



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**

**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**

# **UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE EQUILÍBRIO EM REFINAMENTO ADAPTATIVO**

Orlando José Barreiros d'Almeida Pereira  
(Mestre)

Tese para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil

Orientador: Doutor José Paulo Baptista Moitinho de Almeida

Júri:

Presidente: Reitor da Universidade Técnica de Lisboa

Vogais: Doutor Edward Anthony Ward Maunder

Doutor Carlos Alberto Mota Soares

Doutor José Manuel Mota Couto Marques

Doutor João Arménio Correia Martins

Doutor José Paulo Baptista Moitinho de Almeida

Doutor Eduardo Manuel Baptista Ribeiro Pereira

**Julho de 1996**



# Resumo

Nesta tese, estuda-se a utilização de elementos finitos de equilíbrio na estimação de erro *a posteriori* e no refinamento h-adaptativo, em problemas estáticos de elasticidade linear.

Implementa-se uma estratégia de refinamento h-adaptativo baseada na análise dual de um modelo de elementos finitos de equilíbrio e de um modelo de elementos finitos compatíveis. Esta análise permite obter um majorante do erro e indicadores de erro elementares.

Propõem-se várias alternativas para a obtenção de estimadores e indicadores de erro, com base apenas numa solução de elementos finitos de equilíbrio.

De entre estas alternativas, é desenvolvida uma, baseada na utilização explícita dos defeitos de compatibilidade, para a qual se implementa também uma estratégia de refinamento h-adaptativo.

Os estimadores de erro e estratégias de refinamento implementados são utilizados na análise de alguns problemas de elasticidade plana. Os resultados obtidos são comparados, de modo a tirar algumas conclusões.



# Abstract

This thesis studies the use of equilibrium finite elements in *a posteriori* error estimation and h-adaptive refinement, for static linear elastic problems.

An h-adaptive refinement strategy, based upon the dual analysis of an equilibrium finite element model and a compatible finite element model, is implemented. This analysis gives an upper bound for the error and element error indicators.

Several alternatives for obtaining error estimators and indicators, based only upon an equilibrium finite element solution, are proposed.

One of these alternatives, based upon the explicit use of the compatibility defaults, is developed and used in the implementation of an h-adaptive refinement strategy.

The implemented error estimators and refinement strategies are used in the analysis of some plane elasticity problems. The results obtained are compared, in order to reach some conclusions.



## **Palavras chave**

Elasticidade linear

Método dos elementos finitos

Elementos de equilíbrio

Estimação de erro a posteriori

Análise dual

Refinamento adaptativo

## **Keywords**

Linear elasticity

Finite element method

Equilibrium elements

A posteriori error estimation

Dual analysis

Adaptive refinement



# Agradecimentos

Ao meu orientador científico, Prof. José Paulo Baptista Moitinho de Almeida, agradeço a sua amizade, os seus ensinamentos, incansável apoio e permanente disponibilidade.

Ao Dr. Marco Piteri, agradeço o ter disponibilizado, assim que os desenvolveu, os geradores de malhas bidimensionais e tridimensionais utilizados neste trabalho, o que permitiu que me concentrasse nos domínios da estimação do erro e do refinamento adaptativo.

A camaradagem, o interesse manifestado pelo meu trabalho e as sugestões apresentadas pelos meus colegas do IST são também objecto da minha gratidão. Devo referir, em especial, os Profs. Teixeira de Freitas, Pedro Parreira, Eduardo Pereira e Vitor Leitão e o Eng. Luís Castro.

Por fim, quero agradecer à minha família pelo apoio e incentivo que sempre me manifestaram ao longo da minha carreira académica.

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito das actividades de investigação do grupo de Análise de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil do IST e do Instituto da Construção (IC/IST). Foi parcialmente subsidiado pelos programas PRAXIS XXI e AFEST, através dos projectos PRAXIS/2/2.1/CEG/33/94 e CHRX-CT93-0390, respectivamente.



# Notação

$C_{(j),(i)}$	Matriz de compatibilidade associada ao lado $j$ e ao elemento $i$ ;
$D$	Dimensão espacial do problema;
$d$	Operador diferencial de compatibilidade;
$d^*$	Operador diferencial de equilíbrio;
$D_{(j),(i)}$	Matriz de equilíbrio associada ao lado $j$ e ao elemento $i$ ;
$e_{\sigma,ij}$	Componente do erro do campo de tensões;
$E$	Módulo de elasticidade do material;
$e_c$	Vector do erro do campo de deslocamentos numa solução compatível;
$e_e$	Vector do erro do campo de tensões numa solução equilibrada;
$e_\sigma$	Vector do erro do campo de tensões;
$\tilde{e}_{(i)}$	Vector da aproximação do erro do campo de deslocamentos no elemento $i$ ;
$\hat{e}_{\sigma,(i)}$	Vector das deformações generalizadas do elemento $i$ devidas a $\sigma_{0,(i)}$ ;
$\hat{e}_{\theta,(i)}$	Vector das deformações térmicas generalizadas do elemento $i$ ;
$f$	Vector das forças de massa;
$\hat{f}_{(i)}$	Vector das forças de massa generalizadas do elemento $i$ ;
$F_{(e)}$	Vector das forças nodais equivalentes do elemento $e$ ;
$f$	Matriz de flexibilidade infinitesimal;
$F_{(i)}$	Matriz de flexibilidade do elemento $i$ ;
$g_{(j)}$	Vector do fluxo de tensão no lado $j$ ;
$\hat{g}_{(j)}$	Vector dos parâmetros de fluxo de tensão no lado $j$ ;
$G_c$	Vector do defeito na tensão na fronteira estática, numa solução compatível;
$G_{(j)}$	Matriz de funções de aproximação do fluxo de tensão no lado $j$ ;
$G1_e$	Matriz do defeito nas extensões na fronteira cinemática, numa solução equilibrada;
$G2_e$	Matriz do defeito nas curvaturas na fronteira cinemática, numa solução equilibrada;
$h_{(i)}$	Diâmetro do elemento $i$ ;
$I$	Matriz identidade;
$J_{c,(i)}$	Vector do salto na tensão no lado $j$ , numa solução compatível;
$J1_{e,(j)}$	Matriz do salto nas extensões no lado $j$ , numa solução equilibrada;
$J2_{e,(j)}$	Matriz do salto nas curvaturas no lado $j$ , numa solução equilibrada;
$k$	Matriz de rigidez infinitesimal;
$K_{(i)}$	Matriz de rigidez do elemento $i$ ;
$M$	Número total de elementos finitos da malha seguinte;

$M_{(j),(i)}$	Matriz de rotação para o lado j e elemento i;
$n_i$	Componente do versor da normal a uma superfície;
$N$	Número total de graus de liberdade da malha;
$N_{(j),(i)}$	Matriz da normal ao lado j, exterior ao elemento i;
$N$	Matriz da normal exterior à fronteira;
$NE$	Número total de elementos finitos da malha;
$p$	Grau das funções de aproximação nos elementos;
$q_{(i)}$	Taxa de convergência num elemento;
$r_c$	Vector do resíduo, na equação de equilíbrio, dum solução compatível;
$r_{(j)}$	Vector dos deslocamentos relativos no lado j;
$\bar{r}_{(j)}$	Vector dos deslocamentos relativos impostos no lado j;
$\hat{r}_{(j)}$	Vector dos deslocamentos relativos generalizados impostos no lado j;
$r_e$	Tensor do resíduo, na equação de compatibilidade, dum solução equilibrada;
$RL_{(i)}$	Nível de refinamento do elemento i;
$\hat{s}_{(i)}$	Vector dos parâmetros de tensões no elemento i;
$\hat{s}_{\theta,(i)}$	Vector das tensões térmicas generalizadas no elemento i;
$S_{(i)}$	Matriz de funções de aproximação de tensões no elemento i;
$t_\Gamma$	Vector da tensão imposta na fronteira estática;
$\bar{t}_{(j)}$	Vector da tensão aplicada no lado j;
$\hat{t}_{(j)}$	Vector da tensão aplicada generalizada no lado j;
$\hat{t}_{(i),(j)}$	Vector da tensão generalizada aplicada no lado j do elemento i;
$\hat{t}_{0,(j),(i)}$	Vector da tensão generalizada aplicadas no lado j devida a $\sigma_{0,(i)}$ ;
$u_i$	Componente do vector dos deslocamentos;
$\tilde{u}_i$	Aproximação melhorada dum componente de deslocamento;
$U$	Energia de deformação;
$U^*$	Energia complementar de deformação;
$u$	Vector dos deslocamentos da solução exacta;
$u_c$	Vector dos deslocamentos dum solução compatível;
$u_e$	Vector dos deslocamentos dum solução equilibrada;
$u_\Gamma$	Vector dos deslocamentos impostos na fronteira cinemática;
$u_{(i)}$	Vector dos deslocamentos no elemento i;
$\hat{u}_{(i)}$	Vector dos parâmetros de deslocamento do elemento i;
$\tilde{u}$	Vector dum aproximação melhorada dos deslocamentos;

$\hat{\mathbf{u}}_i$	Vector dos valores nodais duma aproximação melhorada duma componente de deslocamento;
$\mathbf{U}_{(i)}$	Matriz de funções de aproximação dos deslocamentos no elemento i;
$V_{(i)}$	Volume do elemento i;
$\mathbf{v}_{(j)}$	Vector dos deslocamentos no lado j;
$\hat{\mathbf{v}}_{(j)}$	Vector dos parâmetros de deslocamento no lado j;
$\bar{\mathbf{v}}_{(j)}$	Vector dos deslocamentos impostos no lado j;
$\hat{\mathbf{v}}_{(i),(j)}$	Vector dos deslocamentos generalizados impostos no lado j do elemento i;
$\mathbf{V}_{(j)}$	Matriz de funções de aproximação dos deslocamentos no lado j;
$W$	Trabalho das forças aplicadas;
$W^*$	Trabalho dos deslocamentos impostos;
$\mathbf{x}$	Vector das coordenadas de pontos;
$\gamma_{ij}$	Componente de distorção;
$\Gamma$	Fronteira do domínio;
$\Gamma_t$	Fronteira estática;
$\Gamma_u$	Fronteira cinemática;
$\Gamma_{(j)}$	Lado j;
$\partial\Omega_{(i)}$	Fronteira do elemento i;
$\varepsilon$	Estimador do erro global;
$\varepsilon_{(i)}$	Estimador do erro no elemento i;
$\varepsilon_{ij}$	Componente do tensor das deformações;
$\bar{\varepsilon}$	Erro global pretendido;
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vector das deformações;
$\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$	Vector das deformações térmicas generalizadas;
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor das deformações;
$\eta$	Erro relativo global;
$\eta_h$	Estimador do erro relativo global;
$\bar{\eta}$	Erro relativo global pretendido;
$\theta$	Índice de eficácia do estimador do erro;
$\lambda$	taxa de convergência da norma energética devida a singularidades;
$\nu$	Coeficiente de Poisson do material;
$\pi_C$	Energia potencial complementar;
$\pi_P$	Energia potencial total;
$\sigma_{ij}$	Componente do tensor das tensões;
$\tilde{\sigma}_{ij}$	Aproximação melhorada duma componente do tensor das tensões;
$\boldsymbol{\sigma}$	Vector das tensões;
$\boldsymbol{\sigma}_e$	Vector das tensões duma solução equilibrada;

$\sigma_{0,(i)}$	Solução particular no elemento $i$ ;
$\tilde{\sigma}$	Vector duma aproximação melhorada das tensões;
$\hat{\sigma}_{ij}$	Vector dos valores nodais duma aproximação melhorada duma componente do tensor das tensões;
$\sigma$	Tensor das tensões;
$\varphi_{(j)}$	Tensão no lado $j$ ;
$\Phi$	Função geradora de tensões de Airy;
$\Phi_i$	Função geradora de tensões de Maxwell;
$\phi, \tilde{\phi}$	Matriz de funções de interpolação de um campo escalar, na malha;
$\Phi$	Matriz de funções de interpolação de um campo vectorial, na malha;
$\chi_{(i)}$	Factor de redução do diâmetro do elemento $i$ ;
$\Psi_i$	Função geradora de tensões de Morera;
$\psi_{(e)}$	Matriz de funções de interpolação de um campo escalar, no elemento $e$ ;
$\Psi_{(e)}$	Matriz de funções de interpolação de um campo vectorial, no elemento $e$ ;
$\Omega$	Domínio;
$\Omega_{(i)}$	Elemento finito $i$ ;
$\ \cdot\ _E$	Norma energética;
$\ \cdot\ _{E,(i)}$	Norma energética no elemento $i$ ;
$\ \cdot\ _I$	Norma associada aos invariantes do tensor;
$\ \cdot\ _{H^p}$	Norma de Sobolev de ordem $p$ ;
$\ \cdot\ _{L_p}$	Norma de Lebesgue de ordem $p$ .

# Índice

1. Introdução .....	1
1.1. Enquadramento .....	1
1.2. Objectivos .....	3
1.3. Organização .....	3
2. Conceitos básicos da teoria da elasticidade .....	7
2.1. Introdução .....	7
2.2. Condições de compatibilidade .....	8
2.3. Condições de equilíbrio .....	10
2.4. Condições de fronteira .....	13
2.5. Relações constitutivas .....	14
2.6. Equações de Navier .....	15
2.7. Equações de St Venant e de Beltrami-Michell .....	16
2.8. Princípios energéticos .....	17
2.8.1. Introdução .....	17
2.8.2. Princípio do Mínimo da Energia Potencial .....	17
2.8.3. Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar .....	18
3. Formulações de elementos finitos .....	21
3.1. Introdução .....	21
3.2. Elementos finitos compatíveis .....	22
3.2.1. Formulação clássica .....	22
3.2.2. Formulação utilizada .....	24
3.2.2.1. Introdução .....	24
3.2.2.2. Descrição da formulação .....	24
3.2.2.3. Definição das funções de aproximação e da geometria dos elementos .....	28
3.2.2.4. Características da solução .....	29
3.3. Elementos finitos de equilíbrio .....	30
3.3.1. Introdução .....	30
3.3.2. Formulação utilizada .....	31
3.3.2.1. Introdução .....	31
3.3.2.2. Descrição da formulação .....	31
3.3.2.3. Condensação do sistema algébrico .....	34
3.3.2.4. Definição das funções de aproximação e da geometria dos elementos .....	35

3.3.2.5. Características da solução.....	40
3.3.2.6. Eliminação dos modos espúrios .....	43
3.3.2.7. Exemplo ilustrativo.....	45
4. Erro nas soluções de elementos finitos .....	49
4.1. Introdução .....	49
4.2. Origens do erro nas soluções de elementos finitos.....	49
4.3. Medidas de erro .....	50
4.4. Erro de discretização em elementos finitos compatíveis.....	52
4.4.1. Propriedades do erro .....	52
4.4.2. Defeitos de equilíbrio .....	53
4.5. Erro de discretização em elementos finitos de equilíbrio .....	54
4.5.1. Propriedades do erro .....	54
4.5.2. Defeitos de compatibilidade.....	55
5. Método de refinamento.....	61
5.1. Introdução .....	61
5.2 Métodos de melhorar as soluções de elementos finitos.....	61
5.2.1. Introdução.....	61
5.2.2. Alteração da posição dos vértices .....	62
5.2.3. Remalhagem.....	62
5.2.4. Refinamento de malhas .....	63
5.2.4.1. Introdução.....	63
5.2.4.2. Refinamento h.....	63
5.2.4.2.1. Introdução .....	63
5.2.4.2.2. Malhas irregulares .....	64
5.2.4.2.3. Malhas regulares .....	65
5.2.4.3. Refinamento p.....	69
5.2.4.4. Refinamento hp.....	70
5.2.4.5. Refinamento hierárquico.....	70
5.3. Método utilizado .....	73
6. Convergência e estimativas de erro <i>a priori</i> .....	77
6.1. Introdução .....	77
6.2. Elementos finitos compatíveis.....	78
6.2.1. Versão h.....	78
6.2.2. Versão p.....	78
6.2.3. Versão hp.....	79
6.3. Elementos finitos de equilíbrio.....	81
6.3.1. Versão h.....	81
6.3.2. Versão p.....	83

7. Estimadores de erro <i>a posteriori</i> .....	85
7.1. Introdução .....	85
7.2. Extrapolação de Richardson .....	85
7.3. Análise dual global .....	86
7.4. Estimadores obtidos a partir de indicadores de erro elementares calculados <i>a posteriori</i> .....	87
7.5. Extrapolação dual.....	87
8. Indicadores de erro para elementos finitos compatíveis.....	91
8.1. Introdução .....	91
8.2. Resolução de um problema de Dirichlet local .....	92
8.3. Utilização implícita dos defeitos de equilíbrio.....	94
8.4. Utilização explícita dos defeitos de equilíbrio.....	95
8.5. Cálculo local duma solução equilibrada para a equação do erro.....	96
8.6. Construção de uma aproximação melhorada do campo de tensões.....	98
8.6.1. Introdução.....	98
8.6.2. Projecção ponderada.....	98
8.6.3. Distribuição de tensões consistente .....	99
8.6.4. Médias ponderadas nodais.....	100
8.6.5. Alisamento local e média nodal .....	101
8.6.6. <i>Superconvergent Patch Recovery</i> .....	101
8.7. Construção de uma aproximação melhorada do campo de deslocamentos .....	103
8.8. Erro de interpolação .....	105
8.9. Análise dual com cálculo local da solução equilibrada.....	105
9. Indicadores de erro para malhas de elementos finitos de equilíbrio.....	111
9.1. Introdução .....	111
9.2. Indicadores de erro obtidos da análise dual global .....	111
9.3. Construção de um campo de deslocamentos compatível.....	114
9.3.1. Introdução.....	114
9.3.2. Cálculo da solução compatível a partir dos deslocamentos elementares.....	115
9.3.3. Cálculo da solução compatível a partir dos deslocamentos dos lados .....	119
9.4. Resolução de um problema de Neumann local.....	119
9.5. Construção de um campo de tensões contínuo.....	120
9.6. Construção de um campo de deformações contínuo.....	121
9.7. Utilização explícita dos defeitos de compatibilidade .....	122

10. Indicadores de refinamento .....	129
10.1. Introdução .....	129
10.2. Análise de malhas com a mesma densidade geradas aleatoriamente.....	129
10.3. Variação da solução no domínio .....	130
10.4. Variação da solução entre refinamentos sucessivos .....	130
10.5. Defeitos de Equilíbrio .....	131
10.6. Densidade média do erro .....	131
10.7. Erro de interpolação .....	132
11. Custos, <i>feedback</i> e adaptatividade .....	133
11.1. Custos de obtenção da solução .....	133
11.2. Métodos com <i>feedback</i> e métodos adaptativos .....	134
12. Estratégia adaptativa .....	137
12.1. Introdução .....	137
12.2. Estratégias adaptativas .....	137
12.2.1. Introdução.....	137
12.2.2. Estratégias de alteração da posição dos vértices.....	138
12.2.3. Estratégias de remalhagem.....	139
12.2.4. Estratégias de refinamento.....	143
12.2.4.1. Estratégias de refinamento $h$ .....	143
12.2.4.1.1. Introdução.....	143
12.2.4.1.2. Refinamento dos elementos cuja diminuição de erro será maior .....	143
12.2.4.1.3. Refinamento dos elementos com indicadores superiores à média .....	144
12.2.4.1.4. Refinamento dos elementos com maiores indicadores.....	145
12.2.4.1.5. Obtenção de uma distribuição de diâmetros .....	145
12.2.4.2. Estratégias de refinamento $p$ .....	146
12.2.4.3. Estratégias de refinamento $hp$ .....	147
12.2.5. Carregamentos múltiplos.....	148
12.3. Estratégia utilizada .....	149
13. Exemplos de aplicação .....	155
13.1. Introdução .....	155
13.2. Análise dual de um sólido tridimensional .....	156
13.3. Relaxação das condições de continuidade .....	161
13.4. Refinamento adaptativo de uma malha dual bidimensional.....	164

13.5. Refinamento adaptativo de uma malha bidimensional de elementos finitos de equilíbrio.....	173
13.6. Comparação entre os tempos gastos em cada iteração.....	179
13.7. Comparação entre alternativas de refinamento .....	185
13.7.1. Introdução.....	185
13.7.2. Comparação entre o refinamento h-adaptativo de malhas de diferentes graus.....	186
13.7.3. Comparação entre estratégias de refinamento.....	188
14. Conclusões e desenvolvimentos futuros.....	191
14.1. Conclusões.....	191
14.2. Desenvolvimentos futuros .....	192
Referências.....	195
Anexo - Refinamento adaptativo de elementos finitos de outros tipos .....	213