<p style="text-align: center;"><u>T6.3</u></p>  <p><math>M_A = -\frac{-2L^2a + 3La^2 - a^3}{2L^2}</math></p> <p><math>V_A = \frac{2L^3 - 3La^2 + a^3}{2L^3} \quad V_B = \frac{3La^2 - a^3}{2L^3}</math></p>	<p style="text-align: center;"><u>T6.4</u></p>  <p><math>M_A = -\frac{-2L^2 + 6La - 3a^2}{2L^2}</math></p> <p><math>V_A = \frac{-6La + 3a^2}{2L^3} \quad V_B = \frac{6La - 3a^2}{2L^3}</math></p>
--	---



Deformadas e forças de fixação na barra encastrada-encastrada deslizante

<p style="text-align: center;"><u>T7.1</u></p> <p> <math>M_A = \frac{EI}{L}</math>      <math>M_B = -\frac{EI}{L}</math>      <math>V_A = 0</math> </p>	<p><b>Libertação em B:</b></p> $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2L}x^2 & 0 \leq x \leq a \\ a - x + \frac{1}{2L}x^2 & a \leq x \leq L \end{cases}$ <p><b>Libertação em A:</b></p> $y(x) = \begin{cases} \frac{L}{2} - x + \frac{1}{2L}x^2 & a \leq x \leq L \\ -\frac{L}{2} + b + \frac{1}{2L}x^2 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$
<p style="text-align: center;"><u>T7.2</u></p> <p> <math>M_A = 0</math>      <math>M_B = 0</math>      <math>V_A = 0</math> </p>	<p><b>Libertação em B:</b></p> $y(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ 1 & a \leq x \leq L \end{cases}$ <p><b>Libertação em A:</b></p> $y(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & a \leq x \leq L \end{cases}$

Forças de fixação para força e momento unitários

<p style="text-align: center;"><u>T7.3</u></p> <p> <math>M_A = -\frac{-2La + a^2}{2L}</math>  <math>M_B = \frac{a^2}{2L}</math>  <math>V_A = 1</math> </p>	<p style="text-align: center;"><u>T7.4</u></p> <p> <math>M_A = \frac{L-a}{L}</math>  <math>M_B = \frac{a}{L}</math>  <math>V_A = 0</math> </p>
--	--