



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE EQUILÍBRIO EM REFINAMENTO ADAPTATIVO

Orlando José Barreiros d'Almeida Pereira
(Mestre)

Tese para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil

Orientador: Doutor José Paulo Baptista Moitinho de Almeida

Júri:

Presidente: Reitor da Universidade Técnica de Lisboa

Vogais: Doutor Edward Anthony Ward Maunder

Doutor Carlos Alberto Mota Soares

Doutor José Manuel Mota Couto Marques

Doutor João Arménio Correia Martins

Doutor José Paulo Baptista Moitinho de Almeida

Doutor Eduardo Manuel Baptista Ribeiro Pereira

Julho de 1996

Resumo

Nesta tese, estuda-se a utilização de elementos finitos de equilíbrio na estimação de erro *a posteriori* e no refinamento h-adaptativo, em problemas estáticos de elasticidade linear.

Implementa-se uma estratégia de refinamento h-adaptativo baseada na análise dual de um modelo de elementos finitos de equilíbrio e de um modelo de elementos finitos compatíveis. Esta análise permite obter um majorante do erro e indicadores de erro elementares.

Propõem-se várias alternativas para a obtenção de estimadores e indicadores de erro, com base apenas numa solução de elementos finitos de equilíbrio.

De entre estas alternativas, é desenvolvida uma, baseada na utilização explícita dos defeitos de compatibilidade, para a qual se implementa também uma estratégia de refinamento h-adaptativo.

Os estimadores de erro e estratégias de refinamento implementados são utilizados na análise de alguns problemas de elasticidade plana. Os resultados obtidos são comparados, de modo a tirar algumas conclusões.

Abstract

This thesis studies the use of equilibrium finite elements in *a posteriori* error estimation and h-adaptive refinement, for static linear elastic problems.

An h-adaptive refinement strategy, based upon the dual analysis of an equilibrium finite element model and a compatible finite element model, is implemented. This analysis gives an upper bound for the error and element error indicators.

Several alternatives for obtaining error estimators and indicators, based only upon an equilibrium finite element solution, are proposed.

One of these alternatives, based upon the explicit use of the compatibility defaults, is developed and used in the implementation of an h-adaptive refinement strategy.

The implemented error estimators and refinement strategies are used in the analysis of some plane elasticity problems. The results obtained are compared, in order to reach some conclusions.

Palavras chave

Elasticidade linear

Método dos elementos finitos

Elementos de equilíbrio

Estimação de erro a posteriori

Análise dual

Refinamento adaptativo

Keywords

Linear elasticity

Finite element method

Equilibrium elements

A posteriori error estimation

Dual analysis

Adaptive refinement

Agradecimentos

Ao meu orientador científico, Prof. José Paulo Baptista Moitinho de Almeida, agradeço a sua amizade, os seus ensinamentos, incansável apoio e permanente disponibilidade.

Ao Dr. Marco Piteri, agradeço o ter disponibilizado, assim que os desenvolveu, os geradores de malhas bidimensionais e tridimensionais utilizados neste trabalho, o que permitiu que me concentrasse nos domínios da estimação do erro e do refinamento adaptativo.

A camaradagem, o interesse manifestado pelo meu trabalho e as sugestões apresentadas pelos meus colegas do IST são também objecto da minha gratidão. Devo referir, em especial, os Profs. Teixeira de Freitas, Pedro Parreira, Eduardo Pereira e Vitor Leitão e o Eng. Luís Castro.

Por fim, quero agradecer à minha família pelo apoio e incentivo que sempre me manifestaram ao longo da minha carreira académica.

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito das actividades de investigação do grupo de Análise de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil do IST e do Instituto da Construção (IC/IST). Foi parcialmente subsidiado pelos programas PRAXIS XXI e AFEST, através dos projectos PRAXIS/2/2.1/CEG/33/94 e CHRX-CT93-0390, respectivamente.

Notação

$C_{(j),(i)}$	Matriz de compatibilidade associada ao lado j e ao elemento i ;
D	Dimensão espacial do problema;
d	Operador diferencial de compatibilidade;
d^*	Operador diferencial de equilíbrio;
$D_{(j),(i)}$	Matriz de equilíbrio associada ao lado j e ao elemento i ;
$e_{\sigma,ij}$	Componente do erro do campo de tensões;
E	Módulo de elasticidade do material;
e_c	Vector do erro do campo de deslocamentos numa solução compatível;
e_e	Vector do erro do campo de tensões numa solução equilibrada;
e_σ	Vector do erro do campo de tensões;
$\tilde{e}_{(i)}$	Vector da aproximação do erro do campo de deslocamentos no elemento i ;
$\hat{e}_{\sigma,(i)}$	Vector das deformações generalizadas do elemento i devidas a $\sigma_{0,(i)}$;
$\hat{e}_{\theta,(i)}$	Vector das deformações térmicas generalizadas do elemento i ;
f	Vector das forças de massa;
$\hat{f}_{(i)}$	Vector das forças de massa generalizadas do elemento i ;
$F_{(e)}$	Vector das forças nodais equivalentes do elemento e ;
f	Matriz de flexibilidade infinitesimal;
$F_{(i)}$	Matriz de flexibilidade do elemento i ;
$g_{(j)}$	Vector do fluxo de tensão no lado j ;
$\hat{g}_{(j)}$	Vector dos parâmetros de fluxo de tensão no lado j ;
G_c	Vector do defeito na tensão na fronteira estática, numa solução compatível;
$G_{(j)}$	Matriz de funções de aproximação do fluxo de tensão no lado j ;
$G1_e$	Matriz do defeito nas extensões na fronteira cinemática, numa solução equilibrada;
$G2_e$	Matriz do defeito nas curvaturas na fronteira cinemática, numa solução equilibrada;
$h_{(i)}$	Diâmetro do elemento i ;
I	Matriz identidade;
$J_{c,(i)}$	Vector do salto na tensão no lado j , numa solução compatível;
$J1_{e,(j)}$	Matriz do salto nas extensões no lado j , numa solução equilibrada;
$J2_{e,(j)}$	Matriz do salto nas curvaturas no lado j , numa solução equilibrada;
k	Matriz de rigidez infinitesimal;
$K_{(i)}$	Matriz de rigidez do elemento i ;
M	Número total de elementos finitos da malha seguinte;

$M_{(j),(i)}$	Matriz de rotação para o lado j e elemento i ;
n_i	Componente do versor da normal a uma superfície;
N	Número total de graus de liberdade da malha;
$N_{(j),(i)}$	Matriz da normal ao lado j , exterior ao elemento i ;
\mathbf{N}	Matriz da normal exterior à fronteira;
NE	Número total de elementos finitos da malha;
p	Grau das funções de aproximação nos elementos;
$q_{(i)}$	Taxa de convergência num elemento;
\mathbf{r}_c	Vector do resíduo, na equação de equilíbrio, duma solução compatível;
$\mathbf{r}_{(j)}$	Vector dos deslocamentos relativos no lado j ;
$\bar{\mathbf{r}}_{(j)}$	Vector dos deslocamentos relativos impostos no lado j ;
$\hat{\mathbf{r}}_{(j)}$	Vector dos deslocamentos relativos generalizados impostos no lado j ;
\mathbf{r}_e	Tensor do resíduo, na equação de compatibilidade, duma solução equilibrada;
$RL_{(i)}$	Nível de refinamento do elemento i ;
$\hat{\mathbf{s}}_{(i)}$	Vector dos parâmetros de tensões no elemento i ;
$\hat{\mathbf{s}}_{\theta,(i)}$	Vector das tensões térmicas generalizadas no elemento i ;
$\mathbf{S}_{(i)}$	Matriz de funções de aproximação de tensões no elemento i ;
\mathbf{t}_Γ	Vector da tensão imposta na fronteira estática;
$\bar{\mathbf{t}}_{(j)}$	Vector da tensão aplicada no lado j ;
$\hat{\mathbf{t}}_{(j)}$	Vector da tensão aplicada generalizada no lado j ;
$\hat{\mathbf{t}}_{(j),(i)}$	Vector da tensão generalizada aplicada no lado j do elemento i ;
$\hat{\mathbf{t}}_{0,(j),(i)}$	Vector da tensão generalizada aplicadas no lado j devida a $\sigma_{0,(i)}$;
u_i	Componente do vector dos deslocamentos;
\tilde{u}_i	Aproximação melhorada duma componente de deslocamento;
U	Energia de deformação;
U^*	Energia complementar de deformação;
\mathbf{u}	Vector dos deslocamentos da solução exacta;
\mathbf{u}_c	Vector dos deslocamentos duma solução compatível;
\mathbf{u}_e	Vector dos deslocamentos duma solução equilibrada;
\mathbf{u}_Γ	Vector dos deslocamentos impostos na fronteira cinemática;
$\mathbf{u}_{(i)}$	Vector dos deslocamentos no elemento i ;
$\hat{\mathbf{u}}_{(i)}$	Vector dos parâmetros de deslocamento do elemento i ;
$\tilde{\mathbf{u}}$	Vector duma aproximação melhorada dos deslocamentos;

$\hat{\mathbf{u}}_i$	Vector dos valores nodais duma aproximação melhorada duma componente de deslocamento;
$\mathbf{U}_{(i)}$	Matriz de funções de aproximação dos deslocamentos no elemento i;
$V_{(i)}$	Volume do elemento i;
$\mathbf{v}_{(j)}$	Vector dos deslocamentos no lado j;
$\hat{\mathbf{v}}_{(j)}$	Vector dos parâmetros de deslocamento no lado j;
$\bar{\mathbf{v}}_{(j)}$	Vector dos deslocamentos impostos no lado j;
$\hat{\mathbf{v}}_{(i),(j)}$	Vector dos deslocamentos generalizados impostos no lado j do elemento i;
$\mathbf{V}_{(j)}$	Matriz de funções de aproximação dos deslocamentos no lado j;
W	Trabalho das forças aplicadas;
W^*	Trabalho dos deslocamentos impostos;
\mathbf{x}	Vector das coordenadas de pontos;
γ_{ij}	Componente de distorção;
Γ	Fronteira do domínio;
Γ_t	Fronteira estática;
Γ_u	Fronteira cinemática;
$\Gamma_{(j)}$	Lado j;
$\partial\Omega_{(i)}$	Fronteira do elemento i;
ε	Estimador do erro global;
$\varepsilon_{(i)}$	Estimador do erro no elemento i;
ε_{ij}	Componente do tensor das deformações;
$\bar{\varepsilon}$	Erro global pretendido;
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vector das deformações;
$\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$	Vector das deformações térmicas generalizadas;
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor das deformações;
η	Erro relativo global;
η_h	Estimador do erro relativo global;
$\bar{\eta}$	Erro relativo global pretendido;
θ	Índice de eficácia do estimador do erro;
λ	taxa de convergência da norma energética devida a singularidades;
ν	Coeficiente de Poisson do material;
π_C	Energia potencial complementar;
π_P	Energia potencial total;
σ_{ij}	Componente do tensor das tensões;
$\tilde{\sigma}_{ij}$	Aproximação melhorada duma componente do tensor das tensões;
$\boldsymbol{\sigma}$	Vector das tensões;
$\boldsymbol{\sigma}_e$	Vector das tensões duma solução equilibrada;

$\sigma_{0,(i)}$	Solução particular no elemento i ;
$\tilde{\sigma}$	Vector duma aproximação melhorada das tensões;
$\hat{\sigma}_{ij}$	Vector dos valores nodais duma aproximação melhorada duma componente do tensor das tensões;
σ	Tensor das tensões;
$\varphi_{(j)}$	Tensão no lado j ;
Φ	Função geradora de tensões de Airy;
Φ_i	Função geradora de tensões de Maxwell;
$\phi, \tilde{\phi}$	Matriz de funções de interpolação de um campo escalar, na malha;
Φ	Matriz de funções de interpolação de um campo vectorial, na malha;
$\chi_{(i)}$	Factor de redução do diâmetro do elemento i ;
Ψ_i	Função geradora de tensões de Morera;
$\psi_{(e)}$	Matriz de funções de interpolação de um campo escalar, no elemento e ;
$\Psi_{(e)}$	Matriz de funções de interpolação de um campo vectorial, no elemento e ;
Ω	Domínio;
$\Omega_{(i)}$	Elemento finito i ;
$\ \cdot\ _E$	Norma energética;
$\ \cdot\ _{E,(i)}$	Norma energética no elemento i ;
$\ \cdot\ _I$	Norma associada aos invariantes do tensor;
$\ \cdot\ _{H^p}$	Norma de Sobolev de ordem p ;
$\ \cdot\ _{L_p}$	Norma de Lebesgue de ordem p .

Índice

1. Introdução	1
1.1. Enquadramento	1
1.2. Objectivos	3
1.3. Organização	3
2. Conceitos básicos da teoria da elasticidade	7
2.1. Introdução	7
2.2. Condições de compatibilidade	8
2.3. Condições de equilíbrio	10
2.4. Condições de fronteira	13
2.5. Relações constitutivas	14
2.6. Equações de Navier	15
2.7. Equações de St Venant e de Beltrami-Michell	16
2.8. Princípios energéticos	17
2.8.1. Introdução	17
2.8.2. Princípio do Mínimo da Energia Potencial	17
2.8.3. Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar	18
3. Formulações de elementos finitos	21
3.1. Introdução	21
3.2. Elementos finitos compatíveis	22
3.2.1. Formulação clássica	22
3.2.2. Formulação utilizada	24
3.2.2.1. Introdução	24
3.2.2.2. Descrição da formulação	24
3.2.2.3. Definição das funções de aproximação e da geometria dos elementos	28
3.2.2.4. Características da solução	29
3.3. Elementos finitos de equilíbrio	30
3.3.1. Introdução	30
3.3.2. Formulação utilizada	31
3.3.2.1. Introdução	31
3.3.2.2. Descrição da formulação	31
3.3.2.3. Condensação do sistema algébrico	34
3.3.2.4. Definição das funções de aproximação e da geometria dos elementos	35

3.3.2.5. Características da solução.....	40
3.3.2.6. Eliminação dos modos espúrios	43
3.3.2.7. Exemplo ilustrativo.....	45
4. Erro nas soluções de elementos finitos	49
4.1. Introdução	49
4.2. Origens do erro nas soluções de elementos finitos.....	49
4.3. Medidas de erro	50
4.4. Erro de discretização em elementos finitos compatíveis.....	52
4.4.1. Propriedades do erro	52
4.4.2. Defeitos de equilíbrio	53
4.5. Erro de discretização em elementos finitos de equilíbrio	54
4.5.1. Propriedades do erro	54
4.5.2. Defeitos de compatibilidade.....	55
5. Método de refinamento.....	61
5.1. Introdução	61
5.2 Métodos de melhorar as soluções de elementos finitos.....	61
5.2.1. Introdução.....	61
5.2.2. Alteração da posição dos vértices	62
5.2.3. Remalhagem.....	62
5.2.4. Refinamento de malhas	63
5.2.4.1. Introdução.....	63
5.2.4.2. Refinamento h	63
5.2.4.2.1. Introdução	63
5.2.4.2.2. Malhas irregulares	64
5.2.4.2.3. Malhas regulares	65
5.2.4.3. Refinamento p	69
5.2.4.4. Refinamento hp	70
5.2.4.5. Refinamento hierárquico.....	70
5.3. Método utilizado	73
6. Convergência e estimativas de erro <i>a priori</i>	77
6.1. Introdução	77
6.2. Elementos finitos compatíveis.....	78
6.2.1. Versão h	78
6.2.2. Versão p	78
6.2.3. Versão hp	79
6.3. Elementos finitos de equilíbrio.....	81
6.3.1. Versão h	81
6.3.2. Versão p	83

7. Estimadores de erro <i>a posteriori</i>	85
7.1. Introdução	85
7.2. Extrapolação de Richardson	85
7.3. Análise dual global	86
7.4. Estimadores obtidos a partir de indicadores de erro elementares calculados <i>a posteriori</i>	87
7.5. Extrapolação dual.....	87
8. Indicadores de erro para elementos finitos compatíveis.....	91
8.1. Introdução	91
8.2. Resolução de um problema de Dirichlet local	92
8.3. Utilização implícita dos defeitos de equilíbrio.....	94
8.4. Utilização explícita dos defeitos de equilíbrio.....	95
8.5. Cálculo local duma solução equilibrada para a equação do erro.....	96
8.6. Construção de uma aproximação melhorada do campo de tensões.....	98
8.6.1. Introdução.....	98
8.6.2. Projecção ponderada.....	98
8.6.3. Distribuição de tensões consistente	99
8.6.4. Médias ponderadas nodais.....	100
8.6.5. Alisamento local e média nodal	101
8.6.6. <i>Superconvergent Patch Recovery</i>	101
8.7. Construção de uma aproximação melhorada do campo de deslocamentos	103
8.8. Erro de interpolação	105
8.9. Análise dual com cálculo local da solução equilibrada.....	105
9. Indicadores de erro para malhas de elementos finitos de equilíbrio.....	111
9.1. Introdução	111
9.2. Indicadores de erro obtidos da análise dual global	111
9.3. Construção de um campo de deslocamentos compatível.....	114
9.3.1. Introdução.....	114
9.3.2. Cálculo da solução compatível a partir dos deslocamentos elementares.....	115
9.3.3. Cálculo da solução compatível a partir dos deslocamentos dos lados	119
9.4. Resolução de um problema de Neumann local.....	119
9.5. Construção de um campo de tensões contínuo.....	120
9.6. Construção de um campo de deformações contínuo.....	121
9.7. Utilização explícita dos defeitos de compatibilidade	122

10. Indicadores de refinamento	129
10.1. Introdução	129
10.2. Análise de malhas com a mesma densidade geradas aleatoriamente.....	129
10.3. Variação da solução no domínio	130
10.4. Variação da solução entre refinamentos sucessivos	130
10.5. Defeitos de Equilíbrio	131
10.6. Densidade média do erro	131
10.7. Erro de interpolação	132
11. Custos, <i>feedback</i> e adaptatividade	133
11.1. Custos de obtenção da solução	133
11.2. Métodos com <i>feedback</i> e métodos adaptativos	134
12. Estratégia adaptativa	137
12.1. Introdução	137
12.2. Estratégias adaptativas	137
12.2.1. Introdução.....	137
12.2.2. Estratégias de alteração da posição dos vértices.....	138
12.2.3. Estratégias de remalhagem.....	139
12.2.4. Estratégias de refinamento.....	143
12.2.4.1. Estratégias de refinamento h	143
12.2.4.1.1. Introdução.....	143
12.2.4.1.2. Refinamento dos elementos cuja diminuição de erro será maior	143
12.2.4.1.3. Refinamento dos elementos com indicadores superiores à média	144
12.2.4.1.4. Refinamento dos elementos com maiores indicadores.....	145
12.2.4.1.5. Obtenção de uma distribuição de diâmetros	145
12.2.4.2. Estratégias de refinamento p	146
12.2.4.3. Estratégias de refinamento hp	147
12.2.5. Carregamentos múltiplos.....	148
12.3. Estratégia utilizada	149
13. Exemplos de aplicação	155
13.1. Introdução	155
13.2. Análise dual de um sólido tridimensional	156
13.3. Relaxação das condições de continuidade	161
13.4. Refinamento adaptativo de uma malha dual bidimensional.....	164

13.5. Refinamento adaptativo de uma malha bidimensional de elementos finitos de equilíbrio.....	173
13.6. Comparação entre os tempos gastos em cada iteração.....	179
13.7. Comparação entre alternativas de refinamento	185
13.7.1. Introdução.....	185
13.7.2. Comparação entre o refinamento h-adaptativo de malhas de diferentes graus.....	186
13.7.3. Comparação entre estratégias de refinamento.....	188
14. Conclusões e desenvolvimentos futuros.....	191
14.1. Conclusões.....	191
14.2. Desenvolvimentos futuros	192
Referências.....	195
Anexo - Refinamento adaptativo de elementos finitos de outros tipos	213

1. Introdução

1.1. Enquadramento

Na análise estrutural, o modelo de comportamento mais simples é o elástico linear. Infelizmente, as estruturas reais têm um comportamento tanto mais afastado do elástico linear quanto mais perto estiverem da rotura. Apesar disto, a análise elástica linear é correntemente utilizada em engenharia civil, pois permite, geralmente, obter resultados satisfatórios para o dimensionamento e a verificação da segurança.

Em geral, não é possível obter uma solução analítica exacta para os problemas de elasticidade bidimensional ou tridimensional. Por isso, é necessário dispor de métodos que permitam obter soluções aproximadas para estes problemas. O método dos elementos finitos é correntemente utilizado para este fim.

Para a solução obtida pelo método dos elementos finitos ser útil, num problema de engenharia, o erro que lhe está associado deve ser inferior a uma tolerância pré-definida. As estimativas de erro *a priori* apenas permitem calcular a taxa de convergência assintótica, não permitindo gerar malhas que garantam um erro inferior à tolerância pretendida. Por isso, o erro tem de ser estimado *a posteriori*, utilizando a própria solução aproximada para obter um estimador de erro. Deste modo, só é possível obter uma solução com um erro inferior a uma dada tolerância recorrendo a um método com *feedback*, isto é, melhorando a malha de elementos finitos e estimando o erro, sucessivamente, até este atingir o valor pretendido.

Devido a limitações dos meios de cálculo, não é muitas vezes possível obter a precisão pretendida através de um refinamento uniforme da malha de elementos finitos. Mesmo que tal seja possível, não é económico. Consequentemente, o refinamento deve adaptar-se à solução do problema, a partir de indicadores de erro elementares. Desta forma, utilizando um método adaptativo, obtém-se a precisão requerida com o mínimo custo.

Dado o crescente custo relativo do trabalho humano e a necessidade de recorrer a engenheiros com uma preparação em elementos finitos nem sempre adequada, é cada vez mais importante dispor de programas com uma análise de erro *a posteriori* fiável e, de preferência, auto-adaptativos.

O erro das soluções obtidas utilizando o método dos elementos finitos está associado a diversas causas. Na resolução de problemas estáticos de elasticidade linear bidimensional ou tridimensional, o erro mais importante é aquele que está associado à discretização das funções a aproximar. Por isso, a investigação tem sido orientada para a obtenção de estimativas do erro de discretização.

Este erro pode ser medido de diversas formas. Sendo o método dos elementos finitos baseado na obtenção de uma aproximação global da energia, a forma mais coerente de o medir é através da norma energética global. Por isso, a investigação tem procurado obter estimativas da norma energética global do erro, designadas por estimadores de erro. Estes estimadores de erro são geralmente calculados a partir das contribuições de cada elemento, designadas por indicadores de erro. Estes indicadores de erro são também utilizados, como indicadores de refinamento, para orientar o refinamento adaptativo.

A utilização e a investigação nos domínios do método dos elementos finitos, da estimação de erro e do refinamento adaptativo têm sido orientadas quase exclusivamente para os elementos finitos compatíveis. Em [NOOR e BABUSKA, 1987], [STROUBOULIS e HAQUE, 1992] e [BABUSKA *et al*, 1994b] podem encontrar-se retrospectivas do estado da arte na estimação do erro e/ou refinamento adaptativo em elementos finitos. Em [MACKERLE, 1994] pode-se encontrar uma lista de 312 referências sobre estimação do erro e/ou refinamento adaptativo em elementos finitos, das quais 290 correspondem a teses e artigos publicados em 1992 e 1993.

Nos problemas de dimensionamento e verificação de segurança aos estados limites últimos, é mais útil ter uma solução que garanta o equilíbrio do carregamento do que ter uma solução que garanta uma deformada compatível. Esta solução equilibrada pode ser obtida utilizando elementos finitos de equilíbrio. Além disso, a partir da análise dual de um modelo de elementos finitos de equilíbrio e de um modelo de elementos finitos compatíveis, é possível obter um majorante do erro e indicadores de erro elementares. Apesar disto, devido à pouca divulgação dos elementos finitos de equilíbrio, nem o refinamento adaptativo de malhas duais nem a estimação de erro e o refinamento adaptativo de malhas de elementos finitos de equilíbrio têm recebido atenção dos investigadores. Quanto ao refinamento adaptativo de malhas duais, a única aplicação conhecida do autor foi feita a problemas escalares bidimensionais [ODEN *et al*, 1989]. Tanto quanto é do

conhecimento do autor, não foi publicado nenhum trabalho sobre estimação de erro *a posteriori* e refinamento adaptativo baseados apenas em formulações de elementos finitos de equilíbrio.

1.2. Objectivos

O objectivo desta tese é estudar a utilização de elementos finitos de equilíbrio na estimação de erro *a posteriori* e no refinamento h-adaptativo, em problemas estáticos de elasticidade linear.

Neste contexto, pretende-se implementar uma estratégia de refinamento h-adaptativo baseada na análise dual de um modelo de elementos finitos de equilíbrio e de um modelo de elementos finitos compatíveis. Esta análise permite obter um majorante do erro e indicadores de erro elementares.

Nesta tese, propõem-se também vários métodos que permitem efectuar a estimação do erro e obter indicadores de erro, com base apenas numa solução de elementos finitos de equilíbrio. De entre estes métodos, será desenvolvido aquele que utiliza explicitamente os defeitos de compatibilidade. Nomeadamente, pretende-se estudar a possibilidade de recorrer a malhas duais para determinar os valores de alguns coeficientes que fazem parte da expressão do indicador de erro.

Para estes indicadores de erro, pretende-se igualmente implementar uma estratégia de refinamento h-adaptativo adequada.

Pretende-se desenvolver programas para investigação e não para utilização corrente. Por esta razão, pretende-se privilegiar a flexibilidade, na definição da geometria dos elementos e na escolha das funções de aproximação, por exemplo, em detrimento da eficiência computacional na formação e resolução dos sistemas algébricos.

1.3. Organização

No capítulo 2, caracteriza-se o problema em análise. Definem-se as variáveis envolvidas e as relações entre elas. Introduce-se parte da notação utilizada nos capítulos seguintes.

No capítulo 3, descrevem-se e caracterizam-se as formulações de elementos finitos utilizadas. Embora parte da secção relativa a elementos finitos de equilíbrio corresponda a trabalho desenvolvido na dissertação de mestrado do autor [PEREIRA, 1993], apresentam-se diversos desenvolvimentos posteriores.

O capítulo 4 aborda a existência de erro nas soluções de elementos finitos compatíveis e equilibradas. Resumem-se as propriedades do erro dos elementos finitos compatíveis e dos elementos finitos de equilíbrio. Estudam-se os defeitos de compatibilidade nas soluções de elementos finitos de equilíbrio. Parte significativa deste estudo constitui trabalho original. Estes defeitos de compatibilidade são utilizados para calcular alguns dos indicadores de erro para elementos finitos de equilíbrio sugeridos no capítulo 9, nomeadamente aquele adoptado nesta tese.

No capítulo 5, após uma panorâmica dos vários métodos de melhorar as soluções de elementos finitos já publicados, descreve-se o método utilizado nesta tese.

No capítulo 6, descreve-se como varia a taxa de convergência dos elementos finitos, para os vários métodos de refinamento.

No capítulo 7, descrevem-se alguns métodos de obter estimadores da norma energética global do erro, calculados com base na solução de elementos finitos. Este capítulo é relativamente curto, pois a maior parte dos estimadores de erro são calculados com base em indicadores de erro elementares e estes são descritos nos capítulos 8 e 9. Um dos métodos descritos neste capítulo, baseado numa extrapolação simultânea de dois conjuntos duais de soluções, tanto quanto é do conhecimento do autor, é original.

O capítulo 8 constitui uma retrospectiva dos métodos para obter indicadores da norma energética de erro em cada elemento, com base numa solução de elementos finitos compatíveis.

A principal contribuição original da presente tese encontra-se no capítulo 9, relativo a indicadores de erro para malhas de elementos finitos de equilíbrio. Descreve-se a obtenção de indicadores de erro elementares a partir da análise dual global. Em seguida, sugerem-se vários métodos para obter indicadores de erro, com base apenas numa solução de elementos finitos de equilíbrio, e descreve-se o indicador adoptado.

O capítulo 10 constitui uma retrospectiva dos indicadores de refinamento que não são indicadores de erro.

No capítulo 11, indicam-se as várias parcelas do custo total da obtenção de uma solução de elementos finitos e discute-se o conceito de adaptatividade.

No capítulo 12, abordam-se os procedimentos que, com base nos indicadores de erro, ou nos indicadores de refinamento, associados a uma malha e num método de refinamento, fornecem a malha seguinte. Após uma revisão das estratégias adaptativas já conhecidas, descreve-se a estratégia utilizada, na qual os métodos para detectar as singularidades, com base nas soluções de elementos finitos, são, tanto quanto é do conhecimento do autor, originais.

No capítulo 13, são apresentados e discutidos alguns exemplos de aplicação dos estimadores de erro e estratégias de refinamento desenvolvidos nesta tese. Exemplifica-se o que sucede quando se relaxam as condições de continuidade nos lados dos elementos. Comparam-se os resultados obtidos utilizando diferentes graus dos elementos finitos; compara-se, também, a estratégia de refinamento de malhas duais com a estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio.

No último capítulo, o capítulo 14, fazem-se alguns comentários finais e sugerem-se possíveis desenvolvimentos do trabalho apresentado.

Em anexo, faz-se uma breve referência ao trabalho já publicado sobre refinamento adaptativo de elementos finitos baseados em formulações que não fornecem soluções equilibradas nem compatíveis.

Nos vários exemplos apresentados, os resultados obtidos através de elementos finitos nunca são comparados com resultados obtidos a partir de um modelo físico. O comportamento é arbitrado como sendo fisicamente e geometricamente linear. Por estas razões, não se indicou nenhum sistema de unidades. Contudo, pode-se admitir que os comprimentos estão expressos em metro e as tensões em quilopascal.

2. Conceitos básicos da teoria da elasticidade

2.1. Introdução

Considere-se um domínio Ω , delimitado por uma fronteira Γ e referido a um sistema de eixos cartesiano. Seja Γ_t a parte da fronteira onde é imposta a tensão e Γ_u a parte complementar, onde são impostos os deslocamentos.

Considera-se, ao longo deste trabalho, que o material é isotrópico, que as acções são estáticas e que são válidas as hipóteses da linearidade física e da linearidade geométrica.

A hipótese da linearidade física consiste em assumir para o material um comportamento elástico linear, ou seja, uma relação linear entre tensões e deformações.

Na hipótese da linearidade geométrica, admite-se que as deformações e os deslocamentos são muito pequenos, face à menor dimensão do corpo. Nestas condições, a configuração deformada confunde-se com a configuração inicial.

O problema fundamental da elasticidade consiste em determinar os campos de deslocamentos, de deformações e de tensões em Ω , conhecidas as forças de massa, os deslocamentos na fronteira cinemática Γ_u e a tensão na fronteira estática Γ_t .

Neste capítulo, são definidas as variáveis que surgem na formulação deste problema - deslocamentos, deformações, tensões e forças de massa - e as condições que as relacionam - compatibilidade, equilíbrio e elasticidade. São ainda apresentados os teoremas energéticos que permitem estabelecer a forma como as soluções aproximadas convergem para a solução exacta.

2.2 Condições de compatibilidade

O deslocamento de cada ponto de Ω pode ser representado por um vector, \mathbf{u} . As componentes deste vector representam as projecções do deslocamento segundo as direcções do sistema de eixos cartesiano. Em 3D,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

e, em 2D,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

O estado de deformação em cada ponto é caracterizado por um tensor simétrico de segunda ordem, $\boldsymbol{\varepsilon}$. Em 3D,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

e, em 2D,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Por comodidade, define-se $\gamma_{ij} = 2 \varepsilon_{ij}$ e utiliza-se, em 3D, o vector

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

e, em 2D, o vector

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

As relações entre as deformações e os deslocamentos podem ser escritas matricialmente na forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} \mathbf{u}, \quad (2.7)$$

onde \mathbf{d} é o operador diferencial de compatibilidade, definido, em 3D, por

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e, em 2D, por

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

2.3. Condições de equilíbrio

O campo de forças de massa existente no domínio pode ser representado por um vector, \mathbf{f} . Em 3D,

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

e, em 2D,

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

O estado de tensão em cada ponto pode ser caracterizado por um tensor de segunda ordem, σ . A componente σ_{ij} do tensor das tensões representa a componente, segundo a direcção j , da tensão numa faceta perpendicular à direcção i . Em 3D,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

e, em 2D,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Como foi admitida a hipótese da linearidade geométrica, as equações de equilíbrio são estabelecidas na configuração indeformada da estrutura.

Das equações de equilíbrio de momentos de um elemento infinitesimal, conclui-se que o tensor das tensões é simétrico.

Assim, por comodidade, utiliza-se, em 3D, o vector das tensões

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

e, em 2D, o vector das tensões

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Deste modo, as equações de equilíbrio de forças de um elemento infinitesimal no interior de Ω podem ser escritas matricialmente na forma

$$\mathbf{d}^* \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

onde \mathbf{d}^* é o operador diferencial de equilíbrio, adjunto de \mathbf{d} . Em 3D,

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e, em 2D,

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Na ausência de forças de massa, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, as equações de equilíbrio (2.16) são automaticamente satisfeitas se as tensões forem obtidas a partir das funções geradoras de tensões, do modo descrito, por exemplo, em [LOVE, 1927].

Em 2D, as tensões são obtidas a partir da função geradora de tensões de AIRY [1863]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \Phi(x, y). \quad (2.19)$$

Em 3D, as tensões podem ser obtidas a partir das funções geradoras de tensões de MAXWELL [1868]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{bmatrix} \Phi_1(x, y, z), \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 0 \end{bmatrix} \Phi_2(x, y, z), \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Phi_3(x, y, z) \quad (2.20)$$

ou das funções geradoras de tensões de MORERA [1892]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x^2} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x \partial y} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x \partial z} \end{bmatrix} \Psi_1(x, y, z), \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 0 \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x \partial y} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial y \partial z} \end{bmatrix} \Psi_2(x, y, z), \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x \partial z} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial z^2} \end{bmatrix} \Psi_3(x, y, z). \quad (2.21)$$

2.4. Condições de fronteira

A fronteira Γ do domínio Ω considera-se dividida em duas partes. Na fronteira cinemática, Γ_u , impõem-se os valores dos deslocamentos,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma. \quad (2.22)$$

Na fronteira estática, Γ_t , impõe-se a tensão,

$$\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_\Gamma. \quad (2.23)$$

\mathbf{N} é uma matriz onde se reúnem as componentes do versor da normal exterior à fronteira Γ_t associadas ao operador \mathbf{d}^* . Em 3D,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

e, em 2D:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

2.5. Relações constitutivas

As relações constitutivas estabelecem a lei que relaciona os campos de tensões e de deformações. Podem ser apresentadas em termos de flexibilidade ou em termos de rigidez.

Em termos de flexibilidade,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta. \quad (2.26)$$

Nesta definição, $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ denota as deformações térmicas generalizadas. A matriz \mathbf{f} , para um material isotrópico com módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν , é dada por:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

em 3D;

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

em estados planos de tensão e

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) & 0 \\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

em estados planos de deformação.

Em termos de rigidez,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta. \quad (2.30)$$

Nesta definição, \mathbf{k} é uma matriz simétrica, positiva definida e designada por matriz de rigidez. A matriz de rigidez é inversa da matriz de flexibilidade, ou seja:

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

em 3D;

$$\mathbf{k} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

em estados planos de tensão e

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

em estados planos de deformação.

2.6. Equações de Navier

Com base em (2.7) e (2.30), é possível escrever as equações de equilíbrio (2.16) em termos dos deslocamentos, obtendo as equações de Navier,

$$\mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u} - \mathbf{d}^* \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.34)$$

A partir de (2.7), (2.30) e (2.23), é também possível escrever as condições de fronteira estáticas em termos dos deslocamentos,

$$\mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u} - \mathbf{N} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta = \mathbf{t}_r. \quad (2.35)$$

Este processo de eliminação permite reduzir o número de incógnitas e de equações do problema.

2.7. Equações de St Venant e de Beltrami-Michell

É também possível formular o problema em termos de tensões, recorrendo às equações de St Venant.

As extensões obtidas a partir de um campo de deslocamentos cuja terceira derivada é contínua obedecem necessariamente às equações de compatibilidade de St Venant. Para um domínio simplesmente conexo, estas condições são também suficientes para ser possível obter um campo de deslocamentos contínuo, por integração de um campo de extensões cuja segunda derivada é contínua.

Em 3D, existem 81 equações:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (2.36)$$

Contudo, estas equações ou são nulas ou são iguais a uma das seis seguintes:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} = 0; \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} = 0; \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} = 0; \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0; \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = 0; \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0. \quad (2.42)$$

Em 2D, a equação de compatibilidade é

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.43)$$

Utilizando as relações constitutivas (2.26), é possível escrever as equações de compatibilidade em termos de tensões, obtendo as equações de Beltrami-Michell. É também possível escrever as condições de fronteira cinemáticas em termos de tensões. Este processo de eliminação permite reduzir o número de incógnitas e de equações do problema.

2.8. Princípios energéticos

2.8.1. Introdução

Os princípios energéticos desempenham um papel importante na formulação e resolução de problemas na área da Mecânica dos Sólidos. São particularmente importantes na definição das condições de existência e unicidade das soluções e na determinação da forma como as soluções aproximadas convergem para a solução exacta.

Os princípios energéticos que de seguida se enunciam são aqueles que assumem uma maior importância no contexto deste trabalho. Diversas generalizações destes princípios podem ser encontradas no texto de WASHIZU [1975].

2.8.2. Princípio do Mínimo da Energia Potencial

O Princípio do Mínimo da Energia Potencial estabelece que, de entre todos os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis, aquele que corresponde à solução exacta minimiza a energia potencial total do sistema,

$$\pi_p = U - W. \quad (2.44)$$

Nesta expressão, U é a energia de deformação,

$$U = \int_{\Omega} \int_0^{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^T d\varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T (\varepsilon - \varepsilon_{\theta}) d\Omega, \quad (2.45)$$

e W é o trabalho desenvolvido pelas forças aplicadas,

$$W = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_t^T \mathbf{u} d\Gamma. \quad (2.46)$$

Uma solução é cinematicamente admissível, ou compatível, quando satisfaz localmente as equações de compatibilidade (2.7) e verifica as condições de fronteira cinemáticas (2.22).

O mínimo da energia potencial é obtido para um campo cinematicamente admissível \mathbf{u} tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{u})(\varepsilon(\mathbf{u}_v) - \varepsilon_{\theta}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u}_v d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_t^T \mathbf{u}_v d\Gamma, \quad (2.47)$$

para todos os deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis \mathbf{u}_v . Esta expressão corresponde ao Princípio dos Trabalhos Virtuais.

2.8.3. Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar

O Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar estabelece que, de entre todos os campos de tensões estaticamente admissíveis, aquele que corresponde à solução exacta minimiza a energia potencial complementar do sistema,

$$\pi_c = U^* - W^*. \quad (2.48)$$

Nesta expressão, U^* é a energia complementar de deformação,

$$U^* = \int_{\Omega} \int_0^{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\sigma} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}) d\Omega, \quad (2.49)$$

e W^* é o trabalho associado aos deslocamentos impostos,

$$W^* = \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}^T \mathbf{u}_{\Gamma} d\Gamma. \quad (2.50)$$

Uma solução é estaticamente admissível, ou equilibrada, quando satisfaz localmente as equações de equilíbrio (2.16) e verifica as condições de fronteira estáticas (2.23).

Para qualquer solução,

$$\pi_p + \pi_c = 0. \quad (2.51)$$

Portanto, para qualquer campo de deslocamentos compatível, \mathbf{u}_c , e qualquer campo de tensões equilibrado, $\boldsymbol{\sigma}_e$,

$$- \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e) \leq - \pi_c(\mathbf{u}) = \pi_p(\mathbf{u}) \leq \pi_p(\mathbf{u}_c). \quad (2.52)$$

3. Formulações de elementos finitos

3.1. Introdução

O conceito em que se fundamenta o método dos elementos finitos é o da aproximação do domínio em análise através de um número finito de subdomínios de formas simples e dimensões arbitrárias, os elementos finitos, no interior dos quais se assumem funções simples para aproximar algumas das variáveis em estudo. A solução aproximada consiste numa combinação linear destas funções. Os pesos desta combinação são calculados através da resolução de um sistema de equações algébricas que equivale a uma aproximação das equações do problema.

A grande liberdade na discretização do domínio e das funções faz com que o método dos elementos finitos possa ser utilizado para resolver praticamente qualquer problema susceptível de ser representado matematicamente por equações às derivadas parciais, com quaisquer condições de fronteira [ZIENKIEWICZ, 1988].

Um dado tipo de problemas pode ser abordado de diversas maneiras, o que leva a que se obtenham várias formulações.

A maioria das formulações de elementos finitos para problemas de elasticidade são obtidas discretizando, nos elementos, um ou vários dos campos definidos no capítulo 2: deslocamentos, extensões e tensões. Os campos não discretizados podem ser obtidos a partir dos outros através das relações (2.7) e (2.26) ou (2.30). É também possível discretizar, independentemente das funções discretizadas nos elementos, a tensão ou os deslocamentos nos lados (a palavra lado designa um lado de um elemento em 2D ou uma face de um elemento em 3D). As funções de aproximação utilizadas podem satisfazer, *a priori*, algumas das equações do problema. A solução de elementos finitos é obtida de modo a que as condições não satisfeitas *a priori* sejam aproximadas o melhor possível, de acordo com os critérios da formulação utilizada. As equações do sistema algébrico são

obtidas a partir das referidas condições, através do método dos resíduos pesados ou de princípios variacionais. Várias formulações de elementos finitos deste tipo podem ser encontradas em [PIAN e TONG, 1969], [ALMEIDA, 1989] e [ALMEIDA e FREITAS, 1992].

Neste trabalho, são apenas considerados elementos finitos compatíveis e elementos finitos de equilíbrio. Os elementos finitos compatíveis são baseados em formulações que fornecem soluções que satisfazem localmente as equações de compatibilidade (2.7) e verificam as condições de fronteira cinemáticas (2.22). Em 3.2.1, descreve-se a formulação clássica de elementos finitos compatíveis, sendo a formulação utilizada neste trabalho descrita em 3.2.2. Os elementos de equilíbrio são baseados em formulações que permitem obter soluções que satisfazem localmente as equações de equilíbrio (2.16) e verificam as condições de fronteira estáticas (2.23). A formulação de elementos finitos de equilíbrio utilizada neste trabalho é descrita na secção 3.3.

Embora possam ser utilizados diversos tipos de funções de aproximação, neste trabalho são apenas consideradas funções polinomiais, aquelas que são correntemente mais utilizadas.

A utilização e a investigação nos domínios da estimação de erro e do refinamento adaptativo têm sido orientadas quase exclusivamente para os elementos finitos compatíveis. No anexo, faz-se uma breve referência ao trabalho já publicado sobre refinamento adaptativo de elementos finitos baseados em formulações que não fornecem soluções equilibradas nem compatíveis.

3.2. Elementos finitos compatíveis

3.2.1. Formulação clássica

Na formulação clássica de elementos finitos de deslocamento [TURNER *et al*, 1956] [ZIENKIEWICZ, 1988], é apenas discretizado o campo de deslocamentos. A discretização é feita de modo a satisfazer, *a priori*, a admissibilidade cinemática. O campo de deslocamentos é definido, a partir dos valores dos deslocamentos num certo número de pontos do domínio, os nós, através de funções de interpolação no domínio:

$$\mathbf{u}_{i,c} = \boldsymbol{\phi} \hat{\mathbf{u}}_i, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}_c = \boldsymbol{\Phi} \hat{\mathbf{u}}. \quad (3.2)$$

Estas funções de interpolação no domínio são obtidas a partir de funções de interpolação elementares. Associada a cada nó no interior ou na fronteira de cada elemento, existe uma função de interpolação. Esta função é contínua, tem valor unitário no nó respectivo e nulo nos restantes. As componentes do campo de deslocamentos são aproximadas, em cada elemento, através destas funções. Deste modo, o campo de deslocamentos em cada elemento fica univocamente definido a partir dos valores nodais:

$$\mathbf{u}_{i,c,(e)} = \boldsymbol{\psi}_{(e)} \hat{\mathbf{u}}_{i,(e)}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}_{c,(e)} = \boldsymbol{\Psi}_{(e)} \hat{\mathbf{u}}_{(e)}. \quad (3.4)$$

As funções de interpolação no domínio coincidem, em cada elemento, com as funções de interpolação elementares:

$$\phi = \psi_{(e)}, \forall \mathbf{x} \in \Omega_{(e)}. \quad (3.5)$$

As condições de fronteira cinemáticas são satisfeitas impondo os valores dos deslocamentos dos nós na fronteira cinemática.

O campo de deslocamentos será contínuo desde que, em cada lado entre dois elementos, as funções de interpolação de ambos os elementos associadas a cada nó assumam valores iguais em todos os pontos desse lado. Para as funções de interpolação polinomiais clássicas, esta condição é satisfeita se todos os elementos tiverem igual número de nós em cada lado e cada nó pertencer a todos os elementos que lhe são adjacentes.

A geometria de cada elemento é normalmente definida a partir das coordenadas dos nós, utilizando funções de forma polinomiais do mesmo tipo das utilizadas para os deslocamentos, todas referidas a um elemento mestre cúbico ou tetraédrico em 3D e quadrado ou triangular em 2D. Se as funções de forma forem exactamente as mesmas, diz-se que o elemento é isoparamétrico.

O sistema algébrico é obtido por aplicação dos princípios energéticos referidos em 2.8.1 ou aproximando as equações de Navier (2.34) através do método dos resíduos pesados.

Após algumas manipulações, obtém-se

$$\left(\int_{\Omega} (\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi})^T \mathbf{k}(\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi}) d\Omega \right) \hat{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} (\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi})^T \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{t}_T d\Gamma, \quad (3.6)$$

que pode ser escrita na forma compacta:

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (3.7)$$

A matriz de rigidez global, \mathbf{K} , pode ser obtida adicionando os termos das várias matrizes elementares,

$$\mathbf{K}_{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} (\mathbf{d}\Psi_{(e)})^T \mathbf{k}(\mathbf{d}\Psi_{(e)}) d\Omega, \quad (3.8)$$

correspondentes a cada um dos deslocamentos nodais.

O vector de forças nodais equivalentes, \mathbf{F} , pode ser obtido adicionando os termos dos vários vectores elementares,

$$\mathbf{F}_{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} (\mathbf{d}\Psi_{(e)})^T \mathbf{k} \varepsilon_{\theta} d\Omega + \int_{\Omega_{(e)}} \Psi_{(e)}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{t,(e)}} \Psi_{(e)}^T \mathbf{t}_{\Gamma} d\Gamma, \quad (3.9)$$

correspondentes a cada um dos deslocamentos nodais.

3.2.2. Formulação utilizada

3.2.2.1. Introdução

Neste trabalho, utiliza-se uma formulação de elementos finitos compatíveis dual da formulação de elementos finitos de equilíbrio utilizada, que será descrita em 3.3.2. Esta escolha facilita o refinamento das malhas, pois garante que o método de refinamento é igualmente adequado para ambos os casos. Além disso, facilita a programação em geral e o cálculo dos indicadores de erro duais em particular, pois a maior parte das subrotinas são comuns.

Nesta formulação de elementos finitos compatíveis [ALMEIDA, 1989] [ALMEIDA e FREITAS, 1992], a discretização do campo de deslocamentos não satisfaz, *a priori*, a admissibilidade cinemática nos lados dos elementos. Esta será imposta através de resíduos pesados. Assim, é necessário discretizar, também, o fluxo de tensão nos lados dos elementos.

3.2.2.2. Descrição da formulação

O campo de deslocamentos no interior de um elemento $\Omega_{(i)}$ é discretizado da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}_{c,(i)} = \mathbf{U}_{(i)} \hat{\mathbf{u}}_{(i)}. \quad (3.10)$$

$\mathbf{U}_{(i)}$ é a matriz das funções de aproximação dos deslocamentos e $\hat{\mathbf{u}}_{(i)}$ é o vector dos parâmetros de deslocamento (pesos das funções de aproximação de deslocamento).

As funções de aproximação dos deslocamentos são contínuas no interior dos elementos.

Para impor a compatibilidade entre elementos, é definida uma nova variável, o deslocamento relativo num lado,

$$\mathbf{r}_{(i)} = \sum_i \mathbf{M}_{(i),(i)} \mathbf{u}_{(i)}, \quad (3.11)$$

em que o somatório em i é extensivo aos elementos finitos adjacentes ao lado $\Gamma_{(i)}$.

Para um lado $\Gamma_{(i)}$ e para cada elemento $\Omega_{(i)}$ adjacente a ele, a matriz de rotação $\mathbf{M}_{(i),(i)}$ é dada por

$$\mathbf{M}_{(i),(i)} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

em 2D, e

$$\mathbf{M}_{(i),(i)} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \mathbf{t}_{1x} & \mathbf{t}_{1y} & \mathbf{t}_{1z} \\ \mathbf{t}_{2x} & \mathbf{t}_{2y} & \mathbf{t}_{2z} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

em 3D. Os vectores \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 são tais que

$$\mathbf{M}_{(i),(i)}^T \mathbf{M}_{(i),(i)} = \mathbf{I} \quad (3.14)$$

e que

$$\sum_i \mathbf{M}_{(i),(i)} = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

em que o somatório em i é extensivo aos elementos $\Omega_{(i)}$ adjacentes ao lado $\Gamma_{(i)}$.

Note-se que é também possível utilizar, para um dos elementos adjacentes ao lado, $\mathbf{M}_{(j),(i)} = \mathbf{I}$ e, para o outro, $\mathbf{M}_{(j),(e)} = -\mathbf{I}$. Nesta alternativa, os deslocamentos relativos são componentes segundo as direcções dos eixos globais e não componentes normais e tangenciais aos lados. Apesar de implicar uma escolha de sinal arbitrária, esta alternativa é mais simples de utilizar em 3D.

Há compatibilidade de deslocamentos, num lado entre elementos ou pertencente à fronteira cinemática se, nesse lado:

$$\mathbf{r}_{(i)} = \bar{\mathbf{r}}_{(i)}, \quad (3.16)$$

na qual $\bar{\mathbf{r}}_{(i)}$ é igual a $\mathbf{M}_{(j),(i)} \mathbf{u}_\Gamma$ se $\Gamma_{(i)} \subset \Gamma_u$ e nulo se $\Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma_u$.

Se em todos os lados entre elementos ou pertencentes à fronteira cinemática se verificar (3.16), a solução obtida será cinematicamente admissível.

O fluxo de tensão num lado $\Gamma_{(i)}$ dum elemento é discretizado do seguinte modo:

$$\mathbf{g}_{c,(i)} = \mathbf{G}_{(i)} \hat{\mathbf{g}}_{(i)} + \mathbf{M}_{(j),(i)} \bar{\mathbf{t}}_{(i)}. \quad (3.17)$$

$\mathbf{G}_{(i)}$ é a matriz das funções de aproximação do fluxo de tensão e $\hat{\mathbf{g}}_{(i)}$ é o vector dos parâmetros de fluxo de tensão (pesos das funções de aproximação de fluxo de tensão). Se $\Gamma_{(i)} \subset \Gamma_t$, $\mathbf{g}_{c,(i)} = \mathbf{M}_{(j),(i)} \bar{\mathbf{t}}_{(i)} = \mathbf{M}_{(j),(i)} \mathbf{t}_\Gamma$. Se $\Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma_t$, $\bar{\mathbf{t}}_{(i)} = \mathbf{0}$. Se o lado pertencer a uma fronteira mista, as funções contidas em $\mathbf{G}_{(i)}$ não incluem fluxos na direcção segundo a qual se impõe a tensão.

Em cada lado $\Gamma_{(i)}$, as funções de aproximação do fluxo de tensão são utilizadas para impor a condição de compatibilidade (3.16) na forma de resíduos pesados

$$\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{G}_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)} d\Gamma = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{G}_{(i)}^T \bar{\mathbf{r}}_{(i)} d\Gamma. \quad (3.18)$$

Note-se que, se num lado pertencente à fronteira do domínio, as funções contidas em $\mathbf{G}_{(i)}$ não incluírem fluxos numa dada direcção, a equação (3.18) não imporá o valor dos deslocamentos nessa direcção.

Introduzindo as expressões (3.10) e (3.11) em (3.18), obtém-se

$$\sum_i \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{G}_{(i)}^T \mathbf{M}_{(i),(i)} \mathbf{U}_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{G}_{(i)}^T \bar{\mathbf{r}}_{(i)} d\Gamma, \quad (3.19)$$

que pode ser escrita na forma compacta

$$\sum_i \mathbf{C}_{(i),(i)} \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \hat{\mathbf{r}}_{(i)}. \quad (3.20)$$

Em cada elemento $\Omega_{(i)}$, as funções de aproximação de deslocamento são utilizadas para impor a equação de equilíbrio (2.16) na forma de resíduos pesados

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{d}^* \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{f} d\Omega = \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

Integrando por partes a primeira parcela, obtém-se

$$- \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\mathbf{U}_{(i)})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(i)}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{f} d\Omega = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

em que o somatório em j é extensivo a todos os lados do elemento $\Omega_{(i)}$.

Utilizando as expressões (2.30), (2.7) e (3.10) e ainda, dado que $\mathbf{N}_{(i),(i)} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M}_{(i),(i)}^T \mathbf{g}_{(i)}$ em $\Gamma_{(i)}$, (3.17) e (3.14), obtém-se

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\mathbf{U}_{(i)})^T \mathbf{k} (\mathbf{d}\mathbf{U}_{(i)}) d\Omega \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} + \sum_j \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{M}_{(i),(i)}^T \mathbf{G}_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{g}}_{(i)} = \\ & = - \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\mathbf{U}_{(i)})^T \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta d\Omega - \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \bar{\mathbf{t}}_{(i)} d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.23)$$

que pode ser escrita na forma compacta

$$-\mathbf{K}_{(i)} \hat{\mathbf{u}}_{(i)} + \sum_j \mathbf{C}_{(i),(i)}^T \hat{\mathbf{g}}_{(i)} = -\hat{\mathbf{f}}_{(i)} - \hat{\mathbf{s}}_{\theta,(i)} - \sum_j \hat{\mathbf{t}}_{(i),(i)}. \quad (3.24)$$

O sistema algébrico global é obtido reunindo as equações de equilíbrio (3.24) de todos os elementos finitos $\Omega_{(i)}$ e as equações de compatibilidade (3.20) de todos os lados em que $\mathbf{G}_{(i)} \neq \mathbf{0}$. Como é usual nas formulações de elementos finitos, os cálculos correspondentes a (3.24) e (3.20) podem ser efectuados elemento a

elemento e, dentro destes, lado a lado; o somatório é efectuado implicitamente ao formar o sistema global.

Agrupando os vectores elementares $\hat{\mathbf{u}}_{(i)}$ num vector global $\hat{\mathbf{u}}$, agrupando os vectores dos lados $\hat{\mathbf{g}}_{(i)}$ num vector global $\hat{\mathbf{g}}$ e fazendo o mesmo para os restantes vectores e matrizes nas equações (3.24) e (3.20), o sistema algébrico pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{g}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{s}}_\theta - \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{r}} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Este sistema algébrico pode também ser obtido por aplicação do Princípio do Mínimo da Energia Potencial, impondo a compatibilidade nos lados através do método dos multiplicadores de Lagrange. Os multiplicadores identificam-se com os fluxos de tensão nos lados.

3.2.2.3. Definição das funções de aproximação e da geometria dos elementos

Neste trabalho, as funções de aproximação dos deslocamentos nos elementos, utilizadas em (3.10), são polinomiais. Para haver invariância em relação ao sistema de eixos, utilizam-se sempre conjuntos de polinómios completos. Em 2D, utilizam-se os monómios $x^i y^j$, com $i + j \leq p$; o número total de funções de aproximação dos deslocamentos de grau p é, portanto, $(p+1)(p+2)$. Em 3D, utilizam-se os monómios $x^i y^j z^k$, com $i + j + k \leq p$; o número total de funções de aproximação dos deslocamentos de grau p é, portanto, $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{2}$.

Por conveniência, utiliza-se, em cada elemento, um referencial local. Este referencial é paralelo ao referencial global e a sua origem é o centro geométrico do elemento.

Tal como para as funções de aproximação dos deslocamentos, utilizam-se conjuntos de polinómios completos para as funções de aproximação do fluxo de tensão nos lados, utilizadas em (3.17). Em 2D, utilizam-se os monómios r^i , com $i \leq p$; o número total de funções de aproximação do fluxo de tensão de grau p é, portanto, $2(p+1)$. Em 3D, utilizam-se os monómios $s^i t^j$, com $i + j \leq p$; o número total de funções de aproximação do fluxo de tensão de grau p é, portanto, $\frac{3(p+1)(p+2)}{2}$.

As coordenadas r e (s,t) são coordenadas locais definidas em cada lado.

Em 2D, o domínio é discretizado em elementos finitos poligonais. Como não existe qualquer relação entre as funções de aproximação e a geometria do elemento, formalmente os elementos podem ter um número de lados qualquer. Pela mesma razão, os lados podem ser rectos ou curvos.

Em 3D, o domínio é discretizado em elementos finitos poliédricos. Como não existe qualquer relação entre as funções de aproximação e a geometria do elemento, os elementos podem ter um número de faces qualquer. As faces são poligonais, planas ou curvas, podendo formalmente ter um número de lados qualquer.

3.2.2.4. Características da solução

A discretização do campo de deslocamentos definida por (3.10) garante, *a priori*, que o campo de deslocamentos vai ser contínuo no interior dos elementos. Portanto, se existir continuidade de deslocamentos nos lados, a solução será compatível.

Para funções de aproximação polinomiais, a compatibilidade de deslocamentos num lado, condição (3.16), é imposta localmente por (3.18) se, em $\mathbf{G}_{(i)}$, forem utilizados conjuntos de polinómios completos de grau maior ou igual ao grau, nas coordenadas locais dos lados, dos deslocamentos devidos a $\mathbf{U}_{(i)}$ e \mathbf{u}_T . Para lados com uma representação paramétrica linear, o grau destes deslocamentos é igual nas coordenadas locais e nas coordenadas globais. Consequentemente, a condição anterior é satisfeita se, em $\mathbf{G}_{(i)}$, forem utilizados conjuntos de polinómios completos de grau não inferior ao grau dos deslocamentos devidos a $\mathbf{U}_{(i)}$ e \mathbf{u}_T . Se o grau das funções de aproximação do fluxo de tensão for inferior ao das funções de aproximação de deslocamento, não existirá, em geral, continuidade local nos lados: a equação (3.16) só será respeitada em termos médios. Funções de aproximação do fluxo de tensão de grau superior ao das funções de aproximação de deslocamento só contribuirão para aumentar o número de dependências no sistema algébrico global (3.25), não devendo, por isso, ser utilizadas.

Ao contrário do que acontece na formulação tradicional de elementos finitos compatíveis, o sistema algébrico global (3.25) pode ser indeterminado e até, para elementos com um número elevado de lados e deslocamentos impostos não nulos, impossível. Contudo, a solução obtida para o campo de deslocamentos, se existir, é única. A indeterminação afecta apenas os fluxos de tensão nos lados.

Em 2D, embora se possam utilizar elementos com qualquer número de lados, rectos ou curvos, e quaisquer conjuntos de funções de aproximação, a

combinação mais adequada para minimizar o número de dependências consiste em utilizar elementos triangulares com lados rectos, funções de aproximação dos deslocamentos completas e funções de aproximação do fluxo de tensão completas, do mesmo grau. Neste caso, a solução obtida é exactamente a mesma que para os elementos finitos de deslocamento clássicos correspondentes. No entanto, podem existir algumas dependências; em cada vértice interior, por exemplo, existe uma equação dependente para cada direcção, devido à transitividade da continuidade entre os deslocamentos dos elementos a ele adjacentes.

Em 3D, embora se possam utilizar elementos com qualquer número de faces, faces com qualquer número de arestas, planas ou curvas, e quaisquer conjuntos de funções de aproximação, a combinação mais adequada para minimizar o número de dependências consiste em utilizar elementos tetraédricos com faces planas, funções de aproximação dos deslocamentos completas e funções de aproximação do fluxo de tensão completas, do mesmo grau. Neste caso, a solução obtida é exactamente a mesma que para os elementos finitos de deslocamento clássicos correspondentes.

Só devem ser utilizados lados curvos para discretizar fronteiras curvas. Nestas, a pequena perda de compatibilidade local devida à utilização de lados curvos e funções do mesmo grau parece ser preferível às alternativas: utilizar lados não curvos pode envolver um grande erro de discretização do domínio; aumentar o grau das funções de aproximação dos deslocamentos leva à ocorrência de dependências no sistema global.

3.3. Elementos finitos de equilíbrio

3.3.1. Introdução

Os modelos de elementos finitos de equilíbrio podem ser obtidos discretizando o campo de tensões ou as funções geradoras de tensões de Maxwell ou de Morera, em 3D, e de Airy, em 2D.

Quando é discretizado o campo de tensões, esta discretização é feita de modo a satisfazer, *a priori*, o equilíbrio no interior dos elementos. O equilíbrio de tensão nos lados é imposto através de resíduos pesados. Assim, é necessário discretizar, também, os deslocamentos nos lados dos elementos. A discretização dos deslocamentos é feita de modo a satisfazer, *a priori*, apenas as condições de fronteira cinemáticas, não existindo continuidade de deslocamentos entre os lados. A compatibilidade é imposta, de forma aproximada, através de resíduos pesados ou da minimização da energia complementar total. As variáveis do sistema

algébrico global são os pesos das funções de aproximação das tensões nos elementos e os pesos das funções de aproximação dos deslocamentos nos lados dos elementos [ALMEIDA, 1989]. No entanto, é possível condensar o sistema, a nível elementar, nos pesos das funções de aproximação dos deslocamentos nos lados dos elementos [VEUBEKE, 1964] [VEUBEKE, 1965], ficando estes como únicas variáveis do sistema algébrico global.

Quando são discretizadas as funções geradoras de tensões, as variáveis do problema são os valores nodais destas funções e, eventualmente, das suas primeiras derivadas [VEUBEKE e ZIENKIEWICZ, 1967] [RYBICKI, 1971] [ROBINSON, 1973]. A discretização é feita de modo a satisfazer, *a priori*, a admissibilidade estática.

3.3.2. Formulação utilizada

3.3.2.1. Introdução

Nesta formulação de elementos finitos de equilíbrio [ALMEIDA, 1989] [ALMEIDA e FREITAS, 1991], discretiza-se directamente o campo de tensões. Embora parte desta secção corresponda a trabalho desenvolvido na dissertação de mestrado do autor [PEREIRA, 1993], apresentam-se diversos desenvolvimentos posteriores, alguns dos quais foram publicados pelo autor durante a elaboração da presente tese [PEREIRA e ALMEIDA, 1995a] [ALMEIDA e PEREIRA, 1996].

3.3.2.2. Descrição da formulação

O campo de tensões no interior de um elemento $\Omega_{(i)}$ é discretizado da seguinte maneira:

$$\sigma_{e,(i)} = \mathbf{S}_{(i)} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} + \sigma_{0,(i)}. \quad (3.26)$$

$\mathbf{S}_{(i)}$ é a matriz das funções de aproximação de tensões, $\hat{\mathbf{s}}_{(i)}$ é o vector dos parâmetros de tensões (pesos das funções de aproximação de tensões) e $\sigma_{0,(i)}$ é uma solução particular.

As equações de equilíbrio (2.16) são automaticamente satisfeitas no interior dos elementos porque as funções de aproximação de tensões são escolhidas de forma a serem auto-equilibradas,

$$\mathbf{d}^* \mathbf{S}_{(j)} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

e a solução particular é tal que

$$\mathbf{d}^* \boldsymbol{\sigma}_{0,(j)} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Os deslocamentos num lado $\Gamma_{(j)}$ dum elemento são discretizados do seguinte modo:

$$\mathbf{v}_{e,(j)} = \mathbf{V}_{(j)} \hat{\mathbf{v}}_{(j)} + \bar{\mathbf{v}}_{(j)}. \quad (3.29)$$

$\mathbf{V}_{(j)}$ é a matriz das funções de aproximação de deslocamento e $\hat{\mathbf{v}}_{(j)}$ é o vector dos parâmetros de deslocamento (pesos das funções de aproximação de deslocamento). Se $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma_u$, $\mathbf{v}_{e,(j)} = \bar{\mathbf{v}}_{(j)} = \mathbf{u}_\Gamma$. Se $\Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma_u$, $\bar{\mathbf{v}}_{(j)} = \mathbf{0}$. Se o lado pertencer a uma fronteira mista, as funções contidas em $\mathbf{V}_{(j)}$ não incluem deslocamentos na direcção segundo a qual estes são impostos.

Para impor o equilíbrio entre elementos, é definida uma nova variável, a tensão num lado,

$$\boldsymbol{\varphi}_{(j)} = \sum_i \mathbf{N}_{(j),(i)} \boldsymbol{\sigma}_{(i)}, \quad (3.30)$$

em que o somatório em i é extensivo aos elementos finitos adjacentes ao lado $\Gamma_{(j)}$.

Há equilíbrio de tensão, ou co-difusividade, num lado entre elementos ou pertencente à fronteira estática se, nesse lado,

$$\boldsymbol{\varphi}_{(j)} = \bar{\mathbf{t}}_{(j)}, \quad (3.31)$$

na qual $\bar{\mathbf{t}}_{(j)}$, designada por tensão aplicada no lado, é igual a \mathbf{t}_Γ se $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma_t$ e nula se $\Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma_t$.

Note-se que esta condição não implica continuidade do campo de tensões nesse lado. Contudo, as possíveis descontinuidades não afectam o equilíbrio de um elemento de volume infinitesimal que seja intersectado pelo lado.

Se se utilizarem funções de aproximação de tensões que verifiquem a condição (3.27) e uma solução particular $\boldsymbol{\sigma}_{0,(j)}$ que verifique (3.28) e se, em todos os lados entre elementos ou pertencentes à fronteira estática, se verificar (3.31), a solução obtida será estaticamente admissível.

Em cada lado $\Gamma_{(i)}$, as funções de aproximação de deslocamento são utilizadas para impor a condição de equilíbrio (3.31) na forma de resíduos pesados

$$\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \boldsymbol{\varphi}_{(i)} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \bar{\mathbf{t}}_{(i)} \, d\Gamma. \quad (3.32)$$

Note-se que, se num lado pertencente à fronteira do domínio, as funções contidas em $\mathbf{V}_{(i)}$ não permitirem deslocamentos numa dada direcção, a equação (3.32) não imporá o valor da tensão nessa direcção.

Introduzindo as expressões (3.26) e (3.30) em (3.32), obtém-se

$$\sum_i \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(i)} \mathbf{S}_{(i)} \, d\Gamma \right) \hat{\mathbf{s}}_{(i)} = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \bar{\mathbf{t}}_{(i)} \, d\Gamma - \sum_i \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(i)} \boldsymbol{\sigma}_{0,(i)} \, d\Gamma \right), \quad (3.33)$$

que pode ser escrita na forma compacta

$$\sum_i \mathbf{D}_{(i),(i)} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} = \hat{\mathbf{t}}_{(i)} - \sum_i \hat{\mathbf{t}}_{0,(i),(i)}. \quad (3.34)$$

Em cada elemento $\Omega_{(i)}$, as funções de aproximação de tensões são utilizadas para impor a condição de compatibilidade (2.7) na forma de resíduos pesados

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{d} \, d\Omega. \quad (3.35)$$

Integrando por partes o segundo termo, obtém-se

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = - \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}^* \mathbf{S}_{(i)})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(j)}^T \mathbf{u} \, d\Gamma, \quad (3.36)$$

em que o somatório em j é extensivo a todas os lados do elemento $\Omega_{(i)}$.

Atendendo a (3.27), o integral em $\Omega_{(i)}$ no segundo termo é nulo. Utilizando as expressões (2.23) e (3.26) e ainda, dado que \mathbf{u} é aproximado por $\mathbf{v}_{e,(i)}$ em $\Gamma_{(i)}$, (3.29), obtém-se

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{f} \mathbf{S}_{(i)} \, d\Omega \right) \hat{\mathbf{s}}_{(i)} + \sum_j \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(j)}^T \mathbf{V}_{(j)} \, d\Gamma \right) \hat{\mathbf{v}}_{(j)} = \\ & = \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}_{0,(i)} \, d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \, d\Omega - \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(j)}^T \bar{\mathbf{v}}_{(j)} \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.37)$$

que pode ser escrita na forma compacta

$$-\mathbf{F}_{(i)} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} + \sum_j \mathbf{D}_{(j),(i)}^T \hat{\mathbf{v}}_{(j)} = \hat{\mathbf{e}}_{0,(i)} + \hat{\mathbf{e}}_{\theta,(i)} - \sum_j \hat{\mathbf{v}}_{(j),(i)}. \quad (3.38)$$

O sistema algébrico global é obtido reunindo as equações de compatibilidade (3.38) de todos os elementos finitos $\Omega_{(i)}$ e as equações de equilíbrio (3.34) de todos os lados em que $\mathbf{V}_{(i)} \neq \mathbf{0}$. Como é usual nas formulações de elementos finitos, os cálculos correspondentes a (3.38) e (3.34) podem ser efectuados elemento a elemento e, dentro destes, lado a lado; o somatório é efectuado implicitamente ao formar o sistema global.

Agrupando os vectores elementares $\hat{\mathbf{s}}_{(i)}$ num vector global $\hat{\mathbf{s}}$, agrupando os vectores dos lados $\hat{\mathbf{v}}_{(i)}$ num vector global $\hat{\mathbf{v}}$ e fazendo o mesmo para os restantes vectores e matrizes nas equações (3.38) e (3.34), o sistema algébrico pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 - \hat{\mathbf{e}}_\theta - \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{t}}_0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Este sistema algébrico pode também ser obtido por aplicação do Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar, impondo o equilíbrio nos lados através de método dos multiplicadores de Lagrange. Os multiplicadores são os deslocamentos nos lados.

3.3.2.3. Condensação do sistema algébrico

É possível formar um sistema análogo ao (3.39) para um elemento $\Omega_{(i)}$ isolado:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{(i)} & \mathbf{D}_{(i)}^T \\ \mathbf{D}_{(i)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} \\ \hat{\mathbf{v}}_{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{0,(i)} - \hat{\mathbf{e}}_{\theta,(i)} \\ \hat{\mathbf{t}}_{(i)} - \hat{\mathbf{t}}_{0,(i)} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Como a matriz $\mathbf{F}_{(i)}$ é sempre definida, pode-se eliminar $\hat{\mathbf{s}}_{(i)}$ no segundo bloco de (3.40), obtendo uma matriz de rigidez elementar,

$$\mathbf{K}_{(i)} = \mathbf{D}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \mathbf{D}_{(i)}^T, \quad (3.41)$$

e um vector de forças elementares,

$$\mathbf{F}_{(i)} = \hat{\mathbf{t}}_{(i)} - \hat{\mathbf{t}}_{0,(i)} + \mathbf{D}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{0,(i)} - \mathbf{D}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{\theta,(i)}, \quad (3.42)$$

semelhantes aos utilizados na formulação clássica de elementos finitos compatíveis, embora associados aos deslocamentos dos lados.

Através dum processo igual ao utilizado nessa formulação, obtém-se o sistema algébrico global

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \quad (3.43)$$

Uma vez resolvido o sistema, as tensões em cada elemento $\Omega_{(i)}$ são obtidas a partir de (3.26), com

$$\hat{\mathbf{s}}_{(i)} = \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \mathbf{D}_{(i)}^T \hat{\mathbf{v}}_{(i)} - \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{0,(i)} + \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{\theta,(i)}. \quad (3.44)$$

Este processo, utilizado por VEUBEKE [1964], tem a vantagem de fornecer um sistema algébrico global de menor dimensão e com uma estrutura semelhante à do fornecido pela formulação tradicional de elementos finitos compatíveis.

3.3.2.4. Definição das funções de aproximação e da geometria dos elementos

Neste trabalho, as funções de aproximação de tensões nos elementos, utilizadas em (3.26), são polinomiais. Para haver invariância em relação ao sistema de eixos, utilizam-se sempre conjuntos de polinómios completos [SPILKER *et al*, 1981].

Para criar o conjunto de funções polinomiais obedecendo a (3.27), recorreu-se às funções geradoras de tensões, descritas em 2.3.

Em 2D, utilizou-se o seguinte procedimento para criar o conjunto de funções de aproximação de tensões, auto-equilibradas, de grau p :

1. Gerar os $\frac{(p+1)(p+6)}{2}$ monómios $x^i y^j$, com $2 \leq i + j \leq p + 2$;
2. Usando cada um destes monómios, em (2.19), como uma função geradora de tensões de Airy, obter as $\frac{(p+1)(p+6)}{2}$ funções de aproximação de tensões.

Para $p = 3$, obteve-se a seguinte matriz $\mathbf{S}_{(i)}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & y & 0 & 0 & x^2 & 2xy \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x & -y & 0 & 0 & -x^2 \end{array} \right] \quad (3.45)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 0 & x^3 & 3x^2y & 3xy^2 & y^3 \\ y^2 & 0 & 0 & x^3 & 3x^2y & 3xy^2 & y^3 & 0 & 0 \\ -2xy & -y^2 & 0 & 0 & -x^3 & -3xy^2 & -3x^2y & -y^3 & 0 \end{array} \right].$$

Em 3D, utilizou-se o seguinte procedimento para criar o conjunto de funções de aproximação de tensões, auto-equilibradas, de grau p:

1. Gerar os $\frac{(p+3)(p+4)(p+5)}{6}$ monómios $x^i y^j z^k$, com $i + j + k \leq p + 2$;
2. Usando estes monómios, em (2.20) ou em (2.21), como cada uma das funções geradoras de tensões de Maxwell ou de Morera, respectivamente, obter $\frac{(p+3)(p+4)(p+5)}{2}$ funções de aproximação de tensões;
3. Seleccionar um conjunto de $\frac{(p+1)(p+2)(p+6)}{2}$ funções de aproximação de tensões linearmente independentes.

O número de funções de aproximação de tensões, auto-equilibradas, de grau p é obtido subtraindo, ao número de funções de aproximação de tensões obtido a partir da pirâmide de Pascal de grau p, o número de equações de equilíbrio obtido a partir da pirâmide de Pascal de grau p-1:

$$6 \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 3 \frac{p(p+1)(p+2)}{6} = \frac{(p+1)(p+2)(p+6)}{2}. \quad (3.46)$$

Para um mesmo conjunto de monómios, as duas funções geradoras de tensões dão origem ao mesmo espaço de funções de aproximação de tensões, embora definam bases diferentes. Neste trabalho, utilizaram-se as funções de Morera. Para $p = 3$, obteve-se a matriz $\mathbf{S}_{(i)}$ que se apresenta de seguida, transposta:

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
<hr/>					
0	0	0	0	0	x
0	0	0	0	-x	y
0	0	x	0	0	0
0	0	0	-x	0	z
0	x	0	0	0	0
0	0	0	0	y	0
0	0	y	0	0	0
2x	0	0	-y	-z	0
0	2y	0	-x	0	-z
0	0	2z	0	-x	-y
0	0	0	z	0	0
0	z	0	0	0	0
y	0	0	0	0	0
0	0	0	-y	z	0
z	0	0	0	0	0
<hr/>					
0	0	0	-2xz	0	z ²
0	0	0	-2yz	z ²	0
0	0	0	x ²	0	-2xz
0	0	0	y ²	-2yz	0
0	0	0	z ²	0	0
0	0	0	0	-2xy	y ²
0	0	0	0	x ²	-2xy
0	0	0	0	y ²	0
0	0	0	0	0	x ²

0	0	4xz	0	$-x^2$	$-2xy$
0	0	4yz	0	$-2xy$	$-y^2$
0	0	x^2	0	0	0
0	0	y^2	0	0	0
0	0	xy	0	0	0
0	0	z^2	xy	$-xz$	$-yz$
0	4xy	0	$-x^2$	0	$-2xz$
0	4yz	0	$-2xz$	0	$-z^2$
0	x^2	0	0	0	0
0	z^2	0	0	0	0
0	xz	0	0	0	0
0	y^2	0	$-xy$	xz	$-yz$
4xy	0	0	$-y^2$	$-2yz$	0
4xz	0	0	$-2yz$	$-z^2$	0
y^2	0	0	0	0	0
z^2	0	0	0	0	0
yz	0	0	0	0	0
x^2	0	0	$-xy$	$-xz$	yz
<hr/>					
0	0	0	0	0	x^3
0	0	0	0	$-3xy^2$	y^3
x^3	0	0	$-3x^2y/2$	$-3x^2z/2$	3xyz
$2x^2y$	0	0	$-xy^2$	$-2xyz$	y^2z
$3xy^2$	0	0	$-y^3/2$	$-3y^2z/2$	0
y^3	0	0	0	0	0
$2x^2z$	0	0	$-2xyz$	$-xz^2$	yz^2
$4xyz$	0	0	$-y^2z$	$-yz^2$	0
y^2z	0	0	0	0	0
0	0	0	$-3xz^2$	0	z^3
$3xz^2$	0	0	$-3yz^2/2$	$-z^3/2$	0
yz^2	0	0	0	0	0

(3.47)

z^3	0	0	0	0	0
0	0	0	0	x^3	$-3x^2y$
0	0	0	0	x^2y	$-xy^2$
0	0	0	0	y^3	0
0	x^3	0	0	0	0
0	$3x^2y$	0	$-x^3/2$	0	$-3x^2z/2$
0	$2xy^2$	0	$-x^2y$	x^2z	$-2xyz$
0	y^3	0	$-3xy^2/2$	$3xyz$	$-3y^2z/2$
0	$6x^2z$	0	0	0	0
0	$4xyz$	0	$-x^2z$	0	$-xz^2$
0	$2y^2z$	0	$-2xyz$	xz^2	$-yz^2$
0	xz^2	0	0	0	0
0	$3yz^2$	0	$-3xz^2/2$	0	$-z^3/2$
0	0	0	$-3yz^2$	z^3	0
0	z^3	0	0	0	0
0	0	x^3	0	0	0
0	0	x^2y	0	0	0
0	0	xy^2	0	0	0
0	0	y^3	0	0	0
0	0	$3x^2z$	0	$-x^3/2$	$-3x^2y/2$
0	0	$4xyz$	0	$-x^2y$	$-xy^2$
0	0	$3y^2z$	0	$-3xy^2/2$	$-y^3/2$
0	0	0	x^3	0	$-3x^2z$
0	0	$2xz^2$	x^2y	$-x^2z$	$-2xyz$
0	0	$2yz^2$	xy^2	$-2xyz$	$-y^2z$
0	0	0	y^3	$-3y^2z$	0
0	0	0	x^2z	0	$-xz^2$
0	0	z^3	$3xyz$	$-3xz^2/2$	$-3yz^2/2$
0	0	0	y^2z	$-yz^2$	0
0	0	0	z^3	0	0

A solução particular a utilizar em (3.26) pode ser obtida fazendo, por exemplo, as seguintes primitivações:

$$\sigma_{0,(i)} = \begin{bmatrix} -P_x(f_x) \\ -P_y(f_y) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

em 2D e

$$\sigma_{0,(i)} = \begin{bmatrix} -P_x(f_x) \\ -P_y(f_y) \\ -P_z(f_z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

em 3D.

Por conveniência, utiliza-se, em cada elemento, um referencial local. Este referencial é paralelo ao referencial global e a sua origem é o centro geométrico do elemento.

Tal como para as funções de aproximação de tensões, utilizam-se conjuntos de polinómios completos para funções de aproximação de deslocamento nos lados, utilizadas em (3.29). Em 2D, utilizam-se os monómios r^i , com $i \leq p$; o número total de funções de aproximação de deslocamento de grau p é, portanto, $2(p+1)$. Em 3D, utilizam-se os monómios st^{ij} , com $i + j \leq p$; o número total de funções de aproximação de deslocamento de grau p é, portanto, $\frac{3(p+1)(p+2)}{2}$. As coordenadas r e (s,t) são coordenadas locais definidas em cada lado.

Tal como para a formulação de elementos compatíveis, em 2D, o domínio é discretizado em elementos finitos poligonais. Como não existe qualquer relação entre as funções de aproximação e a geometria do elemento, formalmente os elementos podem ter um número de lados qualquer. Pela mesma razão, os lados podem ser rectos ou curvos.

De modo semelhante, em 3D, o domínio é discretizado em elementos finitos poliédricos. Como não existe qualquer relação entre as funções de aproximação e a geometria do elemento, os elementos podem ter um número de faces qualquer. As faces são poligonais, planas ou curvas, podendo formalmente ter um número de lados qualquer.

3.3.2.5. Características da solução

A discretização do campo de tensões definida por (3.26) garante, *a priori*, que a solução vai satisfazer as equações de equilíbrio (2.16) no interior dos

elementos. Portanto, se existir equilíbrio local de tensão nos lados, a solução será equilibrada.

Para funções de aproximação polinomiais, o equilíbrio local de tensão num lado, condição (3.31), é imposto localmente por (3.32) se, em $V_{(i)}$, forem utilizados conjuntos de polinómios completos de grau não inferior ao grau, n_i , nas coordenadas locais dos lados, da tensão devida a $S_{(i)}$, $\sigma_{0,(i)}$ e t_{Γ} . Para lados com uma representação paramétrica linear, o grau desta tensão é igual nas coordenadas locais e nas coordenadas globais. Consequentemente, a condição anterior é satisfeita se, em $V_{(i)}$, forem utilizados conjuntos de polinómios completos de grau maior ou igual ao grau da tensão devida a $S_{(i)}$, $\sigma_{0,(i)}$ e t_{Γ} . Se o grau das funções de aproximação de deslocamento for inferior ao das funções de aproximação de tensões, não existirá, em geral, equilíbrio local nos lados: a equação (3.31) só será respeitada em termos médios. Funções de aproximação de deslocamento de grau superior ao das funções de aproximação de tensões só contribuirão para aumentar o número de dependências no sistema algébrico global (3.39), não devendo, por isso, ser utilizadas.

Só devem ser utilizados lados curvos para discretizar fronteiras curvas. Nestas, a pequena perda de equilíbrio local devida à utilização de lados curvos e funções do mesmo grau parece ser preferível às alternativas: utilizar lados não curvos pode envolver um grande erro de discretização do domínio; aumentar o grau das funções de aproximação dos deslocamentos leva à ocorrência de modos espúrios.

A equação (3.37) só impõe a compatibilidade em termos médios. Se forem utilizadas funções de aproximação de tensões constantes ou lineares, as extensões, calculadas a partir das tensões em cada elemento, correspondem a um campo de deslocamentos contínuo em cada elemento mas, normalmente, descontínuo de elemento para elemento. Se forem utilizadas funções de aproximação de tensões de grau superior, não será possível, em geral, obter um campo de deslocamentos, em cada elemento, para o qual as extensões sejam iguais às calculadas a partir das tensões.

Ao contrário do que acontece na formulação tradicional de elementos finitos compatíveis, o sistema algébrico global (3.39) pode ser impossível ou indeterminado. Contudo, a solução obtida para o campo de tensões, se existir, é única. A indeterminação afecta apenas os deslocamentos nos lados, através dos chamados modos espúrios ou *spurious kinematic modes*.

Em 2D, embora se possam utilizar elementos com qualquer número de lados, rectos ou curvos, e quaisquer conjuntos de funções de aproximação, a combinação mais adequada para obter soluções localmente equilibradas com um

mínimo de modos espúrios consiste em utilizar elementos triangulares com lados rectos, funções de aproximação de tensões completas e funções de aproximação de deslocamento completas, do mesmo grau.

Para um elemento triangular isolado, o número de modos espúrios é igual a: 0, para $p = 0$; 2, para $p = 1$; 3, para $p \geq 2$ [VEUBEKE, 1980] [MAUNDER e ALMEIDA, 1996b]. Este modos espúrios são devidos à existência de campos de tensão nos lados, de grau p , que satisfazem as equações de equilíbrio global do elemento finito, mas que não respeitam as condições de equilíbrio de momentos de um elemento infinitesimal localizado num vértice do elemento finito.

Embora o elemento triangular de grau zero não possua modos espúrios, juntar, numa malha, elementos deste tipo gera, geralmente, vários modos espúrios. Em muitos casos, não é possível obter uma solução para o sistema algébrico global. Este fenómeno é devido ao facto de este elemento só ter dois deslocamentos em cada lado, pelo que bloquear os deslocamentos de um lado não é suficiente para impedir os deslocamentos de corpo rígido de um elemento. Deste modo, alguns elementos da malha, ou alguns conjuntos de elementos, podem ter deslocamentos de corpo rígido, sem que nenhum elemento se deforme.

Pelo contrário, juntar, numa malha, elementos triangulares de grau igual ou superior a um elimina a maior parte dos modos espúrios. A experiência mostra que é quase sempre possível obter uma solução.

Igualmente, em 3D, embora se possam utilizar elementos com qualquer número de faces, faces com qualquer número de arestas, planas ou curvas, e quaisquer conjuntos de funções de aproximação, a combinação mais adequada para obter soluções localmente equilibradas com um mínimo de modos espúrios consiste em utilizar elementos tetraédricos com faces planas, funções de aproximação de tensões completas e funções de aproximação de deslocamento completas, do mesmo grau.

Para um elemento tetraédrico isolado, o número de modos espúrios é igual a 0, para $p = 0$ e 9, para $p = 1$. Conjectura-se que o número de modos espúrios seja igual a $6(p+1)$, para $p \geq 2$, o que foi já confirmado para $p \leq 4$. Este modos espúrios são devidos à existência de campos de tensão nas faces, de grau p , que satisfazem as equações de equilíbrio global do elemento finito, mas que não respeitam uma das condições de equilíbrio de momentos dos elementos infinitesimais localizados ao longo duma aresta do elemento finito. Em cada aresta, este desequilíbrio de momentos é um polinómio de grau p , o que leva à conjectura referida.

Embora o elemento tetraédrico de grau zero não possua modos espúrios, juntar elementos deste tipo numa malha gera, geralmente, vários modos espúrios.

Em muitos casos, não é possível obter uma solução para o sistema algébrico global. Este fenómeno é devido ao facto de este elemento só ter três deslocamentos em cada face, pelo que bloquear os deslocamentos de uma face não é suficiente para impedir os deslocamentos de corpo rígido de um elemento. Deste modo, alguns elementos da malha, ou alguns conjuntos de elementos, podem ter deslocamentos de corpo rígido, sem que nenhum elemento se deforme.

Pelo contrário, juntar elementos tetraédricos de grau igual ou superior a um numa malha elimina a maior parte dos modos espúrios. A experiência mostra que é quase sempre possível obter uma solução.

3.3.2.6. Eliminação dos modos espúrios

Uma maneira de garantir a existência de solução para o sistema algébrico global (3.39) consiste em utilizar superelementos. Todos eles são constituídos por elementos com funções de aproximação de tensões completas e funções de aproximação de deslocamento completas, do mesmo grau.

Em 2D, têm sido utilizados os superelementos triangular e quadrilátero.

O superelemento triangular [SANDER, 1971] é constituído por três triângulos, convergindo num vértice comum. As funções de aproximação devem ser de grau não inferior a um. Este superelemento garante também que a solução é única. A existência e unicidade da solução não é afectada se os lados exteriores forem curvos.

O superelemento quadrilátero [SANDER, 1971] é constituído por quatro triângulos, convergindo num vértice comum. Estes triângulos são obtidos por divisão do quadrilátero pelas diagonais. As funções de aproximação podem ser de qualquer grau. Este superelemento tem um modo espúrio interno, que não é excitável pelo carregamento. Se o vértice interior não estiver localizado no cruzamento das diagonais, duas situações podem ocorrer: para elementos de grau zero ou um, o modo espúrio é excitável pelo carregamento; para elementos de grau superior a um, não existe nenhum modo espúrio, mas a estatia interior diminui uma unidade [MAUNDER e ALMEIDA, 1996a].

Em 3D, podem utilizar-se os superelementos tetraédrico e hexaédrico.

O superelemento tetraédrico [LADEVÈZE *et al*, 1986] é constituído por quatro tetraedros, convergindo num vértice comum. As funções de aproximação devem ser de grau não inferior a um. Este superelemento garante também que a solução é única. A existência e unicidade da solução não é afectada se as faces exteriores forem curvas.

O superelemento hexaédrico é constituído por vinte e quatro tetraedros convergindo num vértice comum, conforme representado na figura 3.1. Este vértice deve estar localizado no cruzamento das diagonais do hexaedro. No cruzamento das diagonais de cada face do hexaedro existe também um vértice, comum a quatro tetraedros. Este superelemento tem vários modos espúrios, alguns dos quais afectam as faces do superelemento, pelo que não é tão útil como o seu análogo bidimensional.

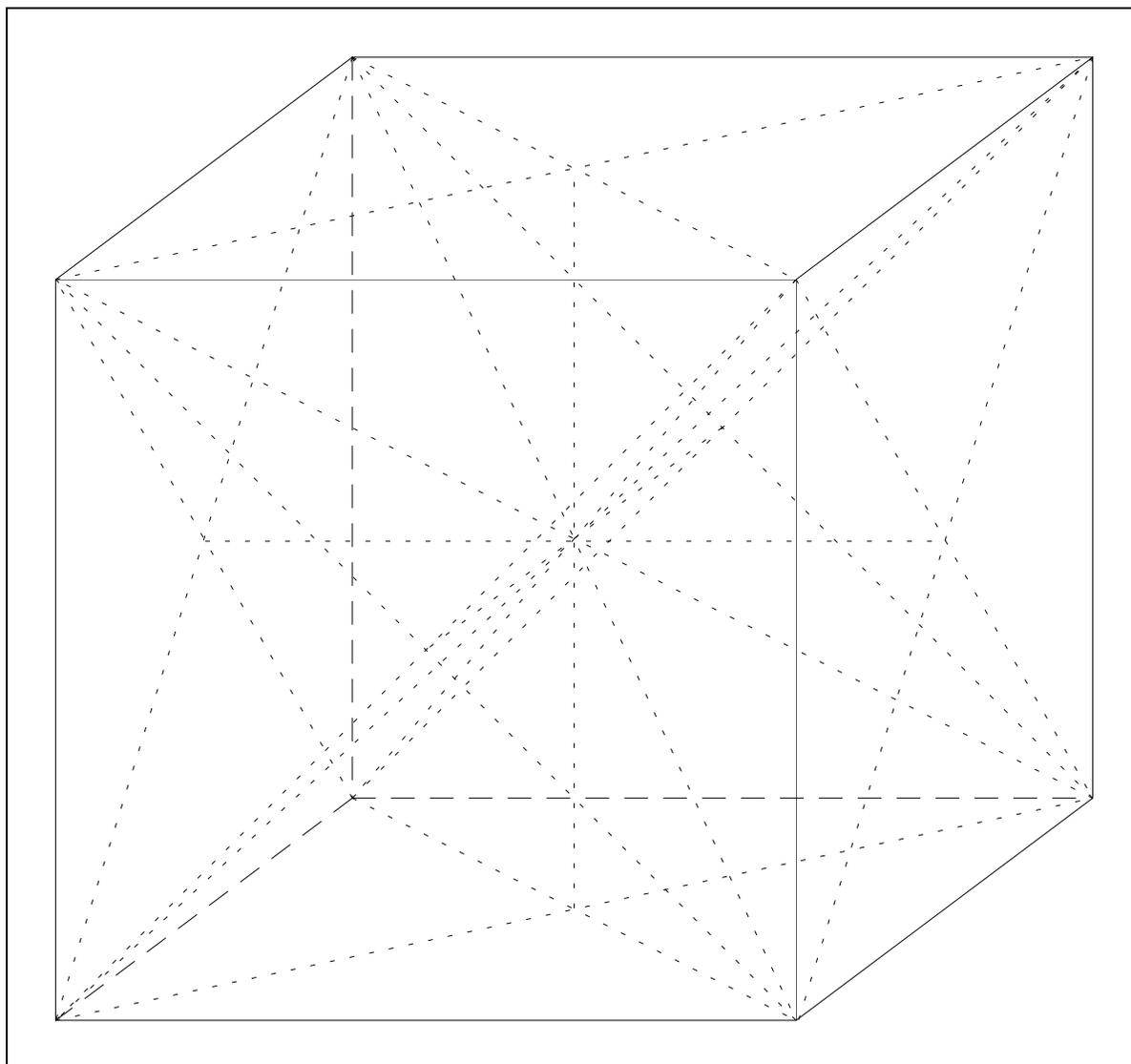


Figura 3.1 - Superelemento de equilíbrio hexaédrico.

No caso de o sistema algébrico global ser obtido como descrito em 3.3.2.3, a partir das matrizes de rigidez dos elementos, pode ser formada uma matriz de rigidez do superelemento. Os deslocamentos dos lados interiores do superelemento podem ser condensados estaticamente, reduzindo as variáveis do sistema algébrico global aos deslocamentos dos lados exteriores.

3.3.2.7. Exemplo ilustrativo

Como exemplo ilustrativo, considere-se a consola cúbica, sujeita a uma pressão uniforme aplicada na sua face superior, representada na figura 3.2.

A peça é discretizada através de um superelemento hexaédrico com funções de aproximação de grau zero. Neste caso particular, teria sido possível obter uma solução, mesmo sem ter colocado o vértice interior no cruzamento das diagonais do superelemento e o vértice interior de cada face no cruzamento das diagonais da face. No entanto, se a consola tivesse secção variável, por exemplo, já não teria sido possível obter uma solução, com um superelemento de grau zero, sem colocar os vértices nas referidas posições.

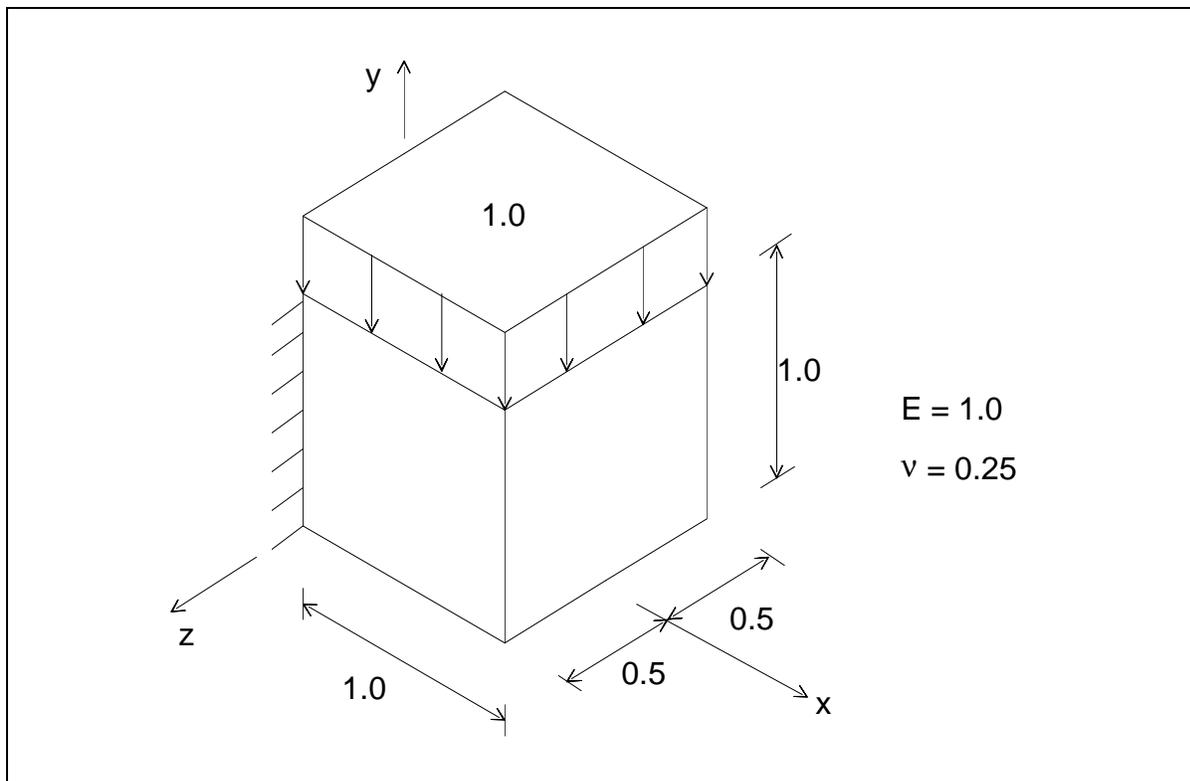


Figura 3.2 - Consola cúbica.

Na figura 3.3, representam-se as componentes do campo de tensões obtido com esta discretização. A solução, apesar de grosseira, é equilibrada em todos os pontos, o que não acontece com a solução obtida com vinte e quatro elementos compatíveis de grau um, representada na figura 3.4.

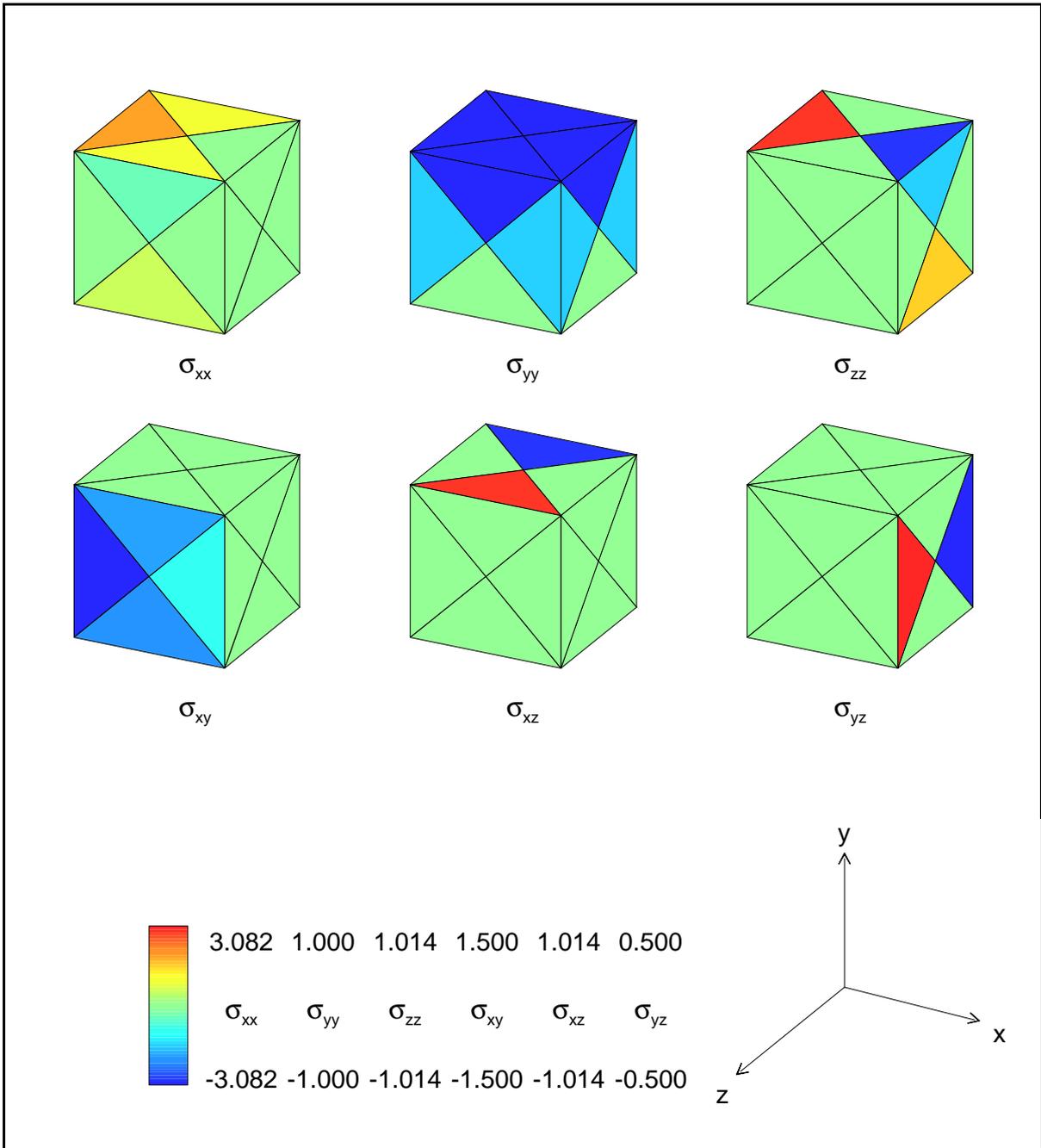


Figura 3.3 - Tensões na consola cúbica, obtidas com elementos de equilíbrio.

Os valores obtidos para a energia de deformação foram $U(\sigma_e) = 0.180684$ e $U(u_c) = 0.0675104$.

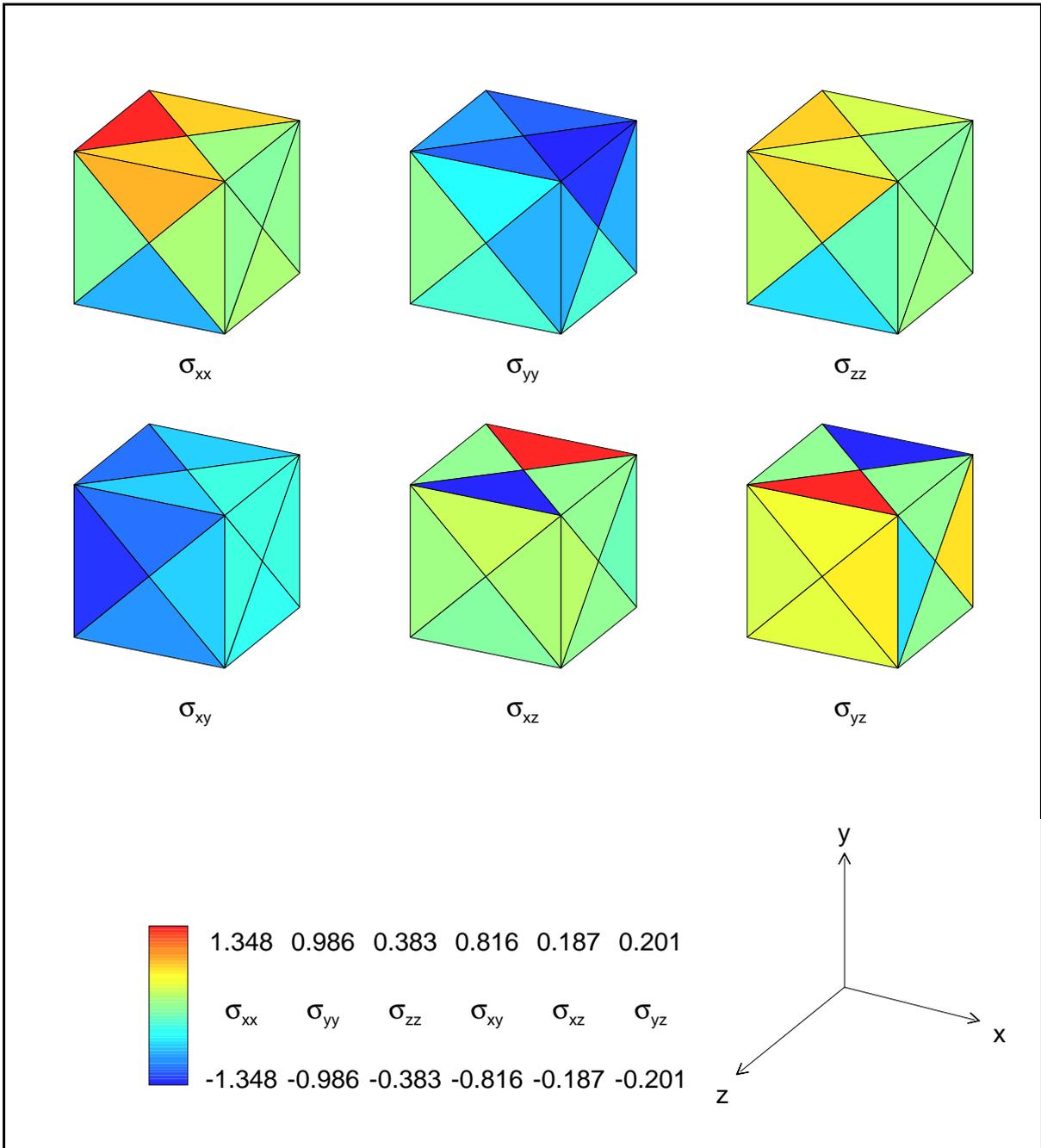


Figura 3.4 - Tensões na consola cúbica, obtidas com elementos compatíveis.

Na figura 3.5(a), representam-se os deslocamentos das faces exteriores, correspondentes à solução equilibrada. Na figura 3.5(b), representa-se a deformada correspondente à solução compatível.

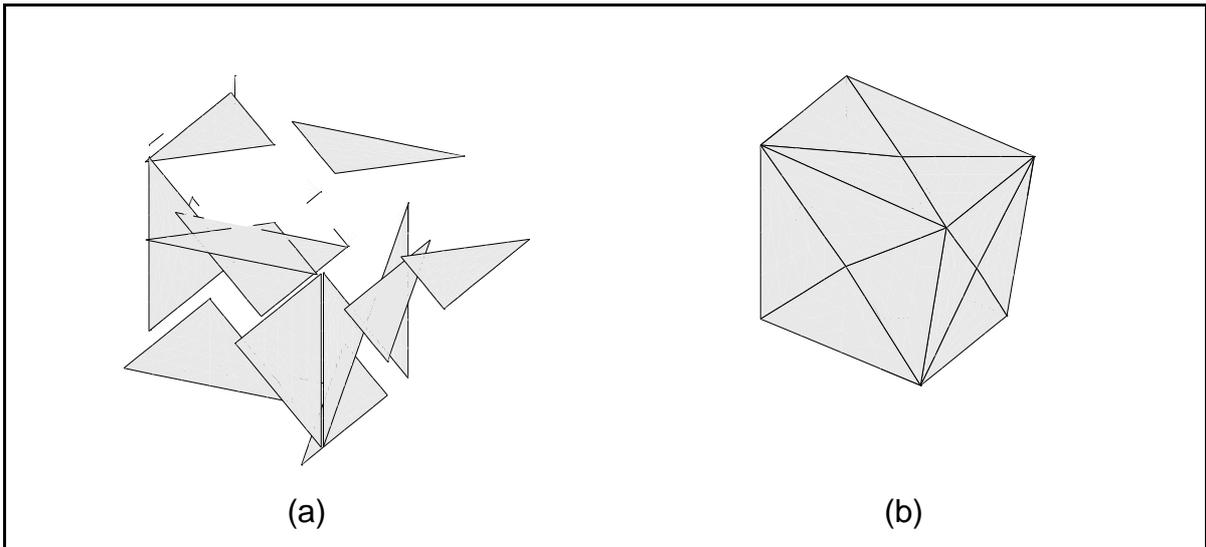


Figura 3.5 - Deformadas da consola cúbica:
(a) elementos de equilíbrio; (b) elementos compatíveis.

4. Erro nas soluções de elementos finitos

4.1. Introdução

Este capítulo aborda a existência de erro nas soluções de elementos finitos compatíveis e equilibradas. Resumem-se as propriedades do erro dos elementos finitos compatíveis e dos elementos finitos de equilíbrio. Estudam-se os defeitos de compatibilidade nas soluções de elementos finitos de equilíbrio. Parte significativa deste estudo constitui trabalho original. Estes defeitos de compatibilidade são utilizados para calcular alguns dos indicadores de erro para elementos finitos de equilíbrio sugeridos no capítulo 9, nomeadamente aquele adoptado nesta tese.

4.2. Origens do erro nas soluções de elementos finitos

Em geral, as soluções fornecidas pelo método dos elementos finitos para um dado problema físico são diferentes da realidade física. Esta diferença constitui o erro. O erro pode ser originado por diversas causas, podendo ser classificado em erro de modelação, erro de discretização do domínio, erro de discretização das funções e erro numérico.

O erro de modelação é devido ao modelo matemático do problema em cuja resolução o método dos elementos finitos vai ser aplicado. O modelo matemático é uma abstracção da realidade e, regra geral, não reproduz exactamente o comportamento do modelo físico: as propriedades do material consideradas no modelo matemático podem não ser as reais; as hipóteses feitas sobre os deslocamentos podem ser excessivamente afastadas da realidade; as acções reais podem vir a estar fora dos limites considerados.

O erro de discretização do domínio é devido à geometria dos elementos finitos utilizados, a qual pode não permitir discretizar exactamente a geometria do domínio.

O erro de discretização das funções é devido ao facto de, em geral, a discretização das funções de aproximação nos elementos finitos não conter a solução exacta do modelo matemático. Pode até acontecer que as funções de aproximação nos elementos não permitam sequer discretizar exactamente as condições de fronteira essenciais, que deviam ser satisfeitas *a priori*, ou que a implementação efectuada não permita discretizar exactamente as condições de fronteira naturais, que o modelo de elementos finitos vai aproximar.

O erro numérico é devido aos erros nos cálculos efectuados no método dos elementos finitos. Se for utilizada a integração numérica, esta pode introduzir um erro no cálculo do sistema algébrico. Os cálculos são efectuados em precisão finita, o que origina erros de truncatura. Os erros de truncatura aumentam com o número de graus de liberdade, ao contrário dos outros. Quando se tornam maiores do que os erros com outras origens, as grandezas que deviam convergir monotonicamente passam a ter um comportamento errático [UTKU e MELOSH, 1984]. A existência deste tipo de erros pode levar a que uma determinada precisão só possa ser atingida através de métodos adaptativos.

Na generalidade dos problemas estáticos de elasticidade linear bidimensional ou tridimensional, o erro mais importante na solução do modelo matemático é o erro associado à discretização das funções a aproximar [ZHONG, 1991]. Este tipo de erro, daqui em diante designado apenas por erro de discretização ou simplesmente erro, é o único abordado neste trabalho.

4.3. Medidas de erro

Genericamente, o erro é a diferença entre a solução exacta e a solução aproximada. Esta diferença pode ser medida a nível local, elementar e global, de diversas formas.

Para uma solução compatível, a partir do erro do campo de deslocamentos,

$$\mathbf{e}_c = \mathbf{u} - \mathbf{u}_c, \quad (4.1)$$

é possível obter o erro em qualquer outro campo e qualquer medida de erro.

O erro que, geralmente, tem maior interesse em problemas de engenharia é o erro no campo de tensões:

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_c \quad \text{ou} \quad \mathbf{e}_\sigma = \mathbf{e}_e = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_e. \quad (4.2)$$

Para obter uma medida de erro escalar, a nível elementar ou a nível global, deve ser utilizada uma norma.

A norma de máximo - ou norma L_∞ - do erro do campo de deslocamentos é definida como

$$\|\mathbf{e}_c\|_{L_\infty} = \text{Max}_\Omega |\mathbf{e}_c| \quad (4.3)$$

e a norma de máximo do erro do campo de tensões como

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_{L_\infty} = \text{Max}_\Omega |\mathbf{e}_\sigma|. \quad (4.4)$$

A norma L_2 do erro do campo de tensões é definida como

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_{L_2} = \left(\int_\Omega \mathbf{e}_\sigma^T \mathbf{e}_\sigma d\Omega \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

As normas definidas em (4.4) e (4.5) têm o inconveniente de não serem invariantes em relação ao sistema de eixos.

Uma norma associada aos invariantes do tensor do erro do campo de tensões é definida como

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_I = \left(\int_\Omega \sum_{ij} e_{\sigma,ij}^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (4.6)$$

A norma associada à tensão de von Mises e aos invariantes da parcela tangencial do tensor do erro do campo de tensões é definida como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_\sigma\|_M &= \\ &= \left(\int_\Omega \frac{1}{2} \left((e_{\sigma,xx} - e_{\sigma,yy})^2 + (e_{\sigma,yy} - e_{\sigma,zz})^2 + (e_{\sigma,zz} - e_{\sigma,xx})^2 + 6(e_{\sigma,xy}^2 + e_{\sigma,yz}^2 + e_{\sigma,zx}^2) \right) d\Omega \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A norma energética do erro é também invariante em relação ao sistema de eixos, sendo definida como

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left(\int_\Omega \mathbf{e}_\sigma^T \mathbf{f} \mathbf{e}_\sigma d\Omega \right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

Como se irá referir mais adiante, a norma energética é a norma natural para medir o erro, a mais importante num método adaptativo e, por isso, a mais utilizada na literatura. A energia de deformação relaciona-se com a norma energética através de

$$U(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|_E^2. \quad (4.9)$$

Geralmente, a precisão pretendida é expressa em termos de erro relativo. O erro relativo na norma energética é:

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_E}. \quad (4.10)$$

Este valor pode ser interpretado como um erro relativo médio do campo de tensões [KELLY *et al*, 1983], enquanto η^2 pode ser interpretado como um erro relativo médio no campo de deslocamentos [ZHONG, 1991].

4.4. Erro de discretização em elementos finitos compatíveis

4.4.1. Propriedades do erro

A solução de elementos finitos compatíveis, \mathbf{u}_c , minimiza a energia do erro [HERMANN, 1972], ou seja,

$$U(\mathbf{u}-\mathbf{u}_c) \leq U(\mathbf{u}-\mathbf{u}_{c,v}), \quad (4.11)$$

para todos os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis do modelo de elementos finitos, $\mathbf{u}_{c,v}$. Portanto, a norma energética é a norma natural para medir a distância entre a solução exacta e a solução de elementos finitos.

Como consequência do Princípio do Mínimo da Energia Potencial, uma solução de elementos finitos compatíveis fornece um limite superior para a energia potencial total,

$$\pi_p(\mathbf{u}) \leq \pi_p(\mathbf{u}_c). \quad (4.12)$$

Se $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ e \mathbf{u}_T forem nulos, ou seja, se as condições essenciais forem homogêneas, então [STRANG e FIX, 1973],

$$U(\mathbf{e}_c) = U(\mathbf{u}) - U(\mathbf{u}_c). \quad (4.13)$$

Se \mathbf{t}_Γ e \mathbf{f} forem nulas, ou seja, se as condições naturais forem homogêneas, então,

$$U(\mathbf{e}_c) = U(\mathbf{u}_c) - U(\mathbf{u}). \quad (4.14)$$

Num caso genérico [ODEN *et al*, 1989],

$$U(\mathbf{e}_c) = \pi_p(\mathbf{u}_c) - \pi_p(\mathbf{u}), \quad (4.15)$$

ou seja, a energia do erro é igual ao erro na energia. Mais uma vez se verifica que a norma energética é a norma natural para medir o erro.

4.4.2. Defeitos de equilíbrio

A existência de erro numa discretização por elementos finitos compatíveis pode ser detectada a partir da não satisfação das condições de equilíbrio pela solução de elementos finitos. Este fenómeno manifesta-se através dos defeitos de equilíbrio, que se definem em seguida.

O resíduo na equação de equilíbrio (2.34), \mathbf{r}_c ,

$$\mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u}_c - \mathbf{d}^* \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{f} = \mathbf{r}_c. \quad (4.16)$$

O defeito na tensão na fronteira estática Γ_t , \mathbf{G}_c ,

$$\mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u}_c - \mathbf{N} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{G}_c = \mathbf{t}_\Gamma. \quad (4.17)$$

O salto na tensão nos lados $\Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma$, $\mathbf{J}_{c,(i)}$,

$$\sum_i (\mathbf{N}_{(i),(i)} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u}_{c,(i)} - \mathbf{N}_{(i),(i)} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) + \mathbf{J}_{c,(i)} = \mathbf{0}, \quad (4.18)$$

em que o somatório em i é extensivo aos dois elementos adjacentes ao lado $\Gamma_{(i)}$.

Estes defeitos de equilíbrio podem ser imediatamente interpretados como uma força de massa ou uma tensão aplicada num lado. Deste modo, a solução de elementos finitos é a solução exacta de um "problema perturbado" obtido do problema original subtraindo ao carregamento os defeitos de equilíbrio.

O erro no campo de deslocamentos é a solução exacta do problema obtido substituindo o carregamento original pelos defeitos de equilíbrio:

$$\mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{e}_c + \mathbf{r}_c = \mathbf{0}, \text{ no interior de cada } \Omega_{(i)}; \quad (4.19)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{e}_c = \mathbf{G}_c, \text{ em } \Gamma_t; \quad (4.20)$$

$$\mathbf{e} \sum_i \mathbf{N}_{(i),(i)} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{e}_{c,(i)} = \mathbf{J}_{c,(i)}, \text{ em cada } \Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma. \quad (4.21)$$

Estas equações são designadas por equações do erro.

4.5. Erro de discretização em elementos finitos de equilíbrio

4.5.1. Propriedades do erro

A solução de elementos finitos de equilíbrio, σ_e , minimiza a energia do erro, ou seja,

$$U(\sigma - \sigma_e) \leq U(\sigma - \sigma_{e,v}), \quad (4.22)$$

para todos os campos de tensões estaticamente admissíveis do modelo de elementos finitos, $\sigma_{e,v}$. Portanto, para os elementos finitos de equilíbrio, a norma energética é também a norma natural para medir o erro.

Como consequência do Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar, uma solução de elementos finitos de equilíbrio fornece um limite superior para a energia potencial complementar,

$$\pi_c(\sigma) \leq \pi_c(\sigma_e). \quad (4.23)$$

Se ε_θ e \mathbf{u}_Γ forem nulos, então,

$$U(\mathbf{e}) = U(\sigma_e) - U(\sigma). \quad (4.24)$$

Se \mathbf{t}_Γ e \mathbf{f} forem nulas, então,

$$U(\mathbf{e}) = U(\sigma) - U(\sigma_e). \quad (4.25)$$

Num caso genérico [ODEN *et al*, 1989],

$$U(\mathbf{e}) = \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e) - \pi_c(\boldsymbol{\sigma}), \quad (4.26)$$

ou seja, a energia do erro é igual ao erro na energia.

4.5.2. Defeitos de compatibilidade

A existência de erro numa discretização por elementos finitos de equilíbrio pode ser detectada a partir da não satisfação das condições de compatibilidade pela solução de elementos finitos. Este fenómeno manifesta-se através de defeitos de compatibilidade no interior dos elementos e nos lados dos elementos.

No interior dos elementos, a falta de compatibilidade pode ser medida através do resíduo nas equações de compatibilidade de St Venant, referidas em 2.7.

Em 3D, este resíduo é um tensor de quarta ordem, \mathbf{r}_e , com 81 componentes:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = r_{ijkl}. \quad (4.27)$$

Destas componentes, 27 são sempre nulas, 12 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} = r_{xyxz}, \quad (4.28)$$

12 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} = r_{xyyz}, \quad (4.29)$$

12 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} = r_{xzyz}, \quad (4.30)$$

6 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = r_{xxyy}, \quad (4.31)$$

6 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = r_{xxzz}, \quad (4.32)$$

e 6 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = r_{yyzz}. \quad (4.33)$$

Em 2D o resíduo é:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = r. \quad (4.34)$$

Note-se que, para elementos com tensões de grau não superior a um, estes resíduos são sempre nulos.

Considere-se agora um lado entre dois elementos. As fibras contidas nesse lado sofrem extensões e variações de curvatura. Estas extensões e variações de curvatura não são, em geral, as mesmas em ambos os elementos, o que impede a continuidade entre os deslocamentos de um elemento e os do outro.

Para medir esta falta de compatibilidade, considere-se um lado genérico $\Gamma_{(j)}$. Para esse lado e para cada elemento $\Omega_{(i)}$ adjacente a ele, define-se, com base na matriz de rotação $\mathbf{M}_{(i),(i)}$ definida em (3.12) ou (3.13), a matriz $\mathbf{M}'_{(j),(i)}$, dada por

$$\mathbf{M}'_{(j),(i)} = \begin{bmatrix} -n_y \\ n_x \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

em 2D e:

$$\mathbf{M}'_{(j),(i)} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{2x} \\ t_{1y} & t_{2y} \\ t_{1z} & t_{2z} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

em 3D.

Para cada $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$, pode definir-se o salto nas extensões, $\mathbf{J1}_{e,(j)}$:

$$\mathbf{M}'_{(j),(i)}{}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} \mathbf{M}'_{(j),(i)} - \mathbf{M}'_{(j),(k)}{}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} \mathbf{M}'_{(j),(k)} = \mathbf{J1}_{e,(j)}, \quad (4.37)$$

em que $\Omega_{(i)}$ e $\Omega_{(k)}$ são os elementos adjacentes a $\Gamma_{(j)}$.

Em 3D, o salto nas extensões é o tensor

$$\mathbf{J1}_{e,(j)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t_1 t_1} & \varepsilon_{t_1 t_2} \\ \varepsilon_{t_1 t_2} & \varepsilon_{t_2 t_2} \end{bmatrix}_{(j),(i)} - \begin{bmatrix} \varepsilon_{t_1 t_1} & \varepsilon_{t_1 t_2} \\ \varepsilon_{t_1 t_2} & \varepsilon_{t_2 t_2} \end{bmatrix}_{(j),(k)}. \quad (4.38)$$

Em 2D,

$$\mathbf{J1}_{e,(j)} = [\varepsilon_{tt}]_{(j),(i)} - [\varepsilon_{tt}]_{(j),(k)}. \quad (4.39)$$

Na fronteira cinemática Γ_u , pode definir-se um defeito nas extensões, $\mathbf{G1}_e$, análogo.

Para cada $\Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma$, pode também definir-se o salto nas curvaturas, $\mathbf{J2}_{e,(j)}$.

Em 3D, o salto nas curvaturas é o tensor

$$\mathbf{J2}_{e,(j)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_2^2} \end{bmatrix}_{(j),(i)} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_2^2} \end{bmatrix}_{(j),(k)}, \quad (4.40)$$

que pode ser calculado, a partir das extensões, através de

$$\mathbf{J2}_{e,(j)} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_1}}{\partial n} & \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_2}}{\partial n} \\ \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_2}}{\partial n} & 2 \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_2} - \frac{\partial \varepsilon_{t_2 t_2}}{\partial n} \end{bmatrix}_{(j),(i)} + \quad (4.41)$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_1}}{\partial n} & \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_2}}{\partial n} \\ \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_2}}{\partial n} & 2 \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_2} - \frac{\partial \varepsilon_{t_2 t_2}}{\partial n} \end{bmatrix}_{(j),(k)}.$$

Em 2D,

$$\mathbf{J2}_{e,(j)} = \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right]_{(j),(i)} + \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right]_{(j),(k)} = \left[2 \frac{\partial \varepsilon_{nt}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial n} \right]_{(j),(i)} + \left[2 \frac{\partial \varepsilon_{nt}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial n} \right]_{(j),(k)}. \quad (4.42)$$

Na fronteira cinemática Γ_u , pode definir-se um defeito nas curvaturas, \mathbf{G}_e , análogo.

Além do resíduo nas equações de compatibilidade e dos saltos nas extensões e nas curvaturas, é possível definir outras medidas dos defeitos de compatibilidade. Estas medidas são baseadas no campo de deslocamentos, \mathbf{u}_e , correspondente a uma solução equilibrada, σ_e .

A parcela de \mathbf{u}_e não correspondente a movimentos de corpo rígido pode ser obtida, em cada elemento $\Omega_{(i)}$, através de (3.4), sendo $\hat{\mathbf{u}}_{(i)}$ tal que

$$\left(\int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\Psi_{(i)})^T \mathbf{k} (\mathbf{d}\Psi_{(i)}) d\Omega \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\Psi_{(i)})^T \sigma_{e,(i)} d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\Psi_{(i)})^T \mathbf{k} \varepsilon_\theta d\Omega. \quad (4.43)$$

As funções de interpolação $\Psi_{(i)}$ devem ser do grau imediatamente acima do grau das funções de aproximação de tensões $\mathbf{S}_{(i)}$.

Tendo determinado a parcela de \mathbf{u}_e não correspondente a movimentos de corpo rígido, pode definir-se a medida da incompatibilidade das deformações [KLEIBER, 1980]

$$\mathbf{i} = \mathbf{f} \sigma_e + \varepsilon_\theta - \mathbf{d} \mathbf{u}_e. \quad (4.44)$$

Note-se que \mathbf{i} só é nula se o campo de extensões satisfizer as equações de compatibilidade de St Venant.

Os deslocamentos de corpo rígido podem ser escolhidos de modo a satisfazer da forma mais aproximada possível, para todos os lados $\Gamma_{(i)}$, as equações

$$\left(\int_{\Gamma_{(i)}} \Psi_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \Psi_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)}, \quad (4.45)$$

em que $\Omega_{(i)}$ e $\Omega_{(j)}$ são os elementos adjacentes a $\Gamma_{(i)}$. Estas equações formam um sistema global envolvendo toda a malha. Se existirem modos espúrios, algumas destas equações serão dependentes. Para \mathbf{u}_e ser independente da amplitude destes modos, as equações dependentes terão de ser substituídas por equações envolvendo as rotações médias dos lados.

Se não existirem modos espúrios, em vez de utilizar (4.45), os deslocamentos de corpo rígido podem ser escolhidos de modo a satisfazer da forma mais aproximada possível, para cada lado $\Gamma_{(i)}$ de cada elemento $\Omega_{(i)}$,

$$\left(\int_{\Gamma_{(i)}} \boldsymbol{\Psi}_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma. \quad (4.46)$$

Esta alternativa permite determinar $\mathbf{u}_{e,(i)}$ elemento a elemento. Se existirem modos espúrios, a solução dependerá da amplitude destes, podendo não ser igual à obtida utilizando (4.45).

Se o campo de extensões satisfizer as equações de compatibilidade de St Venant, a equação de compatibilidade de um elemento finito de equilíbrio (3.37) transforma-se em

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T d\mathbf{u}_{e,(i)} d\Omega = \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma. \quad (4.47)$$

Integrando por partes o primeiro termo e tendo em conta (3.27), obtém-se

$$\sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \mathbf{u}_{e,(i)} d\Gamma = \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma. \quad (4.48)$$

Se os lados do elemento não forem curvos e se utilizarem apenas as equações correspondentes aos termos constantes de $\mathbf{S}_{(i)}$, obtém-se

$$\sum_j \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{u}_{e,(i)} d\Gamma = \sum_j \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma. \quad (4.49)$$

Assim, para elementos triangulares, em 2D, e tetraédricos, em 3D, o número de movimentos de corpo rígido mais o número de equações em (4.49) é igual ao número de equações em (4.46). Consequentemente, nestes casos, é possível satisfazer exactamente as equações (4.46) e, portanto, também as (4.45).

Note-se que, para triângulos, em vez de utilizar (4.46), pode ser utilizada

$$\left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{M}'_{(i),(i)}^T \boldsymbol{\Psi}_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} + \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{M}'_{(i),(e)}^T \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma = 0. \quad (4.50)$$

o que permite obter 3 equações, em vez de 6. Estas 3 equações são sempre linearmente independentes.

Tendo determinado \mathbf{u}_e , pode definir-se, para cada $\Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma$, a descontinuidade de deslocamento [MAUNDER, 1986]

$$\mathbf{d}_{(j)} = \mathbf{u}_{e,(l)} - \mathbf{u}_{e,(i)}. \quad (4.51)$$

Em Γ_u , a descontinuidade de deslocamento é

$$\mathbf{d} = \mathbf{u}_\Gamma - \mathbf{u}_e. \quad (4.52)$$

A existência de modos espúrios, embora não afecte \mathbf{i} , afecta estas descontinuidades de deslocamentos.

Note-se que, se a solução exacta para o campo de tensões for polinomial de grau n , o campo de tensões obtido com funções de grau n é o exacto, mas os deslocamentos nos lados, \mathbf{v}_e , não são nem exactos nem compatíveis. Para obter deslocamentos \mathbf{v}_e exactos e, portanto, compatíveis, seria necessário utilizar funções de grau $n+1$. Isto impossibilita a interpretação das descontinuidades entre os deslocamentos \mathbf{v}_e como defeitos de compatibilidade.

5. Método de refinamento

5.1. Introdução

Neste capítulo, após um resumo dos vários métodos de melhorar as soluções de elementos finitos já publicados, descreve-se o método utilizado neste trabalho.

5.2 Métodos de melhorar as soluções de elementos finitos

5.2.1. Introdução

Em geral, o erro de discretização pode ser diminuído aumentando o número de graus de liberdade e/ou distribuindo os graus de liberdade pelo domínio de uma forma mais adequada. O aumento do número de graus de liberdade pode ser obtido utilizando mais elementos e/ou utilizando elementos de grau mais elevado. Se a malha com maior número de graus de liberdade contiver estritamente as malhas anteriores, a convergência, para modelos compatíveis ou equilibrados, é monotónica.

Note-se que, na aplicação de qualquer método de melhorar uma malha, os nós que definem a geometria da fronteira devem ser sempre colocados na fronteira do domínio a discretizar e não na fronteira da malha inicial. Se isto não for feito, o erro de discretização do domínio pode tornar-se maior do que o erro de discretização da função a aproximar.

Nesta secção, descrevem-se diversos métodos de melhorar as malhas de modo a diminuir o erro de discretização. Apesar de serem sempre exemplificados para elementos finitos de deslocamento tradicionais, estes métodos podem ser aplicados a qualquer tipo de elementos finitos.

5.2.2. Alteração da posição dos vértices

Considere-se o modelo de elementos finitos compatíveis. A energia potencial total de uma malha com um determinado número de nós e uma determinada topologia é função quer dos deslocamentos nodais quer das coordenadas dos vértices [CARROL e BARKER, 1973] [MC NEICE e MARCAL, 1973]:

$$\pi_p(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}. \quad (5.1)$$

Estacionarizando a energia potencial total em relação a todas estas variáveis, obtêm-se as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{F} &= \mathbf{0}, \\ \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Estas equações formam um sistema não linear. A sua solução fornece a malha óptima para um determinado tipo de elementos e uma determinada topologia. Como a solução explícita deste sistema tem um custo demasiado elevado, este método não é utilizado na prática.

Dada uma determinada malha inicial e a solução a ela associada, pode ser obtida uma solução melhor alterando a posição dos vértices da malha inicial, com base na solução já obtida. Estes métodos têm um custo menos elevado do que a solução directa das equações (5.2).

Contudo, quer utilizando um método quer o outro, pode não ser possível obter a precisão necessária com os graus de liberdade escolhidos *a priori*, razão pela qual este método merece pouca atenção.

5.2.3. Remalhagem

Uma maneira de obter uma solução melhor é gerar uma malha inteiramente nova. Existem algoritmos que permitem gerar malhas a partir de uma distribuição de diâmetros (h) ou de volumes dos elementos. Estes algoritmos geram malhas não estruturadas de elementos triangulares ou quadrangulares, em 2D, e

tetraédricos, em 3D. Utilizando um algoritmo deste tipo, é possível gerar uma malha adaptada à solução e à precisão pretendida.

SUHARA e FUKUDA [1972] utilizaram, em refinamento adaptativo, um algoritmo que permite gerar malhas de triângulos com densidades diferentes em diferentes subdomínios de um domínio em 2D.

YERRY e SHEPHARD [1983] e PERAIRE *et al* [1987] desenvolveram algoritmos que permitem gerar malhas de elementos triangulares com uma distribuição de diâmetros arbitrária, muito utilizados em refinamento adaptativo. O primeiro algoritmo baseia-se na decomposição espacial do domínio através de uma estrutura de dados em árvore, enquanto o segundo se baseia na técnica de avanço da frente. YERRY e SHEPHARD [1984] e PERAIRE *et al* [1988] adaptaram os algoritmos anteriores para gerar malhas de elementos tetraédricos com uma distribuição de diâmetros arbitrária.

ZHU *et al* [1991] desenvolveram um algoritmo que permite gerar malhas de elementos quadrangulares com uma distribuição de diâmetros arbitrária, o qual tem sido utilizado em refinamento adaptativo.

5.2.4. Refinamento de malhas

5.2.4.1. Introdução

O refinamento de uma malha consiste em subdividir e/ou aumentar o grau de elementos dessa malha.

O refinamento de uma malha pode ser uniforme ou não uniforme. No refinamento uniforme, todos os elementos da malha são processados da mesma maneira, sendo a sua implementação directa. No entanto, é menos económico do que o refinamento não uniforme.

5.2.4.2. Refinamento h

5.2.4.2.1. Introdução

No refinamento h, mantém-se o grau dos elementos e subdividem-se alguns deles.

As sucessivas subdivisões não devem degradar a qualidade geométrica dos elementos. Esta condição é satisfeita se um elemento for refinado dividindo-o em k^D elementos e dividindo cada aresta em k partes iguais, sendo k um inteiro não

negativo e D a dimensão espacial do problema. Deste modo, os elementos "filhos" herdam as proporções do "pai".

No refinamento não uniforme, pretende-se obter uma malha refinada com uma dada distribuição de diâmetros dos elementos. Esta distribuição pode ser aproximada dividindo cada elemento de uma malha em k^D elementos, com k variável de elemento para elemento. Contudo, para impor a compatibilidade, é preferível fazer refinamentos sucessivos em que os elementos são divididos em 2^D elementos.

5.2.4.2.2. Malhas irregulares

Quando se subdividem apenas alguns elementos, criam-se vértices que não pertencem a todos os elementos que lhes são adjacentes. Estes vértices designam-se por vértices irregulares e, nos exemplos bidimensionais da figura 5.1, estão representados a branco.

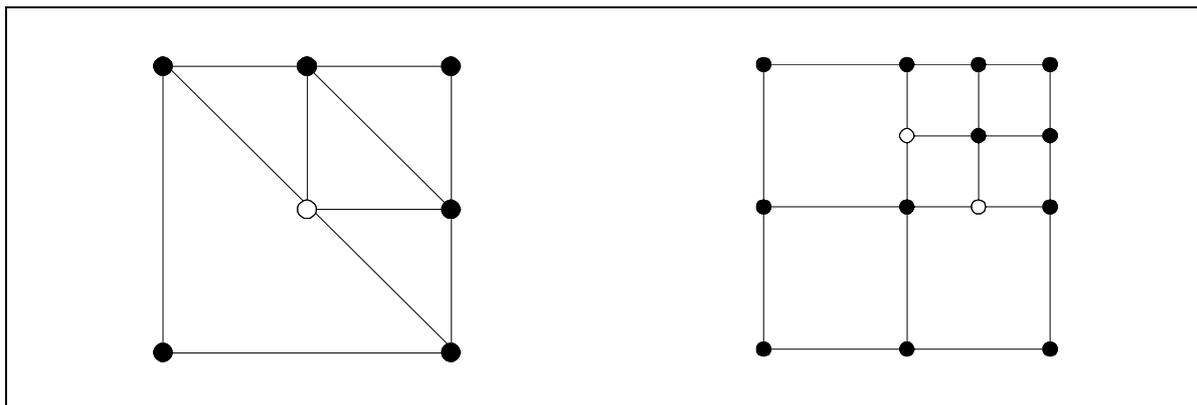


Figura 5.1 - Refinamento h , criando vértices irregulares.

Se os elementos forem de grau superior a um, existirão também nós irregulares não coincidentes com os vértices irregulares.

A compatibilidade é assegurada impondo restrições aos deslocamentos dos nós irregulares. Só os deslocamentos dos nós regulares são independentes. Se a relação entre os deslocamentos de todos os nós e os deslocamentos dos nós regulares for escrita na forma:

$$\hat{\mathbf{u}}' = \mathbf{T} \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.3)$$

a matriz de rigidez do modelo restringido será obtida da do modelo não restringido através de [CAREY, 1976]:

$$K = T^T K' T. \quad (5.4)$$

A estrutura de dados utilizada para descrever a malha e os cálculos serão mais simples se as malhas forem 1-irregulares, isto é, se nenhum elemento tiver mais do que 1 vértice irregular num mesmo lado (ou aresta, em 3D).

Se forem refinados apenas os elementos indicados pela estratégia adaptativa, a malha pode não ser 1-irregular. Se cada elemento refinado foi subdividido em 2^D elementos, a malha pode ser tornada 1-irregular refinando todos os elementos que tenham dois ou mais vértices irregulares [BANK e SHERMAN, 1981] no mesmo lado (ou aresta, em 3D). Isto é equivalente a não permitir diferenças superiores a um entre os níveis de refinamento de elementos adjacentes.

Uma variante para a colocação dos nós irregulares é a representada na figura 5.2, onde as subdivisões a traço interrompido foram efectuadas em elementos que não necessitavam de refinamento [STEIN e RUST, 1991].

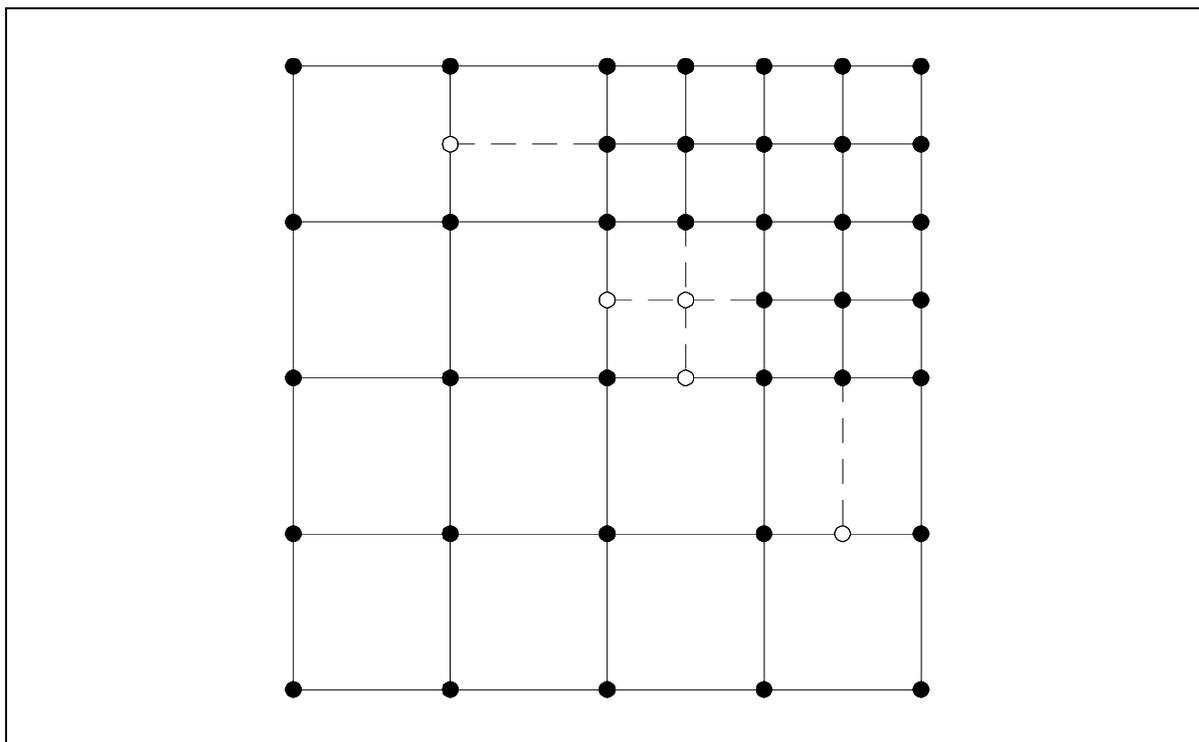


Figura 5.2 - Variante para o refinamento h de quadriláteros, criando vértices irregulares.

5.2.4.2.3. Malhas regulares

Uma malha de triângulos 1-irregular pode ser transformada numa malha regular dividindo em quatro todos os triângulos com um vértice irregular em dois ou mais lados e, em seguida, dividindo os triângulos com um vértice irregular num dos lados em dois triângulos temporários [BANK e SHERMAN, 1981], que serão juntos antes do refinamento seguinte [BANK, 1983]. Esta última operação é necessária para evitar o aparecimento de triângulos com ângulos internos demasiado pequenos. Contudo, tem o inconveniente de fazer com que as malhas anteriores não estejam estritamente contidas nas malhas refinadas, o que não garante a monotonicidade da convergência. Em [BORNEMANN *et al*, 1993] pode encontrar-se uma descrição de uma generalização deste método para tetraedros, em 3D.

Se o refinamento de uma malha de triângulos for feito bissectando o maior lado de cada triângulo a refinar, a malha refinada pode ser tornada regular utilizando um dos dois algoritmos de RIVARA [1984]. Após uma sequência de refinamentos feitos utilizando um destes algoritmos, o menor ângulo interno dum triângulo da malha final nunca é inferior a metade do menor ângulo interno dum triângulo da malha inicial, e a transição entre triângulos grandes e pequenos é sempre suave. Cada uma das malhas anteriores está estritamente contida nas refinadas. O algoritmo mais simples é:

1. Bissectar cada triângulo a refinar pelo seu maior lado
2. Bissectar cada triângulo com vértices irregulares pelo maior lado
3. Se a malha é regular, parar
4. Ir para 2

Este algoritmo foi generalizado para malhas de tetraedros por RIVARA e LEVIN [1992].

ROBERTI e MELKANOFF [1987] utilizaram um algoritmo semelhante para tornar regulares malhas obtidas por divisão dos triângulos a refinar em quatro:

1. Dividir em quatro cada triângulo a refinar
2. Dividir em quatro cada triângulo com um vértice irregular nos três lados
3. Bissectar cada triângulo com vértices irregulares pelo maior lado
4. Se a malha é regular, parar
5. Ir para 2

Em [SEWELL, 1976] e [MITCHELL, 1989] podem encontrar-se descrições de algoritmos baseados na bissecção de pares de triângulos, os quais dão sempre origem a malhas regulares.

Uma malha de quadriláteros 1-irregular pode ser transformada numa malha regular refinando todos os quadriláteros com um vértice irregular em três ou mais lados e, em seguida, dividindo os quadriláteros com um vértice irregular num dos

lados em três triângulos temporários e dividindo os quadriláteros com um vértice irregular em dois lados em dois ou três quadriláteros temporários, que serão juntos antes do refinamento seguinte [BANK, 1983]. Tal como para os triângulos, esta última operação tem o inconveniente de fazer com que as malhas anteriores não estejam estritamente contidas nas malhas refinadas. Utilizando o método de PLANK [1990], não é necessário recorrer a triângulos, obtendo-se malhas como a representada na figura 5.3.

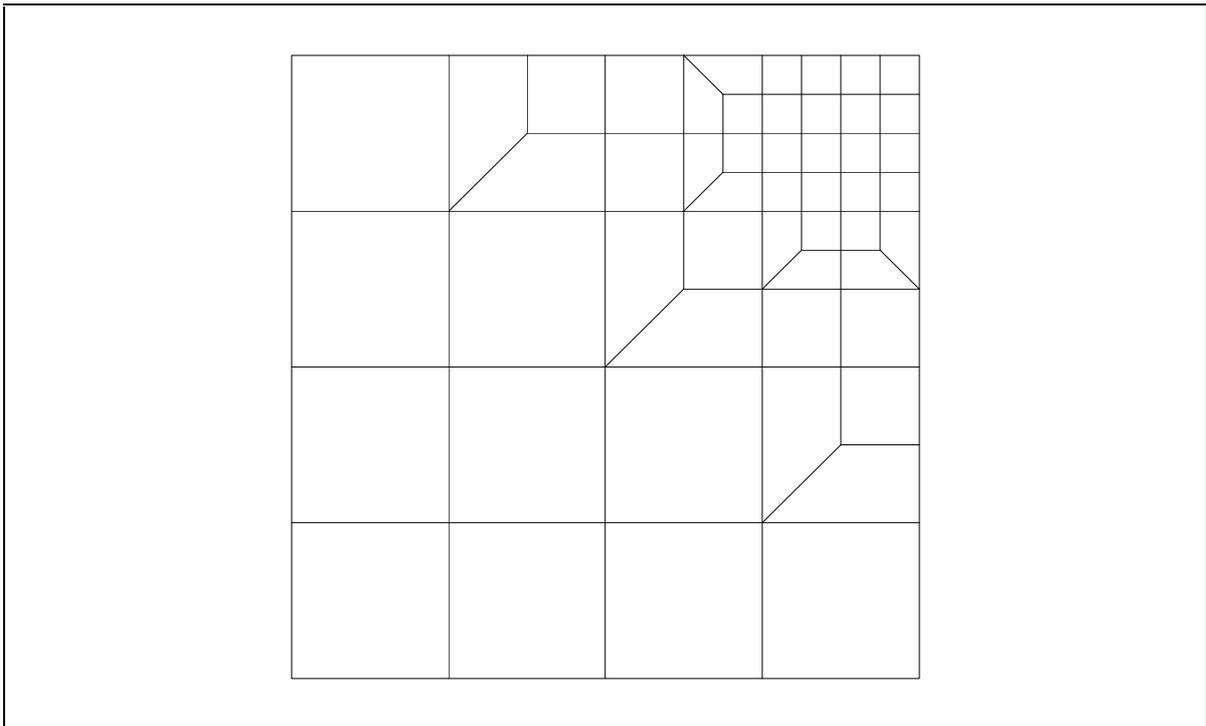


Figura 5.3 - Refinamento h de quadriláteros, sem criar vértices irregulares.

Uma malha de quadriláteros de quatro nós 1-irregular pode ser transformada numa malha regular através dos elementos de transição utilizados por MCDILL *et al* [1987]. Estes elementos podem ter um nó a meio de qualquer lado. Na figura 5.4, representam-se algumas das funções de interpolação utilizadas num elemento com um nó num só lado. Os mesmos autores utilizaram elementos análogos para fazer transições em malhas de elementos hexaédricos de oito nós.

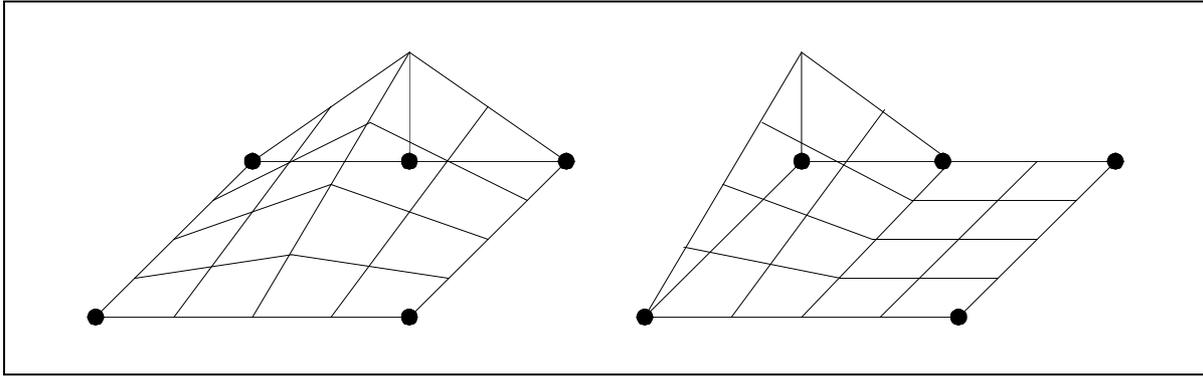


Figura 5.4 - Elemento de transição para o refinamento h.

Se, em vez de dividir em quatro os quadriláteros a refinar, estes forem divididos em nove, a malha pode ser tornada regular, sem recorrer a triângulos, conforme descrito por VESLUD e MAURICE [1993], obtendo-se malhas como a representada na figura 5.5. Em contrapartida, a transição dum elemento de não refinado para refinado é mais brusca.

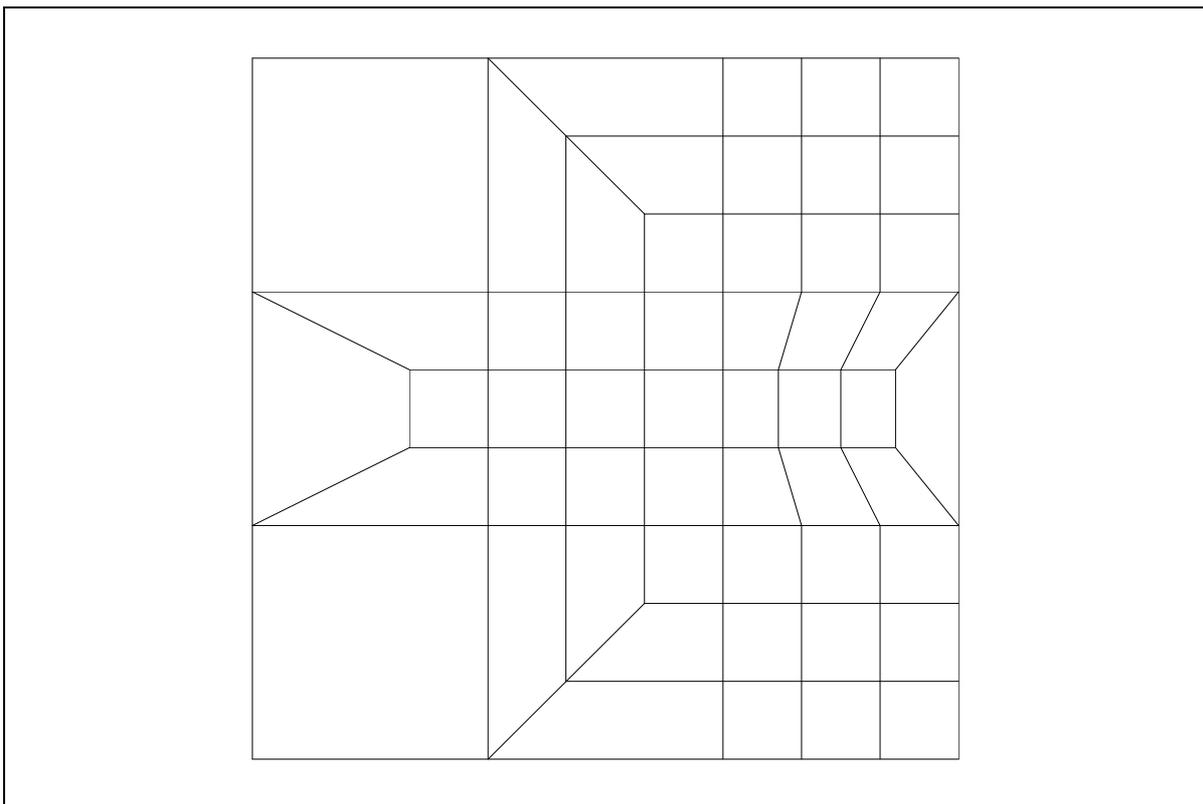


Figura 5.5 - Refinamento h de quadriláteros, sem criar vértices irregulares.

LEE e BATHE [1994] utilizaram uma abordagem que permite obter malhas regulares de quadriláteros, recorrendo a uma biblioteca de malhas para subdomínios quadriláteros, com valores pré-definidos para a densidade de elementos nos vértices do subdomínio. Dada uma distribuição de densidades de

elementos nos vértices da malha inicial, cada elemento desta é considerado como um subdomínio para o qual se escolhe na biblioteca a malha apropriada. As malhas da biblioteca são tais que a nova malha é sempre regular.

5.2.4.3. Refinamento p

No refinamento p, mantém-se o número e a topologia dos elementos e aumenta-se o grau de alguns deles. Geralmente, o refinamento p é efectuado utilizando elementos hierárquicos, conforme descrito em 5.2.4.5.

O refinamento p pode ser efectuado criando nós irregulares ao refinar apenas alguns elementos, como é exemplificado, em 2D, na figura 5.6. Estes nós não pertencem a todos os elementos que lhes são adjacentes.

A compatibilidade é assegurada impondo restrições aos deslocamentos desses nós, da forma descrita em 5.2.4.2.2.

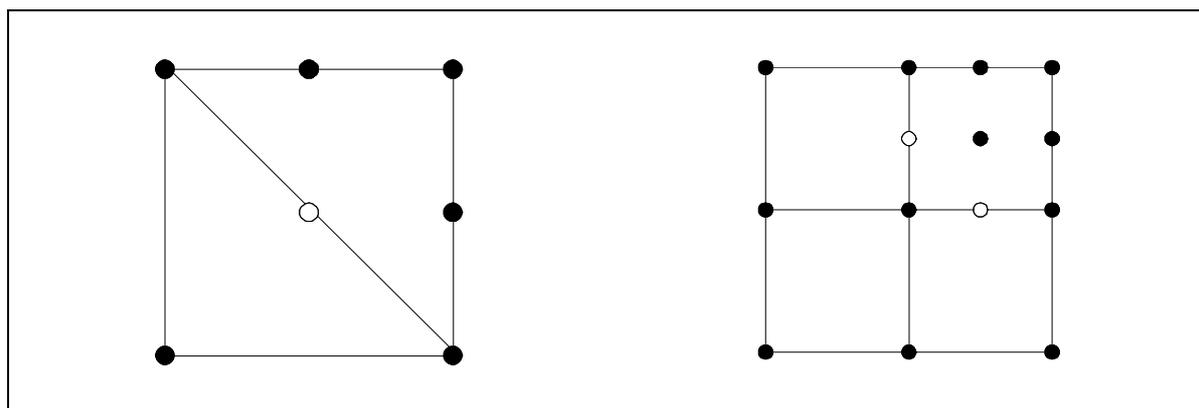


Figura 5.6 - Refinamento p, criando nós irregulares.

Podem também ser criadas malhas regulares, com elementos de graus diferentes, utilizando elementos de transição como o representado na figura 5.7.

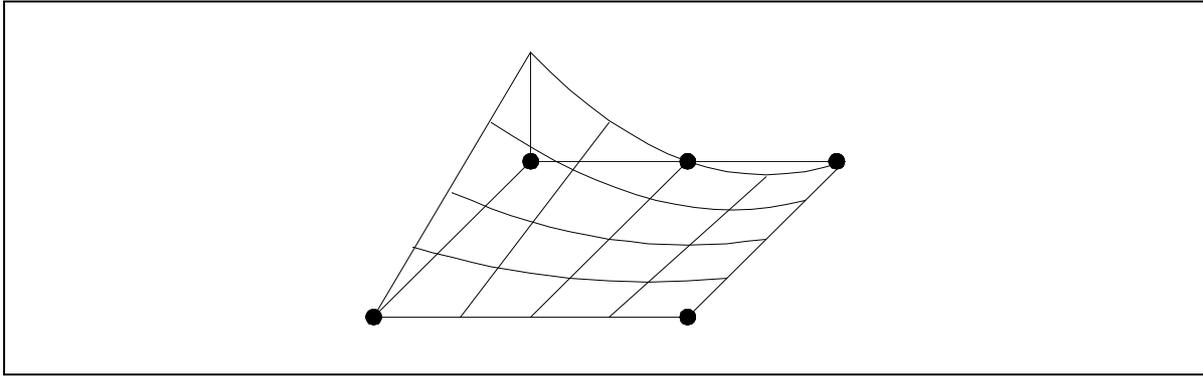


Figura 5.7 - Elemento de transição para o refinamento p.

5.2.4.4. Refinamento hp

No refinamento hp, diminui-se o diâmetro e , simultaneamente, aumenta-se o grau dos elementos da malha.

5.2.4.5. Refinamento hierárquico

Elementos hierárquicos são aqueles em que as variáveis nodais e as funções de aproximação do elemento são um subconjunto das variáveis nodais e funções de aproximação dos elementos de ordem mais elevada. Estas propriedades dos elementos hierárquicos facilitam a compatibilização de elementos de ordem diferente numa dada malha.

O refinamento hierárquico pode ser do tipo h [GAGO, 1982] ou do tipo p [ZIENKIEWICZ et al, 1971].

Na figura 5.8, representam-se, para o refinamento h de um elemento finito bidimensional, as funções de aproximação correspondentes a um nó num vértice, a meio de um lado e no centro do elemento. À esquerda, representam-se as funções de aproximação tradicionais e, à direita, as hierárquicas.

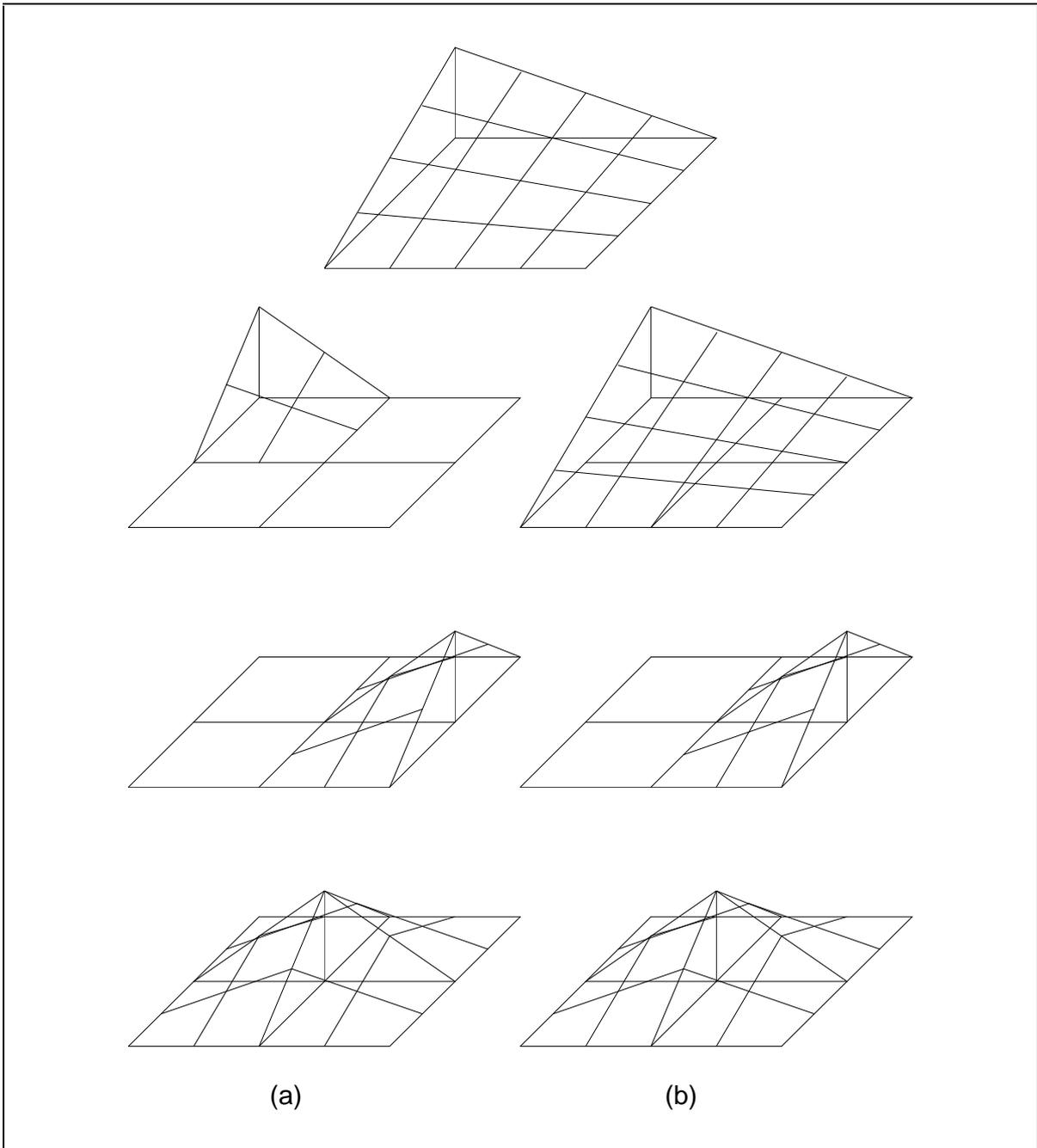


Figura 5.8 - Refinamento h tradicional (a) e hierárquico (b).

Na figura 5.9, representam-se, para o refinamento p de um elemento finito bidimensional, as funções de aproximação correspondentes a um nó num vértice, a meio de um lado e no centro do elemento. À esquerda, representam-se as funções de aproximação tradicionais e, à direita, as hierárquicas.

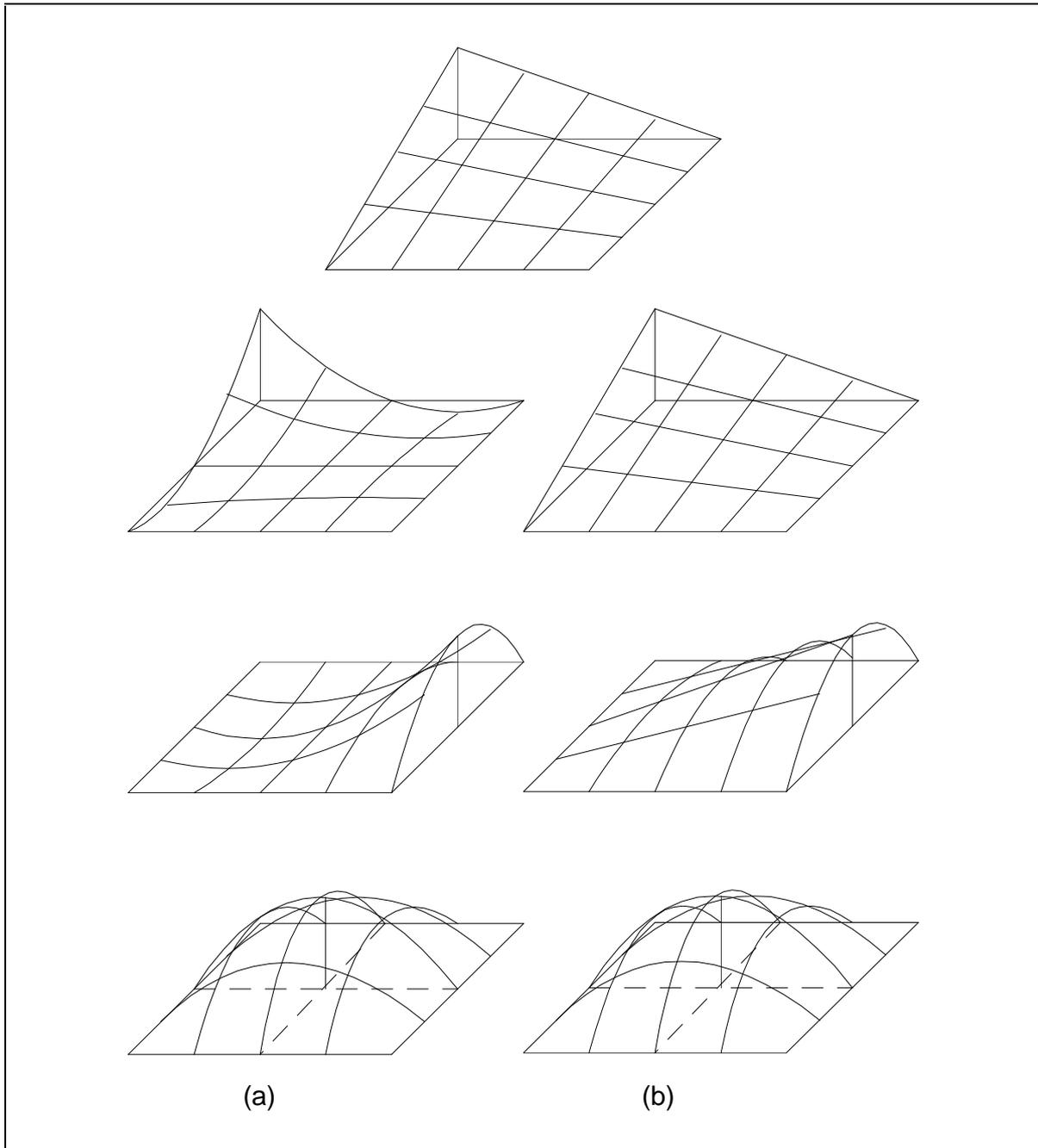


Figura 5.9 - Refinamento p tradicional (a) e hierárquico (b).

De modo semelhante ao que acontece com as funções de aproximação, as matrizes de rigidez e os vectores de forças de elementos hierárquicos são submatrizes e subvectores, respectivamente, das matrizes e vectores dos elementos de ordem mais elevada. O mesmo se passa em relação às matrizes e vectores globais de malhas refinadas hierarquicamente.

Como inconveniente deste método de refinamento, aponta-se a necessidade de uma estrutura de dados de maior complexidade para definir e gerir a malha de elementos hierárquicos.

5.3. Método utilizado

Como as formulações de elementos finitos utilizadas neste trabalho permitem que o número de lados dum elemento seja independente das funções de aproximação utilizadas no interior desse elemento, simplificando a ligação entre elementos de malhas irregulares, utiliza-se um método de refinamento h não uniforme que dá origem a malhas irregulares [PITERI e ALMEIDA, 1995] [PITERI, 1997].

A ligação entre os elementos criados pelo refinamento e os que lhes são adjacentes é efectuada aumentando o número de lados destes últimos, de modo a tornar os vértices regulares. Este processo é exemplificado, em 2D, na figura 5.10: ao refinar o elemento b , o elemento a , embora mantendo a forma triangular e as funções de aproximação utilizadas no seu interior, passou a ter quatro lados: 1, 6, 9 e 2.

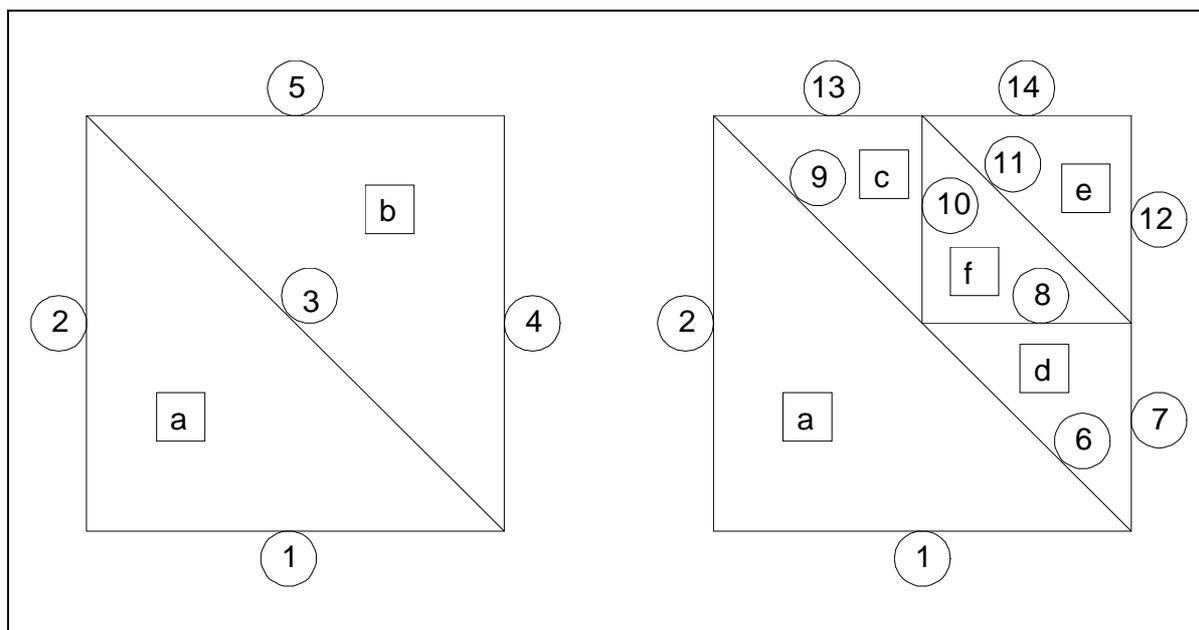


Figura 5.10 - Refinamento do elemento b , transformando o elemento a num elemento de quatro lados.

Não existe limite para o número de lados de um elemento, sendo possíveis situações como a exemplificada, em 2D, na figura 5.11.

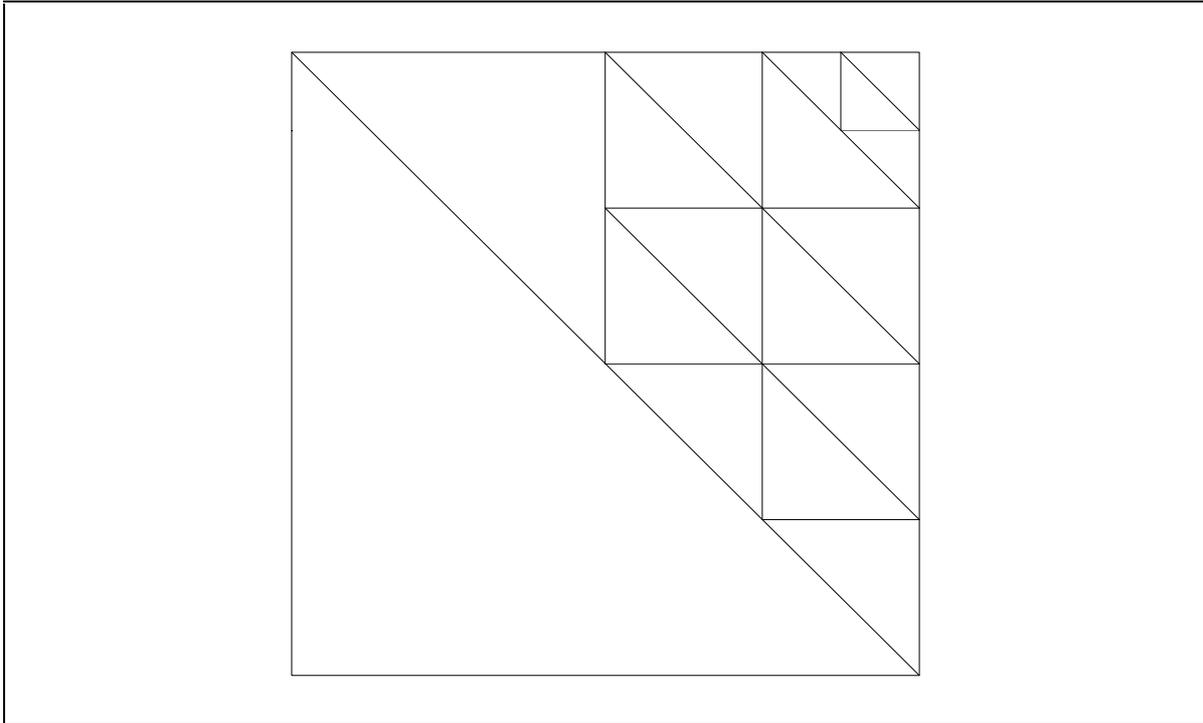


Figura 5.11 - Triângulo de 5 lados, originado por refinamentos sucessivos.

Em todas as experiências realizadas, quer para elementos de equilíbrio quer para os superelementos de equilíbrio descritos em 3.3.2.6, este aumento do número de lados de alguns elementos não introduziu modos espúrios adicionais. Note-se que nenhum elemento tem mais do que um lado em comum com outro e todos os lados pertencem a um elemento de três lados. Além disso, se é possível obter uma solução com a malha original, é também possível obter uma solução com a malha refinada.

Para os elementos compatíveis descritos em 3.2.2, este aumento do número de lados de alguns elementos introduz modos espúrios adicionais.

Para permitir uma maior versatilidade no refinamento de uma malha, o algoritmo de refinamento aceita valores diferentes para o nível de refinamento, RL, a efectuar em cada vértice de cada elemento da malha. Cada elemento é refinado de acordo com o algoritmo recursivo:

1. Se o maior RL não for positivo, parar
2. Subtrair um ao RL de cada vértice do elemento
3. Dividir o elemento em 2^D elementos
4. A cada novo vértice, atribuir um RL igual ao menor RL do correspondente lado do elemento "pai"
5. Para cada novo elemento, aplicar este algoritmo.

A aplicação deste algoritmo permitiria obter a malha da figura 5.11 através da sequência indicada na figura 5.12.

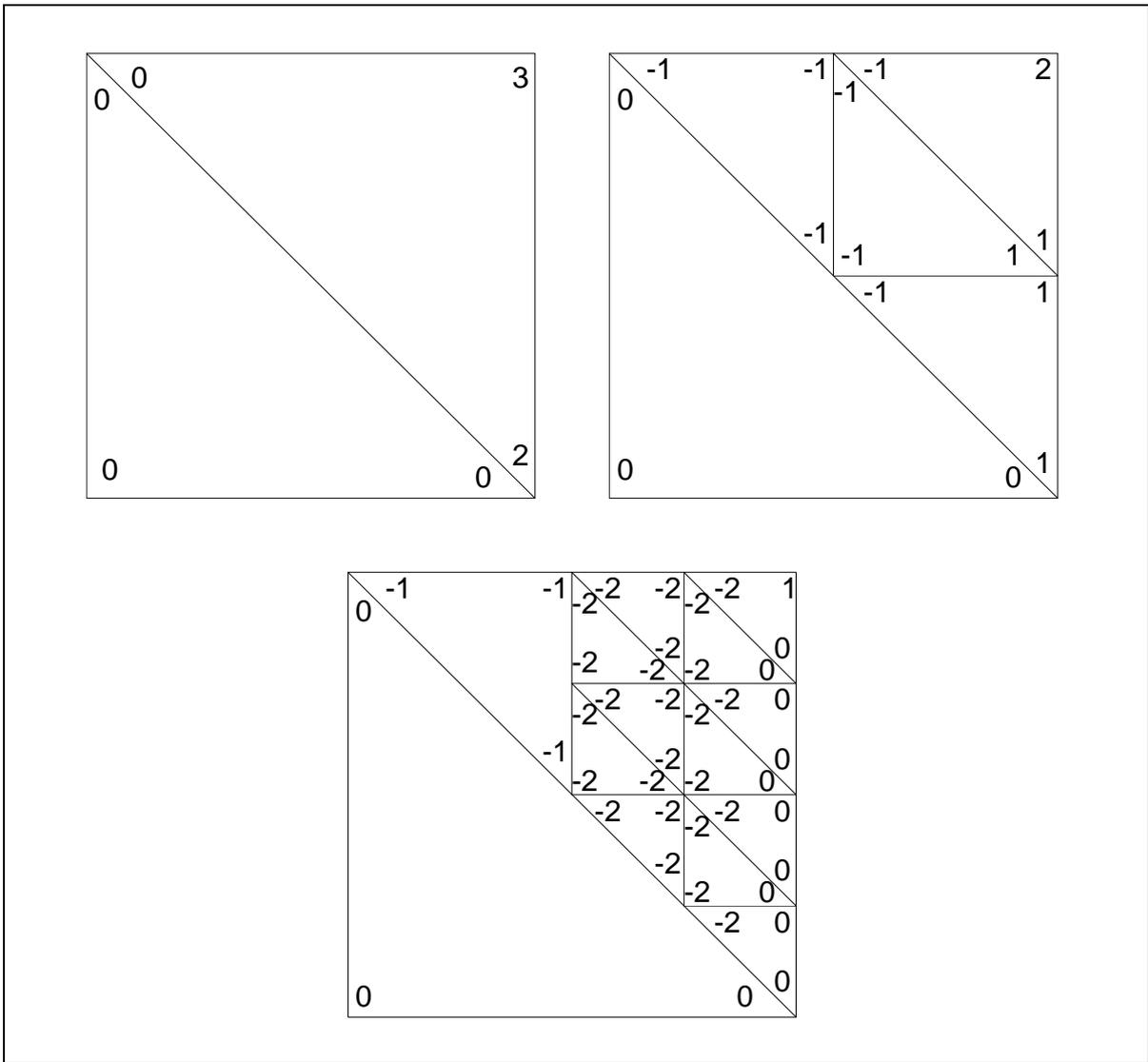


Figura 5.12 - Sequência de refinamentos.

Este método limita mais a nova malha do que a remalhagem. Contudo, permite refinar progressivamente onde é necessário e, graças à sua simplicidade, tem um custo de geração muito menor.

Na implementação efectuada, não existe a possibilidade de inverter refinamentos, juntando elementos. No entanto, no tipo de problemas estudado, desde que a malha inicial não seja muito fina, isto não constitui inconveniente.

6. Convergência e estimativas de erro *a priori*

6.1. Introdução

Conforme exposto no capítulo 5, a convergência para a solução exacta pode ser obtida de três maneiras:

- mantendo o grau dos elementos e diminuindo o seu diâmetro, o que constitui a versão h do método dos elementos finitos;
- mantendo o número e a topologia dos elementos e aumentando o seu grau, o que constitui a versão p do método dos elementos finitos;
- diminuindo o diâmetro e aumentando o grau de elementos da malha, o que constitui a versão hp do método dos elementos finitos.

Conforme referido no capítulo 4, o método dos elementos finitos baseia-se na obtenção de uma aproximação global da energia. Embora a energia não seja a grandeza de maior interesse num problema de engenharia, é possível obter o valor de qualquer grandeza, num ponto, com um erro da mesma ordem que o erro na energia global, utilizando métodos de extracção superconvergentes [BABUSKA e MILLER, 1984] [NIU e SHEPHARD, 1993]. Por isso, a investigação sobre estimativas de erro *a priori* tem sido orientada para a obtenção de estimativas da norma energética do erro.

As estimativas de erro *a priori* permitem calcular, com base na regularidade da função a aproximar, a taxa de convergência assintótica, na norma energética. Contudo, não é possível, *a priori*, estimar com precisão útil a norma energética do erro numa dada malha de elementos finitos, nem gerar malhas que garantam um erro inferior à tolerância pretendida.

A quase totalidade das publicações neste campo, conhecidas do autor, referem-se a elementos finitos compatíveis. Assim, este capítulo vai incidir, principalmente, sobre este tipo de elementos. No final, apresentam-se alguns resultados relativos a elementos finitos de equilíbrio.

6.2. Elementos finitos compatíveis

6.2.1. Versão h

Para uma sequência de malhas quase uniformes de elementos finitos cujas funções de aproximação são polinómios completos do grau p [BABUSKA *et al*, 1981],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^{\min(\lambda,p)} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}, \quad (6.1)$$

ou, em função do número total de graus de liberdade, N ,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq CN^{-\min(\lambda,p)/D} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}. \quad (6.2)$$

Nestas expressões, C não depende de \mathbf{u} nem de N , λ caracteriza a regularidade de σ e $\|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}$ é uma norma de Sobolev da solução exacta. Se σ for singular, isto é, se nalgum ponto alguma componente do tensor das tensões for infinita, a taxa de convergência assintótica depende só de λ . Em 2D, se existir uma fenda no domínio, $\lambda = 0.5$ [WILLIAMS, 1952]. Em 3D, se existir no domínio uma fenda com um ângulo recto na frente da fenda, $\lambda = 0.304$ [DORR, 1986].

Para um dado problema, um dado grau dos elementos e um dado número de graus de liberdade, existe uma malha para a qual o erro é mínimo. Esta malha é designada por malha óptima. Para uma sequência de malhas quase óptimas,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq CN^{-p/D} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}. \quad (6.3)$$

Esta fórmula permite concluir que, em malhas óptimas, para obter a mesma taxa de convergência em relação ao número de graus de liberdade que se obtém em 1D com elementos de grau um, são necessários elementos de grau dois em 2D e de grau três em 3D.

6.2.2. Versão p

Para malhas em que o grau dos elementos é quase uniforme, σ é singular e as singularidades estão em vértices de elementos [BABUSKA *et al*, 1981],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Cp^{-2\lambda} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}, \quad (6.4)$$

ou seja,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq CN^{-2\lambda/D} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}, \quad (6.5)$$

em que C não depende de \mathbf{u} nem de N . Em 3D, σ pode também ser singular nas arestas dos elementos [DORR, 1986].

Portanto, a taxa de convergência assintótica da versão p é dupla da taxa de convergência assintótica da versão h com malhas quase uniformes. Contudo, a taxa de convergência assintótica da versão h , com malhas ótimas de elementos de grau superior a um, é superior à taxa de convergência assintótica da versão p uniforme.

Se σ for regular [SZABÓ, 1986],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ce^{-\gamma N^\theta}, \quad (6.6)$$

onde γ e θ não dependem de \mathbf{u} nem de N . Portanto, neste caso, a taxa de convergência assintótica da versão p é exponencial.

6.2.3. Versão hp

Considere-se uma sequência de malhas em que o número de elementos, a geometria e o grau de cada elemento são tais que cada malha é óptima para o respectivo N [BABUSKA e DORR, 1981]. Então, independentemente da existência de singularidades [GUO e BABUSKA, 1986],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ce^{-\gamma N^\theta}. \quad (6.7)$$

Portanto, utilizando a versão hp , é possível obter uma taxa de convergência assintótica exponencial.

Se o grau for igual em todos os elementos, os resultados não serão tão bons. Contudo, para este caso, a convergência assintótica pode ser caracterizada com base nas expressões indicadas em 6.2.1 e 6.2.2, como se exemplifica de seguida.

Considere-se que, para determinado problema, com uma determinada malha inicial de elementos de grau p_0 , se obteve um erro $\|\mathbf{e}_{p_0, h_0}\|_E$. Admita-se que, para o refinamento p uniforme, a taxa de convergência é sempre igual à taxa assintótica correspondente a uma singularidade. Então,

$$\frac{\|\mathbf{e}_{p, h_0}\|_E}{\|\mathbf{e}_{p_0, h_0}\|_E} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-2\lambda}. \quad (6.8)$$

Admita-se também que, para a versão h, com malhas ótimas de elementos de grau p, a taxa de convergência é sempre igual à taxa assintótica correspondente ao grau p. Então,

$$\frac{\|e_{p,h}\|_E}{\|e_{p_0,h_0}\|_E} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{p-2\lambda} \left(\frac{N}{N_{p_0,h_0}}\right)^{-p/D}, \quad (6.9)$$

$$\text{para } \frac{N}{N_{p_0,h_0}} \geq \left(\frac{p}{p_0}\right)^D.$$

Na figura 6.1, representa-se a redução do erro com o aumento do número de graus de liberdade, calculada através de (6.9), para $p_0 = 1$, $\lambda = 0.5$, $D = 2$ e p entre 1 e 10.

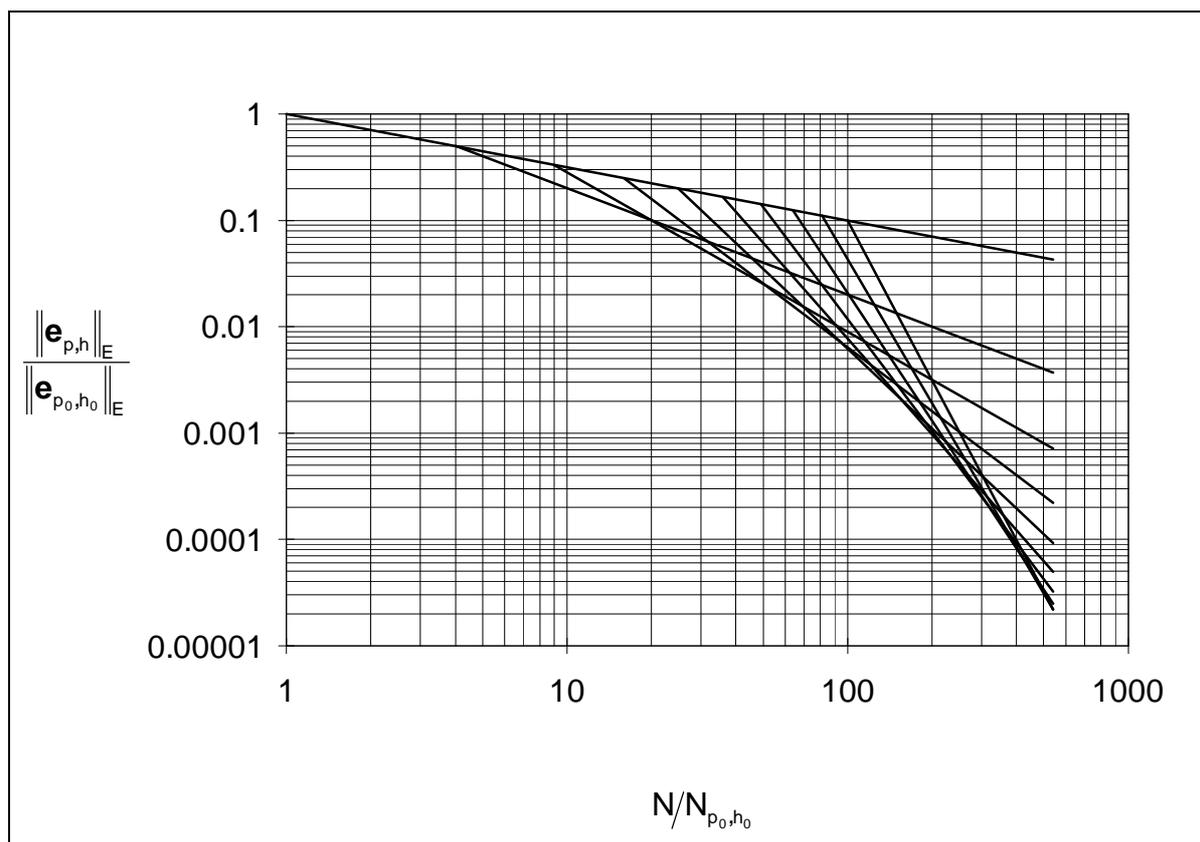


Figura 6.1 - Redução do erro com o aumento do número de graus de liberdade.

Observa-se que, para cada valor da redução do erro, existe um valor ótimo do grau dos elementos, para o qual o aumento do número de graus de liberdade é mínimo. O grau p deixa de ser ótimo para uma redução do erro de

$$\frac{\|e_{p,h_p}\|_E}{\|e_{p_0,h_0}\|_E} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{p-2\lambda} \left(\frac{p_0 p^{p-2\lambda}}{(p+1)^{p+1-2\lambda}}\right)^p, \quad (6.10)$$

para a qual é necessário um aumento do número de graus de liberdade de

$$\frac{N_{p,h_p}}{N_{p_0,h_0}} = \left(\frac{p_0 p^{p-2\lambda}}{(p+1)^{p+1-2\lambda}}\right)^{-D}. \quad (6.11)$$

Se, para cada valor da precisão pretendida, se utilizar o grau óptimo, a taxa de convergência aumenta com o número de graus de liberdade.

6.3. Elementos finitos de equilíbrio

6.3.1. Versão h

Como exemplo, considere-se a placa quadrada representada na figura 6.2, sujeita às cargas aí indicadas. Note-se que a resultante deste carregamento é nula. A solução exacta, embora desconhecida, não contém singularidades.

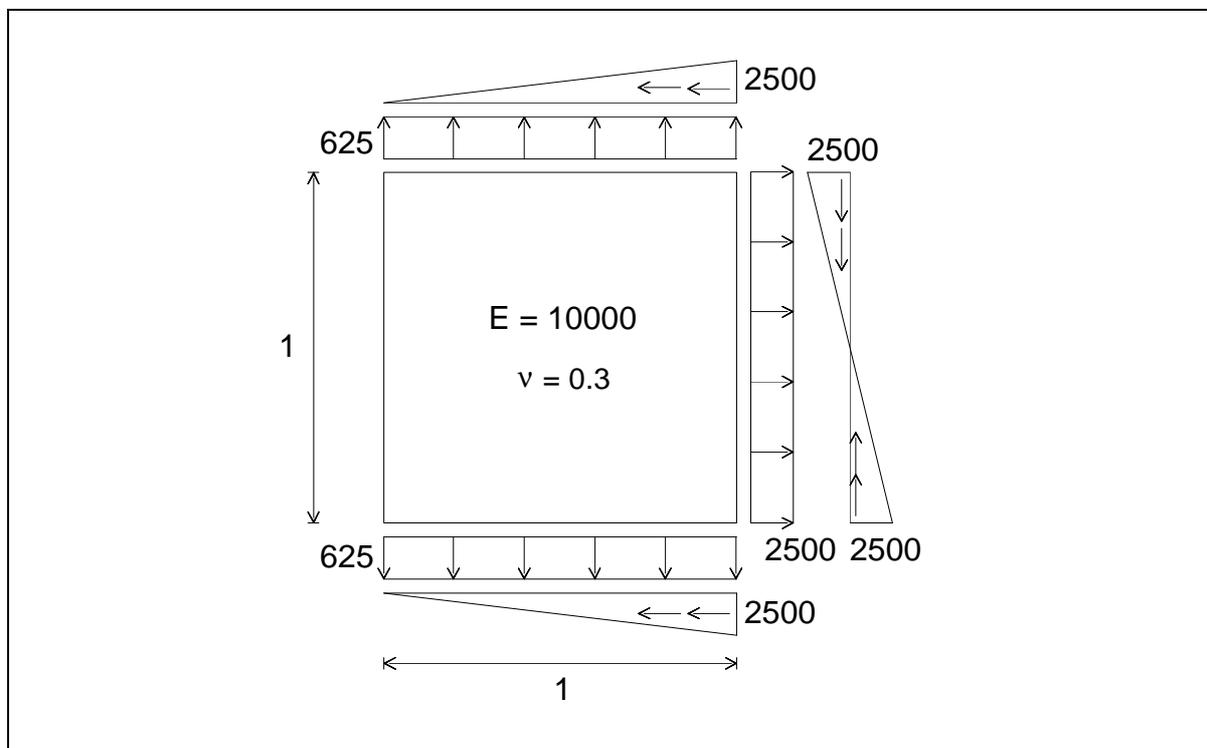


Figura 6.2 - Placa quadrada.

O domínio foi discretizado através das três malhas uniformes representadas na figura 6.3.

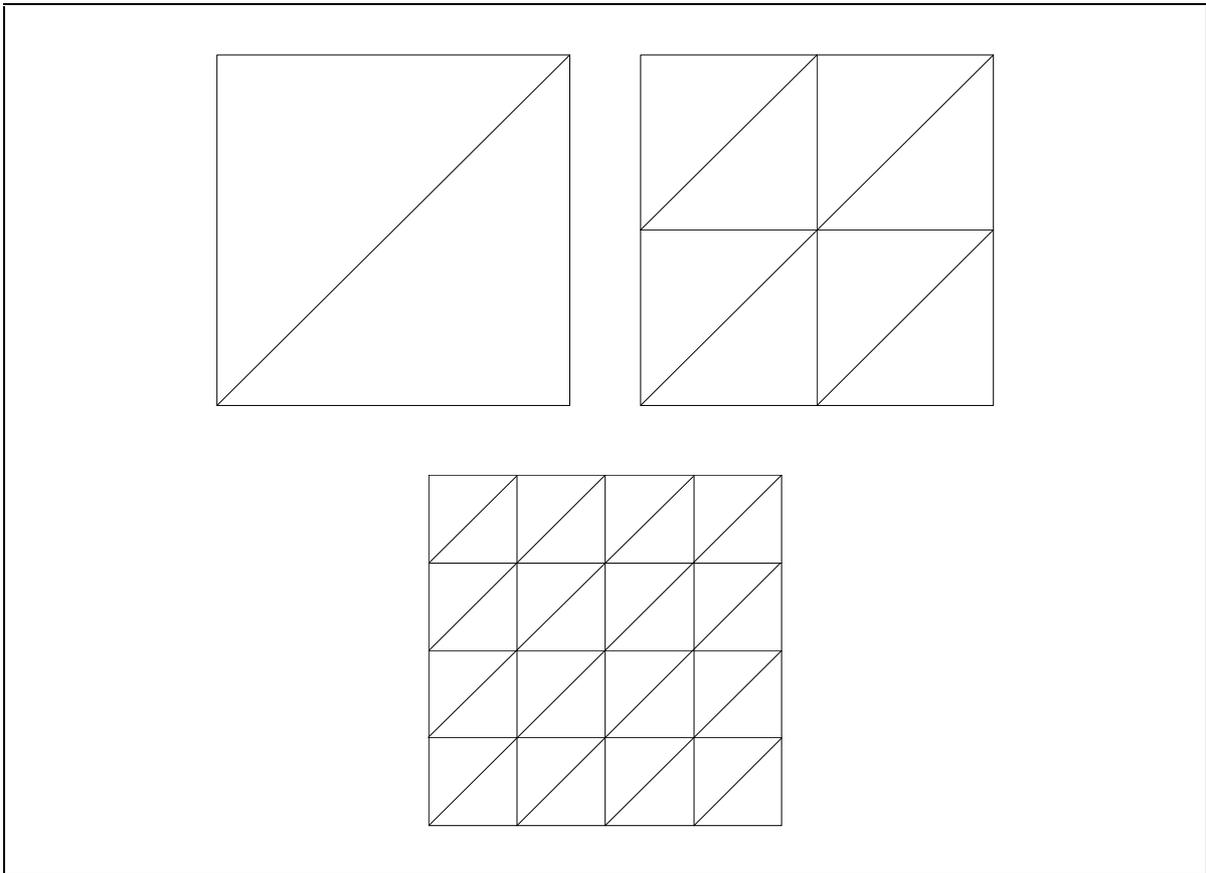


Figura 6.3 - Discretização da placa quadrada através de malhas uniformes.

Na figura 6.4, apresenta-se um gráfico da variação do erro relativo na norma energética obtido utilizando superelementos de equilíbrio de grau um e dois, elementos compatíveis de grau dois e três e elementos de equilíbrio de grau dois e três. O valor "exacto" da energia de deformação, $U = 149.530094$, foi estimado utilizando elementos de grau cinco e o método de extrapolação dual que será descrito em 7.5.

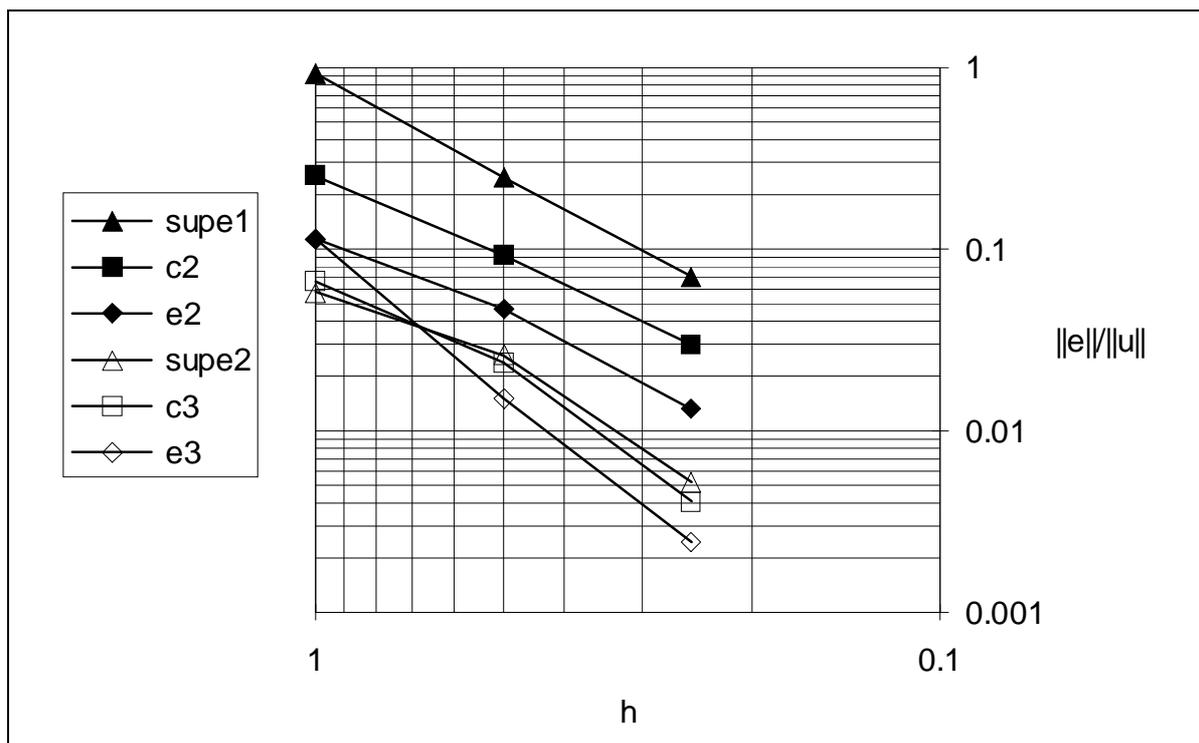


Figura 6.4 - Variação do erro relativo com a dimensão da malha.

Nesta figura, observa-se o aumento da taxa de convergência com o grau dos elementos. Verifica-se também, que, embora os valores do erro sejam diferentes, as taxas de convergência do superelemento de equilíbrio de grau $p-1$, do elemento de deslocamento de grau p e do elemento de equilíbrio de grau p são quase iguais.

Estes resultados parecem, portanto, confirmar que, para uma sequência de malhas de superelementos de equilíbrio, constituídos por triângulos com tensões de grau um, na ausência de singularidades [JOHNSON e MERCIER, 1978],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2}. \quad (6.12)$$

6.3.2. Versão p

Nos problemas em que σ é singular e as singularidades estão em vértices de elementos, a experiência parece indicar que a taxa de convergência assintótica da versão p é dupla da taxa de convergência assintótica da versão h com malhas uniformes [MAUNDER *et al*, 1996].

7. Estimadores de erro *a posteriori*

7.1. Introdução

Pelas mesmas razões que foram apontadas em 6.1, a investigação sobre estimativas de erro *a posteriori* tem sido também orientada para a obtenção de estimativas da norma energética do erro. Portanto, neste capítulo, consideram-se apenas métodos de obter estimadores da norma energética do erro, calculados com base numa ou mais soluções de elementos finitos.

A qualidade de um estimador do erro ε é geralmente definida a partir do índice de eficácia [KELLY *et al*, 1983]

$$\theta = \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{e}\|_{\varepsilon}}. \quad (7.1)$$

De modo geral, a qualidade de um estimador de erro melhora quando a malha é refinada. Um estimador é assintoticamente exacto se $\theta \rightarrow 1$ quando $h \rightarrow 0$ ou $p \rightarrow \infty$, sendo h o diâmetro dos elementos da malha e p o grau dos elementos. Em aplicações práticas, pode considerar-se aceitável que $1/2 \leq \theta \leq 2$ [BABUSKA e RHEINBOLT, 1979]. Geralmente, prefere-se que $\theta \geq 1$, ou seja, que o estimador seja um majorante.

7.2. Extrapolação de Richardson

A extrapolação de RICHARDSON [1910] permite obter um estimador de π_p e, a partir deste, um estimador da norma energética do erro.

Este método pode ser utilizado sempre que se possa admitir que a convergência é monotónica e do tipo

$$\pi_{P,n} - \pi_P = k N^\beta, \quad (7.2)$$

em que N é o número de graus de liberdade da malha n e $\beta > 0$.

Então,

$$\frac{\pi_{P,n} - \pi_P}{\pi_{P,n-1} - \pi_P} = \left(\frac{\pi_{P,n-1} - \pi_P}{\pi_{P,n-2} - \pi_P} \right)^{\frac{\log(N_{n-1}) - \log(N_n)}{\log(N_{n-2}) - \log(N_{n-1})}}. \quad (7.3)$$

Desde que se disponha dos resultados de três malhas diferentes, é possível obter um estimador de π_P resolvendo numericamente a equação (7.3).

Quando se refinam modelos compatíveis ou equilibrados, desde que a malha refinada contenha a anterior, a convergência da energia potencial total é sempre monotônica. Regra geral, o comportamento assintótico é do tipo (7.2).

7.3. Análise dual global

Considerem-se uma solução \mathbf{u}_c , obtida a partir de um modelo de elementos finitos compatíveis, com um erro \mathbf{e}_c , e uma solução σ_e , obtida a partir de um modelo de elementos finitos de equilíbrio, com um erro \mathbf{e}_e .

Se ε_θ e \mathbf{u}_T forem nulos [VEUBEKE, 1964] [VEUBEKE, 1965] [SANDER, 1971]:

$$U(\mathbf{e}_c) + U(\mathbf{e}_e) = U(\sigma_e) - U(\mathbf{u}_c), \quad (7.4)$$

$$U(\mathbf{u}_c) \leq U(\mathbf{u}) \leq U(\sigma_e). \quad (7.5)$$

Se \mathbf{t}_T e \mathbf{f} forem nulas:

$$U(\mathbf{e}_c) + U(\mathbf{e}_e) = U(\mathbf{u}_c) - U(\sigma_e), \quad (7.6)$$

$$U(\sigma_e) \leq U(\mathbf{u}) \leq U(\mathbf{u}_c). \quad (7.7)$$

Para qualquer campo de deslocamentos compatível, \mathbf{u}_c , e qualquer campo de tensões equilibrado, σ_e , mesmo que não sejam soluções de elementos finitos, e

quaisquer condições de fronteira [DEBONGNIE, 1983] [ODEN *et al*, 1989] [DEBONGNIE *et al*, 1995]:

$$U(\mathbf{e}_e) + U(\mathbf{e}_c) = \pi_p(\mathbf{u}_c) + \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e), \quad (7.8)$$

$$-\pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e) \leq -\pi_c(\mathbf{u}) = \pi_p(\mathbf{u}) \leq \pi_p(\mathbf{u}_c). \quad (7.9)$$

Para qualquer um dos campos,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \varepsilon = \left(2(\pi_p(\mathbf{u}_c) + \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e))\right)^{1/2}. \quad (7.10)$$

Portanto, a análise dual permite sempre obter um majorante do erro de qualquer uma das soluções.

7.4. Estimadores obtidos a partir de indicadores de erro elementares calculados *a posteriori*

A partir de um indicador do erro em cada elemento [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978a],

$$\varepsilon_{(i)} \approx \|\mathbf{e}\|_{E,(i)}, \quad (7.11)$$

calculado com base na solução de elementos finitos, é possível obter um estimador do erro global

$$\varepsilon = \left(\sum_{i=1}^{NE} \varepsilon_{(i)}^2\right)^{1/2}. \quad (7.12)$$

A maior parte dos estimadores do erro global são calculados deste modo. Os indicadores de erro elementares são obtidos, a partir da solução de elementos finitos, através de um dos vários processos que serão descritos nos capítulos 8 e 9.

7.5. Extrapolação dual

O método que se vai descrever permite obter um estimador de π_p e, a partir deste, de um estimador da norma energética do erro.

Se se dispuser de dois conjuntos de soluções $\pi_{p,i}$ e $\pi_{p,j}$, obtidos através de elementos finitos de equilíbrio e compatíveis, é possível obter uma estimativa do

valor exacto de π_p através de um método de extrapolação semelhante ao de Richardson.

Se se admitir que a convergência dos n valores $\pi_{p,i}$ é monotónica e do tipo

$$\pi_p - \pi_{p,i} = \alpha N_i^\beta, \quad (7.13)$$

então,

$$\log(\pi_p - \pi_{p,i}) = a + b \log(N_i). \quad (7.14)$$

Para um valor de π_p arbitrado e $n \geq 3$, a e b podem ser obtidos por regressão linear.

Se se admitir que a convergência dos m valores $\pi_{p,j}$ é monotónica e do tipo:

$$\pi_{p,j} - \pi_p = \gamma N_j^\delta, \quad (7.15)$$

então,

$$\log(\pi_{p,j} - \pi_p) = c + d \log(N_j). \quad (7.16)$$

Para um π_p arbitrado e $m \geq 3$, c e d podem ser obtidos por regressão linear.

Quando se refinam modelos compatíveis ou equilibrados, desde que a malha refinada contenha a anterior, a convergência da energia potencial total é sempre monotónica.

O valor de π_p pode ser estimado como sendo aquele que minimiza

$$\sum_{i=1}^n \left(\log(\pi_p - \pi_{p,i}) - a - b \log(N_i) \right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(\log(\pi_{p,j} - \pi_p) - c - d \log(N_j) \right)^2. \quad (7.17)$$

Note-se que, para $n = 3$ e $m = 0$, bem como para $n = 0$ e $m = 3$, este valor de π_p é exactamente igual ao obtido pela extrapolação de Richardson.

Na prática, os valores de a , b , c e d não têm de ser determinados explicitamente, pois, devido às propriedades da regressão linear, (7.17) é igual a

$$\begin{aligned}
& \left[n \left(\sum_{i=1}^n (\log(N_i))^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n (\log(\pi_P - \pi_{P,i}))^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n \log(N_i) \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n (\log(\pi_P - \pi_{P,i}))^2 \right) \right. \\
& \quad - \left(\sum_{i=1}^n (\log(N_i))^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \log(\pi_P - \pi_{P,i}) \right)^2 - n \left(\sum_{i=1}^n \log(\pi_P - \pi_{P,i}) \log(N_i) \right)^2 \\
& \quad \left. + 2 \left(\sum_{i=1}^n \log(\pi_P - \pi_{P,i}) \log(N_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n \log(N_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n \log(\pi_P - \pi_{P,i}) \right) \right] / \\
& \quad / \left[n \left(\sum_{i=1}^n (\log(N_i))^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \log(N_i) \right)^2 \right] + \tag{7.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[m \left(\sum_{j=1}^m (\log(N_j))^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m (\log(\pi_{P,j} - \pi_P))^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^m \log(N_j) \right)^2 \left(\sum_{j=1}^m (\log(\pi_{P,j} - \pi_P))^2 \right) \right. \\
& \quad - \left(\sum_{j=1}^m (\log(N_j))^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m \log(\pi_{P,j} - \pi_P) \right)^2 - m \left(\sum_{j=1}^m \log(\pi_{P,j} - \pi_P) \log(N_j) \right)^2 \\
& \quad \left. + 2 \left(\sum_{j=1}^m \log(\pi_{P,j} - \pi_P) \log(N_j) \right) \left(\sum_{j=1}^m \log(N_j) \right) \left(\sum_{j=1}^m \log(\pi_{P,j} - \pi_P) \right) \right] / \\
& \quad / \left[m \left(\sum_{j=1}^m (\log(N_j))^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m \log(N_j) \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Nas aplicações efectuadas, utiliza-se sempre $n = m = 3$.

8. Indicadores de erro para elementos finitos compatíveis

8.1. Introdução

Os indicadores de erro fornecem uma indicação da contribuição de cada elemento para o erro global. Além de servirem para construir estimadores do erro, como foi referido em 7.4, podem também ser utilizados como indicadores de refinamento.

Algoritmos adaptativos que não tenham em consideração a norma energética do erro podem levar à convergência para uma solução errada [BABUSKA *et al*, 1994a] [NIU e SHEPHARD, 1994]. Por isso, neste trabalho, os algoritmos adaptativos visam obter, com um custo mínimo, um erro relativo na norma energética inferior a uma tolerância pré-definida. Por este motivo, como se verá no capítulo 12, os algoritmos adaptativos utilizados neste trabalho são baseados na utilização de indicadores da norma energética do erro como indicadores de refinamento.

Assim, neste capítulo, faz-se uma retrospectiva dos métodos de obter indicadores de erro num elemento, com base numa solução de elementos finitos compatíveis. Os princípios em que se baseiam muitos destes indicadores podem servir de inspiração para a obtenção de indicadores de erro para elementos finitos de equilíbrio.

Os indicadores de erro, $\varepsilon_{(i)}$, fornecem também alguma informação sobre o erro local. KELLY *et al* [1983] sugeriram que se tomasse, para indicador do erro relativo médio do campo de tensões num elemento,

$$\frac{\varepsilon_{(i)}}{\|\mathbf{u}_c\|_{E,(i)}}. \quad (8.1)$$

Os indicadores de erro podem ser obtidos através de processos globais, ou de processos locais. Os processos globais envolvem a resolução de um sistema de equações da ordem de grandeza do utilizado para obter a solução de elementos finitos. Os processos locais envolvem apenas alguns elementos.

A precisão dum indicador de erro só será elevada se o erro causado pela poluição da solução no elemento pelo erro da solução no resto da malha for desprezável. O erro causado pela poluição é desprezável se a malha for óptima em relação à norma energética do erro [BABUSKA *et al*, 1994a]. Por isso, a qualidade dos estimadores de erro obtidos a partir de indicadores de erro é melhor nas malhas óptimas [KELLY *et al*, 1983].

8.2. Resolução de um problema de Dirichlet local

Os deslocamentos nodais são superconvergentes, isto é, a sua convergência é mais rápida do que a dos deslocamentos dos outros pontos [KELLY *et al*, 1983]. Consequentemente, os deslocamentos nodais têm um erro inferior aos dos outros pontos. Portanto, a contribuição do erro dos deslocamentos nodais para o erro global pode ser desprezada, permitindo a obtenção de indicadores de erro através de cálculos locais.

Seja $T_{(l)}$ o conjunto dos elementos finitos que têm o nó l como vértice e $\partial T_{(l)}$ a fronteira de $T_{(l)}$. É possível obter uma melhor aproximação do campo de deslocamentos em $T_{(l)}$ resolvendo o problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{d}^* \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{f} &= \mathbf{0} \text{ em } T_{(l)}, \\ \mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{N} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta &= \mathbf{t}_\Gamma \text{ em } \partial T_{(l)} \cap \Gamma_\Gamma \text{ e } \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_c \text{ em } \partial T_{(l)} \setminus \Gamma_\Gamma \end{aligned} \quad (8.2)$$

através de um refinamento dos $\Omega_{(l)} \subset T_{(l)}$ [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b]. O indicador de erro associado a $T_{(l)}$ é

$$\varepsilon_{(l)}^2 = \int_{T_{(l)}} (\mathbf{d}(\mathbf{u}_c - \tilde{\mathbf{u}}))^T \mathbf{k} (\mathbf{d}(\mathbf{u}_c - \tilde{\mathbf{u}})) d\Omega. \quad (8.3)$$

Este método é equivalente a uma resolução local da equação do erro. O quadrado do estimador do erro global é obtido pela soma dos quadrados de todos os indicadores calculados. Pode ser obtido um indicador de erro para o elemento $\Omega_{(l)}$ a partir das contribuições de $\Omega_{(l)}$ para os indicadores associados aos vários $T_{(l)}$. O estimador do erro global, obtido por este método, é sempre um minorante do erro.

Utilizando elementos finitos hierárquicos, surge naturalmente um indicador semelhante ao de (8.3) para cada possível grau de liberdade adicional [PEANO *et al*, 1979], conforme a ideia de MELOSH e MARCAL [1977]. Neste caso, o método é imediatamente interpretável como um cálculo directo do erro [PEANO e RICCIONI, 1978], utilizando, como carregamento, os defeitos de equilíbrio descritos em 4.4.2 [ZIENKIEWICZ *et al*, 1983]. Efectuando os cálculos deste modo, obtém-se

$$\varepsilon_{N+1}^2 = \frac{1}{K_{N+1,N+1}} \left(\sum_i \int_{\Omega_{(i)}} \phi_{N+1} r d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \phi_{N+1} J d\Gamma + \sum_k \int_{\Gamma_{(k)}} \phi_{N+1} G d\Gamma \right)^2, \quad (8.4)$$

para cada possível grau de liberdade adicional N+1, onde se considera apenas a componente dos defeitos de equilíbrio segundo o possível grau de liberdade N+1. O somatório em i é extensivo a todos os elementos afectados por esse grau de liberdade, o somatório em j é extensivo a todos os $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$ afectados por esse grau de liberdade e o somatório em k é extensivo a todos os $\Gamma_{(k)} \subset \Gamma_t$ afectados por esse grau de liberdade. O quadrado do estimador do erro global é obtido pela soma dos quadrados de todos os indicadores correspondentes a funções até um grau acima do máximo utilizado na malha.

Um indicador de erro elementar pode ser obtido a partir das contribuições do elemento para os indicadores associados aos graus de liberdade. Neste caso, a contribuição de cada lado entre elementos é arbitrariamente dividida em partes iguais por cada um deles [ZIENKIEWICZ *et al*, 1983], o que introduz uma aproximação adicional no cálculo dos indicadores elementares, mas não influencia o estimador global.

Dado que o estimador do erro, obtido a partir destes indicadores, é sempre um minorante do erro e que as funções de interpolação consideradas em (8.4) podem até ser ortogonais aos defeitos de equilíbrio, ZIENKIEWICZ *et al* [1983] sugeriram a fórmula alternativa

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N+1}^2 = & \frac{1}{K_{N+1,N+1}} \left(\sum_i \left(\left(\int_{\Omega_{(i)}} \phi_{N+1}^2 d\Omega \right) \left(\int_{\Omega_{(i)}} r^2 d\Omega \right) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_j \left(\left(\int_{\Gamma_{(j)}} \phi_{N+1}^2 d\Gamma \right) \left(\int_{\Gamma_{(j)}} J^2 d\Gamma \right) \right) + \sum_k \left(\left(\int_{\Gamma_{(k)}} \phi_{N+1}^2 d\Gamma \right) \left(\int_{\Gamma_{(k)}} G^2 d\Gamma \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (8.5)$$

para o cálculo do indicador de erro de cada possível grau de liberdade adicional.

8.3. Utilização implícita dos defeitos de equilíbrio

É possível obter uma aproximação do erro num elemento $\Omega_{(i)}$ calculando uma solução aproximada para a equação do erro [SPECHT, 1984] [BANK e WEISER, 1985] [BANK, 1986]:

$$\mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{e}}_{(i)} + \mathbf{r}_c = \mathbf{0} \text{ em } \Omega_{(i)}, \quad (8.6)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{e}}_{(i)} = \mathbf{G}_c \text{ em } \partial\Omega_{(i)} \cap \Gamma_v, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{N}_{(i),(j)} \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{e}}_{(i)} = \frac{1}{2} \mathbf{J}_{c,(i)} \text{ em cada } \Gamma_{(j)} \subset \partial\Omega_{(i)} \text{ tal que } \Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma, \quad (8.8)$$

utilizando um refinamento de $\Omega_{(i)}$ no qual as funções de aproximação usadas para $\tilde{\mathbf{e}}_{(i)}$ são tais que

$$\tilde{\mathbf{e}}_{(i)} = \mathbf{0} \text{ nos nós de } \partial\Omega_{(i)} \text{ e em } \Gamma_u. \quad (8.9)$$

O coeficiente 1/2 é uma aproximação arbitrária. A parcela de $\mathbf{J}_{c,(i)}$ correspondente a cada elemento pode ser calculada de formas mais adequadas, como a descrita em [ZHONG e BECKERS, 1990a] ou como as que fornecem defeitos de equilíbrio que equilibram cada elemento, que serão descritas em 8.5.

Para elementos de grau par, nos quais, como será referido em 8.4, o resíduo no interior é dominante, BAEHMANN *et al* [1992] estimaram o erro em cada elemento calculando uma solução aproximada para (8.6) utilizando funções de aproximação tais que

$$\tilde{\mathbf{e}}_{(i)} = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega_{(i)}. \quad (8.10)$$

Em [BABUSKA *et al*, 1995] pode encontrar-se um estudo sobre a qualidade de indicadores de erro deste tipo.

8.4. Utilização explícita dos defeitos de equilíbrio

Utilizando diversas hipóteses simplificativas, é possível obter explicitamente um indicador da norma do erro a partir dos defeitos de equilíbrio, sem ter de montar e resolver o respectivo sistema algébrico elementar [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978a] [BABUSKA e RHEINBOLT, 1979] [GAGO, 1982] [KELLY *et al*, 1983] [BABUSKA e MILLER, 1987] [JOHNSON e HANSBO, 1992]. A forma geral para qualquer dimensão D seria

$$\varepsilon_{(i)}^2 = c_1 h^2 \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{r}_c^T \mathbf{r}_c \, d\Omega + c_2 h \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{J}_{c,(j)}^T \mathbf{J}_{c,(j)} \, d\Gamma + 4c_2 h \sum_k \int_{\Gamma_{(k)}} \mathbf{G}_c^T \mathbf{G}_c \, d\Gamma, \quad (8.11)$$

em que o somatório em j é extensivo aos $\Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma$ do elemento $\Omega_{(i)}$ e o somatório em

k é extensivo aos $\Gamma_{(k)} \subset \Gamma_i$ do elemento $\Omega_{(i)}$. Em 1D, $c_1 = \frac{1}{12ap^2}$, com $a = E$, e $c_2 = 0$,

o que simplifica extraordinariamente a estimação do erro. Para quadriláteros de

lado h, $c_1 = c_2 = \frac{1}{24ap^2}$, com $a = \frac{E}{1-\nu}$ em estados planos de tensão e

$a = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ em estados planos de deformação.

Em [GAGO, 1982] [KELLY *et al*, 1983] e [VERFÜRTH, 1994] podem ser encontradas algumas alternativas para a definição das funções integrandas.

No caso dos elementos com funções de interpolação de grau ímpar, os defeitos de equilíbrio nos lados são dominantes; no caso dos elementos de grau par, os defeitos no interior são dominantes [NOOR e BABUSKA, 1987].

Em [BABUSKA e YU, 1987] e [YU, 1992] podem encontrar-se outros indicadores de erro para quadriláteros, assintoticamente exactos, calculados explicitamente com base nos defeitos de equilíbrio.

Efectuando um desenvolvimento em série de Taylor do campo de deslocamentos de grau p num rectângulo ou num triângulo rectângulo e admitindo que o erro e as parcelas dos defeitos de equilíbrio correspondentes a esse elemento só dependem dos termos de grau p+1, é possível obter relações explícitas aproximadas entre o erro e alguns dos defeitos [ZHONG e BECKERS, 1990a] [BECKERS e ZHONG, 1992]. As expressões para estes indicadores de erro variam consideravelmente com o tipo e o grau dos elementos. Conforme foi referido anteriormente, estes autores calcularam a parcela de \mathbf{J} correspondente a cada elemento de uma forma mais adequada do que a simples divisão por 2.

8.5. Cálculo local duma solução equilibrada para a equação do erro

Os saltos na tensão em cada lado $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$, $\mathbf{J}_{c,(j)}$, podem ser divididos pelos dois elementos adjacentes, de modo a que os defeitos de equilíbrio associados a cada elemento constituam um carregamento autoequilibrado. Isto permite obter uma solução equilibrada para a equação do erro, através de cálculos efectuados elemento a elemento. Esta solução permite obter um majorante da energia do erro [KELLY, 1984].

A tensão correspondente a cada um dos elementos adjacentes a $\Gamma_{(j)}$ é dada por [KELLY e ISLES, 1989a]:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{(j),(i)} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}_{c,(j)} + \Delta \mathbf{J}_{c,(j)}, \\ \mathbf{t}_{(j),(e)} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}_{c,(j)} - \Delta \mathbf{J}_{c,(j)}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Os valores de $\Delta \mathbf{J}_{c,(j)}$ podem ser obtidos efectuando uma minimização, pelo método dos gradientes conjugados, para obter um dos zeros de

$$\sum_i \left(\left(\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{r}_c d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{t}_{(j),(i)} d\Gamma \right)^2 + \left(\int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}_c d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}_{(j),(i)} d\Gamma \right)^2 \right), \quad (8.13)$$

em que \mathbf{x}_0 é um ponto qualquer e os somatórios em j são extensivos aos lados do elemento $\Omega_{(i)}$. Esta expressão será igual a zero quando, para todos os elementos, existir equilíbrio de forças e de momentos dos defeitos de equilíbrio atribuídos a cada um.

A solução para o erro em cada elemento pode ser obtida através de um superelemento de equilíbrio, de um refinamento h do elemento [KELLY e ISLES, 1989b] ou utilizando um elemento de grau superior [KELLY e ISLES, 1989a]. No primeiro caso é possível garantir que o valor obtido para a energia do erro é sempre um majorante. No segundo, não é possível garantir a obtenção de um majorante. No terceiro, é necessário que as tensões $\mathbf{t}_{(j),(i)}$ sejam tais que não haja descontinuidades de tensão nos vértices e que o grau do elemento seja suficientemente elevado para obter uma solução equilibrada do problema aproximado.

É possível obter tensões $\mathbf{t}_{(j),(i)}$ obedecendo a (8.13) recorrendo apenas a cálculos locais [BANK e WEISER, 1985]. O método proposto em [AINSWORTH e

ODEN, 1992] e [AINSWORTH *et al*, 1994] não assegura o equilíbrio de momentos [LADEVÈZE e MAUNDER, 1996]. Os métodos para obter uma solução equilibrada a partir da solução de elementos finitos compatíveis, que serão descritos ou referidos em 8.9, podem ser adaptados para obter $\mathbf{t}_{(j)(i)}$ obedecendo a (8.13).

Em [BABUSKA *et al*, 1995] pode encontrar-se um estudo sobre a qualidade de indicadores de erro deste tipo.

OHTSUBO e KITAMURA [1990] utilizaram um método que fornece, através de cálculos efectuados elemento a elemento, tensões $\mathbf{t}_{(j)(i)}$ para as quais (8.13) é nulo, mas para as quais, em geral, se verifica apenas

$$\mathbf{t}_{(j)(i)} + \mathbf{t}_{(j)(e)} \cong \mathbf{J}_{c,(j)}. \quad (8.14)$$

Segundo este método, calculam-se tensões iniciais:

$$\mathbf{t}'_{(j)(e)} = \frac{l_{(j)(e)}}{l_{(j)(e)} + l_{(j)(i)}} \mathbf{J}_{c,(j)},$$

$$\mathbf{t}'_{(j)(i)} = \frac{l_{(j)(i)}}{l_{(j)(e)} + l_{(j)(i)}} \mathbf{J}_{c,(j)},$$
(8.15)

em que $l_{(j)(i)}$ é a distância entre o centróide do elemento $\Omega_{(i)}$ e o centróide do lado $\Gamma_{(j)}$.

As tensões finais são obtidas, elemento a elemento, através de

$$\mathbf{t}_{(j)(i)} = \mathbf{t}'_{(j)(i)} + \Delta \mathbf{t}'_{(j)(i)}. \quad (8.16)$$

As correcções $\Delta \mathbf{t}'_{(j)(i)}$ são tais que:

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{r}_c d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{t}_{(j)(i)} d\Gamma = \mathbf{0} \text{ e}$$

$$\int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}_c d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}_{(j)(i)} d\Gamma = \mathbf{0},$$
(8.17)

onde \mathbf{x}_0 é um ponto qualquer e os somatórios em j são extensivos aos lados do elemento $\Omega_{(i)}$. Para aproximar (8.13) o melhor possível, as correcções devem ser as menores possíveis [OHTSUBO e KITAMURA, 1992].

O erro é então calculado, em cada elemento, utilizando um elemento de grau $p+1$.

8.6. Construção de uma aproximação melhorada do campo de tensões

8.6.1. Introdução

A partir da solução de elementos finitos, é possível obter uma aproximação melhorada do campo de tensões, $\tilde{\sigma}$, recorrendo a técnicas como as que vão ser descritas em seguida. Nesta situação, utiliza-se, como indicador do erro [ZIENKIEWICZ e ZHU, 1987],

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} (\sigma_c - \tilde{\sigma}) f(\sigma_c - \tilde{\sigma}) d\Omega. \quad (8.18)$$

8.6.2. Projecção ponderada

A partir de funções de interpolação do tipo das usadas para os deslocamentos, em 3.2.1, e de valores nodais das componentes do tensor das tensões, é possível obter um campo de tensões contínuo

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\phi} \hat{\sigma}_{ij}. \quad (8.19)$$

As funções de interpolação são geralmente as mesmas que são utilizadas para os deslocamentos, $\tilde{\phi} = \phi$.

Esta interpolação deve ser aplicada separadamente a cada região material [NAMBIAR e LAWRENCE, 1992], pois o campo de tensões não é contínuo nos pontos onde há descontinuidades materiais.

A interpolação pode também ser utilizada para impor, *a priori*, as condições de fronteira estáticas ao campo de tensões contínuo, o que permite obter melhores resultados [AINSWORTH *et al*, 1989].

Dado que a solução de elementos finitos minimiza a energia de deformação do erro, o campo de tensões contínuo pode ser escolhido de modo a minimizar

$$U(\tilde{\sigma} - \sigma_c). \quad (8.20)$$

Então, os valores nodais de cada uma das componentes do tensor das tensões são obtidos resolvendo o sistema de equações lineares [AINSWORTH *et al*, 1989]

$$\left(\int_{\Omega} \tilde{\Phi}^T f \tilde{\Phi} d\Omega \right) \hat{\tilde{\sigma}} = \int_{\Omega} \tilde{\Phi}^T f \sigma_c d\Omega. \quad (8.21)$$

O número de equações do sistema é igual ao número de nós da malha vezes o número de componentes de σ .

Note-se que o mais coerente com a interpretação do método dos elementos finitos como uma minimização da energia do erro seria resolver

$$\left(\int_{\Omega} (D\Phi)^T \tilde{\Phi} d\Omega \right) \hat{\tilde{\sigma}} = \int_{\Omega} (D\Phi)^T \sigma_c d\Omega. \quad (8.22)$$

Contudo, este sistema tem mais incógnitas do que equações.

8.6.3. Distribuição de tensões consistente

Projectando cada uma das $\sigma_{ij,c}$ no espaço das correspondentes $\tilde{\sigma}_{ij}$ definido em (8.19), é possível obter uma distribuição de tensões consistente [ODEN e BRAUCHLI, 1971]. Os valores nodais de cada uma das componentes do tensor das tensões, são obtidos resolvendo o sistema de equações lineares

$$\left(\int_{\Omega} \phi^T \phi d\Omega \right) \hat{\tilde{\sigma}}_{ij} = \int_{\Omega} \phi^T \sigma_{ij,c} d\Omega. \quad (8.23)$$

Note-se que a matriz na equação (8.23) é proporcional à matriz de massas consistente, desde que a densidade seja constante.

O número de equações do sistema é igual ao número de nós da malha. A matriz é a mesma para cada componente do tensor das tensões, variando apenas o termo independente.

HINTON e CAMPBELL [1974] mostraram que este método fornece a solução de mínimos quadrados para

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij,c} = 0. \quad (8.24)$$

A matriz do sistema (8.23) é de diagonal dominante. Este facto permite obter uma solução aproximada para o sistema resolvendo o sistema diagonal que se

obtem adicionando todos os elementos de cada linha da matriz. Esta matriz é proporcional à matriz de massas concentradas, de um domínio com densidade constante.

8.6.4. Médias ponderadas nodais

Para cada um dos elementos adjacentes a um dado nó, é possível calcular um valor diferente para uma componente do tensor das tensões $\sigma_{ij,c}$ nesse nó. O valor nodal de $\tilde{\sigma}_{ij}$, a utilizar em (8.19), pode ser obtido através de

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sum_k w_{(k)} \sigma_{ij,c,(k)}, \quad (8.25)$$

em que o somatório em k é extensivo a todos os elementos adjacentes a esse nó.

A média aritmética corresponde a fazer

$$w_{(l)} = \frac{1}{\sum_k 1}. \quad (8.26)$$

A média ponderada pelos volumes dos elementos corresponde a

$$w_{(l)} = \frac{V_{(l)}}{\sum_k V_{(k)}}. \quad (8.27)$$

Para elementos simplex (triângulos, em 2D, e tetraedros, em 3D) de grau 1, esta média fornece resultados iguais aos do método das massa concentradas referido anteriormente.

ZHONG e BECKERS [1990b] utilizaram os pesos

$$w_{(l)} = \frac{\alpha_{(l)}/L_{(l)}}{\sum_k \frac{\alpha_{(k)}}{L_{(k)}}}, \quad (8.28)$$

em que $\alpha_{(k)}$ é o ângulo de abertura do elemento $\Omega_{(k)}$ no nó e $L_{(k)}$ é a distância entre o nó e o centro isoparamétrico do elemento. Para os nós da fronteira, utilizaram um método de extrapolação.

Outra alternativa seria

$$w_{(l)} = \frac{1/V_{(l)}}{\sum_k \frac{1}{V_{(k)}}}. \quad (8.29)$$

Em 1D, esta média fornece os mesmos resultados que (8.28).

8.6.5. Alisamento local e média nodal

HINTON e CAMPBELL [1974] utilizaram um alisamento local, elemento a elemento, para calcular os valores das componentes do tensor das tensões nos nós de cada elemento. Em seguida, os valores nodais de $\tilde{\sigma}_{ij}$, a utilizar em (8.19), são calculados através da média aritmética dos valores obtidos nos elementos adjacentes a cada nó. Estes autores consideraram dois tipos de alisamento: uma aplicação, elemento a elemento, do método descrito em 8.2.5.2 e uma interpolação/extrapolação a partir dos pontos ótimos de amostragem das tensões.

8.6.6. *Superconvergent Patch Recovery*

ZIENKIEWICZ e ZHU [1992a] [1992b] utilizaram um processo em que se define, para cada vértice interior, um *patch* contendo os elementos adjacentes a esse vértice. Desta forma, utilizando, em cada *patch* e para cada componente do tensor das tensões, um polinómio completo de grau igual ao das funções de interpolação,

$$\check{\sigma}_{ij} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{p}}_{ij}, \quad (8.30)$$

é possível obter uma aproximação de mínimos quadrados aos valores dessa componente nos pontos ótimos de amostragem das tensões nesse *patch*. Para cada vértice interior, o valor nodal de cada componente, a utilizar em (8.19), é dado pela aproximação no respectivo *patch*. Para cada um dos restantes nós, o valor nodal de cada componente é a média aritmética dos valores obtidos a partir de cada um dos *patches* que contêm esse nó.

Caso se pretenda utilizar um polinómio não completo em (8.30), deve-se escolher um referencial local que evite a ocorrência de singularidades no sistema do qual se obtém a solução de mínimos quadrados [RAMSAY e SBRESNY, 1994].

Na forma até agora descrita, esta técnica é equivalente a uma média ponderada dos valores das componentes do tensor das tensões nos pontos óptimos de amostragem. Outros métodos têm também sido utilizados para o cálculo desta média ponderada. MASHAIE *et al* [1993] calcularam os valores nodais de $\tilde{\sigma}_{ij}$ através da média aritmética dos valores no ponto óptimo de amostragem, de cada um dos elementos adjacentes ao nó, mais próximo desse nó. O método descrito por LISZKA e ORKISZ [1980] tem também sido utilizado para este fim.

WIBERG e ABDULWAHAB [1993] utilizaram polinómios de grau $p+1$ para o campo de tensões em cada *patch*:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{p}}. \quad (8.31)$$

Este campo, além de aproximar as tensões nos pontos óptimos, deve também satisfazer aproximadamente as equações de equilíbrio no interior dos elementos. Os valores de $\hat{\mathbf{p}}$ são obtidos minimizando

$$\sum_k (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}_{(k)}) - \sigma_c(\mathbf{x}_{(k)}))^T (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}_{(k)}) - \sigma_c(\mathbf{x}_{(k)})) + \beta \int_{\Omega_{patch}} (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f})^T (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f}) d\Omega, \quad (8.32)$$

em que o somatório é extensivo a todos os pontos óptimos de amostragem do *patch* e β é um coeficiente de penalização, geralmente unitário. Para os vértices na fronteira, utilizam-se também *patches*, embora nestes o grau dos polinómios possa ter de ser reduzido para p .

BLACKER e BELYTCHKO [1994] utilizaram, em (8.31), polinómios de grau p para o campo de tensões em cada *patch*. Este campo, além de aproximar as tensões nos pontos óptimos, deve também satisfazer aproximadamente as equações de equilíbrio no interior dos elementos e o equilíbrio na fronteira estática. Os valores de $\hat{\mathbf{p}}$ são obtidos minimizando, em cada *patch*,

$$\begin{aligned} & \sum_k (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}_{(k)}) - \sigma_c(\mathbf{x}_{(k)}))^T (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}_{(k)}) - \sigma_c(\mathbf{x}_{(k)})) + \\ & + \int_{\Omega_{patch}} (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f})^T (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f}) d\Omega + \int_{\Gamma_t \cap \Gamma_{patch}} (\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_T)^T (\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_T) d\Omega. \end{aligned} \quad (8.33)$$

As tensões no elemento $\Omega_{(e)}$ são obtidas, não de (8.19), mas de

$$\tilde{\sigma} = \sum_l \psi_{(l)} \mathbf{P} \hat{\mathbf{p}}_{(l)}, \quad (8.34)$$

em que o somatório é extensivo aos vértices dos elementos e $\psi_{(l)}$ é a função de interpolação associada ao vértice l .

LI e WIBERG [1994] definiram, para cada elemento $\Omega_{(e)}$, um *patch* contendo $\Omega_{(e)}$ e os elementos com vértices comuns a $\Omega_{(e)}$. Utilizando, em cada *patch* elementar e para cada componente do tensor das tensões, um polinómio de grau $p+2$, é possível obter uma aproximação de mínimos quadrados aos valores dessa componente nos pontos óptimos de amostragem das tensões nesse *patch*. As tensões no elemento $\Omega_{(e)}$ são obtidas, sem utilizar (8.19), directamente de

$$\tilde{\sigma} = \check{\sigma}, \quad (8.35)$$

podendo não ser contínuas de elemento para elemento.

8.7. Construção de uma aproximação melhorada do campo de deslocamentos

Utilizando funções de interpolação de grau $p+1$ em cada elemento finito, é possível obter um campo de deslocamentos mais regular

$$\tilde{u}_i = \check{\phi} \hat{u}_i. \quad (8.36)$$

Como indicador do erro, utiliza-se [ZHONG e BECKERS, 1990b] [BECKERS e ZHONG, 1992]

$$\varepsilon_{(e)}^2 = \int_{\Omega_{(e)}} (\varepsilon_c - \check{\varepsilon}) \mathbf{k} (\varepsilon_c - \check{\varepsilon}) d\Omega. \quad (8.37)$$

Os nós da malha inicial são os pontos óptimos de amostragem dos deslocamentos da solução de elementos finitos. Portanto, nesses pontos,

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_c. \quad (8.38)$$

Estes autores utilizaram dois métodos para construir $\tilde{\mathbf{u}}$, um método directo e um método indirecto.

No método directo, em cada elemento $\Omega_{(e)}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ coincide com \mathbf{u}_c nos nós do elemento e é uma aproximação de mínimos quadrados de \mathbf{u}_c nos nós vizinhos de $\Omega_{(e)}$.

No método indirecto, constrói-se um campo contínuo de derivadas de ordem p , utilizando os mesmos métodos que se utilizam para obter campos de tensões contínuos. A partir deste campo de derivadas, constrói-se um campo de deslocamentos que obedece a (8.38).

DURAN *et al* [1991] utilizaram métodos semelhantes para obter $\tilde{\epsilon}$ em triângulos lineares.

WIBERG *et al* [1994] utilizaram polinómios de grau $p+1$ ou $p+2$ para o campo de deslocamentos em *patches* associados a cada vértice:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{u}}. \quad (8.39)$$

Os valores de $\hat{\mathbf{u}}$ são então obtidos minimizando

$$\begin{aligned} & \sum (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_c)^T \frac{1}{\mathbf{E}} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_c) + \beta \int_{\Omega_{\text{patch}}} (\mathbf{D}^* \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f})^T \frac{1}{\mathbf{E}} (\mathbf{D}^* \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}) d\Omega + \\ & + \sum (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_c)^T \mathbf{E} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_c) + w_t \sum (\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_r)^T \frac{1}{\mathbf{E}} (\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_r) + w_u \sum (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_r)^T \mathbf{E} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_r), \end{aligned} \quad (8.40)$$

em que os somatórios são extensivos aos pontos óptimos de amostragem da grandeza correspondente no *patch*, β é um coeficiente de penalização, geralmente unitário e w_t e w_u são pesos, geralmente iguais a 10. Os valores nodais $\hat{\mathbf{u}}_i$ são obtidos conforme descrito em 8.6.6.

WIBERG e LI [1994] definiram, para cada elemento $\Omega_{(e)}$, um *patch* contendo $\Omega_{(e)}$ e os elementos com vértices comuns a $\Omega_{(e)}$. Utilizando, em cada *patch* elementar e para cada deslocamento, um polinómio de grau $p+2$,

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{P} \hat{\mathbf{u}}_i, \quad (8.41)$$

é possível obter uma aproximação de mínimos quadrados aos valores desse deslocamento nos pontos óptimos de amostragem dos deslocamentos nesse *patch*. Os deslocamentos no elemento $\Omega_{(e)}$ são obtidos, sem utilizar (8.38), directamente de

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad (8.42)$$

podendo não ser contínuos de elemento para elemento.

8.8. Erro de interpolação

Seja \mathbf{u}_I a função que interpola a solução exacta \mathbf{u} , isto é, o campo de deslocamentos do modelo de elementos finitos que coincide com \mathbf{u} em todos os nós. Como consequência de (4.11), o erro da solução de elementos finitos é inferior ao erro de interpolação:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_E. \quad (8.43)$$

Portanto, as estimativas do erro de interpolação podem ser utilizadas como estimativas do erro da solução de elementos finitos [SEWELL, 1976].

Se \mathbf{u} for suficientemente regular, para um elemento finito de grau p [DIAZ *et al*, 1983],

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_{E,(i)} \leq C h_{(i)}^p |\mathbf{u}|_{p+1,(i)}, \quad (8.44)$$

em que $h_{(i)}$ é o diâmetro do elemento $\Omega_{(i)}$ e C é uma constante que depende apenas da forma do elemento. Em 2D e para $p = 1$ [DEMKOWICZ *et al*, 1985],

$$|\mathbf{u}|_{2,(i)} = \left(\int_{\Omega_{(i)}} \left((2G + 2\lambda) \left(\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right)^2 \right) + 2G \left(\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 \right) \right) d\Omega \right)^{1/2}, \quad (8.45)$$

$$\text{onde } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ e } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Assim, tendo calculado C e obtendo-se uma aproximação das derivadas de ordem $p+1$, pode-se utilizar como indicador de erro

$$\varepsilon_{(i)} = C h_{(i)}^p |\tilde{\mathbf{u}}|_{p+1,(i)}. \quad (8.46)$$

Regra geral, a teoria dos erros de interpolação é utilizada para obter indicadores de refinamento, como referido em 10.7, e não indicadores de erro.

8.9. Análise dual com cálculo local da solução equilibrada

A partir de uma solução de elementos finitos compatíveis é possível obter uma solução equilibrada, efectuando apenas cálculos locais.

LADEVÈZE e LEGUILLON [1983] utilizaram este método para calcular aquilo que designaram por norma energética do erro na relação constitutiva:

$$\|\sigma_e - \sigma_c\|_E. \quad (8.47)$$

A norma deste erro é um majorante da norma energética do erro, como se verá em 9.2:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \varepsilon = \|\sigma_e - \sigma_c\|_E, \quad (8.48)$$

e pode ser calculada a partir das contribuições elementares

$$\varepsilon_{(i)} = \|\sigma_e - \sigma_c\|_{E,(i)}. \quad (8.49)$$

Uma interpretação para o cálculo local da solução equilibrada é a que se exemplifica em seguida.

Considere-se um nó interior de uma malha de elementos finitos de quatro nós. Na figura 8.1, indicam-se as componentes, numa das direcções do referencial, da força de massa e da tensão na fronteira de cada um dos elementos adjacentes ao nó, correspondentes à solução de elementos finitos.

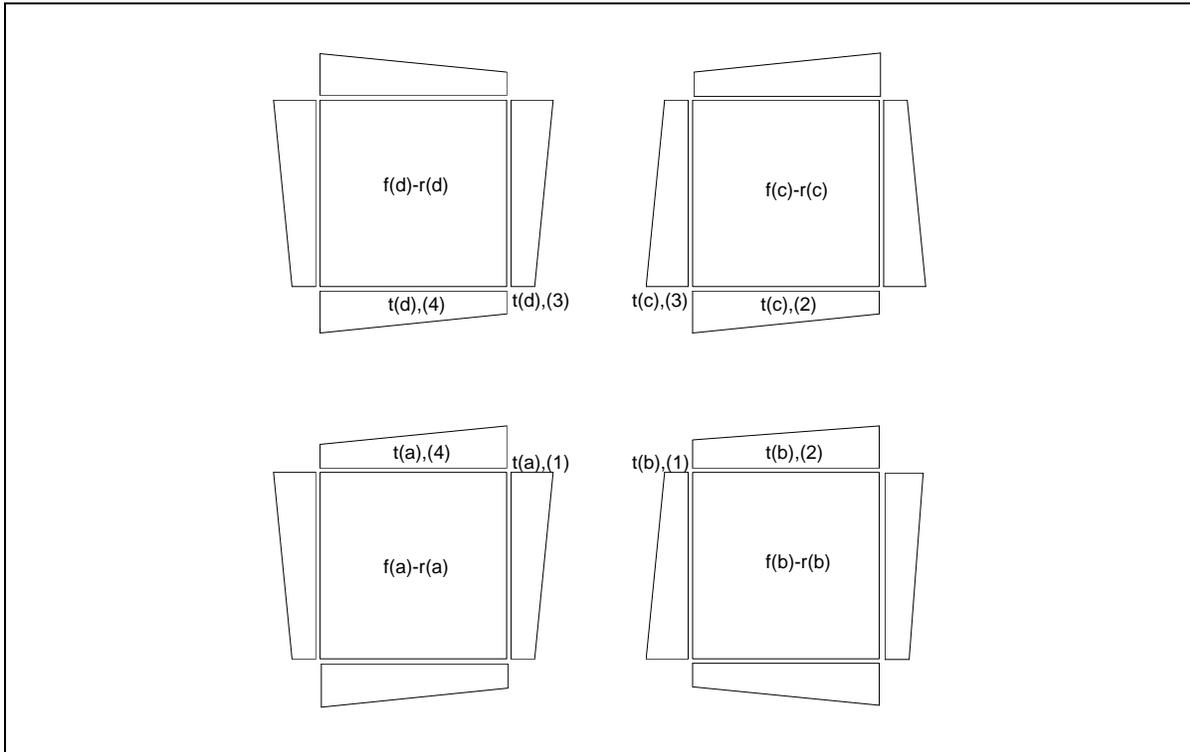


Figura 8.1 - Componentes, numa das direcções do referencial, das forças de massa e tensões nos lados correspondentes à solução de elementos finitos.

Na solução equilibrada, as forças de massa são as devidas ao carregamento. A tensão em cada lado é obtida adicionando uma correcção, por cada nó contido nesse lado, à média das tensões, nesse lado, correspondentes a cada um dos elementos adjacentes, obtidas da solução de elementos finitos.

As correcções, na direcção considerada, correspondentes a um nó são da forma indicada, para o nó central, na figura 8.2. Para cada elemento, o trabalho da correcção é nulo para todos os campos de deslocamento do elemento (figura 8.3) excepto para o correspondente ao nó central.

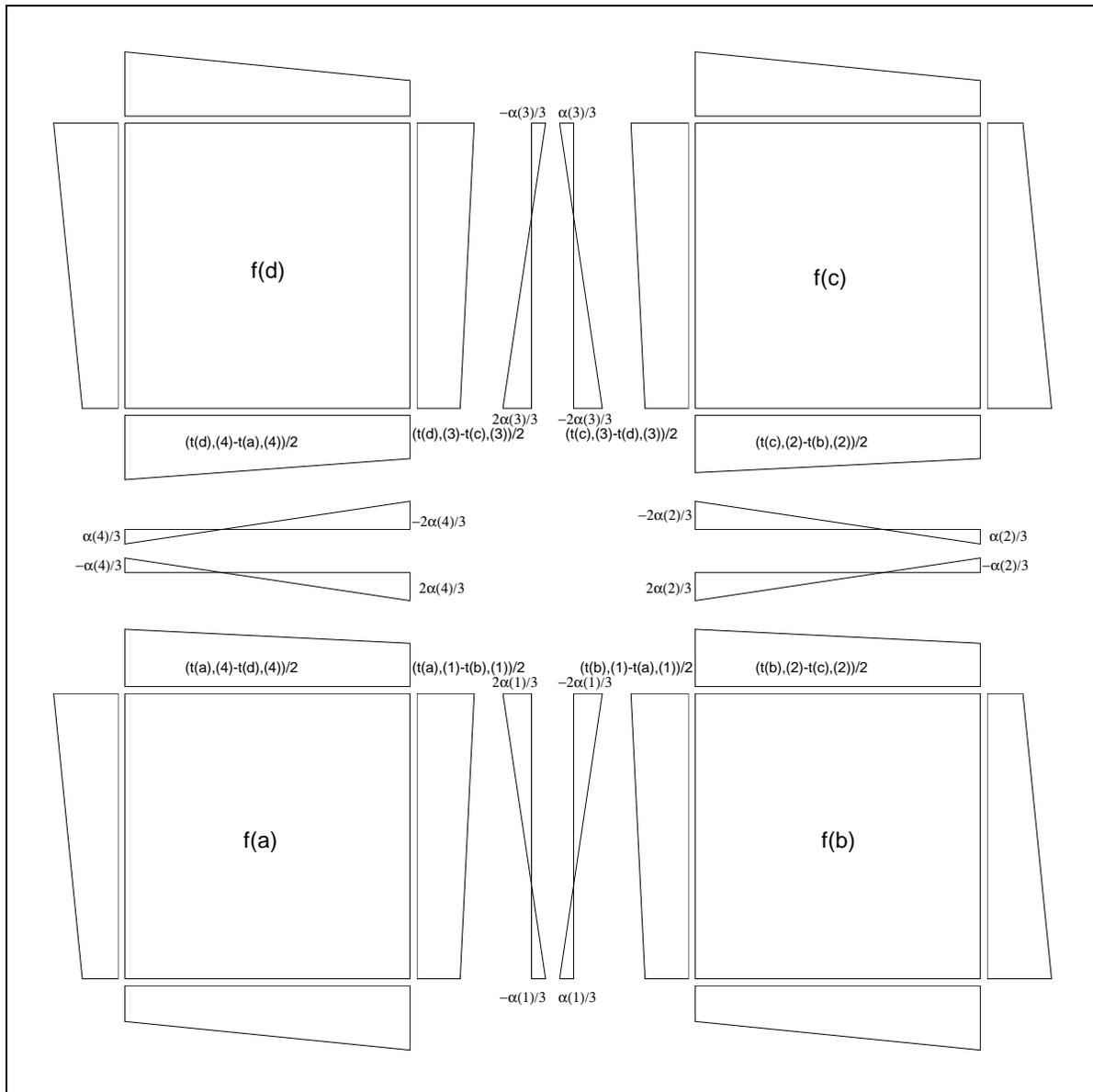


Figura 8.2 - Média das tensões e correcções correspondentes ao nó central.

Quaisquer que sejam as correcções correspondentes aos outros nós e os valores dos parâmetros α , as tensões em cada lado, correspondentes a cada um dos elementos adjacentes, serão equilibradas em todos os pontos.

Os valores dos parâmetros α do nó são calculados de modo a que, para cada elemento e para o correspondente campo de deslocamentos (figura 8.3) o trabalho das tensões nos lados e das forças de massa da solução de elementos finitos (figura 8.1) e da solução corrigida (figura 8.2) sejam iguais. Note-se que, dada a sua forma, as correcções correspondentes aos outros nós não afectam estas condições. Uma vez repetido este processo para todos os outros nós e para a outra direcção, as forças nodais equivalentes, em cada elemento, serão iguais para a solução de elementos finitos e para a solução corrigida. A tensão nos lados e a força de massa correspondentes a qualquer campo de deslocamentos de um elemento finito equilibram esse elemento. Portanto, a tensão nos lados obtida por este método e a força de massa aplicada pelo carregamento equilibrarão cada um dos elementos.

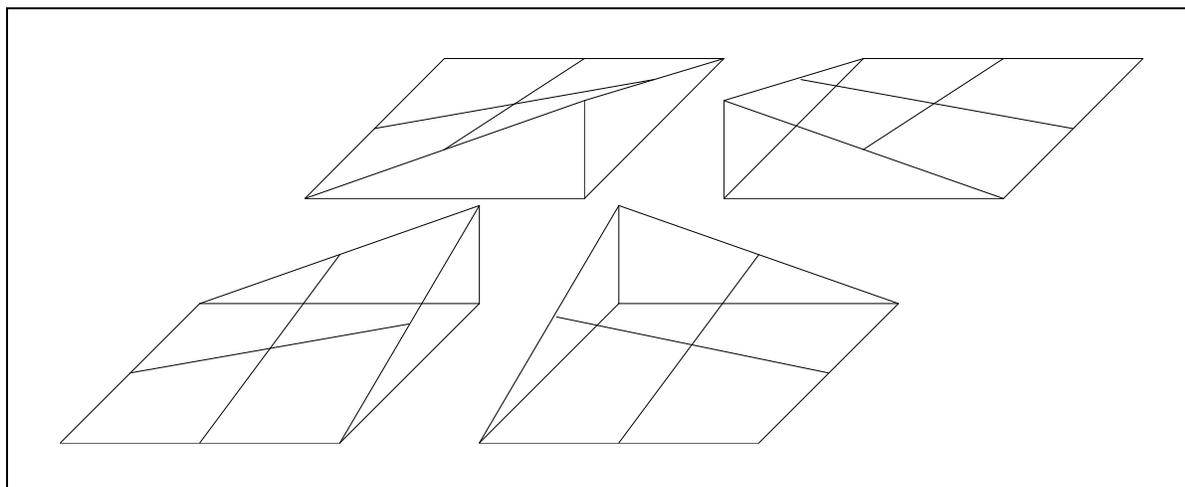


Figura 8.3 - Funções de interpolação dos elementos.

Aplicando a força de massa e a tensão nos lados obtidas para cada elemento a um superelemento de equilíbrio [LADEVÈZE *et al*, 1986], obtém-se uma solução equilibrada, recorrendo apenas a cálculos locais.

O trabalho das tensões nos lados e forças de massa da solução de elementos finitos (figura 8.1) é igual ao do carregamento, para cada uma das deformadas da malha de elementos finitos e, portanto, para a representada na figura 8.4. Consequentemente, existe uma dependência, em cada direcção, nas condições para a determinação dos α em cada nó interior. As indeterminações podem ser levantadas, em cada nó, de diversas maneiras [LADEVÈZE e

LEGUILLON, 1983] [LADEVÈZE *et al*, 1991]. Uma possibilidade consiste na minimização da soma dos quadrados dos α do nó.

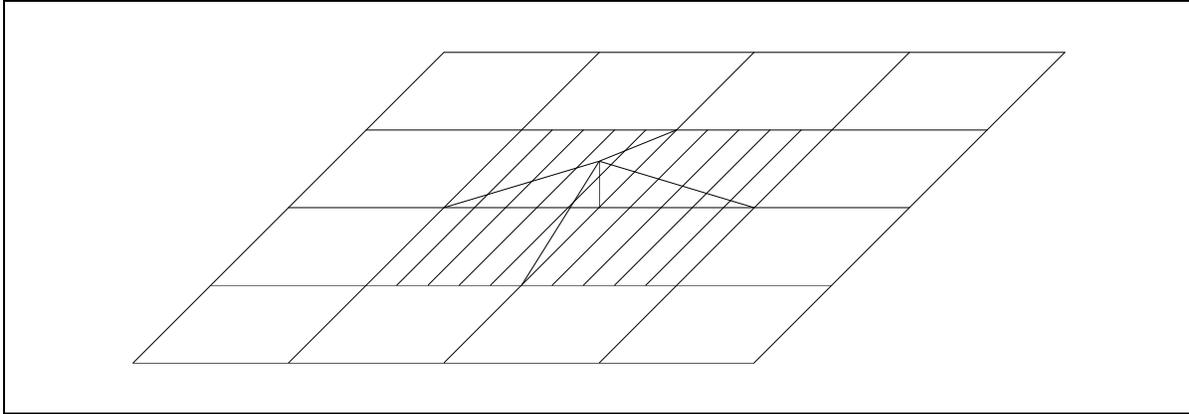


Figura 8.4 - Função de interpolação da malha.

Os métodos para obter saltos de tensão nos lados que equilibram cada elemento, descritos ou referidos em 8.5, podem também ser adaptados para obter soluções equilibradas a partir da solução de elementos finitos compatíveis.

Em [MAUNDER e HILL, 1990] e [LADEVÈZE e MAUNDER, 1996] pode encontrar-se uma interpretação, em termos de forças nodais, para o cálculo local da solução equilibrada.

9. Indicadores de erro para malhas de elementos finitos de equilíbrio

9.1. Introdução

A principal contribuição original da presente tese encontra-se neste capítulo. Na secção 9.2, descreve-se a obtenção de indicadores de erro a partir da análise dual global, um dos métodos utilizados neste trabalho. Parte desta secção corresponde a trabalho publicado pelo autor em [PEREIRA e ALMEIDA, 1995b]. Em seguida, sugerem-se vários métodos para obter indicadores de erro para elementos finitos de equilíbrio e descreve-se o método adoptado, baseado na utilização explícita dos defeitos de compatibilidade.

9.2. Indicadores de erro obtidos da análise dual global

Considerem-se um campo de deslocamentos compatível \mathbf{u}_c , com um erro \mathbf{e}_c e um campo de tensões equilibrado σ_e , com um erro \mathbf{e}_e .

Num caso genérico [DEBONGNIE, 1983],

$$U(\sigma_e - \sigma_c) = \pi_p(\mathbf{u}_c) + \pi_c(\sigma_e) \quad (9.1)$$

e [PRAGER e SYNGE, 1947]

$$U(\mathbf{e}_e) + U(\mathbf{e}_c) = U(\sigma_e - \sigma_c). \quad (9.2)$$

Portanto, para qualquer um dos campos,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \|\sigma_e - \sigma_c\|_E. \quad (9.3)$$

$\|\sigma_e - \sigma_c\|_E$ pode ser interpretado como um erro na relação constitutiva [LADEVÈZE e LEGUILLON, 1983].

Considere-se agora que u_c é uma solução obtida a partir de um modelo de elementos finitos compatíveis e que σ_e é uma solução obtida a partir de um modelo de elementos finitos de equilíbrio. Se a malha de elementos finitos compatíveis e a malha de elementos finitos de equilíbrio tiverem a mesma geometria, o estimador do erro

$$\varepsilon = \|\sigma_e - \sigma_c\|_E \quad (9.4)$$

pode ser calculado a partir dos indicadores de erro elementares [ODEN *et al*, 1989] [PEREIRA e ALMEIDA, 1995b]

$$\varepsilon_{(i)} = \|\sigma_e - \sigma_c\|_{E,(i)}. \quad (9.5)$$

Este estimador é válido quer para a solução compatível, quer para a solução equilibrada. Contudo, para uma das soluções, o índice de eficácia θ não pode ser inferior a $\sqrt{2}$, enquanto, para a outra, $1 \leq \theta \leq \sqrt{2}$. Se uma das soluções for significativamente melhor do que a outra, este estimador será um majorante próximo do erro da pior solução e um majorante afastado do erro da melhor. Se o erro das duas soluções for igual, $\theta = \sqrt{2}$ para ambas.

Note-se que as fórmulas (9.1), (9.2) e (9.3), bem como as (7.8), (7.9) e (7.10), são válidas para quaisquer tipos de acções e para quaisquer soluções equilibradas e compatíveis, como é exemplificado de seguida, de forma extrema.

Considere-se a placa representada na figura 9.1, sujeita à pressão, aos deslocamentos impostos e à variação de temperatura aí indicadas.

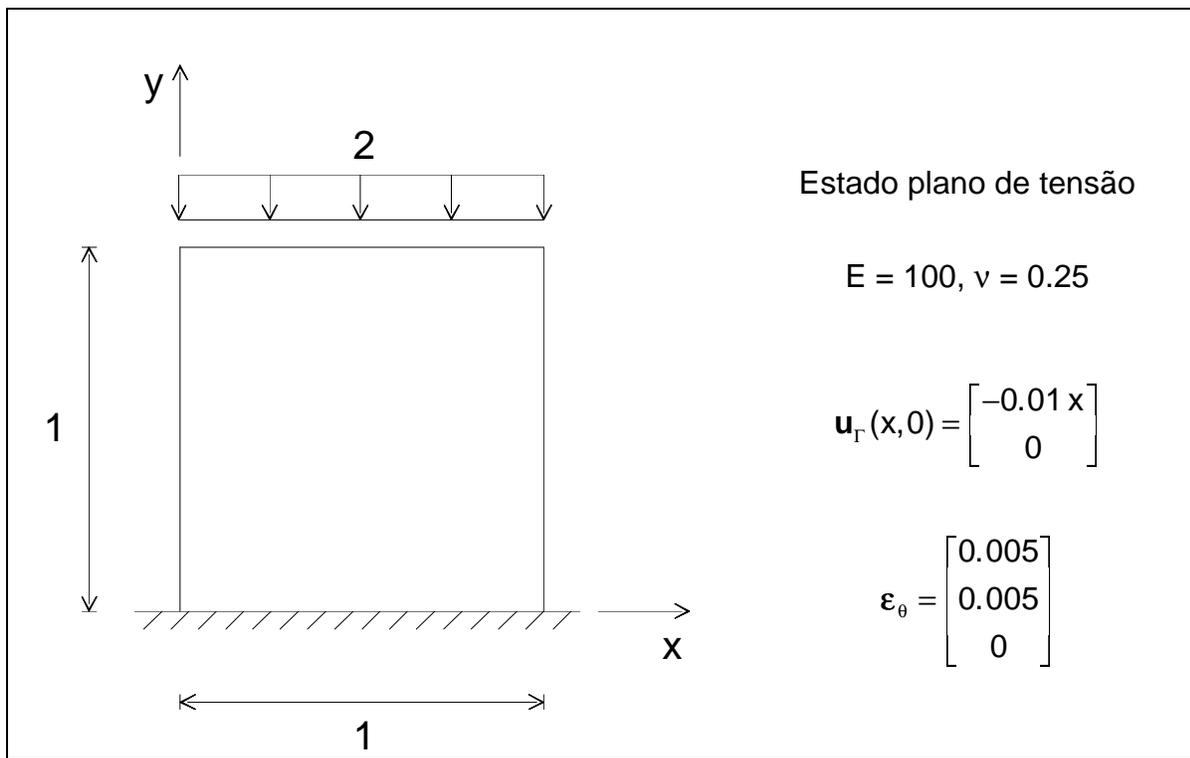


Figura 9.1 - Placa sujeita simultaneamente a vários tipos de acções.

Como solução compatível, considera-se

$$\mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} -0.01x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.6)$$

para a qual se tem:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_c = \begin{bmatrix} -1.73333 \\ -0.93333 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.7)$$

$U(\mathbf{u}_c) = 0.015333$, $W(\mathbf{u}_c) = 0$ e $\pi_p(\mathbf{u}_c) = 0.015333$.

Como solução equilibrada, considera-se

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.8)$$

para a qual se tem:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.015 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.9)$$

$U(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0.02$, $U^*(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0.01$, $W^*(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0$ e $\pi_C(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0.01$.

Verifica-se que

$$U(\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_c) = 0.025333 = \pi_p(\mathbf{u}_c) + \pi_C(\boldsymbol{\sigma}_e). \quad (9.10)$$

Então, para qualquer uma das soluções,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq 0.225093 = \|\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_c\|_E. \quad (9.11)$$

Além disso,

$$-0.01 \leq -\pi_C(\mathbf{u}) = \pi_p(\mathbf{u}) \leq 0.015333. \quad (9.12)$$

Como era de esperar, sendo as soluções arbitradas tão grosseiras, o valor obtido para o majorante do erro é muito elevado.

9.3. Construção de um campo de deslocamentos compatível

9.3.1. Introdução

A partir de funções de interpolação do tipo das usadas nos elementos finitos de deslocamento e de valores nodais dos deslocamentos, é possível obter um campo de deslocamentos,

$$\mathbf{u}_{i,c} = \tilde{\boldsymbol{\phi}} \hat{\mathbf{u}}_i, \quad (9.13)$$

compatível, isto é, contínuo e satisfazendo as condições de fronteira cinemáticas.

Os métodos de obter os valores nodais dos deslocamentos, a partir duma solução de elementos finitos de equilíbrio, irão ser descritos em 9.3.2 e 9.3.3.

Como indicador do erro, utiliza-se

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} (\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_c) \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_c) d\Omega. \quad (9.14)$$

Como se viu em 9.2, o estimador do erro obtido a partir destes indicadores é um majorante do erro.

Em geral, os deslocamentos nos lados, obtidos da solução de elementos finitos de equilíbrio, não são contínuos. Este método de obter o indicador de erro tem a vantagem de permitir apresentar ao utilizador uma deformada contínua e que respeita as condições de fronteira cinemáticas.

9.3.2. Cálculo da solução compatível a partir dos deslocamentos elementares

Em 4.5.2, descreveram-se métodos para obter um campo de deslocamentos incompatível correspondente à solução equilibrada, \mathbf{u}_e . Os valores nodais dos deslocamentos, a utilizar em (9.13), podem ser obtidos a partir de \mathbf{u}_e , utilizando, com as necessárias adaptações, um dos métodos para obter um campo de tensões contínuo descritos em 8.6.3 e 8.6.4. De entre estes métodos, o descrito em 8.6.3 obriga a formar e resolver um sistema de equações da ordem de grandeza do sistema correspondente à solução de elementos finitos. Portanto, não parece trazer vantagens em relação à análise dual global, descrita em 9.2.

Para elementos com funções de aproximação de tensões de grau p , devem usar-se funções de interpolação $\tilde{\phi}$ de grau $p+1$.

Conforme indicado em 4.5.2, se existirem modos espúrios, para que \mathbf{u}_e e, portanto, o estimador de erro, sejam independentes da amplitude destes, \mathbf{u}_e tem de ser obtido através de cálculos globais. Se não existirem modos espúrios, \mathbf{u}_e pode de ser obtido através de cálculos locais. Portanto, este método é mais adequado para malhas de superelementos.

Como exemplo ilustrativo, considere-se a placa triangular representada na figura 9.2.

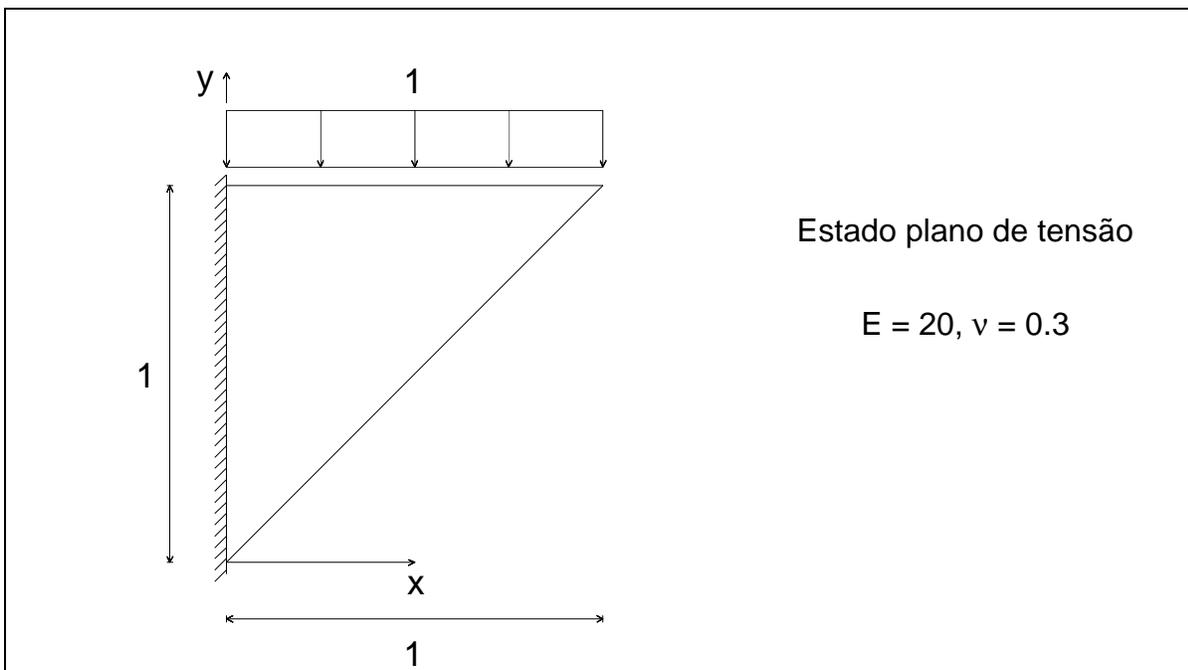


Figura 9.2 - Placa triangular.

Note-se que não existe nenhum campo de tensões contínuo que satisfaça as condições de fronteira estáticas no vértice mais à direita.

A placa foi discretizada em dois elementos finitos de equilíbrio triangulares com funções de aproximação constantes, conforme indicado na figura 9.3.

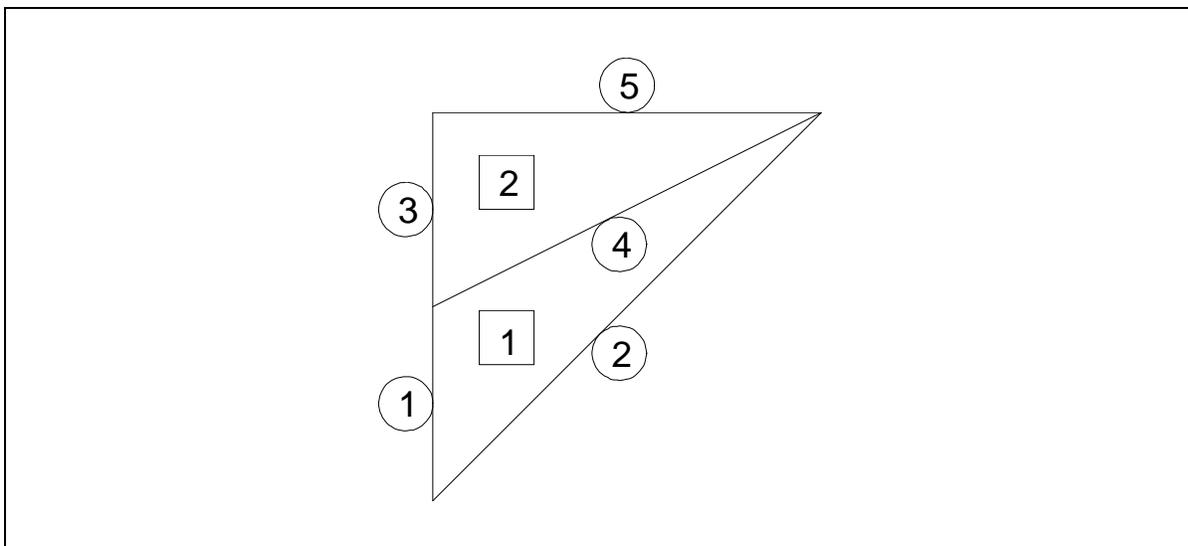


Figura 9.3 - Discretização da placa triangular.

Com esta discretização, obtém-se o campo de tensões equilibrado:

$$\boldsymbol{\sigma}_{e,(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\sigma}_{e,(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

e os deslocamentos nos lados:

$$\mathbf{v}_{e,(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{e,(2)} = \begin{bmatrix} 0.01125 \\ -0.24 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{e,(3)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{e,(4)} = \begin{bmatrix} 0.0575 \\ -0.2575 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (9.16)$$

$$\mathbf{v}_{e,(5)} = \begin{bmatrix} 0.18625 \\ -0.2775 \end{bmatrix},$$

que se representam na figura 9.4(a). A solução obtida para estes deslocamentos é única, pois nesta malha não existem modos espúrios. Para esta solução, $U(\boldsymbol{\sigma}_e) = \pi_C(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0.13875$.

Utilizando (4.43) e (4.45), (4.43) e (4.46), ou (4.43) e (4.50), com funções de aproximação de deslocamentos lineares, obtém-se o campo de deslocamentos incompatível:

$$\mathbf{u}_{e,(1)} = \begin{bmatrix} -0.04625 - 0.07x + 0.185y \\ 0.0175 - 0.445x - 0.07y \end{bmatrix} \text{ e} \quad (9.17)$$

$$\mathbf{u}_{e,(2)} = \begin{bmatrix} -0.38625 + 0.115x + 0.515y \\ 0.06 - 0.515x - 0.08y \end{bmatrix},$$

que se representa na figura 9.4(b).

Fazendo a média aritmética dos deslocamentos nodais e impondo as condições de fronteira cinemáticas, obtém-se o campo de deslocamentos compatível

$$\mathbf{u}_{c,(1)} = \mathbf{u}_{c,(2)} = \begin{bmatrix} 0.15625x \\ -0.51625x \end{bmatrix}, \quad (9.18)$$

que se representa na figura 9.4(c).

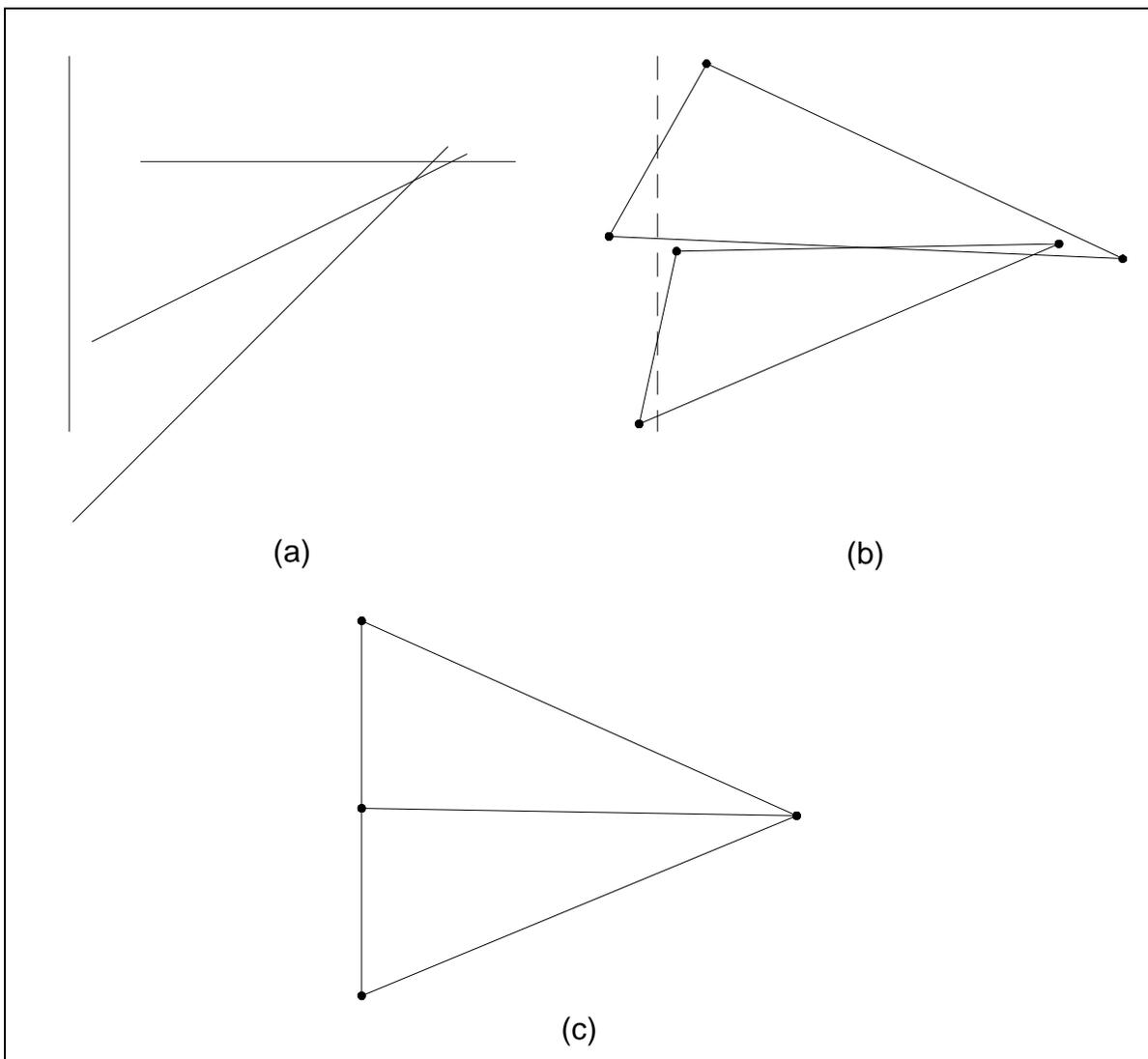


Figura 9.4 - Deformadas da placa triangular: (a) \mathbf{v}_e , (b) \mathbf{u}_e , (c) \mathbf{u}_c .

Para este campo de deslocamentos, tem-se $\varepsilon^2 = 0.5273$, o que é um majorante muito elevado. Tomando, simplesmente, $\mathbf{u}_c = \mathbf{0}$, obtém-se $U(\mathbf{e}_e) \leq 0.13875$.

Dado que os deslocamentos impostos são nulos, é fácil obter melhor fazendo

$$\mathbf{u}_{c,(1)}(\delta) = \mathbf{u}_{c,(2)}(\delta) = \begin{bmatrix} 0.15625x \\ -0.51625x \end{bmatrix} \delta \quad (9.19)$$

e minimizando

$$\pi_p(\mathbf{u}_c(\delta)). \quad (9.20)$$

O valor mínimo é obtido para $\delta = 0.19957$, para o qual $U(\sigma_e - \sigma_c) = 0.112993$.

Durante a elaboração desta tese, o autor colaborou na orientação de uma dissertação de Mestrado [MAY, 1996], na qual este método de construção de um campo de deslocamentos compatível foi utilizado para obter um majorante do erro para malhas uniformes de superelementos de equilíbrio de grau um. Os valores nodais dos deslocamentos, a utilizar em (9.13), foram obtidos através da média aritmética dos valores nodais.

9.3.3. Cálculo da solução compatível a partir dos deslocamentos dos lados

Para algumas funções de interpolação de deslocamento $\tilde{\phi}$, tais como as funções de interpolação clássicas de grau 1 e 2 em triângulos e de grau 1, 2 e 3 em tetraedros, todos os nós estão localizados nos lados dos elementos. Utilizando funções deste tipo em (9.13), os valores nodais dos deslocamentos podem ser obtidos exclusivamente a partir de um campo de deslocamentos dos lados compatível, \mathbf{v}_c . Este campo pode ser obtido apenas com base nos deslocamentos dos lados correspondentes à solução de elementos finitos, \mathbf{v}_e . Nos nós onde \mathbf{v}_e é descontínuo, basta fazer a média dos valores obtidos a partir de cada um dos lados adjacentes ao nó e impor as eventuais condições de fronteira cinemáticas.

Esta alternativa tem a vantagem de não necessitar do cálculo de \mathbf{u}_e . Contudo, se existirem modos espúrios, \mathbf{v}_e e, portanto, o estimador de erro dependerão da amplitude destes. Além disso, como se referiu em 4.5.2, a solução obtida para o campo de tensões pode ser exacta sem que os deslocamentos \mathbf{v}_e o sejam. Portanto, o estimador de erro que se obtém pode não ser nulo quando a solução de elementos finitos é exacta.

9.4. Resolução de um problema de Neumann local

Seja $T_{(l)}$ o conjunto dos elementos finitos que têm o nó l como vértice. É possível obter uma melhor aproximação do campo de tensões em $T_{(l)}$ resolvendo, através de um refinamento dos $\Omega_{(i)} \subset T_{(l)}$, o problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^* \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f} &= \mathbf{0} \text{ em } T_{(l)}, \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{v}_\Gamma \text{ em } \partial T_{(l)} \cap \Gamma_u \text{ e } \mathbf{N}_{(j),(i)} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{(i)} + \mathbf{N}_{(j),(k)} \boldsymbol{\sigma}_{e,(k)} = \bar{\mathbf{t}}_{(j)} \text{ nos } \Gamma_{(j)} \subset \partial T_{(l)} \setminus \Gamma_u. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Nesta última equação, $\Omega_{(i)} \subset T_{(l)}$ e $\Omega_{(k)} \not\subset T_{(l)}$. O indicador de erro associado a $T_{(l)}$ é

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{T_{(i)}} (\sigma_e - \tilde{\sigma})^T f(\sigma_e - \tilde{\sigma}) d\Omega. \quad (9.22)$$

O estimador do erro global é obtido a partir de todos os indicadores calculados, tal como para indicadores elementares. Pode ser obtido um indicador de erro para o elemento $\Omega_{(i)}$ a partir das contribuições de $\Omega_{(i)}$ para todos os indicadores associados aos $T_{(i)} \supset \Omega_{(i)}$.

Este método de obter o indicador de erro tem a vantagem de não necessitar do cálculo do campo de deslocamentos incompatível correspondente à solução equilibrada, u_e . Tem a desvantagem de fornecer sempre um minorante do erro.

9.5. Construção de um campo de tensões contínuo

O campo de tensões correspondente à solução de elementos finitos, apesar de equilibrado, apresenta, em geral, descontinuidades.

A partir de funções de interpolação do tipo das usadas nos elementos finitos de deslocamento e de valores nodais das componentes do tensor das tensões, é possível obter um campo de tensões contínuo

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\phi} \hat{\sigma}_{ij}. \quad (9.23)$$

Para elementos com funções de aproximação de tensões de grau p , devem usar-se funções de interpolação $\tilde{\phi}$ de grau p ou $p+1$.

Este processo deve ser aplicado separadamente a cada região material, pois o campo de tensões não é contínuo nos pontos onde há descontinuidades materiais.

Embora seja possível impor as condições de fronteira estáticas ao campo de tensões contínuo, não deverá haver grande vantagem em fazê-lo, pois σ_e já obedece a essas condições.

Como indicador do erro, utiliza-se

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} (\sigma_e - \tilde{\sigma}) f(\sigma_e - \tilde{\sigma}) d\Omega. \quad (9.24)$$

Os valores nodais das componentes do tensor das tensões podem ser obtidos, a partir da solução de elementos finitos, utilizando um dos métodos utilizados para obter campos de tensões contínuos, a partir de soluções de elementos finitos compatíveis, descritos em 8.6.2, 8.6.3, 8.6.4 e 8.6.6. De entre

estes métodos, os descritos em 8.6.2 e 8.6.3 obrigam a formar e resolver um sistema de equações da ordem de grandeza do sistema correspondente à solução de elementos finitos. Portanto, não parecem trazer vantagens em relação à análise dual global, descrita em 9.2.

Este método de obter o indicador de erro tem a vantagem de não necessitar do cálculo de \mathbf{u}_e . Pode fornecer um majorante ou um minorante do erro.

9.6. Construção de um campo de deformações contínuo

O campo de deformações correspondente à solução de elementos finitos apresenta, em geral, descontinuidades. Além disso, para elementos de grau superior a um, em geral, não obedece às equações de compatibilidade de St Venant.

A partir de funções de interpolação do tipo das usadas nos elementos finitos de deslocamento e de valores nodais das componentes do tensor das deformações, é possível obter um campo de deformações contínuo

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\phi} \hat{\varepsilon}_{ij}, \quad (9.25)$$

Para elementos com funções de aproximação de tensões de grau p , devem usar-se funções de interpolação $\tilde{\phi}$ de grau p ou $p+1$.

Este processo deve ser aplicado separadamente a cada região material, pois o campo de deformações não é contínuo nos pontos onde há descontinuidades materiais.

A interpolação pode também ser utilizada para impor, *a priori*, as condições de fronteira cinemáticas: a anulação de $\mathbf{G1}$ e $\mathbf{G2}$ em Γ_u para o campo de deformações contínuo.

Note-se que, se o campo de deformações contínuo for de grau superior a um, não obedecerá, em geral, às equações de compatibilidade de St Venant.

Como indicador do erro, utiliza-se

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} (\varepsilon_e - \tilde{\varepsilon}) \mathbf{k} (\varepsilon_e - \tilde{\varepsilon}) d\Omega. \quad (9.26)$$

Quanto à obtenção dos valores nodais das componentes do tensor das deformações e às características deste método, podem fazer-se considerações análogas às de 9.5.

9.7. Utilização explícita dos defeitos de compatibilidade

Neste trabalho, o indicador de erro utilizado para os elementos finitos de equilíbrio é um indicador baseado na utilização explícita dos defeitos de compatibilidade, descritos em 4.5.2.

Os defeitos de compatibilidade considerados são \mathbf{r}_e , em cada $\Omega_{(i)}$, $\mathbf{J1}_{e,(i)}$ e $\mathbf{J2}_{e,(i)}$, em cada $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$, $\mathbf{G1}_e$ e $\mathbf{G2}_e$, análogos de $\mathbf{J1}_{e,(i)}$ e de $\mathbf{J2}_{e,(i)}$ em Γ_u .

Admite-se que $\mathbf{J1}_{e,(i)}$ e $\mathbf{J2}_{e,(i)}$ são divididos igualmente pelos elementos adjacentes a $\Gamma_{(j)}$.

Para um dado campo de extensões exacto e um dado campo de extensões aproximado, ε^2 é uma função linear de E. Para obter um indicador de erro elementar dimensionalmente correcto, a fórmula geral é

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(i)}^2 = & c_1 a h_{(i)}^4 \|\mathbf{r}_e\|_{l,(i)}^2 + c_2 a \sum_j \left(h_{(j)} \left\| \frac{1}{2} \mathbf{J1}_{e,(i)} \right\| \right)^2 + c_2 a \sum_k \left(h_{(k)} \|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)} \right)^2 + \\ & + c_3 a \sum_j \left(h_{(j)}^3 \left\| \frac{1}{2} \mathbf{J2}_{e,(i)} \right\| \right)^2 + c_3 a \sum_k \left(h_{(k)}^3 \|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)} \right)^2, \end{aligned} \quad (9.27)$$

em que os somatórios em j são extensivos aos $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$ do elemento $\Omega_{(i)}$ e os somatórios em k são extensivos aos $\Gamma_{(k)} \subset \Gamma_u$ do elemento $\Omega_{(i)}$.

As normas utilizadas em (9.27) têm de ser invariantes.

Em 3D, utiliza-se

$$\|\mathbf{r}_e\|_{l,(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} \left(2r_{xyz}^2 + 2r_{xyyz}^2 + 2r_{xzyz}^2 + r_{xxyy}^2 + r_{xxzz}^2 + r_{yyzz}^2 \right) d\Omega \quad (9.28)$$

e

$$\left\| \frac{1}{2} \mathbf{J1}_{e,(i)} \right\|_{l,(i)}^2 = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_{(i)}} \left(J1_{t_1 t_1}^2 + 2J1_{t_1 t_2}^2 + J1_{t_2 t_2}^2 \right) d\Gamma. \quad (9.29)$$

As definições de $\|\mathbf{J2}_{e,(i)}\|_{l,(i)}^2$, $\|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2$ e $\|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)}^2$ são análogas a (9.29). A função integranda em (9.28) foi escolhida tendo em conta o número de repetições dos termos não nulos do tensor \mathbf{r}_e , tendo-se verificado que era um invariante. A função integranda em (9.29) é facilmente identificável como um invariante dum tensor de segunda ordem.

Em 2D, utiliza-se

$$\|\mathbf{r}_e\|_{l,(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} r^2 d\Omega \quad (9.30)$$

e

$$\left\| \frac{1}{2} \mathbf{J1}_{e,(i)} \right\|_{l,(i)}^2 = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{J1}_{tt}^2 d\Gamma. \quad (9.31)$$

As definições de $\|\mathbf{J2}_e\|_{l,(k)}^2$, $\|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2$ e $\|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)}^2$ são análogas a (9.31). As funções integrandas em (9.30) e (9.31) são invariantes.

Para c_1 , c_2 e c_3 serem adimensionais, a deve ter dimensões de tensão. Uma alternativa seria utilizar o maior valor próprio da matriz de rigidez infinitesimal \mathbf{k} :

$\frac{E}{1-\nu}$, para estados planos de tensão e $\frac{E}{1-2\nu}$, em elasticidade tridimensional. No entanto, a experiência parece indicar que se obtém um melhor estimador do erro

global utilizando $a = \frac{E}{1-\nu^2}$, para estados planos de tensão e $a = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, em

elasticidade tridimensional. Como se pode verificar, a partir das expressões (2.28) e (2.29), esta alternativa corresponde à variação da energia de deformação com ν para um estado de deformação simples, enquanto o maior valor próprio de \mathbf{k} corresponde à variação da energia de deformação com ν para um estado de deformação uniforme.

Os termos h devem ter dimensões de comprimento. Para o termo correspondente ao integral de volume, utiliza-se $h_{(i)}^4 = V_{(i)}^{4/D}$. Experiências realizadas com versões preliminares do indicador parecem mostrar que esta escolha conduz a um melhor estimador do erro global do que o que se obteria tomando para $h_{(i)}$ o valor da maior distância entre dois vértices do elemento $\Omega_{(i)}$. Para os termos correspondentes a $\|\mathbf{J1}_e\|_{l,(i)}^2$ e $\|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2$, utiliza-se $h_{(i)} = V_{(i)} / A_{(i)}$, valor que é proporcional à "altura" do elemento. Como alternativa, poder-se-ia fazer $h_{(i)} = A_{(i)}^{1/(D-1)}$ ou tomar para $h_{(i)}$ o valor da maior distância entre dois vértices do lado $\Gamma_{(i)}$; experiências realizadas com versões preliminares do indicador parecem mostrar que estas alternativas conduzem a um pior estimador do erro global. Para os termos correspondentes a $\|\mathbf{J2}_e\|_{l,(i)}^2$ e $\|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)}^2$, utiliza-se $h_{(i)}^3 = V_{(i)} A_{(i)}^{3-D}$, o que corresponde a multiplicar a "altura" do elemento por uma potência da "base".

Poder-se-iam utilizar as alternativas já referidas para os termos correspondentes a $\|\mathbf{J1}_e\|_{l,(j)}^2$ e $\|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2$ e, ainda, multiplicar $V_{(j)} / A_{(j)}$ pelo quadrado do valor da maior distância entre dois vértices do lado $\Gamma_{(j)}$. Experiências realizadas com versões preliminares do indicador parecem mostrar que estas alternativas conduzem a um pior estimador do erro global.

Os valores de c_1 , c_2 e c_3 , para elementos triangulares de malhas refinadas adaptativamente, indicados na tabela 9.1, foram determinados experimentalmente, pelo processo que se descreve em seguida.

grau	c_1	c_2	c_3
1	-	1.67×10^{-1}	1.66×10^{-2}
2	1.03×10^{-3}	2.03×10^{-1}	0
3	1.48×10^{-4}	7.78×10^{-2}	2.56×10^{-6}

Tabela 9.1

Para três placas, com diferentes valores do coeficiente de Poisson, foi efectuado um refinamento adaptativo, com base no indicador dual descrito em 9.2. As três placas foram as descritas em 13.4 e 13.5 e uma consola quadrada com $\nu = 0.3$, uniformemente carregada no lado superior. Para as malhas finais, foram calculados, para cada elemento:

$$R_{(j)}^2 = ah_{(j)}^4 \|\mathbf{r}_e\|_{l,(j)}^2; \quad (9.32)$$

$$J1_{(j)}^2 = a \sum_j \left(h_{(j)} \left\| \frac{1}{2} \mathbf{J1}_{e,(j)} \right\| \right)^2 + a \sum_k \left(h_{(k)} \|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2 \right); \quad (9.33)$$

$$J2_{(j)}^2 = a \sum_j \left(h_{(j)} \left\| \frac{1}{2} \mathbf{J2}_{e,(j)} \right\| \right)^2 + a \sum_k \left(h_{(k)} \|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)}^2 \right). \quad (9.34)$$

Para cada uma dessas malhas, foram também calculados:

$$R^2 = \sum_{i=1}^{NE} R_{(i)}^2; \quad (9.35)$$

$$J1^2 = \sum_{i=1}^{NE} J1_{(i)}^2; \quad (9.36)$$

$$J2^2 = \sum_{i=1}^{NE} J2_{(i)}^2. \quad (9.37)$$

Note-se que, para elementos de grau um, $R^2 = R_{(i)}^2 = 0$.

Para cada caso, o valor "exacto" do erro global, $\|\mathbf{e}\|_E$, foi calculado com base numa estimativa de $\|\mathbf{u}\|_E$, obtida utilizando elementos de grau quatro e o processo de extrapolação dual descrito em 7.5. O valor "exacto" do erro elementar, $\|\mathbf{e}\|_{E,(i)}$, foi calculado a partir de uma malha de elementos compatíveis de grau uma unidade acima do grau dos elementos de equilíbrio.

Os valores de c_1 , c_2 e c_3 são dados por

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a \\ c_b \\ c_c \end{bmatrix} c_d. \quad (9.38)$$

Os valores de c_a , c_b e c_c foram determinados obtendo uma solução de mínimos quadrados de:

$$\begin{bmatrix} R_{(1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J1_{(1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J2_{(1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{(NE),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J1_{(NE),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J2_{(NE),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{(1),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J1_{(1),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J2_{(1),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{(NE),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J1_{(NE),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J2_{(NE),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ c_b \\ c_c \end{bmatrix} =$$

(9.39)

$$= \begin{bmatrix} \|\mathbf{e}\|_{E,(1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ \vdots \\ \|\mathbf{e}\|_{E,(NE),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ \vdots \\ \|\mathbf{e}\|_{E,(1),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \\ \vdots \\ \|\mathbf{e}\|_{E,(NE),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \end{bmatrix}.$$

Cada equação está multiplicada por $\|\sigma_e\|_E^2/\|\mathbf{e}\|_E^4$, de modo a dar maior peso aos casos com um menor erro relativo. O valor de c_d foi determinado obtendo uma solução de mínimos quadrados de:

$$\begin{bmatrix} R_1^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J1_1^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J2_1^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ R_2^2 \|\sigma_e\|_{E,2}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,2}^4 & J1_2^2 \|\sigma_e\|_{E,2}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,2}^4 & J2_2^2 \|\sigma_e\|_{E,2}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,2}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_n^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J1_n^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J2_n^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ c_b \\ c_c \end{bmatrix} c_d = \begin{bmatrix} \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^2 \\ \|\sigma_e\|_{E,2}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,2}^2 \\ \vdots \\ \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^2 \end{bmatrix}. \quad (9.40)$$

Deste modo, procurou-se obter um indicador de erro elementar que fosse um bom indicador de refinamento e, simultaneamente, permitisse obter um bom estimador do erro global.

Em princípio, nenhum dos coeficientes deveria ser nulo. Para elementos de grau dois, a aplicação directa do método descrito fornecia um valor negativo para um dos coeficientes, o que é ainda menos razoável. Por isso, arbitrou-se um valor nulo para esse coeficiente e aplicou-se o método descrito para calcular os restantes dois.

Este método de obter o indicador de erro tem a vantagem de não necessitar do cálculo de \mathbf{u}_e . A forma utilizada para obter os valores de c_1 , c_2 e c_3 implica que o estimador possa ser um majorante ou um minorante do erro.

A qualidade do estimador foi testada, nas mesmas três placas, em duas sequências de malhas refinadas adaptativamente, uma com base no indicador dual descrito em 9.2, a outra no indicador (9.27). Para duas das placas, as malhas iniciais das duas sequências foram diferentes. Para cada grau, foi elaborado um histograma de

$$\max\left(\frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{e}\|_E^2}, \frac{\|\mathbf{e}\|_E^2}{\varepsilon^2}\right) = \max\left(\theta^2, \frac{1}{\theta^2}\right). \quad (9.41)$$

Estes histogramas estão representados nas figuras 9.5, 9.6 e 9.7, onde se indica, também, quantos casos correspondem a majorantes e quantos a minorantes.

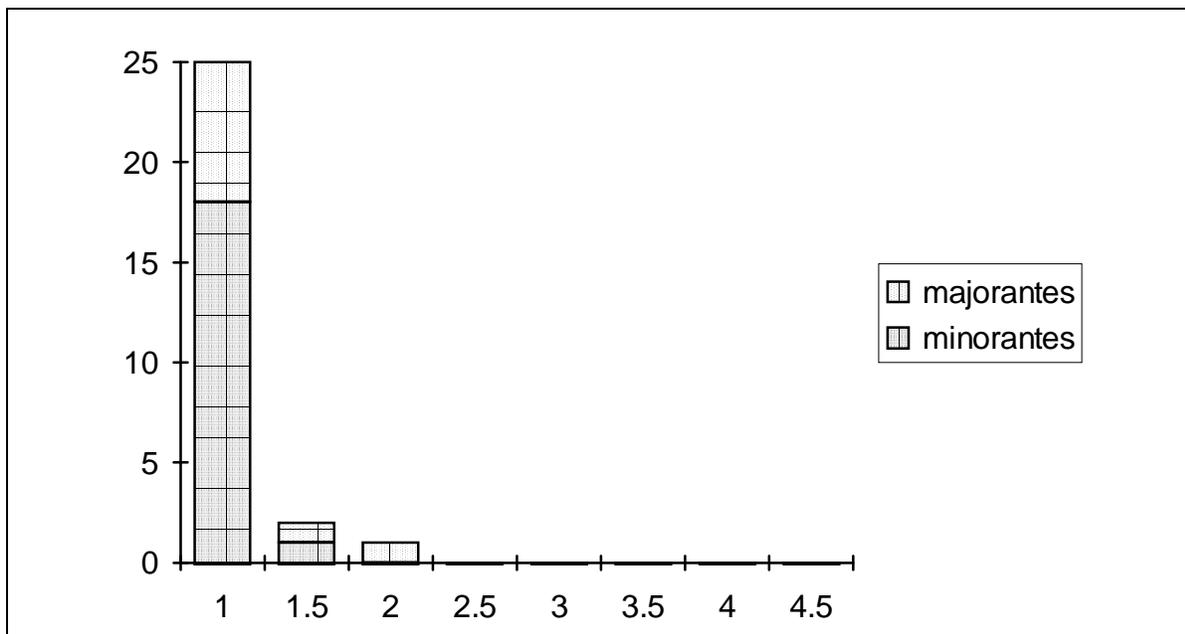


Figura 9.5 - Histograma de $\max(\theta^2, 1/\theta^2)$ para elementos de grau 1.

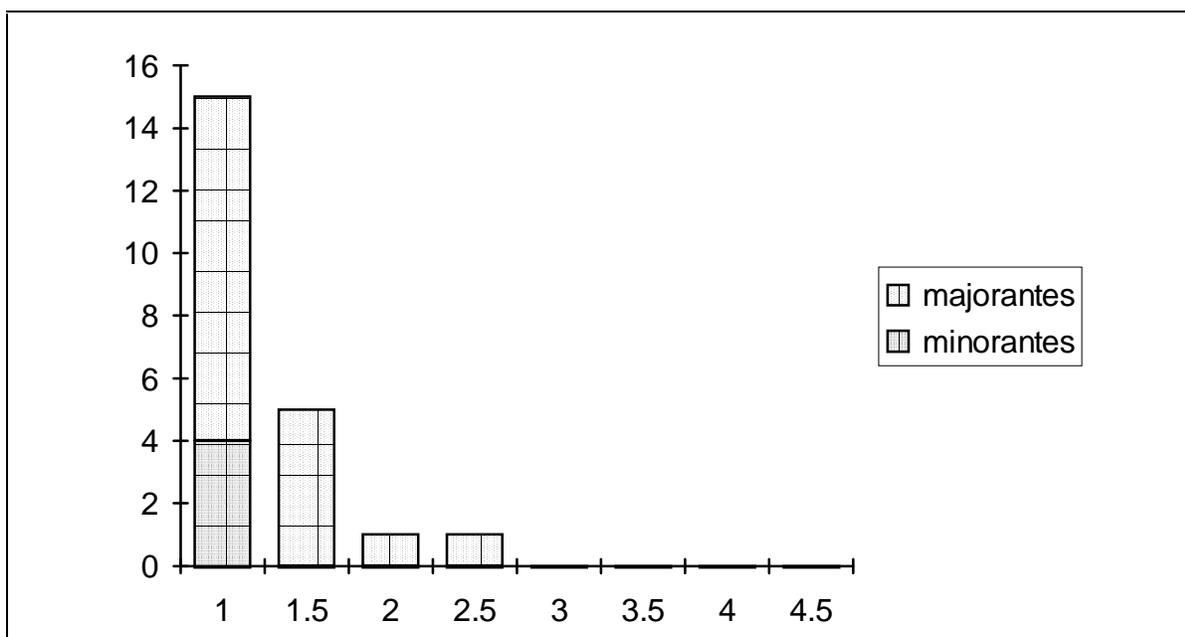


Figura 9.6 - Histograma de $\max(\theta^2, 1/\theta^2)$ para elementos de grau 2.

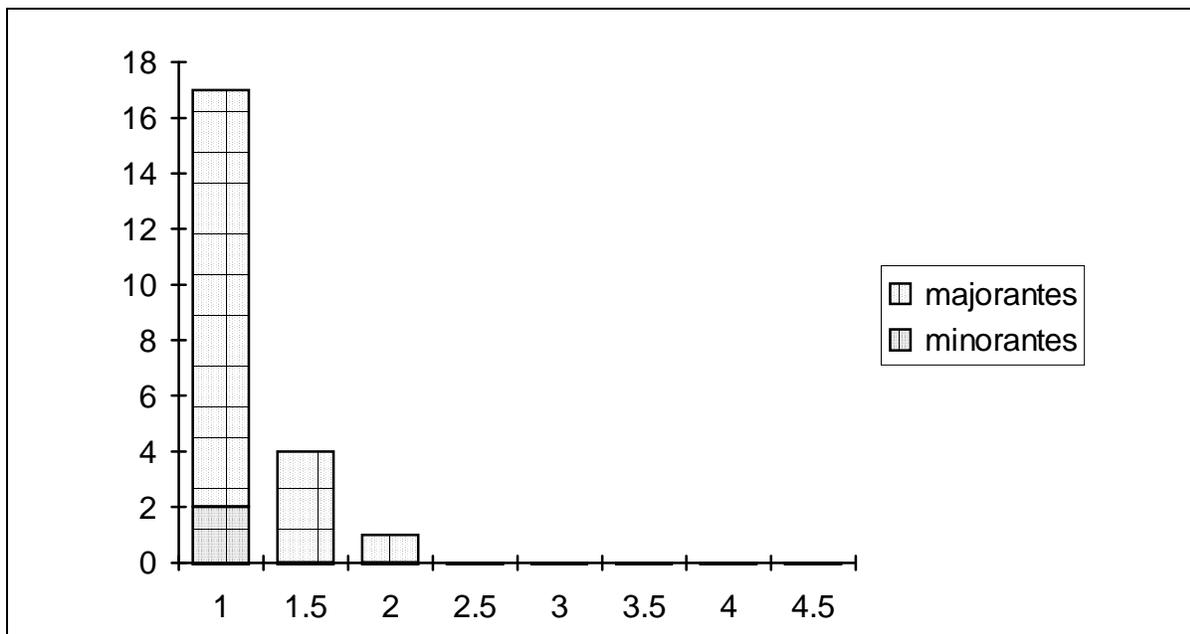


Figura 9.7 - Histograma de $\max(\theta^2, 1/\theta^2)$ para elementos de grau 3.

Estes histogramas parecem indicar que a qualidade deste estimador de erro é boa, para malhas refinadas adaptativamente. Contudo, seria conveniente dispor de uma justificação formal para as várias opções efectuadas quanto aos valores de a , $h_{(i)}$, $h_{(j)}$, c_1 , c_2 e c_3 . Além disso, os valores de c_1 , c_2 e c_3 utilizados não serão provavelmente os mais adequados para malhas de superelementos.

10. Indicadores de refinamento

10.1. Introdução

Os indicadores de refinamento indicam as regiões onde o aumento do número de graus de liberdade é mais adequado para a diminuição do erro.

Todos os indicadores de erro podem ser utilizados como indicadores de refinamento. Mesmo os indicadores de erro que levam a estimadores de erro inaceitáveis são geralmente indicadores de refinamento relativamente bons.

Em contrapartida, algoritmos adaptativos que não tenham em consideração a norma energética do erro podem levar à convergência para uma solução errada. Por isso, neste trabalho, os indicadores de erro são utilizados como indicadores de refinamento. Deste modo, este capítulo constitui apenas uma retrospectiva dos indicadores de refinamento que não são indicadores de erro.

Dado que a optimalidade da malha depende da distribuição do erro, estes indicadores de refinamento são, em geral, menos aptos para a obtenção de malhas ótimas do que os indicadores de erro. Contudo, permitem quase sempre obter malhas melhores do que as malhas uniformes. Podem ser utilizados para melhorar a malha, na maior parte dos algoritmos adaptativos, da mesma maneira que os indicadores de erro. No entanto, não fornecem qualquer informação sobre o valor do erro nem, portanto, qualquer critério para terminar o processo de refinamento.

10.2. Análise de malhas com a mesma densidade geradas aleatoriamente

SUHARA e FUKUDA [1972] utilizaram a variação dos valores das componentes do tensor das tensões num dado local, obtidas a partir de malhas com a mesma densidade mas geradas aleatoriamente, como indicador do erro

dessas componentes nesse local. Como este indicador tem um custo excessivamente elevado, não voltou a receber qualquer atenção.

10.3. Variação da solução no domínio

OLIVEIRA [1973] sugeriu que os elementos fossem dispostos ao longo das isoenergéticas, ou seja, das linhas de igual densidade de energia de deformação. Nesta situação, a variação da densidade de energia de deformação é igual em cada elemento, sendo a malha mais fina onde o gradiente da densidade de energia de deformação é maior.

CAREY [1976] utilizou directamente a variação da solução numa dada zona como indicador do refinamento nessa zona.

MELOSH e MARCAL [1977] sugeriram que a diferença entre a energia de deformação dum elemento e a energia de deformação que seria obtida apenas com os modos de tensões constantes fosse utilizada como indicador de refinamento. Na prática, utilizaram a diferença entre a densidade de energia de deformação num ponto do elemento e a densidade de energia de deformação no centróide do elemento, que designaram por diferença de energia específica.

SHEPHARD *et al* [1980] utilizaram a variação da densidade de energia de deformação como indicador de refinamento.

Qualquer indicador baseado na variação da solução tenderá para valores infinitos junto às singularidades.

10.4. Variação da solução entre refinamentos sucessivos

CAREY [1976] sugeriu que a variação das tensões, num ponto, entre dois refinamentos sucessivos, fosse utilizada como indicador do erro nas tensões nesse ponto. Este indicador tende para valores infinitos junto às singularidades.

YOKOYAMA [1985] dividiu o valor da variação numa componente do tensor das tensões, num ponto, entre dois refinamentos sucessivos, pelo valor máximo dessa componente no domínio, de modo a obter um indicador do erro relativo nessa componente. Quando existem singularidades, este indicador tende para só não ser nulo junto da singularidade.

10.5. Defeitos de Equilíbrio

Desde o início da utilização de elementos finitos compatíveis que os defeitos de equilíbrio foram utilizados como indicadores de refinamento.

Os indicadores deste tipo podem ser escritos na forma genérica

$$\varepsilon_{(i)}^2 = c_1 R_{(i)} + c_2 T_{(i)}, \quad (10.1)$$

em que $R_{(i)}$ depende do resíduo no interior do elemento, $T_{(i)}$ depende das descontinuidades nos lados dos elementos e tanto c_1 como c_2 são constantes.

Para malhas de elementos finitos de grau par, pode utilizar-se $c_1 = 1$, $c_2 T_{(i)} = 0$ e

$$R_{(i)} = h^2 \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{r}_c^T \mathbf{r}_c \, d\Omega. \quad (10.2)$$

Para malhas de elementos finitos de grau ímpar, pode utilizar-se $c_1 R_{(i)} = 0$, $c_2 = 1$ e

$$T_{(i)} = \frac{h}{2} \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{J}_{c,(j)}^T \mathbf{J}_{c,(j)} \, d\Gamma + h \sum_k \int_{\Gamma_{(k)}} \mathbf{G}_c^T \mathbf{G}_c \, d\Gamma, \quad (10.3)$$

em que o somatório em j é extensivo aos $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$ do elemento $\Omega_{(i)}$ e o somatório em k é extensivo aos $\Gamma_{(k)} \subset \Gamma_t$ do elemento $\Omega_{(i)}$. Com esta escolha, os indicadores de refinamento irão convergir do mesmo modo que os indicadores de erro referidos em 8.4.

DUNAVANT e SZABO [1983] apresentaram expressões para $R_{(i)}$ e $T_{(i)}$ para malhas compatíveis em que o grau dos elementos não é uniforme, tendo utilizado

$$c_1 = 1 \text{ e } c_2 = \frac{\sum_{i=1}^{NE} R_{(i)}}{\sum_{i=1}^{NE} T_{(i)}}. \quad (10.4)$$

10.6. Densidade média do erro

CAREY e HUMPHREY [1981] utilizaram o valor do indicador de erro $\varepsilon_{(i)}$ dividido pelo volume do elemento como indicador de refinamento.

LADEVÈZE e LEGUILLON [1983] utilizaram como indicador de refinamento

$$\varepsilon_{(i)}^2 \frac{V}{V_{(i)}}. \quad (10.5)$$

Qualquer um destes indicadores tenderá para valores infinitos junto às singularidades.

10.7. Erro de interpolação

Tendo em conta o que foi descrito em 8.8, desde que se obtenha uma aproximação das derivadas de ordem $p+1$, pode-se utilizar como indicador de refinamento o valor

$$h_{(i)}^p |\tilde{\mathbf{u}}|_{p+1,(i)}, \quad (10.6)$$

sem ser necessário estimar a constante C em (8.46).

Por esta razão, a teoria do erro de interpolação é mais utilizada para obter indicadores de refinamento do que para obter indicadores de erro.

A teoria do erro de interpolação pode também ser utilizada para obter um indicador da norma de máximo do erro do campo de tensões num elemento, o qual pode ser utilizado como indicador de refinamento [ERIKSSON e JOHNSON, 1988].

11. Custos, *feedback* e adaptatividade

11.1. Custos de obtenção da solução

O custo total da obtenção de uma solução através de um programa de elementos finitos é a soma dos custos de diversas operações:

- geração e refinamento de malhas;
- montagem de sistemas algébricos;
- resolução de sistemas algébricos;
- estimação do erro;
- determinação do refinamento a efectuar;
- obtenção de informação a partir dos dados armazenados;
- transferência de informação entre malhas diferentes;
- apresentação de resultados.

Estes custos irão depender do grau de automatização de todo o processo, dos métodos utilizados para efectuar cada operação, da estrutura de dados e da estratégia de refinamento.

As estruturas de dados em árvore são, provavelmente, as mais adequadas para as malhas obtidas por refinamento [RHEINBOLT e MESZTENYI, 1980].

Os métodos iterativos de resolução de sistema algébrico podem ser mais eficientes do que os directos, se a solução actual for utilizada para obter os valores iniciais da solução seguinte [BABUSKA, 1976] [CAREY e HUMPHREY, 1981]. Além disso, para as malhas iniciais, em que o erro de discretização é elevado, pode ser fixado um número de iterações baixo, pois a solução do sistema não necessita de uma precisão muito elevada. A utilização de elementos finitos hierárquicos permite reduzir o custo da formação e resolução do sistema algébrico [PEANO e RICCONI, 1978]. Se forem utilizados elementos finitos hierárquicos, a utilização da solução anterior como solução inicial é extremamente simples e a matriz de rigidez é melhor condicionada [ZIENKIEWICZ *et al*, 1983].

As sequências de malhas obtidas através de refinamentos sucessivos podem ser utilizadas na resolução dos sistemas algébricos através de métodos multimalha [BRANDT,1977] [NICOLAIDES,1977] [BANK e SHERMAN, 1981], especialmente se cada malha contiver estritamente as anteriores. As malhas e matrizes obtidas quando o refinamento é hierárquico são muito adequadas para a utilização de métodos multimalha [ZIENKIEWICZ e CRAIG, 1986].

Num programa de elementos finitos auto-adaptativo, certas operações respeitantes a diferentes partes do domínio podem ser executadas em paralelo. O cálculo das matrizes elementares, a resolução do sistema algébrico, o cálculo dos indicadores de erro e o refinamento são exemplos de operações em que isso poderá ser possível, com maior ou menor dificuldade, dependendo dos algoritmos e estruturas de dados utilizados [ZAVE e RHEINBOLT, 1979]. Se a estrutura de dados permitir a divisão automática do domínio em subestruturas, isso poderá ser facilmente utilizado na resolução do sistema algébrico e na paralelização do algoritmo. KELA *et al* [1987] utilizaram uma estrutura de dados em árvore, a que corresponde uma subdivisão espacial recursiva [YERRY e SHEPHARD, 1983, 1984], para fazer uma divisão recursiva em subestruturas.

11.2. Métodos com *feedback* e métodos adaptativos

Nas aplicações práticas, pretende-se geralmente obter uma solução para a qual:

$$\eta_h \leq \bar{\eta}, \quad (11.1)$$

em que $\bar{\eta}$ é uma tolerância pré-definida, geralmente igual a 5% ou 10% e:

$$\eta_h = \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{u}_c\|_E}, \quad \eta_h = \frac{\varepsilon}{\min(\|\mathbf{u}_c\|_E, \|\boldsymbol{\sigma}_e\|_E)} \quad \text{ou} \quad \eta_h = \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{\sigma}_e\|_E}, \quad (11.2)$$

conforme se utilizem apenas elementos compatíveis, se faça uma análise dual global ou se utilizem apenas elementos de equilíbrio.

O algoritmo:

1. Gerar uma malha inicial
2. Resolver a malha
3. Estimar o erro
4. Se $\eta_h \leq \bar{\eta}$, parar
5. Refinar uniformemente a malha

6. Estimar o custo de resolver a malha
7. Se resolver a malha faz ultrapassar o custo total máximo admitido, parar
8. Ir para 2

permite obter a precisão desejada, se isso for possível dentro do custo máximo estabelecido. Em muitos casos, devido a limitações dos meios de cálculo, não é possível obter a precisão pretendida através dum algoritmo deste tipo. Nos casos em que é possível, o custo total é geralmente muito elevado.

O algoritmo:

1. Gerar uma malha inicial
2. Resolver a malha
3. Estimar o erro
4. Se $\eta_h \leq \bar{\eta}$, parar
5. Calcular indicadores de refinamento
6. Melhorar a malha com base nos indicadores
7. Estimar o custo de resolver a malha
8. Se resolver a malha faz ultrapassar o custo total máximo admitido, parar
9. Ir para 2

permite, em princípio, obter melhores resultados. Note-se que, para garantir que a precisão pretendida vai ser atingida, mesmo não havendo limite de custo, é necessário que a estratégia para melhorar a malha assegure um aumento mínimo do número de graus de liberdade em cada iteração.

Qualquer um destes algoritmos utiliza os resultados intermédios para determinar o caminho a seguir. São, portanto, algoritmos com *feedback*. Um algoritmo com *feedback* será considerado adaptativo se for óptimo em relação a um dado critério de desempenho [RHEINBOLT, 1983]. O algoritmo será óptimo se o seu desempenho nunca for inferior ao de qualquer outro para todos os problemas duma determinada classe.

O critério de desempenho de maior interesse em problemas de engenharia é o do custo total. Este critério é também aquele para o qual é mais difícil demonstrar a optimalidade. Por isso, são utilizados outros critérios, tais como o da taxa de convergência, o do número de graus de liberdade da última malha, o do erro para um dado número de graus de liberdade, o do número de malhas geradas até atingir a tolerância pretendida ou o do erro ao fim de um dado número de malhas.

O máximo valor da taxa de convergência, para uma dada versão - h , p , ou hp - do método dos elementos finitos, é atingido para uma sequência de malhas óptimas. Em cada uma destas malhas, o número de graus de liberdade é mínimo, para o erro obtido. O custo associado a cada malha pode, geralmente, ser considerado uma função crescente do número de graus de liberdade. Para vários

algoritmos, o custo total não é muito superior ao custo associado à última malha. Por estas razões, o critério da máxima taxa de convergência, para uma dada versão do método dos elementos finitos, é o mais utilizado para definir a adaptatividade e é o critério utilizado neste trabalho.

GAGO et al [1983] recomendaram, como medida da validade duma estratégia de refinamento, que o custo total de todo o processo não deveria ser superior a duas vezes o custo total da malha final. Admitindo que a taxa de convergência é próxima da óptima, a minimização do custo total é geralmente tentada por uma de duas vias, muitas vezes contraditórias.

Na primeira, tenta-se que o custo associado a cada malha seja mínimo, recorrendo a métodos iterativos e utilizando estruturas de dados que permitam utilizar facilmente a informação relativa às malhas anteriores. Os métodos multimalha, que utilizam as malhas anteriores na resolução do sistema algébrico são, provavelmente, os mais eficientes dentro desta via.

Na segunda, tenta-se que o número de malhas a analisar seja mínimo, de modo a que o custo associado à malha final seja preponderante. É esta a via seguida neste trabalho.

Em qualquer das vias, pretende-se que o cálculo do estimador do erro tenha um custo reduzido face ao da obtenção da solução correspondente, o que geralmente é conseguido obtendo-o através de cálculos locais.

12. Estratégia adaptativa

12.1. Introdução

Neste capítulo, consideram-se apenas os procedimentos que, com base nos indicadores de erro ou nos indicadores de refinamento associados a uma malha e num método de refinamento, fornecem a malha seguinte.

Após uma revisão das estratégias adaptativas conhecidas, descreve-se a estratégia utilizada.

12.2. Estratégias adaptativas

12.2.1. Introdução

Algumas destas estratégias têm apenas por objectivo criar uma malha mais próxima de uma malha óptima, outras têm também o objectivo adicional de criar directamente uma malha para a qual a solução tenha uma dada precisão.

Uma malha é óptima, para um determinado número de graus de liberdade, quando a diminuição de erro que se obteria ao introduzir um grau de liberdade é a mesma para todas as maneiras de introduzir esse grau de liberdade [RACHOWICZ *et al*, 1989]. Quando o refinamento é hierárquico, isto corresponde à igualdade dos indicadores de erro associados aos possíveis graus de liberdade adicionais [ZIENKIEWICZ *et al*, 1983].

Em malhas de elementos do mesmo tipo, a optimalidade em relação ao número de graus de liberdade é obtida quando a energia do erro for igual em todos os elementos [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b]. É este o critério utilizado nas estratégias de alteração da posição dos nós, remalhagem e refinamento *h*. Nestes casos, como medida da optimalidade duma malha, pode ser usada [BABUSKA e RHEINBOLT, 1979]

$$\omega = \frac{\max_i \varepsilon_{(i)}^2}{\min_i \varepsilon_{(i)}^2}. \quad (12.1)$$

Como alternativas para a medida de optimalidade poder-se-iam utilizar

$$\frac{\max_i \varepsilon_{(i)}^2}{\varepsilon^2/NE}, \quad (12.2)$$

ou o coeficiente de dispersão de $\varepsilon_{(i)}^2$, dado por

$$\frac{\sqrt{NE \sum_{i=1}^{NE} (\varepsilon_{(i)}^2)^2 - \left(\sum_{i=1}^{NE} \varepsilon_{(i)}^2 \right)^2}}{\sum_{i=1}^{NE} \varepsilon_{(i)}^2}. \quad (12.3)$$

Note-se que, entre malhas com uma geometria próxima da óptima e com o mesmo número de graus de liberdade, os valores do erro e do estimador do erro variam muito pouco [BABUSKA e RHEINBOLT, 1979]. Por isso, estas medidas de optimalidade das malhas não são de grande importância.

Neste trabalho, a optimalidade das malhas é medida indirectamente: considera-se que uma sequência de malhas está tanto mais próxima duma sequência de malhas óptimas quanto mais próxima a taxa de convergência estiver da taxa óptima.

12.2.2. Estratégias de alteração da posição dos vértices

Neste tipo de estratégias, tenta-se obter a quase optimalidade da malha refinada através da equidistribuição do erro elementar.

DIAZ *et al* [1983] calcularam cada uma das novas coordenadas de cada vértice através de

$$x_{\text{novo}} = \frac{\sum_i \bar{x}_{(i)} \frac{\varepsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}}{\sum_i \frac{\varepsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}}, \quad (12.4)$$

em que o somatório é extensivo a todos os elementos adjacentes ao vértice, $\bar{x}_{(i)}$ é a coordenada do centro geométrico do elemento $\Omega_{(i)}$ e $V_{(i)}$ é o volume desse elemento. Note-se que, em 2D, se os elementos não forem rectangulares, a aplicação desta fórmula pode deslocar ligeiramente os vértices em casos em que o erro já está equidistribuído [KIKUCHI, 1987].

ZHONG [1991] utilizou

$$x_{\text{novo}} = \frac{\sum_i \bar{x}_{(i)} \frac{\epsilon_{(i)}^{D/(p+D/2)}}{V_{(i)}}}{\sum_i \frac{\epsilon_{(i)}^{D/(p+D/2)}}{V_{(i)}}}. \quad (12.5)$$

RODRIGUES e AZEVEDO [1995] utilizaram

$$x_{\text{novo}} = \frac{\sum_i \bar{x}_{(i)} \epsilon_{(i)}}{\sum_i \epsilon_{(i)}}. \quad (12.6)$$

Como foi referido em 5.2.2, qualquer que seja a forma de calcular as novas coordenadas de cada vértice, pode não ser possível obter a precisão pretendida com os graus de liberdade escolhidos *a priori*. Por esta razão, este método merece pouca atenção.

12.2.3. Estratégias de remalhagem

Neste tipo de estratégias, pretende-se obter uma nova malha, com o menor número de graus de liberdade possível, para a qual

$$\epsilon \leq \bar{\epsilon} = k \bar{\eta} \|\mathbf{u}_c\|_{\mathbb{E}}, \quad (12.7)$$

em que k é um factor destinado a controlar o número de iterações [JOHNSON e HANSBO, 1992].

ZIENKIEWICZ e ZHU [1987] utilizaram $k = 1$. BECKERS e ZHONG [1994] calcularam o número óptimo de iterações através da fórmula heurística

$$m = \log_{2p} \left(\frac{\eta_h}{\bar{\eta}} \right), \quad (12.8)$$

o que leva a

$$k\bar{\eta} = \left(\frac{\bar{\eta}}{\eta_h} \right)^{1/m} \eta_h. \quad (12.9)$$

COOREVITS *et al* [1995] utilizaram, para $p = 1$ e $p = 2$, $k = 1$, se $\eta_h \leq 4\bar{\eta}$ e $k\bar{\eta} = \eta_h/3$, no caso contrário. Uma abordagem alternativa consiste em impor que, em cada iteração, o número de elementos seja multiplicado por 2^D , o que leva a

$$k\bar{\eta} = \frac{\eta_h}{2^D}. \quad (12.10)$$

O menor número de graus de liberdade é obtido gerando uma malha em que, para cada um dos M elementos da malha [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b],

$$\varepsilon_{(e)}^2 = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{M}. \quad (12.11)$$

Para cada elemento da malha actual, calcula-se um factor de redução (ou ampliação) do diâmetro e , a partir deste, um novo diâmetro para os elementos a gerar no espaço ocupado pelo elemento actual. Em cada nó da malha actual, calcula-se o valor médio dos novos diâmetros correspondentes a cada um dos elementos adjacentes ao nó [ZHU *et al*, 1991]. Utilizando as funções de interpolação associadas a cada um destes nós, obtém-se uma distribuição contínua de diâmetros, a partir da qual é gerada a nova malha [PERAIRE *et al*, 1987].

ZIENKIEWICZ e ZHU [1987] calcularam o factor de redução do diâmetro do elemento, $\chi_{(i)}$, admitindo uma taxa de convergência em cada elemento igual à taxa de convergência assintótica global para malhas óptimas, $O(h^p)$, e $M = NE$ [ZIENKIEWICZ e ZHU, 1990] [ZIENKIEWICZ e ZHU, 1992c]. Obtiveram, assim,

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} NE^{1/2}} \right)^{1/p}. \quad (12.12)$$

Para os elementos adjacentes aos pontos singulares, a convergência seria $O(h^\lambda)$, utilizando-se $\lambda = 0.5$, em 2D [ZHU e ZIENKIEWICZ, 1988].

LEE e LO [1992] detectaram as singularidades a partir dos índices de concentração da energia de deformação do elemento,

$$\text{SECI}_{(i)} = \frac{U_{(i)}}{V_{(i)}} \quad (12.13)$$

e do domínio,

$$\text{GSECI} = \frac{U}{V}. \quad (12.14)$$

A convergência, em cada elemento, seria $O(h^{q(i)})$. Em 2D,

$$\frac{1}{q_{(i)}} = \frac{1}{1 - 2 \frac{\text{GSECI}}{\max_e(\text{SECI}_{(e)})}} \left[\left(1 - 2 \frac{\text{GSECI}}{\text{SECI}_{(i)}} \right) \frac{1}{0.5} + \left(2 \frac{\text{GSECI}}{\text{SECI}_{(i)}} - 2 \frac{\text{GSECI}}{\max_e(\text{SECI}_{(e)})} \right) \frac{1}{p} \right]. \quad (12.15)$$

Quando existe mais do que uma singularidade, pode acontecer que o valor máximo de $\text{SECI}_{(i)}$ se torne tão elevado que inviabilize a detecção das restantes singularidades, efeito que se vai agravando com cada iteração.

OÑATE e BUGEDA [1993] consideraram que o factor de redução era obtido através do produto de um factor global, obtido a partir da taxa de convergência global,

$$\chi_g = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^{1/p} \quad (12.16)$$

e de um factor local, obtido a partir da equidistribuição do erro e da taxa de convergência local,

$$\chi_{l(i)} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{(i)} \text{NE}^{1/2}} \right)^{1/(p+D/2)}. \quad (12.17)$$

Obtém-se, assim,

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^{1/p} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{(i)} \text{NE}^{1/2}} \right)^{1/(p+D/2)}. \quad (12.18)$$

Note-se que, se $\varepsilon_{(i)}^2 = \varepsilon^2 / \text{NE}$, esta expressão fornece o mesmo resultado que (12.12).

HUGGER [1993] utilizou um procedimento, para obter o factor de redução, em que se calcula, com base na distribuição do indicador do erro, o número de elementos da nova malha e a densidade relativa de elementos em cada ponto.

Outros procedimentos baseiam-se em admitir que cada elemento é dividido em $1/\chi_{(i)}^D$ elementos e admitir que [LADEVÈZE e LEGUILLON, 1983]

$$\sum_{\Omega_{(e)} \subset \Omega_{(i)}} \varepsilon_{(e)}^2 = \chi_{(i)}^{2p} \varepsilon_{(i)}^2, \quad (12.19)$$

ou que a taxa de convergência em cada elemento é $O(h^{p+D/2})$ [LI *et al*, 1995]. Em qualquer dos casos, obtém-se

$$M = \left(\sum_{k=1}^{NE} \left(\frac{\varepsilon_{(k)}}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/(p+D/2)} \right)^{(p+D/2)/p} \quad (12.20)$$

e

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} \left(\sum_{k=1}^{NE} \left(\frac{\varepsilon_{(k)}}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/(p+D/2)} \right)^{(p+D/2)/2p}} \right)^{1/(p+D/2)}. \quad (12.21)$$

Note-se que, se $\varepsilon_{(i)}^2 = \varepsilon^2/NE$, esta expressão fornece o mesmo resultado que (12.12).

ODEN e PATRA [1995] obtiveram os $\chi_{(i)}$ e M resolvendo iterativamente o sistema formado pelas equações

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} M^{1/2}} \right)^{1/q_{(i)}} \quad (12.22)$$

e

$$M = \sum_{i=1}^{NE} 1/\chi_{(i)}^D. \quad (12.23)$$

Se, em vez de partir directamente de (12.11), se minimizar $\sum_k 1/\chi_{(k)}^D$, sujeito a

$$\sum_k \chi_{(k)}^{2p} \varepsilon_{(k)}^2 = \bar{\varepsilon}^2 \text{ [LADEVÈZE et al, 1991], obtém-se}$$

$$\chi_{(i)} = \frac{\bar{\varepsilon}^{-1/p}}{\varepsilon_{(i)}^{1/(p+D/2)} \left(\sum_{k=1}^{NE} \varepsilon_{(k)}^{D/(p+D/2)} \right)^{1/(2p)}}. \quad (12.24)$$

Note-se que esta expressão é equivalente à (12.21). Existindo taxas de convergência diferentes em cada elemento, a minimização tem de ser realizada numericamente. Para os elementos adjacentes às singularidades, a convergência é $O(h^{q_{(i)}})$. Estes elementos são detectados a partir da densidade média da energia do erro em cada elemento,

$$\frac{\varepsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}, \quad (12.25)$$

que é mais do que 4 vezes superior à densidade média da energia do erro no domínio. O valor de $q_{(i)}$ é estimado a partir da variação da densidade média de energia da solução de elementos finitos com a distância à singularidade, através do processo descrito em [COOREVITS et al, 1995].

12.2.4. Estratégias de refinamento

12.2.4.1. Estratégias de refinamento h

12.2.4.1.1. Introdução

Neste tipo de estratégias, tenta-se obter, através da equidistribuição do erro elementar, a quase optimalidade da malha refinada.

12.2.4.1.2. Refinamento dos elementos cuja diminuição de erro será maior

Para uma dada malha, faz-se uma previsão do valor do erro elementar que seria obtido subdividindo cada elemento em 2^D elementos. A malha seguinte é

obtida subdividindo os elementos com um erro superior ao maior desses valores [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b].

A previsão do erro que seria obtido pela subdivisão de um elemento é feita admitindo que a redução do erro será igual à da subdivisão anterior [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b]:

$$\varepsilon_{(\text{seguinte})} = \frac{\varepsilon_{(\text{actual})}^2}{\varepsilon_{(\text{anterior})}}. \quad (12.26)$$

Para efectuar a previsão por este método, o processo tem de ser iniciado subdividindo todos os elementos da malha inicial.

BANK [1983] sugeriu que a previsão do erro que seria obtido pela subdivisão fosse feita admitindo uma taxa de convergência q para a norma energética do erro:

$$\varepsilon_{(\text{seguinte})} = \frac{\varepsilon_{(\text{actual})}}{2^q}. \quad (12.27)$$

Se o elemento não contiver singularidades, $q = p + D/2$.

Este método pode ser aperfeiçoado, de modo a analisar uma nova malha com um aumento do número de elementos não inferior a uma dada percentagem do número de elementos da malha actual [BABUSKA e VOGELIUS, 1984]. Se o aumento do número de elementos for inferior ao pretendido, não se calcula a solução de elementos finitos. O método é aplicado novamente, admitindo que o erro nos elementos obtidos do refinamento é igual ao previsto. O processo é repetido até que o aumento do número de elementos, em relação ao da última malha para a qual se obteve solução, seja suficiente.

JARAUCH [1986] utilizou uma estratégia alternativa, que consiste em estimar quantas vezes deveria ser subdividido cada elemento, para obter a maior diminuição de erro possível para o número máximo de elementos pretendido, e subdividir uma vez os elementos que deveriam ser subdivididos uma ou mais vezes.

12.2.4.1.3. Refinamento dos elementos com indicadores superiores à média

Nesta abordagem [CAREY e HUMPHREY, 1981], calcula-se a média ε_{med} e o desvio padrão s dos indicadores. Consideram-se t intervalos: $I_1 = [\varepsilon_{\text{med}}, \varepsilon_{\text{med}} + k s]$, $I_2 = [\varepsilon_{\text{med}} + k s, \varepsilon_{\text{med}} + 2 k s]$, ... , $I_t = [\varepsilon_{\text{med}} + (t - 1) k s, + \infty]$, onde k é um número arbitrário, geralmente igual a um. Cada elemento cujo indicador esteja no intervalo I_m é subdividido em $(2^D)^m$ elementos.

12.2.4.1.4. Refinamento dos elementos com maiores indicadores

Segundo estas estratégias, cada um dos elementos cujo indicador é superior a um determinado valor é subdividido em 2^D elementos. Normalmente, este valor é uma dada fracção do maior indicador. Neste caso, contudo, se o maior indicador for muito superior aos restantes, o número de elementos refinados na iteração pode ser muito pequeno, o que pode levar a um número excessivo de iterações. Se o indicador tender para infinito junto às singularidades, a precisão pretendida pode nunca ser atingida.

Se, em (12.27), q for igual para todos os elementos, a primeira estratégia descrita em 12.2.4.1.2 é um caso particular das aqui descritas.

BABUSKA *et al* [1983] aplicaram várias estratégias alternativas para o refinamento dos elementos com maiores indicadores. Na primeira, refinam-se todos os elementos com indicadores iguais ou superiores a uma dada fracção do maior indicador. Na segunda, refina-se uma fracção fixa do número actual de elementos. Na terceira, refinam-se todos os elementos que se refinariam por aplicação de alguma das duas primeiras estratégias.

Se o número de elementos com indicadores iguais ou superiores a uma dada fracção do maior indicador for inferior ao desejado, pode-se obter uma solução nos novos elementos por interpolação da solução anterior e calcular indicadores de erro para esses elementos. O sistema algébrico só será resolvido quando o aumento do número de elementos em relação à resolução anterior for suficiente [BANK e SMITH, 1993].

Se a diminuição do erro obtida refinando os elementos com indicadores iguais ou superiores a uma determinada fracção do maior indicador numa dada malha se tornar insuficiente, podem-se refinar todos os elementos com um nível de refinamento inferior ao máximo da malha anterior à actual [PRESSBURGER e PERUCCHIO, 1995].

12.2.4.1.5. Obtenção de uma distribuição de diâmetros

Utilizando um dos métodos descritos em 12.2.3, é possível obter uma distribuição de diâmetros a obter na nova malha. Esta distribuição de diâmetros pode ser aproximada através de subdivisões sucessivas dos elementos cujo diâmetro excede o pretendido [SHEPHARD *et al*, 1986].

Se cada elemento for dividido em $(2^D)^{RL_{(i)}}$ elementos, o nível de refinamento necessário, $RL_{(i)}$, pode ser calculado directamente, a partir do factor de redução do diâmetro, arredondando para um inteiro

$$\log_2 \left(\frac{1}{\chi_{(i)}} \right). \quad (12.28)$$

Para indicadores calculados apenas com integrais de domínio, em vez de efectuar todas as subdivisões com base na mesma distribuição de diâmetros, é possível, após cada subdivisão, prever o erro nos novos elementos, utilizando a solução obtida para os elementos "pais" e admitindo uma taxa de convergência $O(h^q)$ para o erro.

Em certas zonas do domínio, pode acontecer que, para obter uma malha óptima, o diâmetro dos elementos deva ser aumentado. Esta operação só será possível se o método de refinamento permitir igualmente inverter refinamentos, juntando elementos.

12.2.4.2. Estratégias de refinamento p

ZIENKIEWICZ *et al* [1983] utilizaram uma estratégia adaptada ao refinamento p hierárquico. Nesta estratégia, são activados todos os graus de liberdade cujos indicadores sejam iguais ou superiores a uma tolerância, dependente do estimador do erro global, ou a uma determinada fracção do maior indicador:

$$\varepsilon_{(k)} \geq \gamma \varepsilon_{\max}, \quad (12.29)$$

com $0 \leq \gamma \leq 1$. O valor de γ pode aumentar com as iterações, por exemplo [PAPADRAKAKIS *et al*, 1994],

$$\gamma = (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) \frac{\varepsilon_{\text{inicial}} - \varepsilon}{\varepsilon_{\text{inicial}}} + \gamma_{\min}. \quad (12.30)$$

Se os graus de liberdade forem ordenados de acordo com o erro a eles associado, podem activar-se aqueles a que corresponde um maior indicador de erro, de modo a que, para os graus de liberdade não activados [PAPADRAKAKIS *et al*, 1994],

$$\sum_k \varepsilon_{(k)}^2 \leq \bar{\varepsilon}^2. \quad (12.31)$$

SZABÓ [1986] utilizou também elementos hierárquicos, mas numa estratégia baseada em refinamento p uniforme. A malha inicial é a mais grosseira possível, sendo os pontos singulares isolados por uma ou mais camadas de elementos com tamanhos decrescendo em progressão geométrica com um factor de 0.15. Se não for possível obter a precisão pretendida com as funções de grau mais elevado disponíveis, o número de elementos e de camadas é aumentado. Isolando os pontos singulares com algumas camadas de elementos, retarda-se a entrada no regime assintótico, em que a taxa de convergência é muito inferior à do regime pré-assintótico.

12.2.4.3. Estratégias de refinamento hp

BABUSKA e RANK [1987] utilizaram um sistema pericial e as soluções obtidas com uma malha grosseira e $p = 1, 2$ e 3 para prever o erro que se obteria com várias combinações do número de camadas de elementos em torno dos pontos singulares e do grau dos elementos. Escolhe-se a combinação para a qual se prevê que a precisão pretendida seja obtida com o menor número de graus de liberdade. Se não se obtiver a precisão pretendida, a solução obtida é utilizada para efectuar novas previsões.

RACHOWICZ *et al* [1989] estimaram, elemento a elemento, a diminuição de erro que se obteria por subdivisão em 2^D elementos, $\Delta\varepsilon_h$, ou por aumentar p uma unidade, $\Delta\varepsilon_p$, e calcularam os correspondentes aumentos do número total de graus de liberdade, ΔN_h e ΔN_p . Para cada elemento, calcula-se

$$(\Delta\varepsilon/\Delta N)_{(i)} = \max ((\Delta\varepsilon_h/\Delta N_h)_{(i)}, (\Delta\varepsilon_p/\Delta N_p)_{(i)}). \quad (12.32)$$

Se

$$(\Delta\varepsilon/\Delta N)_{(i)} \geq \gamma \max ((\Delta\varepsilon/\Delta N)_{(i)}), \quad (12.33)$$

com $0 \leq \gamma \leq 1$, o elemento é refinado, utilizando o método mais adequado. Os elementos adjacentes a um ponto singular são considerados em conjunto.

ZIENKIEWICZ *et al* [1989] utilizaram dois procedimentos em que alternaram a versão h e o refinamento p, de modo a obter uma taxa de convergência superior.

No primeiro procedimento, começa-se por remalhar com elementos de grau p_1 , até atingir um erro relativo

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{p_1} \bar{\eta}, \quad (12.34)$$

em que p_2 é o grau para o qual se pretende atingir o erro relativo $\bar{\eta}$. Em seguida, utilizara-se o refinamento p uniforme até atingir a precisão pretendida.

No segundo procedimento, começa-se por utilizar a solução correspondente a p_{\max} para estimar o erro da solução correspondente a $p_{\max}-1$ em cada elemento de uma malha grosseira. Em seguida, remalha-se, com base nesses indicadores de erro elementares, e utiliza-se o refinamento p uniforme até atingir a precisão pretendida. Se essa precisão não for atingida com $p = p_{\max}$, o procedimento é repetido.

GEORGES e SHEPHARD [1991] utilizaram um algoritmo que determina se a precisão pretendida pode ser obtida através de refinamento p uniforme, através de refinamento p com aumento do número de camadas junto às singularidades ou se é necessário refinamento h nas zonas afastadas das singularidades. A partir duma estimativa da regularidade da solução, baseada nos resultados anteriores, o algoritmo determina o valor de p necessário para o refinamento p uniforme. Se este for excessivo, determina o valor de p e o número de camadas. Se o erro nas zonas afastadas dos pontos singulares se tornar predominante, determina uma nova distribuição de diâmetros dos elementos.

ZENG e WIBERG [1992] utilizaram a remalhagem seguida de refinamento h para obter um erro relativo $\bar{\eta}_h$, seguido de refinamento p para obter o erro relativo $\bar{\eta}$.

ODEN e PATRA [1995] utilizaram um procedimento em que se começa por efectuar um refinamento h , tentando obter um erro relativo $\gamma \bar{\eta}$, com $5 \leq \gamma \leq 10$. Em seguida, efectua-se um refinamento p dos elementos estimados sensíveis a este tipo de refinamento, tentando obter o erro relativo $\bar{\eta}$. Se o erro relativo $\bar{\eta}$ não for atingido, estes passos são repetidos, com um γ menor.

12.2.5. Carregamentos múltiplos

Nos casos de carregamentos múltiplos é conveniente, por economia, utilizar a mesma malha em todas as análises. Determinar uma malha óptima para um conjunto de carregamentos é um problema de difícil abordagem. Contudo, existem

métodos para criar uma malha razoável para o conjunto de carregamentos, com base nos indicadores obtidos para cada um deles.

ZIENKIEWICZ e CRAIG [1983] utilizaram, para cada elemento, um indicador $\varepsilon_{(i)}^2$ igual à média aritmética dos $\varepsilon_{(i)}^2$ obtidos para cada um dos carregamentos.

BABUSKA [1986] utilizou, para cada elemento, um indicador $\varepsilon_{(i)}^2$ igual à soma dos $\varepsilon_{(i)}^2$ obtidos para cada um dos carregamentos, o que é equivalente ao anterior.

ZIENKIEWICZ e ZHU [1990] utilizaram, em cada ponto, o menor dos valores do diâmetro dos elementos, obtidos a partir dos vários carregamentos, para remalhar.

12.3. Estratégia utilizada

Neste trabalho, a estratégia adaptativa utilizada é uma estratégia de refinamento h .

Geralmente, não é possível obter o erro relativo pretendido, $\bar{\eta}$, com uma só iteração. Nestes casos, é geralmente mais económico tentar distribuir as reduções do erro equitativamente pelas várias iterações. Assim, dada uma solução com um erro relativo η_h , na iteração seguinte tenta-se obter um erro relativo

$$k\bar{\eta} = \left(\frac{\bar{\eta}}{\eta_h} \right)^{1/m} \eta_h, \quad (12.35)$$

em que m é uma estimativa do número óptimo de iterações. Este número foi estimado utilizando a fórmula heurística de BECKERS e ZHONG [1994]. Assim, m será igual ao menor inteiro não inferior a

$$\log_{2p} \left(\frac{\eta_h}{\bar{\eta}} \right). \quad (12.36)$$

Pretende-se obter uma nova malha, para a qual

$$\varepsilon \leq \bar{\varepsilon} = k\bar{\eta} \min(\|\mathbf{u}_c\|_E, \|\boldsymbol{\sigma}_e\|_E) \quad \text{ou} \quad \varepsilon \leq \bar{\varepsilon} = k\bar{\eta} \|\boldsymbol{\sigma}_e\|_E, \quad (12.37)$$

conforme se faça uma análise dual global ou se utilizem apenas elementos de equilíbrio.

Admitindo que a taxa de convergência global, em relação ao número total de elementos, é a óptima, o número de elementos da nova malha será

$$M = \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/p} NE, \quad (12.38)$$

onde NE é o número de elementos da malha actual. O menor número de graus de liberdade é obtido gerando uma malha em que, para cada um dos M elementos da malha [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b],

$$\varepsilon_{(e)}^2 = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{M}. \quad (12.39)$$

Dado que o número de elementos é $O(h^{-D})$, a taxa de convergência, em relação ao diâmetro, dum elemento que não contenha singularidades, é $O(h^{p+D/2})$. Assim, o factor de redução do diâmetro desse elemento é

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} \left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/p} NE \right)^{1/2}} \right)^{1/(p+D/2)}. \quad (12.40)$$

Note-se que esta expressão é equivalente à (12.18). No método de refinamento utilizado, cada elemento é dividido em $(2^D)^{RL_{(i)}}$ elementos. O nível de refinamento necessário, $RL_{(i)}$, é o menor inteiro não inferior a

$$\log_2 \left(\frac{1}{\chi_{(i)}} \right) + 0.5. \quad (12.41)$$

Podem ocorrer situações em que, apesar de (12.37) não ser respeitada, a aplicação de (12.41) não dê origem a qualquer refinamento. Isto acontece sempre que

$$0 < \max_i \left(\log_2 \left(\frac{1}{\chi_{(i)}} \right) \right) < 0.5. \quad (12.42)$$

Para garantir que existe sempre algum refinamento, toma-se $RL_{(i)} = 1$ em todos os elementos em que:

$$0 < \log_2 \left(\frac{1}{\chi_{(i)}} \right) < 0.5 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{(i)} > \frac{\max_e \varepsilon_{(e)}}{2^{D/2}}. \quad (12.43)$$

Para os elementos que contêm singularidades, a taxa de convergência é inferior. Se, nestes elementos, fosse apenas aplicada a fórmula (12.40), a redução do erro seria inferior à pretendida. Dado que o algoritmo de refinamento o permite, nestes elementos o refinamento não é uniforme. Nos vértices em que forem detectadas singularidades utiliza-se um nível de refinamento superior ao dos restantes vértices

Quando é utilizada a análise dual global, descrita em 7.3 e 9.2, a detecção de vértices singulares é feita com base na densidade da norma energética do erro na relação constitutiva,

$$\left((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \right)^{1/2}, \quad (12.44)$$

que pode ser usado como indicador de erro local.

Para cada vértice da malha, é calculada a média aritmética dos valores, nesse vértice, da densidade da norma energética do erro na relação constitutiva, calculados a partir de cada um dos elementos adjacentes ao vértice,

$$\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \left((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \right)_{(i)}, \quad (12.45)$$

em que o somatório em i é extensivo aos $NE_{(k)}$ elementos adjacentes ao vértice k . Admite-se que existe uma singularidade no vértice l , se

$$\frac{1}{NE_{(l)}} \sum_{i=1}^{NE_{(l)}} \left((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \right)_{(i)} > \frac{\text{sing}}{NV_{(l)}} \sum_{k=1}^{NV_{(l)}} \left(\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \left((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \right)_{(i)} \right), \quad (12.46)$$

em que o somatório em k é extensivo aos $NV_{(l)}$ vértices adjacentes ao vértice l e sing é uma constante superior a um. Nos vértices que satisfazem a condição (12.46), o nível de refinamento é calculado a partir do maior valor de

$$\chi'_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} \left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/p} NE \right)^{1/2}} \right)^{1/q} \quad (12.47)$$

dos elementos adjacentes ao vértice I. O valor de q a utilizar nesta expressão é dado por

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\text{sing} \sum_{k=1}^{NV_{(i)}} \left(\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} ((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c))_{(i)} \right)}{\frac{1}{NE_{(i)}} \sum_{i=1}^{NE_{(i)}} ((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c))_{(i)}} \right)} + D/2. \quad (12.48)$$

Em 2D, tomou-se $\lambda = 0.5$.

Quando, num vértice, $(\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \lambda + D/2$; no limiar de detecção de singularidade através de (12.46), $q = p + D/2$. Quanto maior for o valor de sing, mais difícil é detectar as singularidades e menor será o número de elementos que serão criados em torno destes pontos. Quanto menor for o valor de sing, mais fácil é admitir a existência de singularidades onde elas não existem e maior será o número de elementos que serão criados em torno destes pontos.

Em 2D, as experiências efectuadas parecem indicar que, para os valores da tabela 12.1, a detecção das singularidades é boa e melhora com o aumento do grau dos elementos. O número de elementos da nova malha parece ser adequado.

grau	sing
1	2.2
2	3
3	9.5
4	45

Tabela 12.1

Quando se utilizam apenas elementos finitos de equilíbrio, a detecção de vértices singulares é feita com base nos indicadores de erro elementares, $\varepsilon_{(i)}$, calculados de acordo com o descrito em 9.7.

Para cada vértice da malha, é calculada a média aritmética

$$\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}, \quad (12.49)$$

em que o somatório em j é extensivo aos $NE_{(k)}$ elementos adjacentes ao vértice k . Admite-se que existe uma singularidade no vértice l , se

$$\frac{1}{NE_{(l)}} \sum_{i=1}^{NE_{(l)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}} > \frac{\text{sing}}{NV_{(l)}} \sum_{k=1}^{NV_{(l)}} \left(\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}} \right), \quad (12.50)$$

em que o somatório em k é extensivo aos $NV_{(l)}$ vértices adjacentes ao vértice l e sing é uma constante superior a um. Nos vértices que satisfazem a condição (12.50), o nível de refinamento é calculado a partir do maior valor de $\chi'_{(i)}$ dos elementos adjacentes ao vértice l . O valor de q a utilizar em (12.47) para calcular $\chi'_{(i)}$ é dado por

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\frac{\text{sing}}{NV_{(l)}} \sum_{k=1}^{NV_{(l)}} \left(\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}} \right)}{\frac{1}{NE_{(l)}} \sum_{i=1}^{NE_{(l)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}} \right)^2} + D/2. \quad (12.51)$$

Em 2D, utiliza-se $\lambda = 0.5$.

Em 2D, as experiências efectuadas parecem indicar que, para $\text{sing} = 2$, a detecção das singularidades é razoável. Na expressão (12.51) utiliza-se um expoente 2 em vez do expoente 1 da expressão (12.48) pois, para este último, o número de elementos da nova malha era demasiado baixo, face ao previsto por (12.38). Quando o grau é elevado, devido ao método de refinamento utilizado, podem existir elementos com um indicador de erro bastante maior do que o dos elementos adjacentes, sem que tal se deva à existência de singularidades. Por esta razão, a detecção de singularidades não melhora com o aumento do grau dos elementos.

13. Exemplos de aplicação

13.1. Introdução

Neste capítulo, são apresentados e discutidos alguns exemplos de aplicação dos estimadores de erro e estratégias de refinamento desenvolvidos neste trabalho.

Em 13.2, aplica-se a análise dual a um sólido tridimensional. Na secção 13.3, exemplifica-se o que sucede quando se relaxam as condições de continuidade nos lados dos elementos. Em 13.4, aplica-se a estratégia de refinamento de malhas duais de elementos finitos à análise de uma placa. Na secção 13.5, aplica-se a estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio à análise de uma consola curta bidimensional. Em 13.6, aplica-se a estratégia de refinamento dual à análise de uma placa, de modo a comparar os tempos gastos em cada iteração. Na secção 13.7, comparam-se os resultados obtidos utilizando diferentes graus dos elementos finitos; compara-se, também, a estratégia de refinamento de malhas duais com a estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio.

Nestes exemplos, as malhas iniciais e as refinadas foram geradas utilizando um programa desenvolvido por PITERI [1997] [PITERI e ALMEIDA, 1995].

Os sistemas algébricos (3.39), correspondentes a elementos finitos de equilíbrio, foram resolvidos utilizando um programa de resolução de sistemas esparsos baseado num algoritmo apresentado por PISSANETZKY [1984]. Os sistemas algébricos (3.25), correspondentes a elementos finitos compatíveis, foram resolvidos utilizando um programa de resolução de sistemas esparsos por blocos [REBELO, 1993].

Para a representação gráfica dos resultados, recorreu-se a uma biblioteca de rotinas gráficas desenvolvida por ALMEIDA [1995].

Todos os programas utilizados foram escritos na linguagem de programação C [KERNIGHAN e RITCHIE, 1978].

13.2. Análise dual de um sólido tridimensional

Neste exemplo, analisa-se a peça representada na figura 13.1, sujeita ao carregamento indicado na mesma figura.

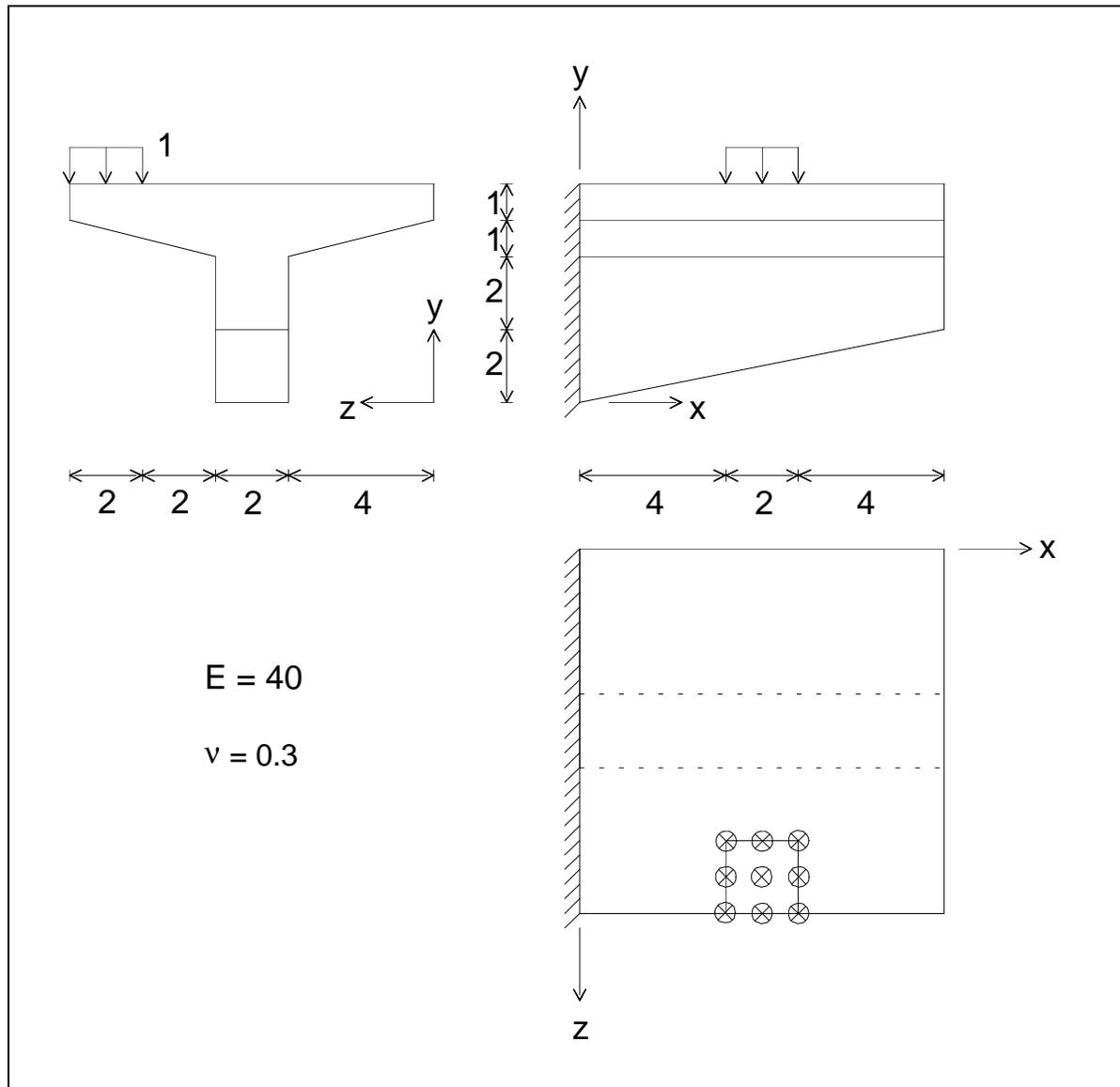


Figura 13.1 - Peça tridimensional.

Esta peça foi discretizada em 146 tetraedros. O programa de geração de malhas de tetraedros utilizado [PITERI, 1997] está vocacionado para a geração de malhas uniformes. Contudo, impondo a colocação de vértices em alguns pontos da fronteira, foi possível obter uma malha um pouco mais fina nas regiões mais importantes.

Nas figuras 13.2, 13.3 e 13.4 representam-se, para diferentes pontos de vista, as componentes do campo de tensões obtido com uma malha de elementos finitos de equilíbrio de grau três.

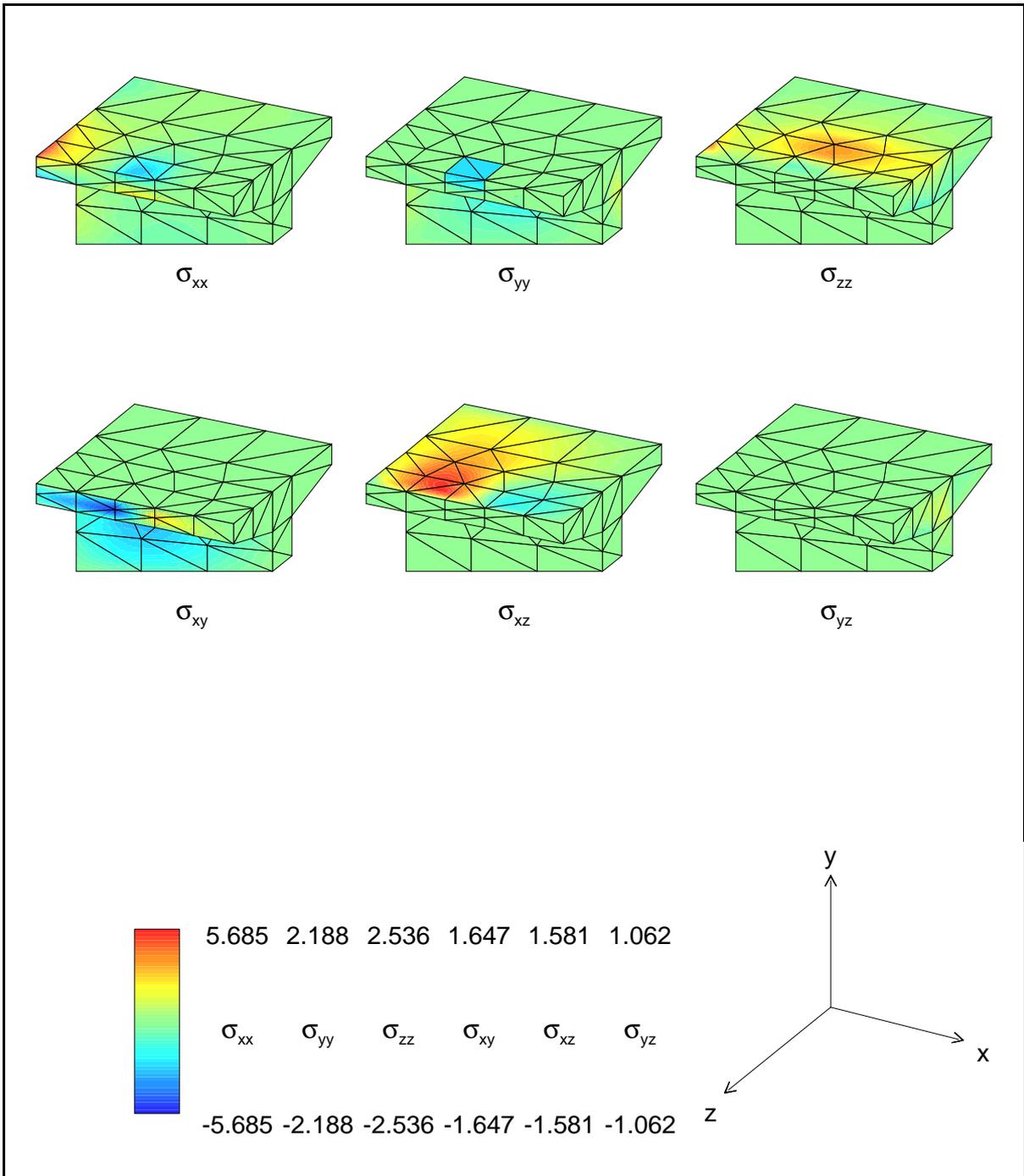


Figura 13.2 - Tensões obtidas com elementos de equilíbrio de grau três.

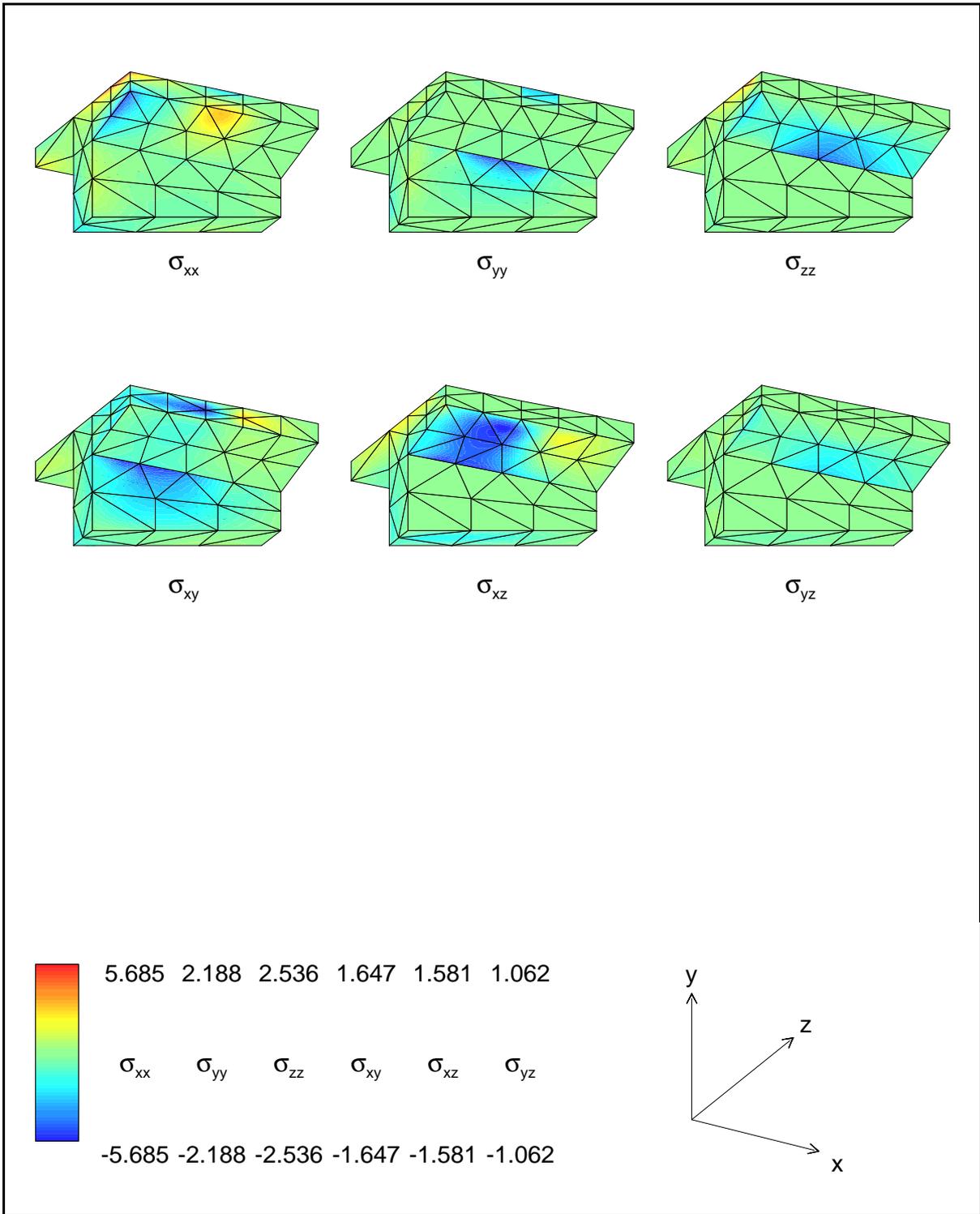


Figura 13.3 - Tensões obtidas com elementos de equilíbrio de grau três.

Apesar de o número de elementos parecer pequeno, o número total de parâmetros de tensões é 13140 e o número total de parâmetros de deslocamento é 10200.

Observando as figuras, verifica-se que o campo de tensões representa adequadamente o comportamento da peça.

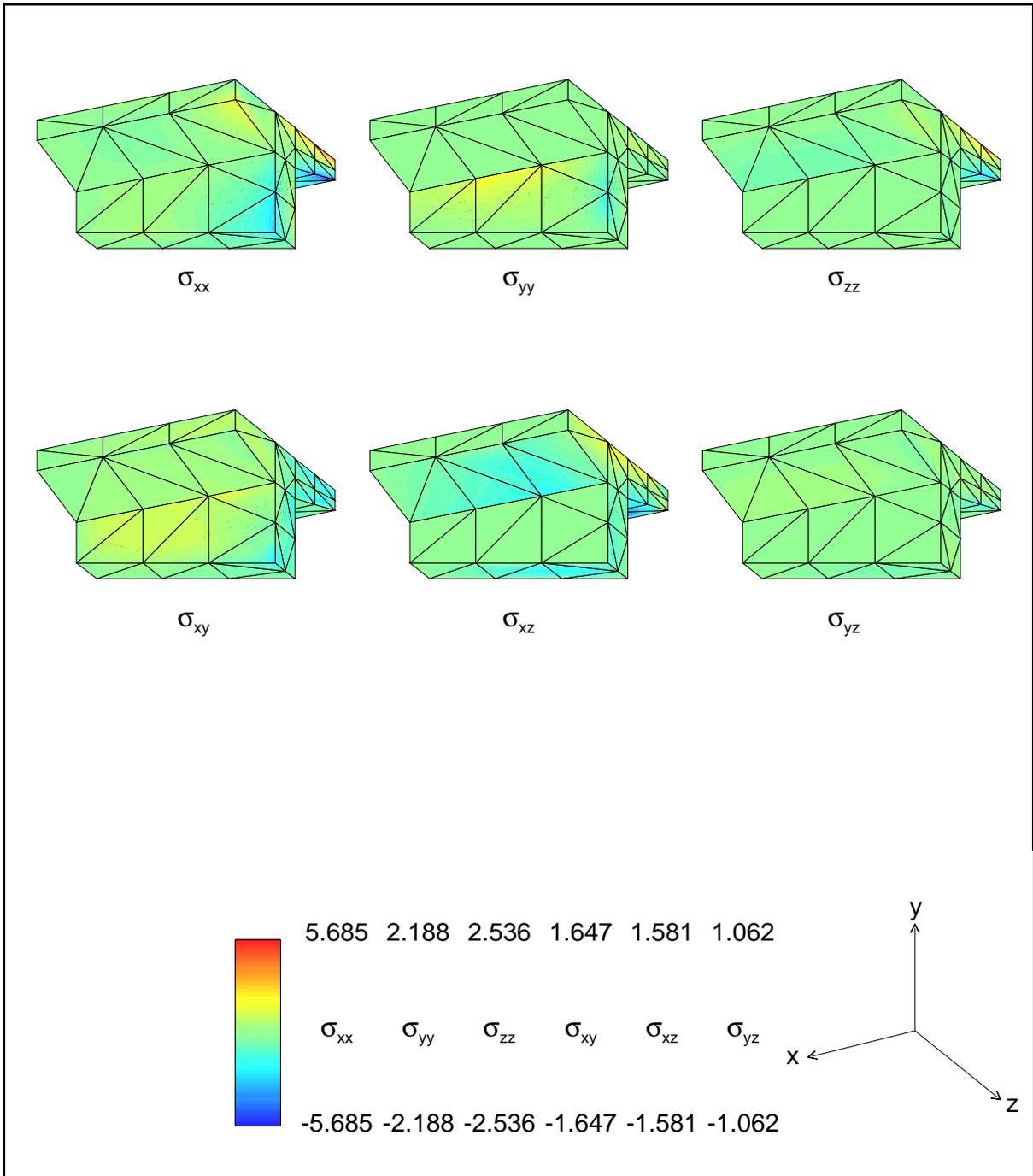


Figura 13.4 - Tensões obtidas com elementos de equilíbrio de grau três.

Na figura 13.5, representa-se a deformada obtida com uma malha de elementos finitos compatíveis de grau três, dual da anterior.

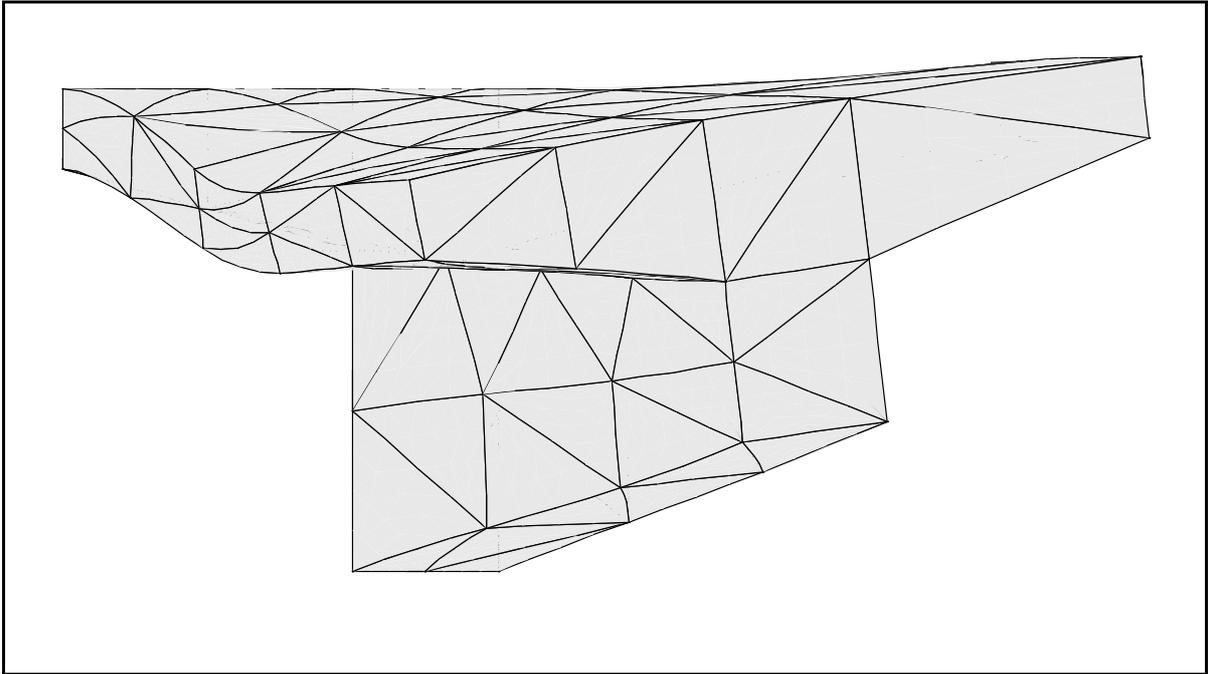


Figura 13.5 - Deformada obtida com elementos compatíveis de grau três.

Os valores obtidos para a energia de deformação foram $U(\boldsymbol{\sigma}_e) = 1.93862$ e $U(\mathbf{u}_c) = 1.85682$. Portanto, utilizando uma malha mais fina nas regiões mais importantes, foi possível obter um erro relativo inferior a 0.04406.

Na figura 13.6 representa-se a densidade da norma energética do erro na relação constitutiva (12.44). Para facilitar a comparação com os valores das tensões, a densidade foi multiplicada por \sqrt{E} . A figura permite identificar facilmente as regiões onde a diferença entre as duas soluções é maior.

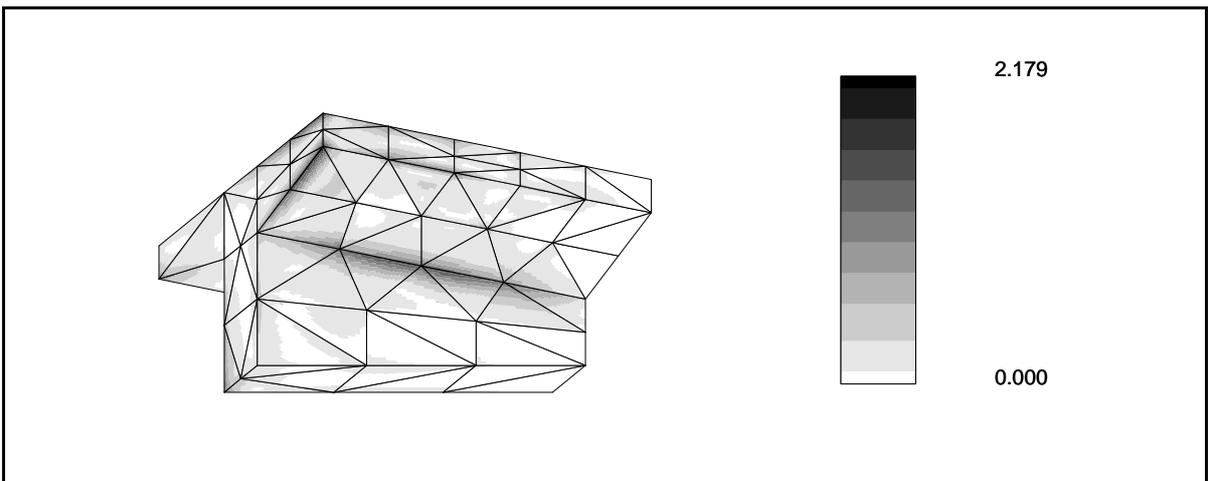


Figura 13.6 - Densidade da norma energética do erro.

13.3. Relaxação das condições de continuidade

Conforme referido em 3.3.2.5, se o grau das funções de aproximação de deslocamento nos lados for inferior ao grau das funções de aproximação de tensões nos elementos, não existirá, em princípio, continuidade de tensão nos lados. Nesses casos, as soluções não serão equilibradas. Em contrapartida, em todas as experiências efectuadas para elementos simplexes, utilizar funções de aproximação de deslocamento de grau imediatamente inferior ao das funções de aproximação de tensões foi suficiente para que não existissem modos espúrios.

Conforme referido em 3.2.2.4, se o grau das funções de aproximação do fluxo de tensão nos lados for inferior ao grau das funções de aproximação dos deslocamentos nos elementos, não existirá, em princípio, continuidade de deslocamentos nos lados. Nesses casos, as soluções não serão compatíveis. Em contrapartida, utilizar funções de aproximação do fluxo de tensão de grau imediatamente inferior ao das funções de aproximação dos deslocamentos tem um efeito, sobre a rigidez da malha de elementos finitos, semelhante ao da integração reduzida na formulação clássica de elementos finitos.

Para estudar os efeitos desta relaxação das condições de continuidade nos lados dos elementos, utiliza-se o exemplo descrito em 6.3.1.

Na tabela 13.1, indicam-se os valores do erro na energia de deformação, obtidos com funções de aproximação de grau três, nos elementos, e de grau dois, nos lados. Para termo de comparação, indicam-se, na mesma tabela, os valores obtidos com elementos compatíveis e equilibrados de grau três e de grau dois.

h	U(σ_e) - U(u)		U(σ_{e^c})-U(u)	U(u)-U(u _c)	U(u) - U(u _c)	
	p = 2	p = 3			e relax	c relax
1	1.946	1.946	4.399×10 ⁻¹	6.586×10 ⁻¹	6.586×10 ⁻¹	9.486
0.5	3.300×10 ⁻¹	3.428×10 ⁻²	-7.724×10 ⁻²	-1.455×10 ⁻²	8.442×10 ⁻²	1.271
0.25	2.579×10 ⁻²	8.915×10 ⁻⁴	-1.579×10 ⁻²	-3.067×10 ⁻⁴	2.517×10 ⁻³	1.332×10 ⁻¹

Tabela 13.1 - Erro na energia de deformação.

Conforme referido em 6.3.1, o valor exacto da energia de deformação foi estimado em 149.53. Não existindo deslocamentos impostos, as soluções equilibradas fornecem valores da energia de deformação superiores ao exacto e as soluções compatíveis fornecem valores inferiores ao exacto.

Observando a tabela 13.1, verifica-se que relaxar as condições de continuidade da tensão pode levar a que se obtenham valores da energia de deformação inferiores ao exacto. De igual modo, relaxar as condições de

continuidade dos deslocamentos pode levar a que se obtenham valores da energia de deformação superiores ao exacto.

Tendo em conta apenas o valor absoluto do erro na energia de deformação, relaxar as condições de continuidade da tensão permite obter soluções melhores do que as obtidas com elementos de equilíbrio de grau dois; relaxar as condições de continuidade dos deslocamentos permite mesmo obter melhores soluções do que as obtidas com elementos compatíveis de grau três.

Na tabela 13.2, indicam-se os valores do erro na energia e da energia do erro, para as malhas de elementos de grau dois, para as de elementos de grau três e para as dos elementos com condições de continuidade relaxadas.

h	$U(\sigma_e) - U(u_c) = U(\sigma_e - \sigma_c)$		Continuidade relaxada	
	p = 2	p = 3	$U(\sigma_{e^r}) - U(u_{c^r})$	$U(\sigma_{e^r} - \sigma_{c^r})$
1	11.43	2.604	1.098	1.636
0.5	1.601	1.187×10^{-1}	-9.179×10^{-2}	1.895×10^{-1}
0.25	1.590×10^{-1}	3.409×10^{-3}	-1.610×10^{-2}	1.930×10^{-2}

Tabela 13.2 - Erro na energia e energia do erro.

Para as condições de fronteira deste exemplo, a expressão (9.1) simplifica-se para

$$U(\sigma_e - \sigma_c) = U(\sigma_e) - U(u_c). \quad (13.1)$$

As soluções equilibradas e compatíveis na tabela 13.2 verificam esta condição. Tal já não sucede quando se relaxam as condições de continuidade nos lados. Nestes casos, $U(\sigma_{e^r} - \sigma_{c^r}) > |U(\sigma_{e^r}) - U(u_{c^r})|$, o que possibilita que bons resultados obtidos para o erro na energia de deformação possam não corresponder à realidade.

Na figura 13.7, representa-se a variação, com a dimensão da malha, do erro relativo de cada uma das soluções da tabela 13.1.

O erro de cada uma das soluções equilibradas e de cada uma das soluções compatíveis foi calculado a partir do valor "exacto" da energia. A energia do erro das soluções obtidas relaxando as condições de equilíbrio foi calculada através de

$$U(e_{e^r}) = U(\sigma_{e^r} - \sigma), \quad (13.2)$$

onde se tomou como solução "exacta" a solução obtida com elementos finitos compatíveis de grau cinco. A energia do erro das soluções obtidas relaxando as condições de compatibilidade foi calculada através de

$$U(\mathbf{e}_{c^n}) = U(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{c^n}), \quad (13.3)$$

onde se tomou como solução "exacta" a que foi obtida com elementos finitos de equilíbrio de grau cinco.

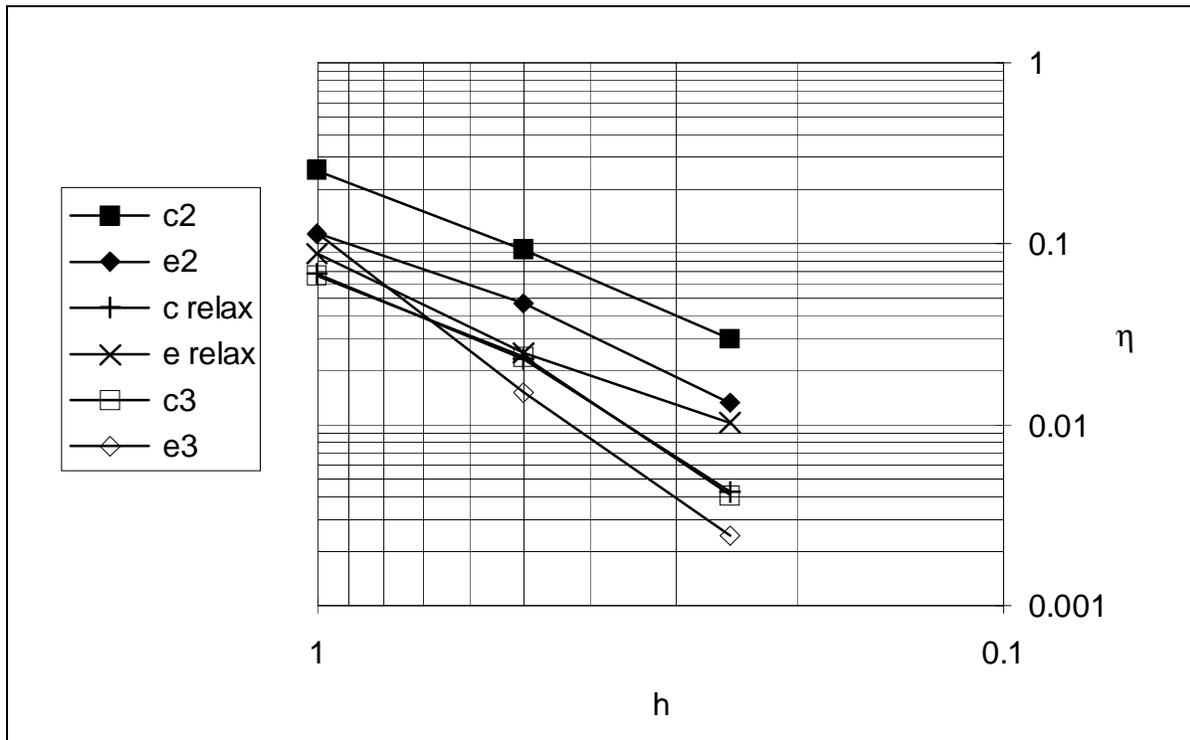


Figura 13.7 - Variação do erro relativo com a dimensão da malha.

A observação da figura 13.7 sugere que, utilizando funções de aproximação dos deslocamentos de grau três e funções de aproximação dos fluxos de tensão de grau dois se obtém um erro e uma taxa de convergência quase iguais aos que se obteriam utilizando elementos compatíveis de grau três. Isto está de acordo com os bons resultados geralmente obtidos ao utilizar a integração reduzida nos elementos finitos tradicionais. Em contrapartida, utilizando funções de aproximação das tensões de grau três e funções de aproximação dos deslocamentos de grau dois, o erro é um pouco menor do que o obtido com elementos de equilíbrio de segundo grau, mas a taxa de convergência parece ser semelhante.

Portanto, parece não haver vantagem em relaxar as condições de continuidade de tensão nos lados dos elementos de equilíbrio de grau baixo.

13.4. Refinamento adaptativo de uma malha dual bidimensional

Neste exemplo, analisa-se a placa representada na figura 13.8, sujeita ao carregamento indicado na mesma figura. Esta placa corresponde à simplificação de simetria de uma placa com uma abertura.

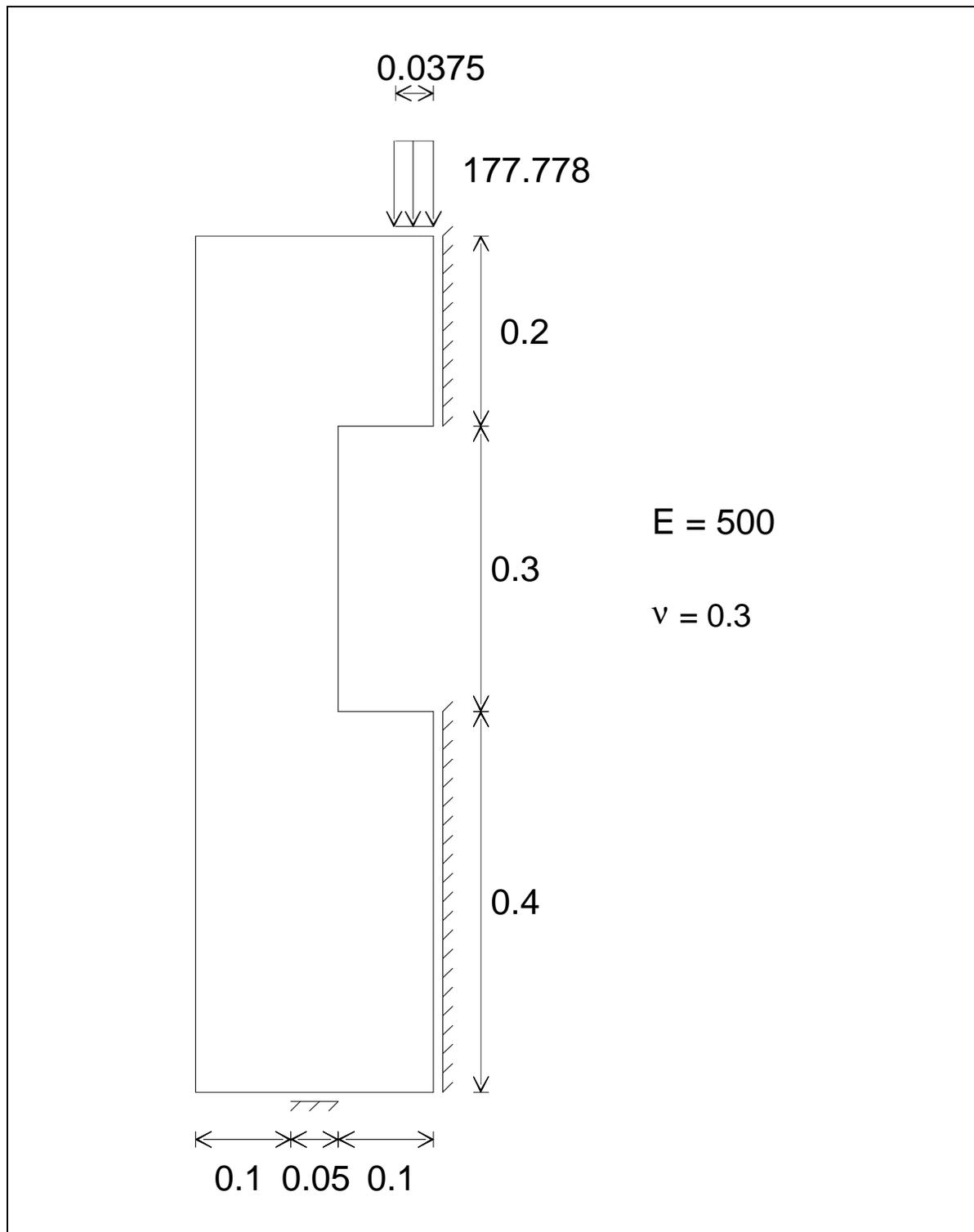


Figura 13.8 - Placa.

Pretende-se analisar este problema utilizando malhas duais de elementos finitos de grau três.

Na figura 13.9, representam-se as deformadas obtidas com uma malha inicial, quase uniforme, de 29 elementos. Com o gerador de malhas utilizado, esta era a malha mais grosseira que era possível gerar de modo a que nenhum elemento contivesse mais do que uma singularidade.

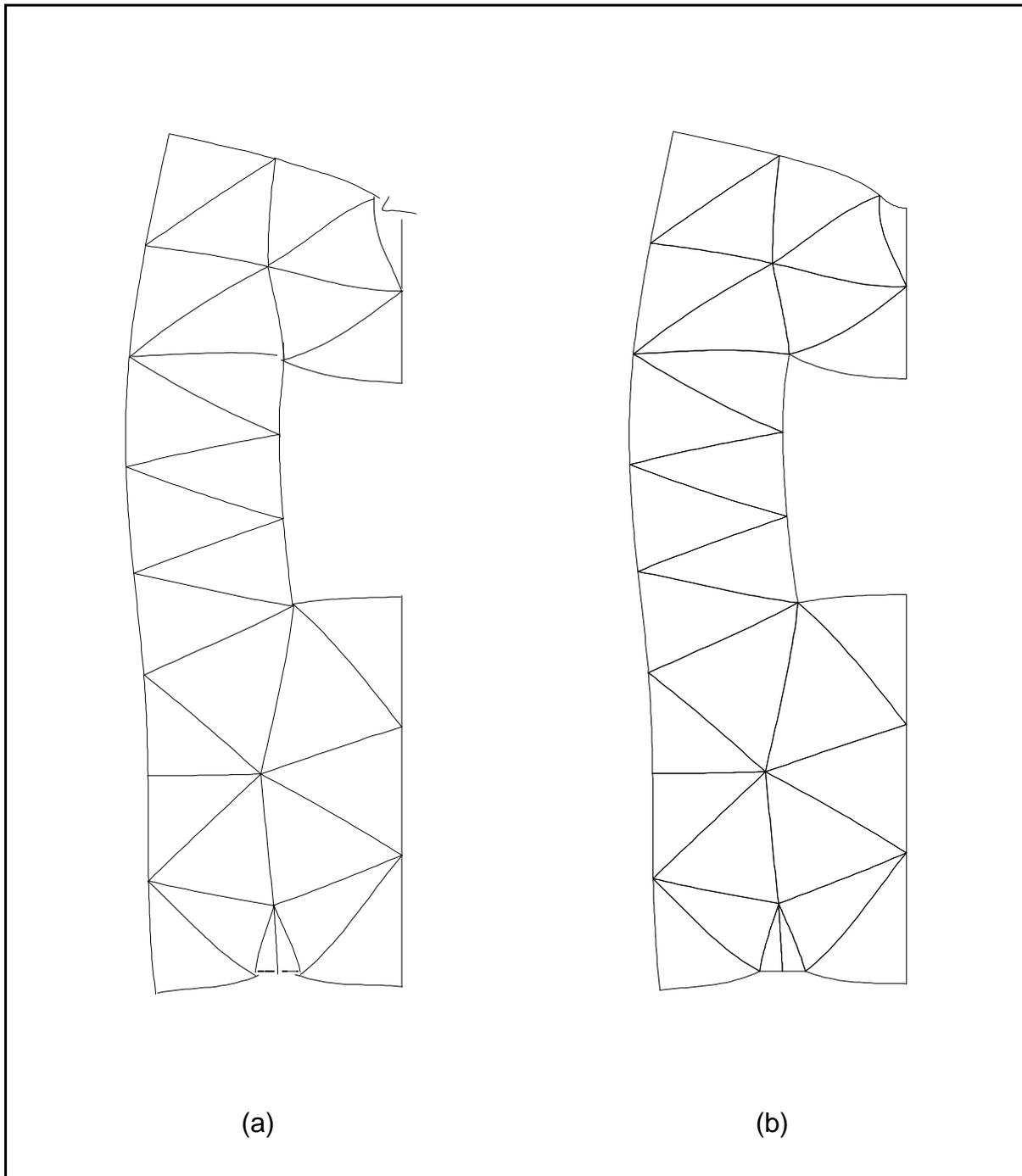


Figura 13.9 - Deformadas da malha de 29 elementos:
(a) elementos de equilíbrio; (b) elementos compatíveis.

A partir destas duas soluções, de (9.4) e de (11.2), obtém-se $\eta_h = 0.193028$, que, tendo em conta (9.3), é um majorante do erro relativo, na norma energética, de qualquer uma das soluções. Pretende-se obter $\eta_h \leq \bar{\eta} = 0.02$, utilizando a estratégia de refinamento descrita em 12.3.

A geometria do domínio e as condições de fronteira apresentam alguma complexidade, causando um número elevado de singularidades na solução. Estas singularidades são de diferentes tipos, umas em zonas de tensões elevadas, outras em zonas de tensões relativamente baixas. Existem ainda zonas, afastadas de qualquer singularidade, onde as tensões são relativamente elevadas. Este conjunto de circunstâncias dificulta a tarefa de refinamento adaptativo.

A estratégia de refinamento utilizada permitiu obter a precisão pretendida em três iterações. Na tabela 13.3, indicam-se, para cada malha: o número de elementos da malha, NE; o majorante do erro relativo, η_h ; o número de iterações que se estimam necessárias, m; o erro relativo que se pretende obter na malha seguinte, $k\bar{\eta}$; o número de elementos que se prevê serem necessários nessa malha, M.

Malha	NE	η_h	m	$k\bar{\eta}$	M
1	29	0.193028	2	0.062133	62
2	110	0.100394	1	0.02	322
3	347	0.030446	1	0.02	459
4	458	0.019812	-	-	-

Tabela 13.3 - Refinamento adaptativo.

Na tabela 13.4, indicam-se os valores da energia de deformação correspondentes a cada uma das soluções.

Malha	$U(\sigma_e)$	$U(u_c)$
1	0.433697	0.418118
2	0.429868	0.425578
3	0.428324	0.427927
4	0.428241	0.428073

Tabela 13.4 - Energias de deformação.

Nas figuras 13.10, 13.11 e 13.12, representam-se as deformadas obtidas, respectivamente, com as malhas 2, 3 e 4.

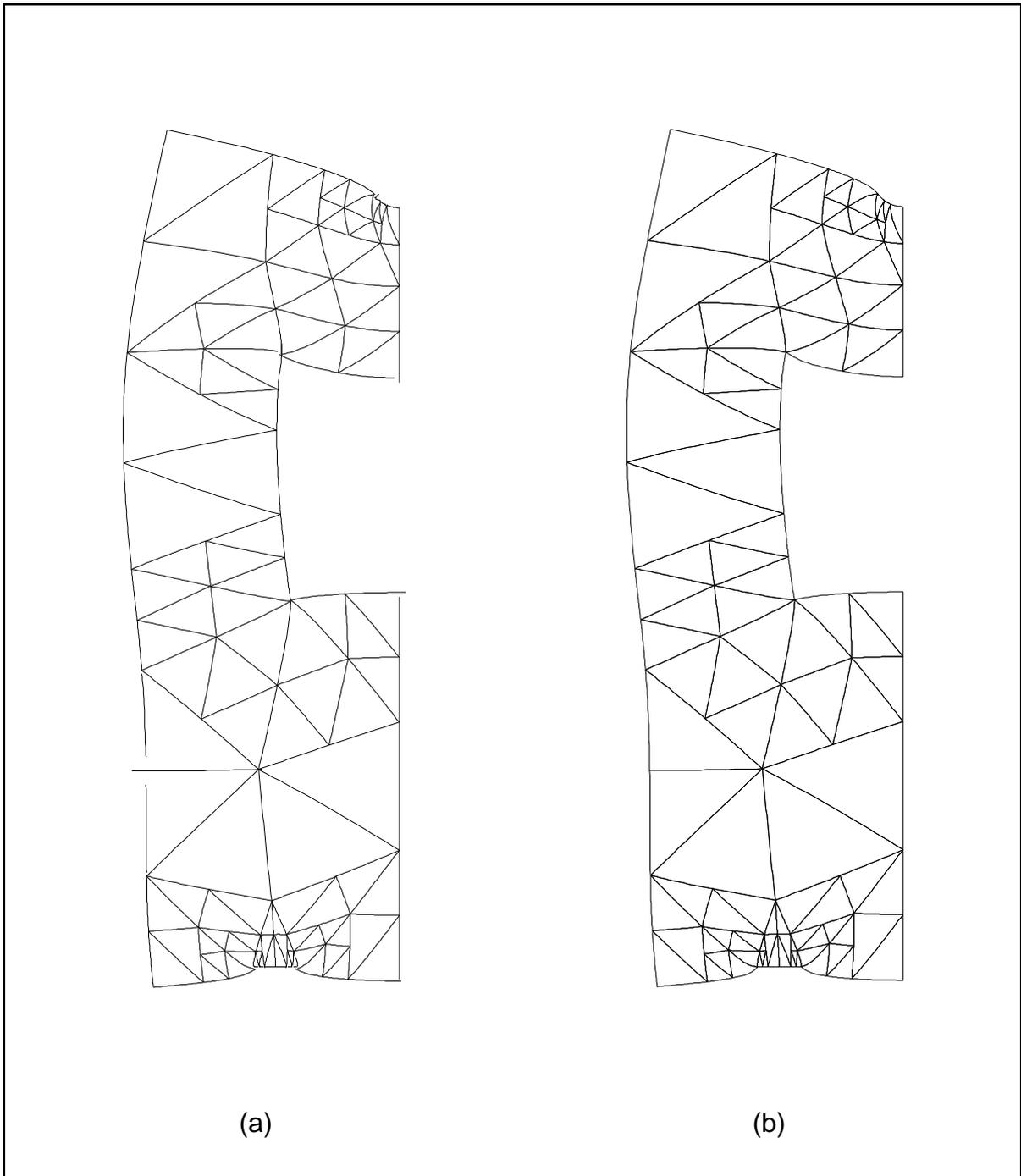


Figura 13.10 - Deformadas da malha de 110 elementos:
(a) elementos de equilíbrio; (b) elementos compatíveis.

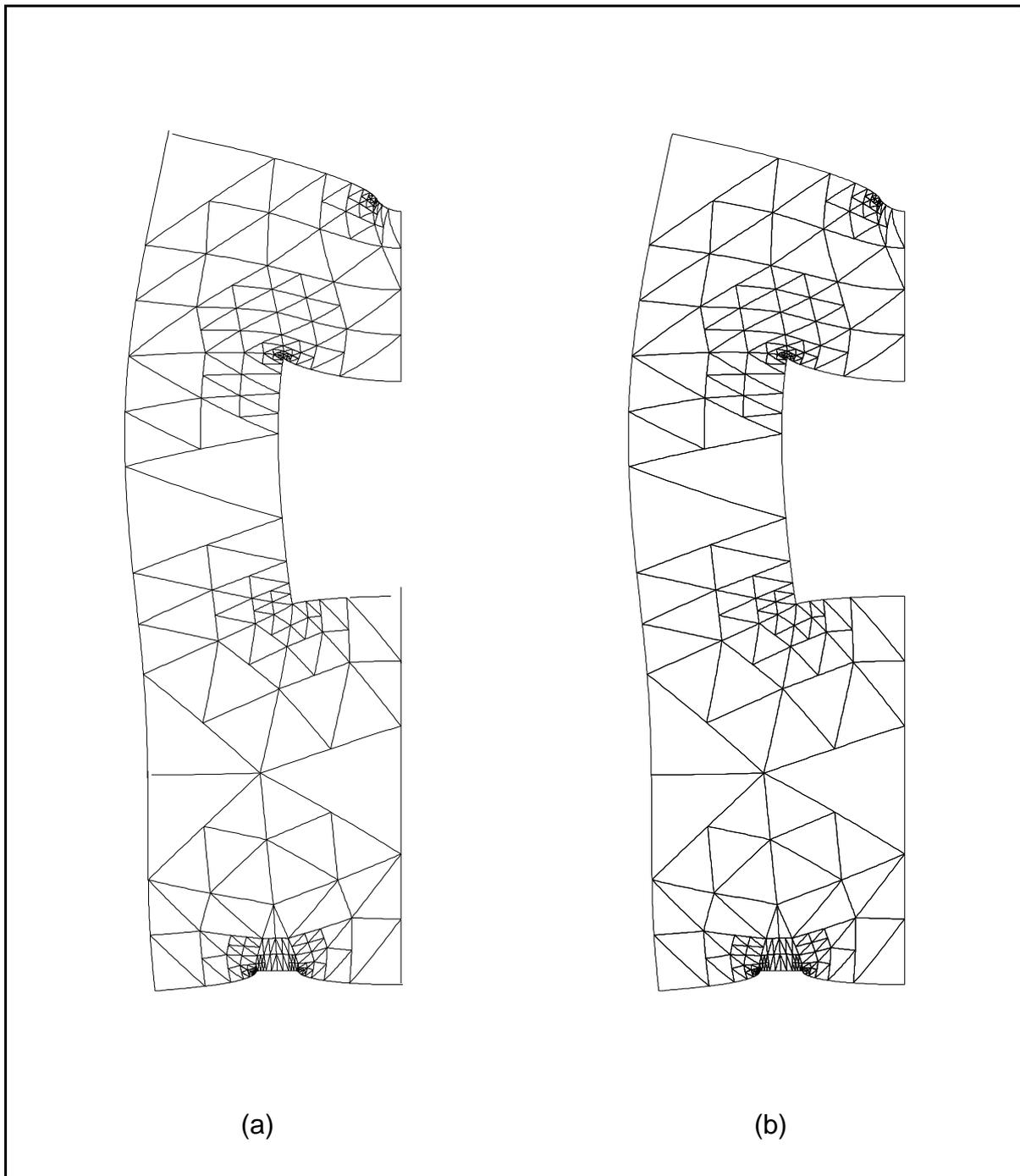


Figura 13.11 - Deformadas da malha de 347 elementos:
(a) elementos de equilíbrio; (b) elementos compatíveis.

Na resolução do sistema algébrico correspondente a qualquer uma das quatro malhas de elementos de equilíbrio foram sempre obtidos 11 modos espúrios. Pode observar-se que, neste caso, o seu efeito sobre as deformadas é aleatório mas local.

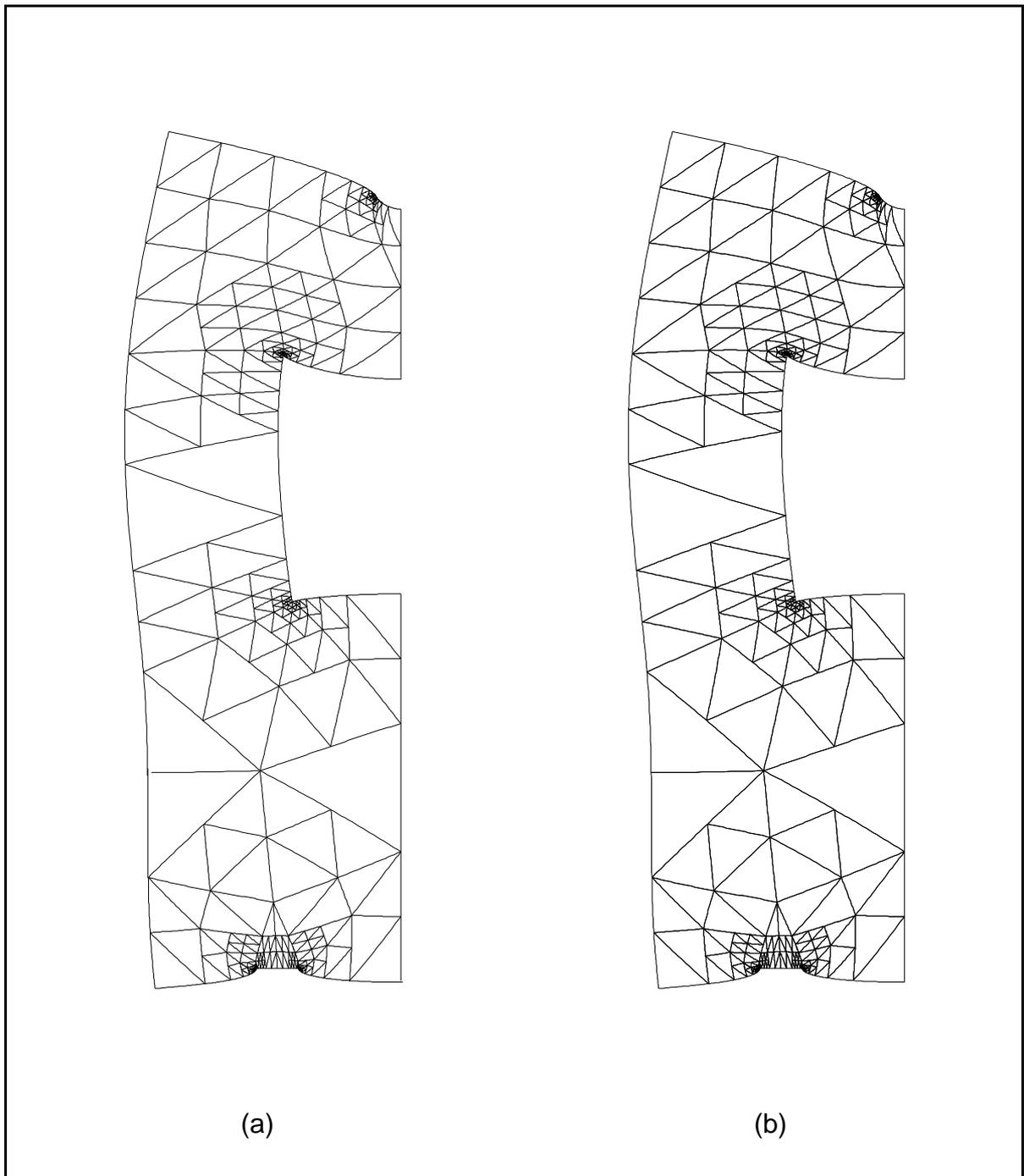


Figura 13.12 - Deformadas da malha de 458 elementos:
 (a) elementos de equilíbrio; (b) elementos compatíveis.

Na figura 13.13, apresenta-se um gráfico da variação, com o número de elementos, do majorante do erro relativo e do erro relativo de cada uma das soluções. O valor "exacto" da energia de deformação, $U = 0.428182868$, foi estimado utilizando elementos de grau quatro, refinamento adaptativo e o método de extrapolação dual descrito em 7.5.

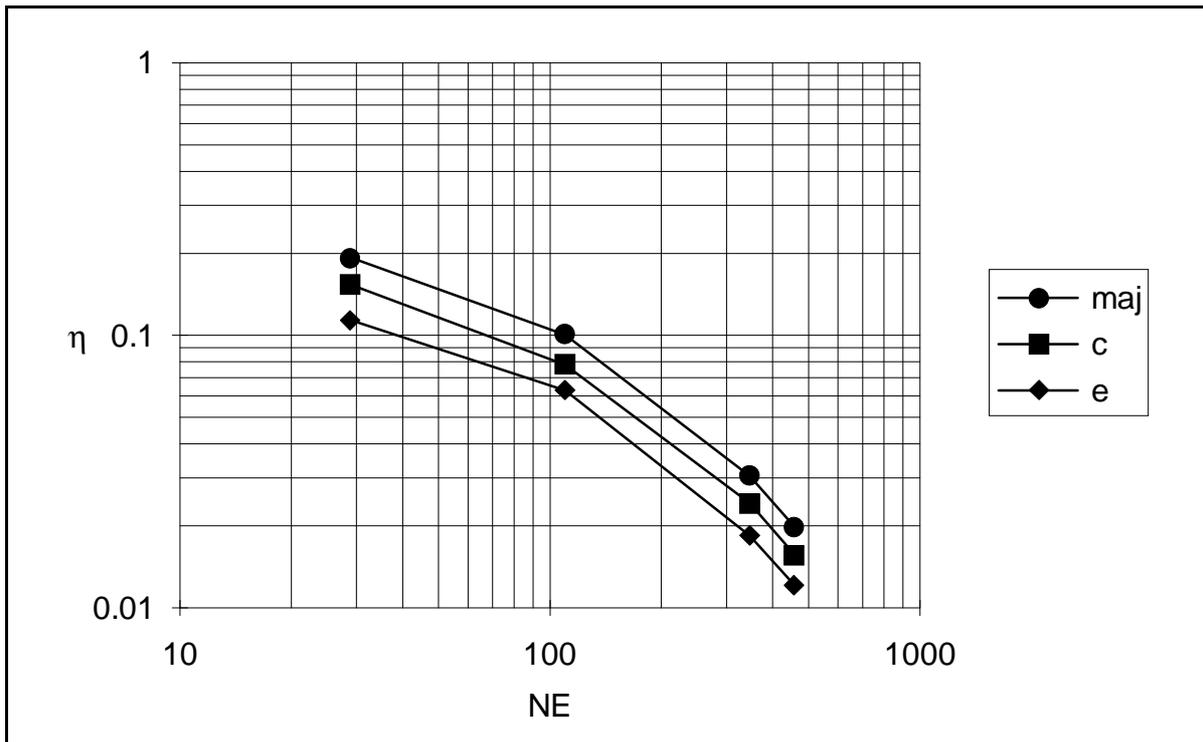


Figura 13.13 - Variação do erro relativo com o número de elementos.

A partir da tabela 13.3 e da figura 13.13, verifica-se que, inicialmente, a taxa de convergência em relação ao número de elementos é inferior à óptima. Contudo, à medida que o refinamento em torno das singularidades se torna adequado, a taxa torna-se óptima.

Na mesma figura, observa-se que a relação entre o erro de cada uma das soluções permanece sensivelmente constante, não se notando qualquer tendência para equidistribuir o erro pelas duas soluções. Neste exemplo, o majorante do erro é um bom estimador do erro da solução compatível e um mau estimador do erro da solução equilibrada. No entanto, o refinamento adaptativo, baseado nos indicadores de erro a partir dos quais se calculou o majorante do erro, não beneficia mais a solução compatível do que a solução equilibrada.

Nas figuras 13.14(a), 13.14(b), 13.15(a) e 13.15(b) representa-se a densidade da norma energética do erro na relação constitutiva (12.44) para cada uma das quatro malhas. Para facilitar a comparação com o valor da tensão aplicada, a densidade foi multiplicada por \sqrt{E} .

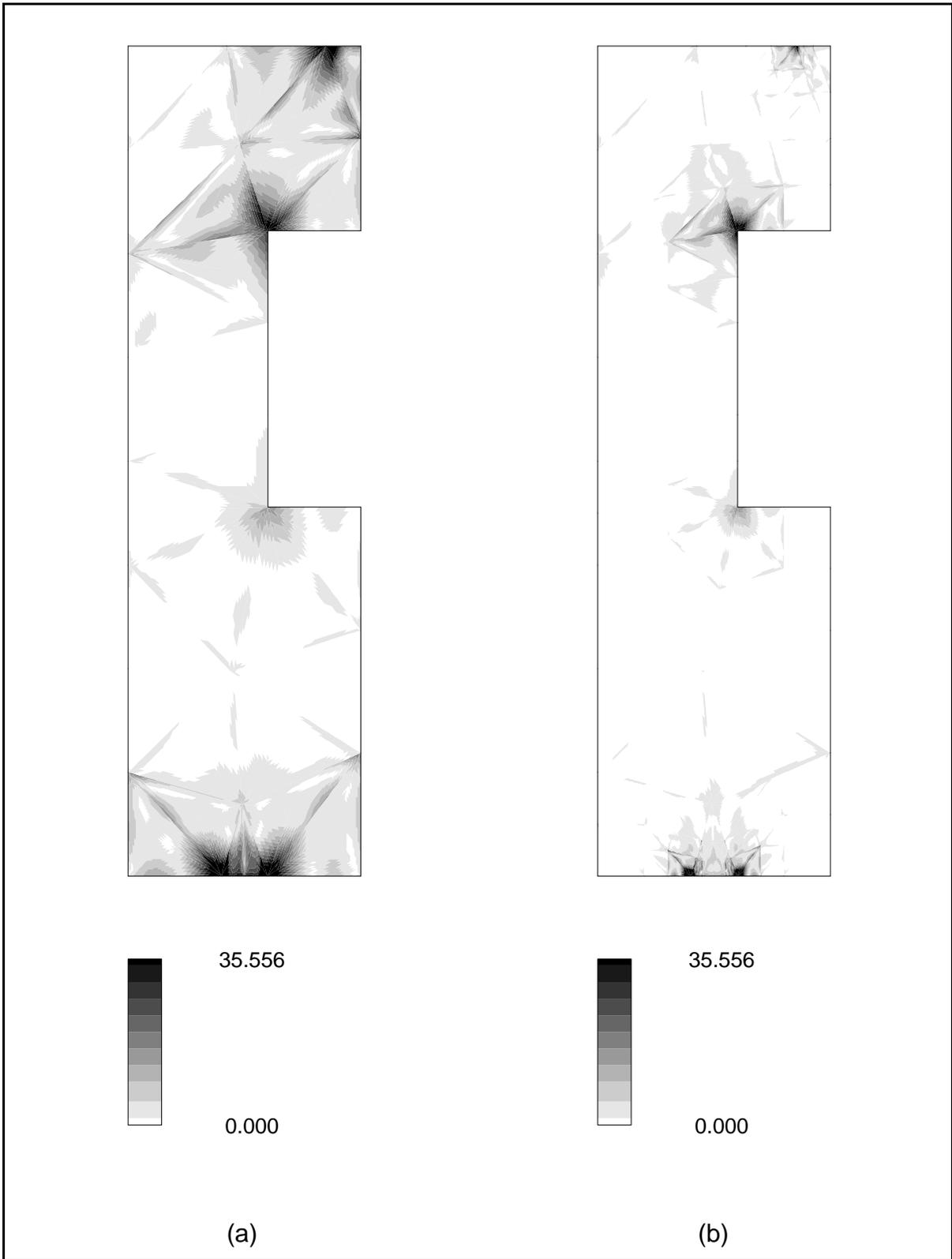


Figura 13.14 - Densidade da norma energética do erro:
(a) 29 elementos; (b) 110 elementos.

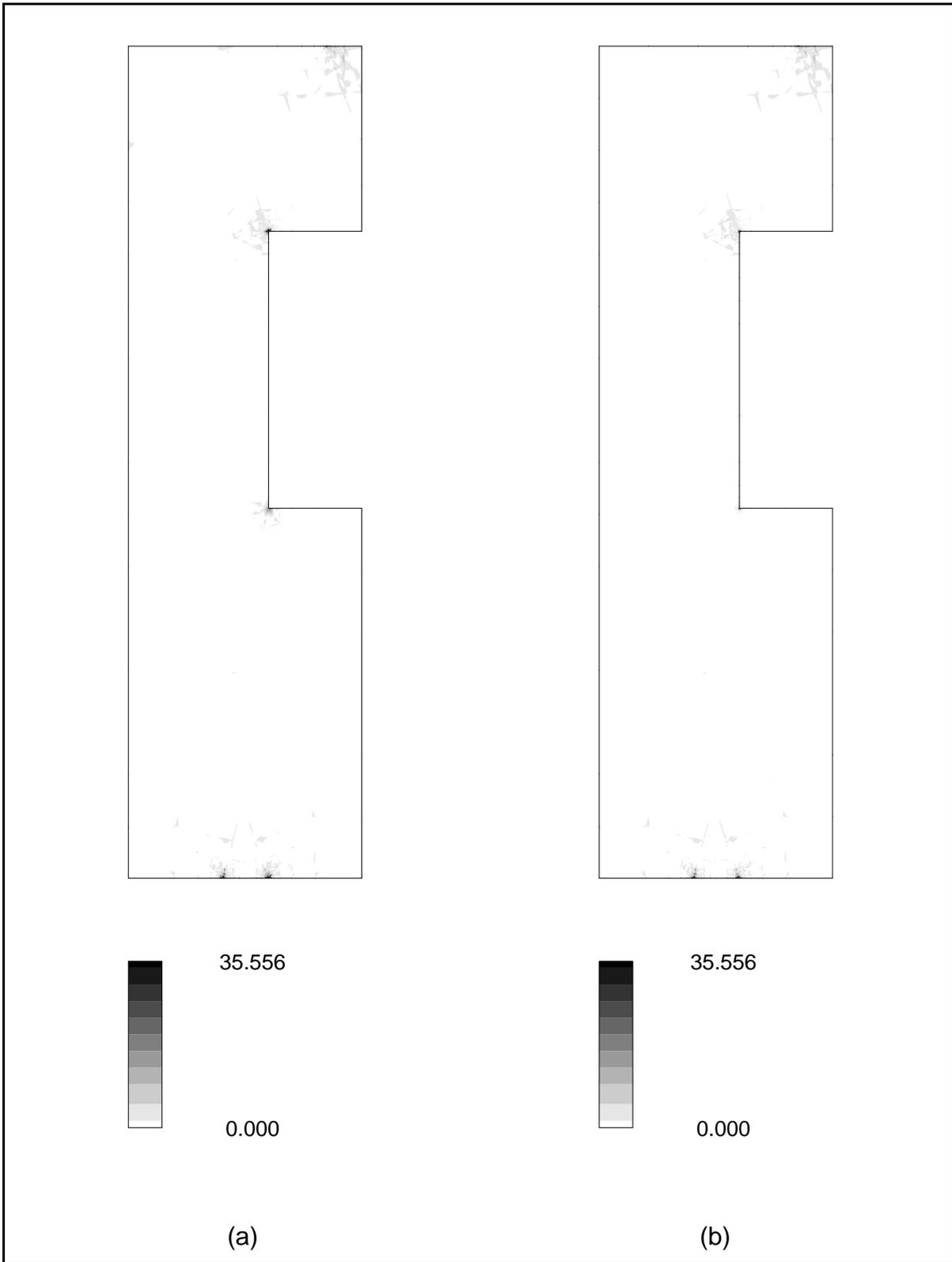


Figura 13.15 - Densidade da norma energética do erro:
 (a) 347 elementos; (b) 458 elementos.

Estas figuras permitem observar a concentração do erro junto às singularidades e, no resto do domínio, a sua diminuição.

13.5. Refinamento adaptativo de uma malha bidimensional de elementos finitos de equilíbrio

Neste exemplo, analisa-se a consola curta de secção variável, sujeita a uma pressão uniforme no lado superior, representada na figura 13.16.

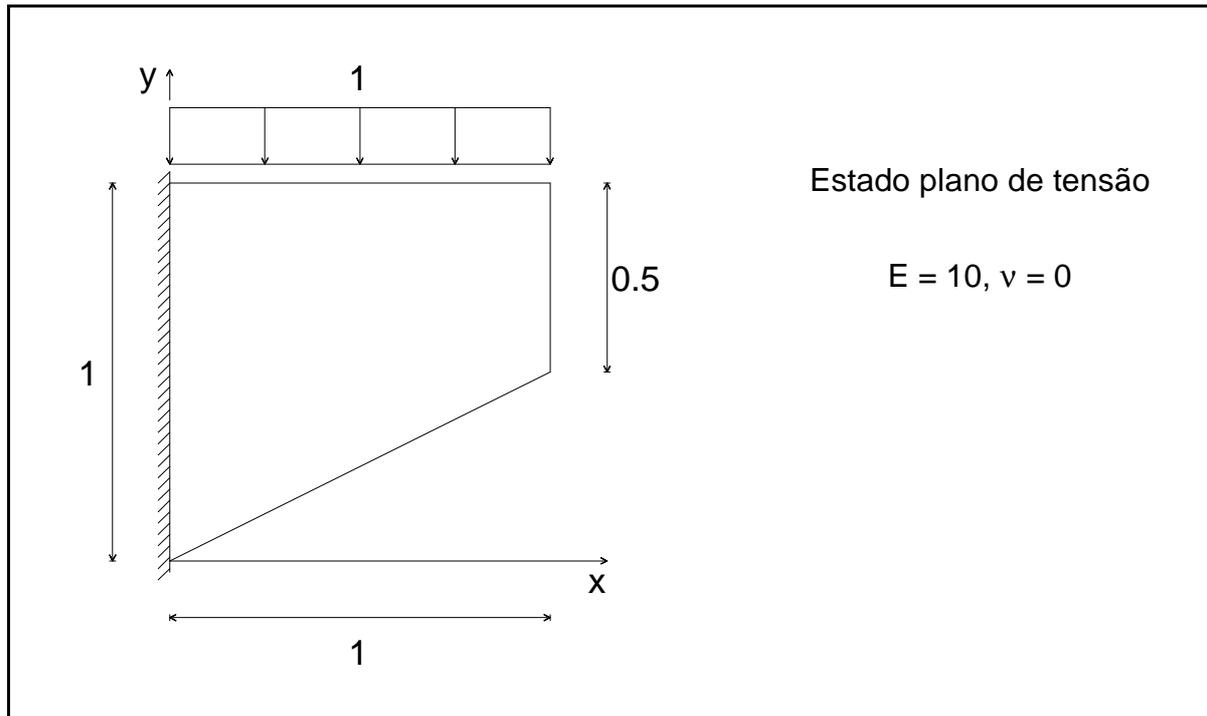


Figura 13.16 - Consola curta de secção variável.

Pretende-se analisar este problema utilizando elementos finitos de equilíbrio de grau dois.

Na figura 13.17, representa-se a malha inicial, quase uniforme, de 12 elementos.

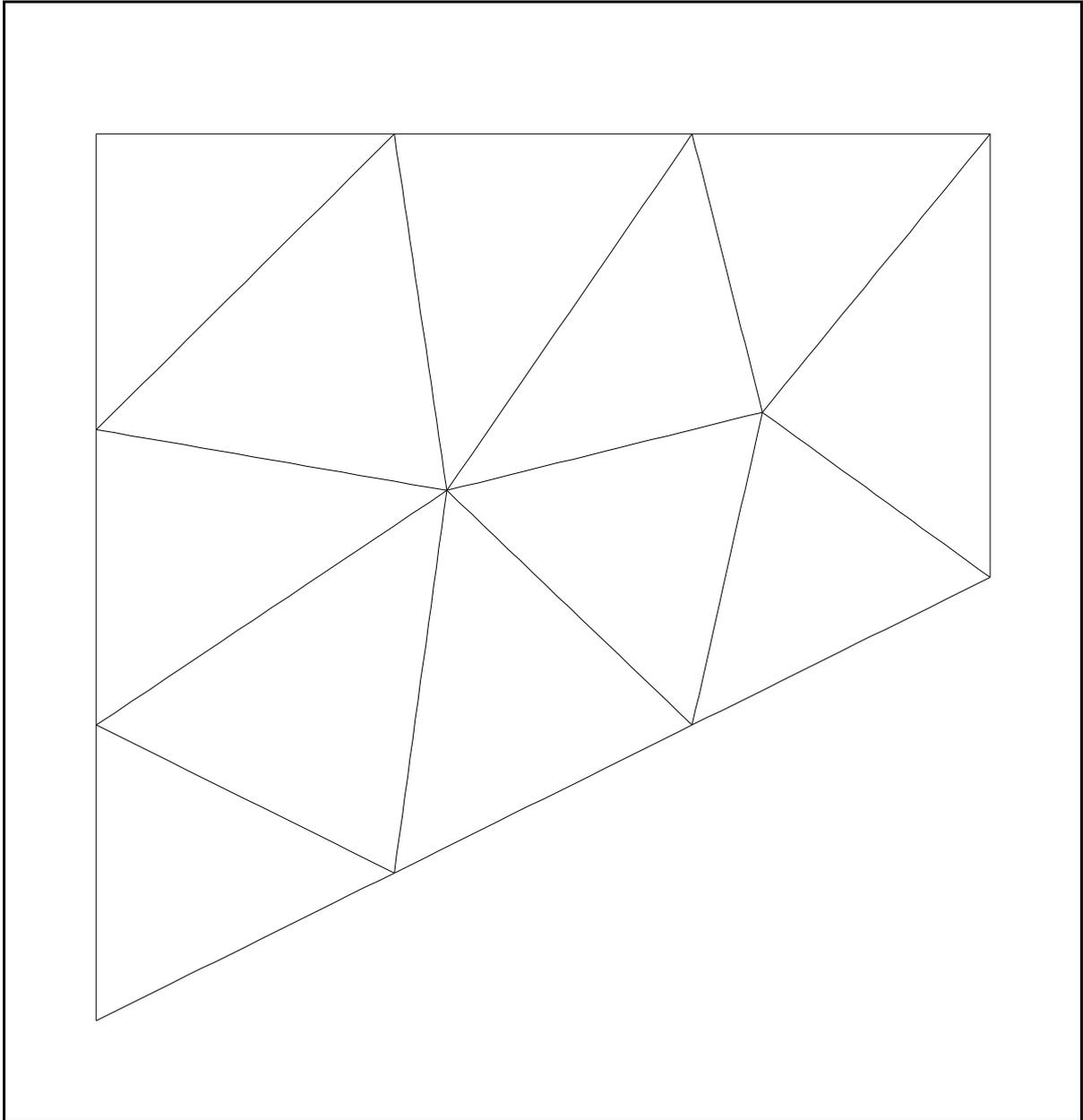


Figura 13.17 - Malha de 12 elementos.

A partir da solução correspondente a esta malha, de (9.27) e de (11.2), obtém-se $\eta_h = 0.116627$. Pretende-se obter $\eta_h \leq \bar{\eta} = 0.01$, utilizando a estratégia de refinamento descrita em 12.3.

A geometria do domínio e as condições de fronteira não apresentam qualquer complexidade. Devido à inclinação do lado inferior, existe apenas uma singularidade, no canto superior esquerdo. Estas circunstâncias facilitam a tarefa de refinamento adaptativo.

A estratégia de refinamento utilizada permitiu atingir a precisão pretendida em duas iterações. Na tabela 13.5, indicam-se, para cada malha: o número de elementos da malha, NE; o estimador do erro relativo, η_h ; o número de iterações

que se estimam necessárias, m ; o erro relativo que se pretende obter na malha seguinte, $k\bar{\eta}$; o número de elementos que se prevê serem necessários nessa malha, M .

Malha	NE	η_h	m	$k\bar{\eta}$	M
1	12	0.116627	2	0.034151	41
2	30	0.036426	1	0.01	110
3	108	0.007494	-	-	-

Tabela 13.5 - Refinamento adaptativo.

Na tabela 13.6, indicam-se os valores da energia de deformação correspondentes a cada uma das soluções.

Malha	$U(\sigma_e)$
1	0.101157
2	0.100494
3	0.100367

Tabela 13.6 - Energia de deformação.

Nas figuras 13.18 e 13.19 representam-se, respectivamente, as malhas 2 e 3.

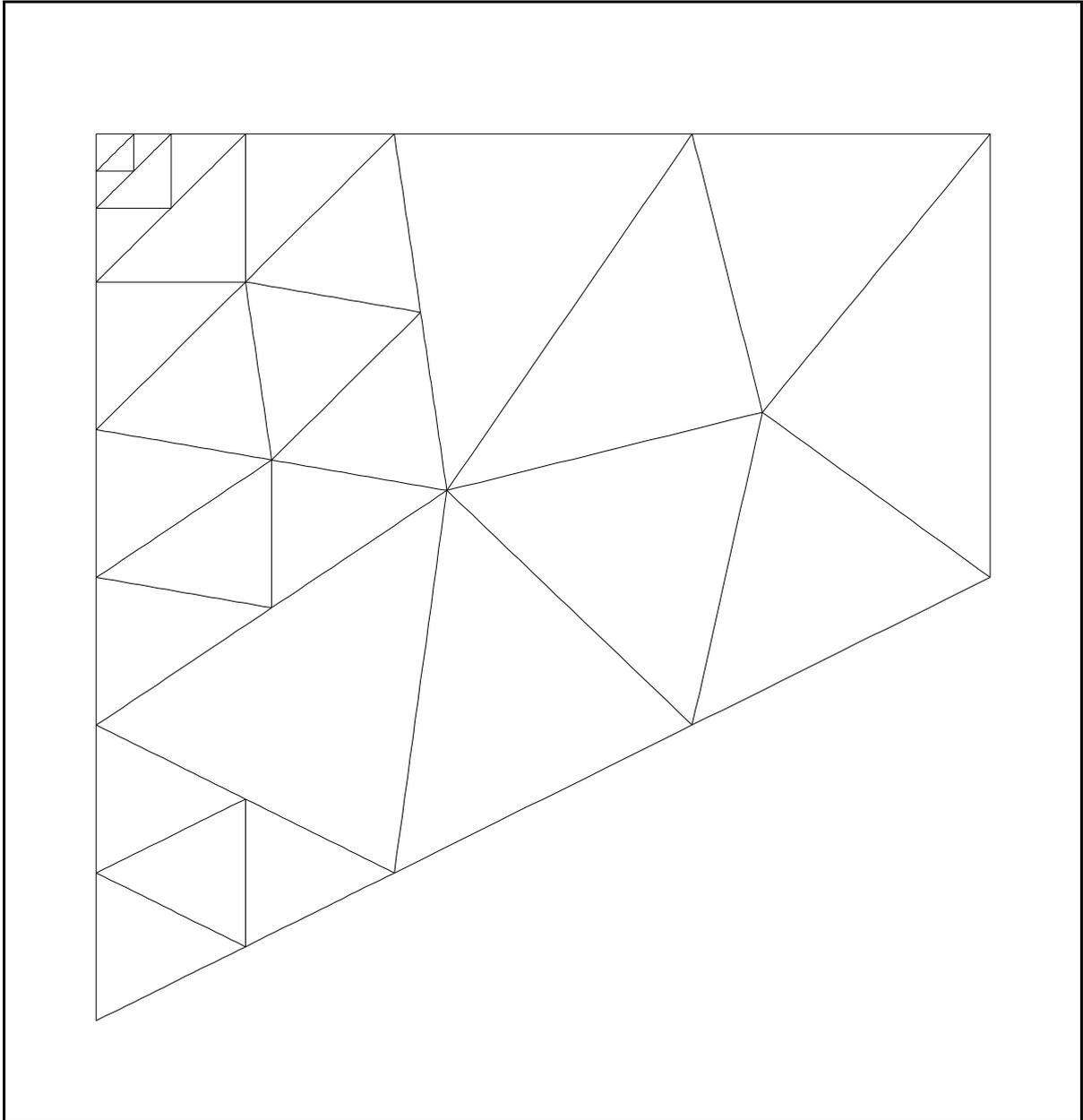


Figura 13.18 - Malha de 30 elementos.

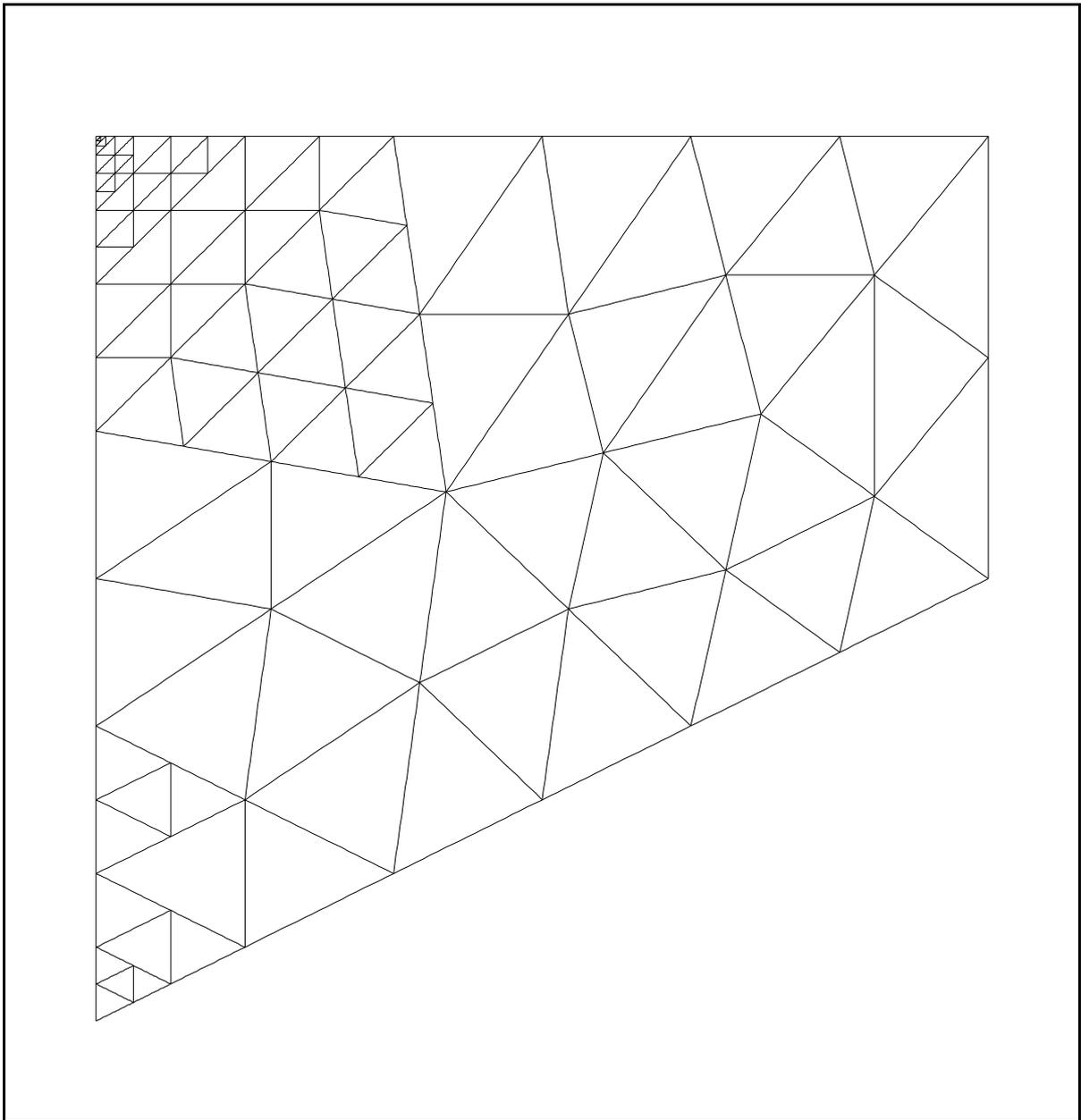


Figura 13.19 - Malha de 108 elementos.

Na figura 13.20, apresenta-se um gráfico da variação, com o número de elementos, do erro relativo real e do estimador do erro relativo. O valor "exacto" da energia de deformação, $U = 0.100361948$, foi estimado utilizando elementos de grau quatro, refinamento adaptativo de malhas duais e o método de extrapolação dual descrito em 7.5.

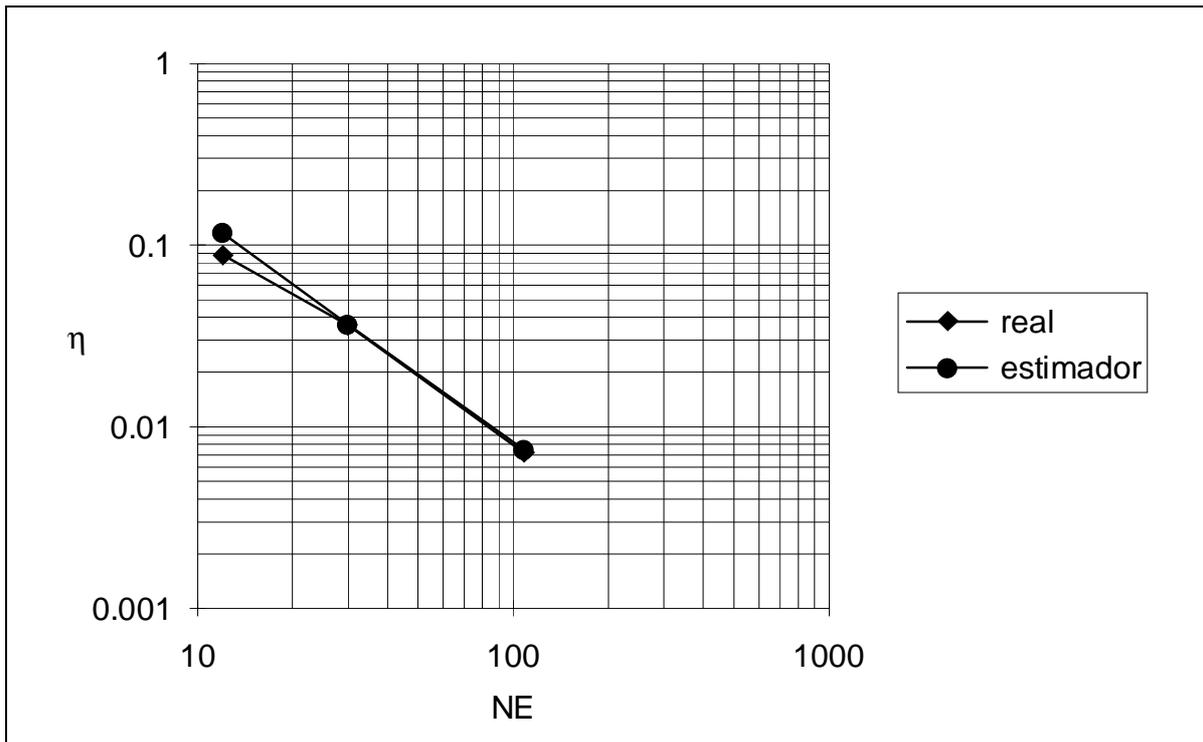


Figura 13.20 - Variação do erro relativo com o número de elementos.

A partir da tabela 13.5 e da figura 13.20, verifica-se que a taxa de convergência em relação ao número de elementos é sempre sensivelmente igual à óptima.

Na figura 13.20, observa-se que a taxa de convergência do estimador do erro é praticamente igual à do próprio erro. Além disto, os valores propriamente ditos são semelhantes.

Na figura 13.21, compara-se a variação, com o número de elementos, do erro relativo, para as malhas das figuras 13.17 a 13.19 (estratégia 1), para malhas obtidas sem efectuar uma detecção das singularidades (estratégia 2), para malhas obtidas tentando atingir a precisão pretendida numa única iteração (estratégia 3) e para malhas uniformes.

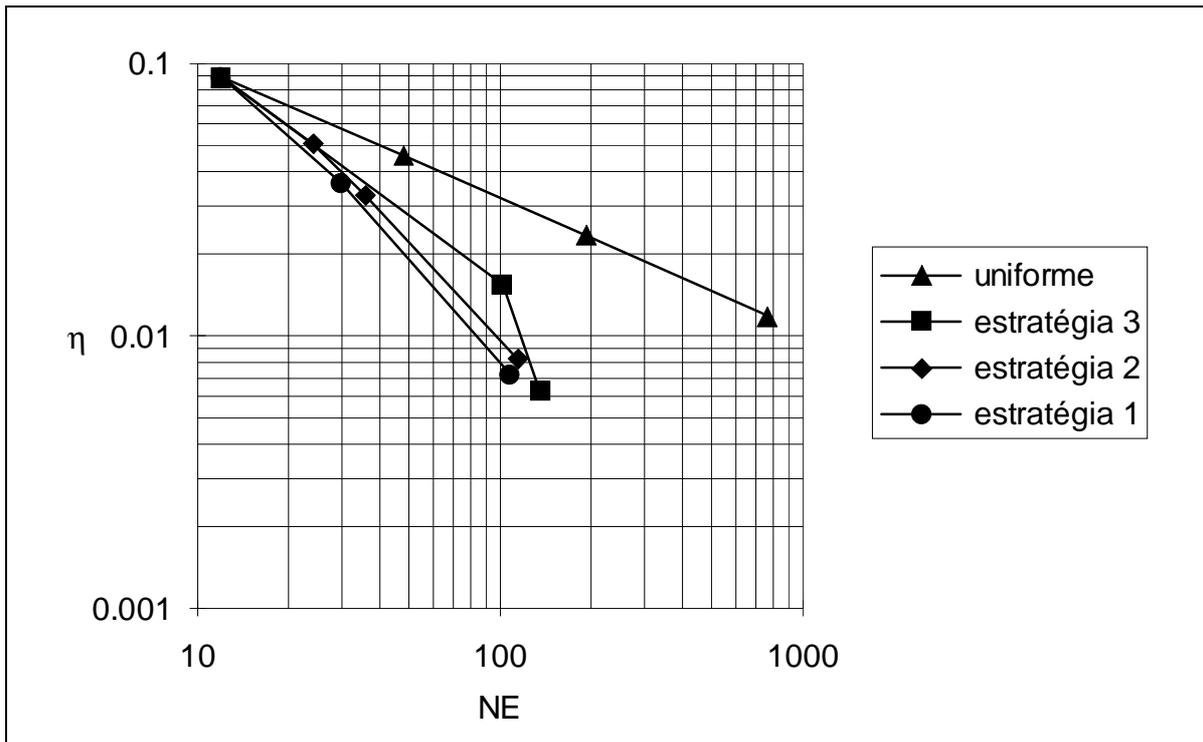


Figura 13.21 - Variação do erro relativo com o número de elementos.

A figura 13.21 mostra que, no refinamento não adaptativo, a taxa de convergência é condicionada pelas singularidades enquanto, no refinamento adaptativo, é possível obter a taxa de convergência correspondente ao grau dos elementos.

Verifica-se, também, neste problema, que tentar diminuir o número de iterações leva a um aumento do custo total. Os indicadores de erro elementares não são suficientemente bons para obter a taxa de convergência óptima num passo muito longo, o que dá origem a mais malhas com um número de elementos elevado.

Verifica-se igualmente, como seria de esperar, que não ter em conta a existência das singularidades diminui a taxa de convergência e aumenta o número de iterações.

13.6. Comparação entre os tempos gastos em cada iteração

Neste exemplo, analisa-se a placa representada na figura 13.22, sujeita ao carregamento indicado na mesma figura. Esta placa corresponde à simplificação de simetria de uma placa quadrada com uma fenda.

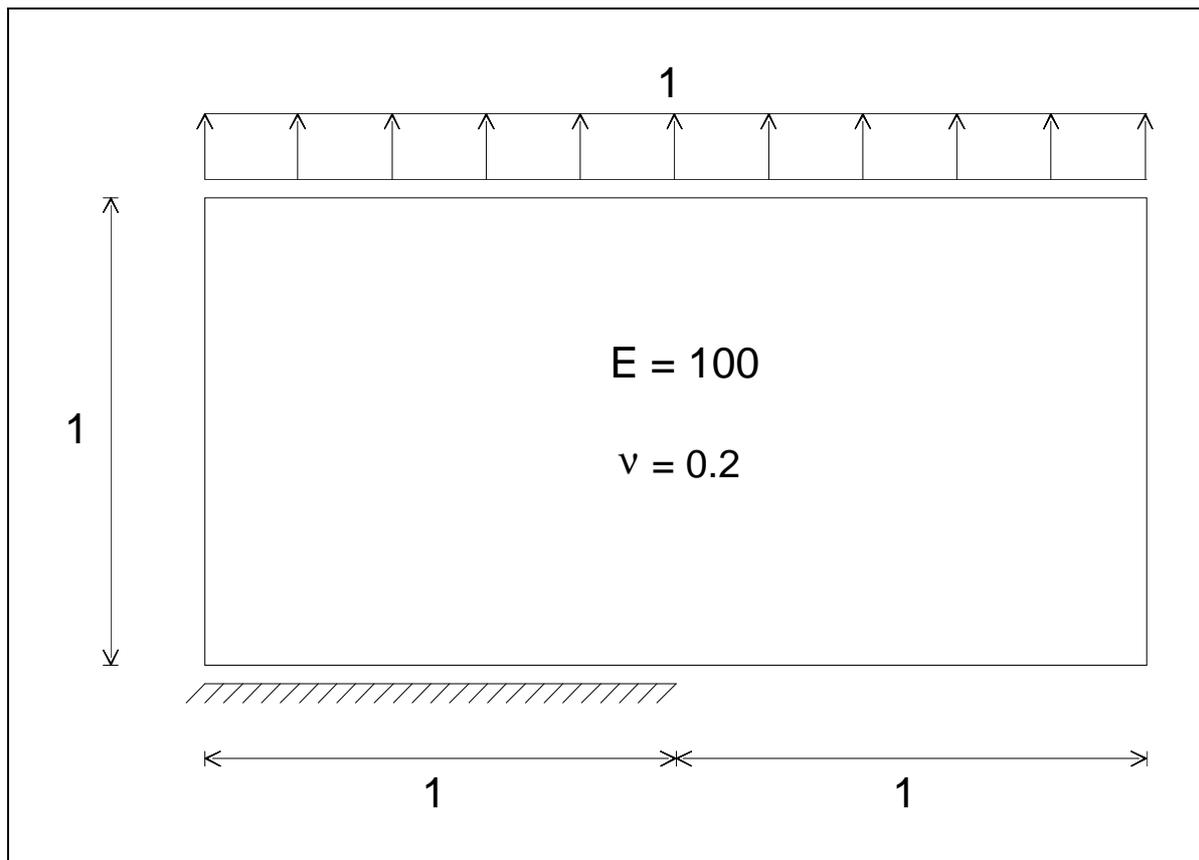


Figura 13.22 - Placa.

Pretende-se comparar o tempo de CPU necessário para analisar este problema utilizando malhas duais de elementos finitos de grau dois e malhas duais de elementos finitos de grau três.

Na figura 13.23, representa-se a malha inicial, uniforme, de 4 elementos.

Utilizando elementos de grau dois, obtém-se um majorante do erro relativo $\eta_h = 1.04091$. Com elementos de grau três, obtém-se um majorante do erro relativo $\eta_h = 0.680904$. Pretende-se obter $\eta_h \leq \bar{\eta} = 0.05$, utilizando a estratégia de refinamento descrita em 12.3.

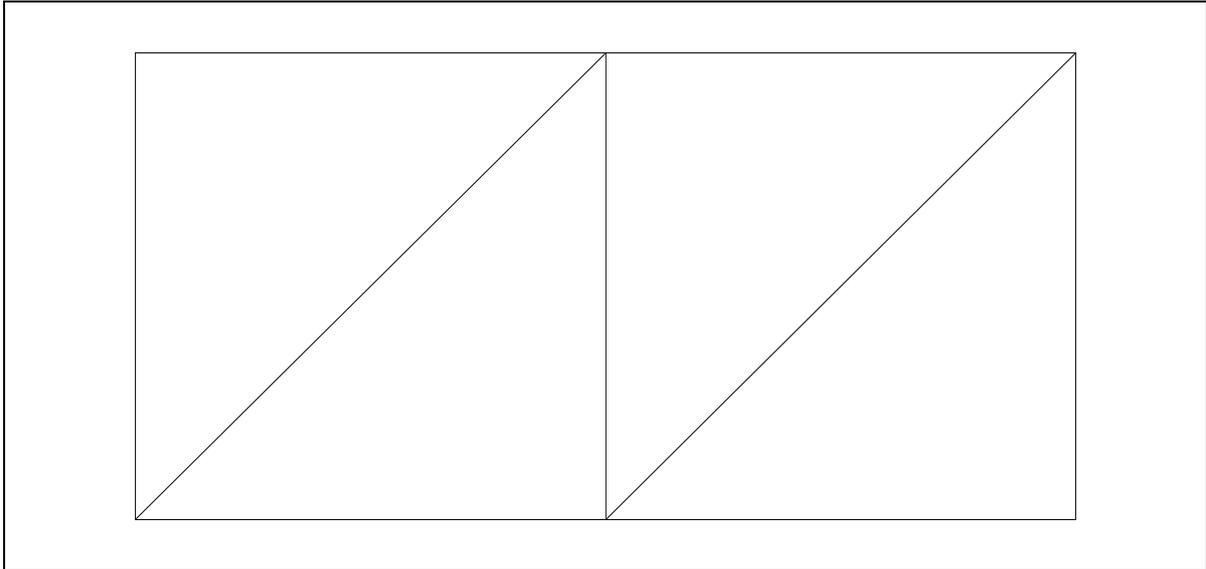


Figura 13.23 - Malha de 4 elementos.

Utilizando elementos de grau dois, obteve-se a precisão pretendida em quatro iterações. Na tabela 13.7, indicam-se, para cada malha: o número de elementos, o majorante do erro relativo e o número de equações dos sistemas algébricos (3.39) e (3.25). Na tabela 13.8, indicam-se, para cada malha, os tempos de CPU gastos na formação e na resolução dos sistemas algébricos e o tempo de CPU gasto no refinamento. Os cálculos foram realizados num computador IBM RS6000/550.

Malha	NE	η_h	Equações	
			Elementos de equilíbrio	Elementos compatíveis
1	4	1.04091	99	69
2	25	0.437567	564	501
3	76	0.179768	1692	1602
4	286	0.055393	6288	6090
5	346	0.043137	7626	7380

Tabela 13.7 - Erro e número de equações, para elementos de grau dois.

Malha	Elementos de equilíbrio		refinamento (s)	Elementos compatíveis	
	formação (s)	resolução (s)		formação (s)	resolução (s)
1	1	0	0	1	0
2	8	0	4	5	3
3	25	4	11	15	24
4	89	85	43	55	1101
5	111	86	53	67	1489
Σ	234	175	111	143	2617

Tabela 13.8 - Tempos de CPU, para elementos de grau dois.

Na figura 13.24, representa-se a malha final. Para esta malha, os valores obtidos para a energia de deformação foram $U(\sigma_e) = 0.0462497$ e $U(u_e) = 0.0461638$.

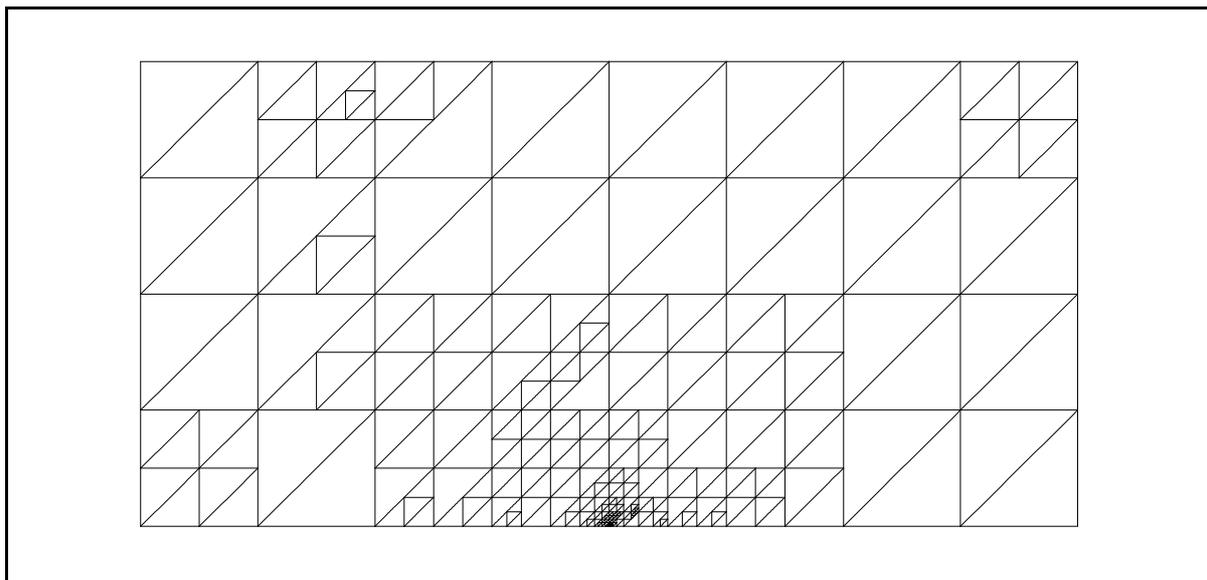


Figura 13.24 - Malha de 346 elementos.

Utilizando elementos de grau três, a precisão pretendida também foi atingida em quatro iterações. Na tabela 13.9, indicam-se, para cada malha: o número de elementos, o majorante do erro relativo e o número de equações dos sistemas algébricos. Os respectivos tempos de CPU são indicados na tabela 13.10.

Na figura 13.25, representa-se a malha final. Para esta malha, os valores obtidos para a energia de deformação foram $U(\sigma_e) = 0.0462521$ e $U(u_e) = 0.0461736$.

Malha	NE	η_h	Equações	
			Elementos de equilíbrio	Elementos compatíveis
1	4	0.680904	140	108
2	22	0.316350	712	684
3	49	0.145095	1570	1572
4	97	0.052759	3078	3136
5	121	0.041239	3842	3924

Tabela 13.9 - Erro e número de equações, para elementos de grau três.

Malha	Elementos de equilíbrio		refinamento (s)	Elementos compatíveis	
	formação (s)	resolução (s)		formação (s)	resolução (s)
1	3	0	0	2	1
2	20	0	3	13	8
3	49	2	9	27	20
4	94	9	19	60	89
5	116	12	25	64	115
Σ	282	23	56	166	233

Tabela 13.10 - Tempos de CPU, para elementos de grau três.

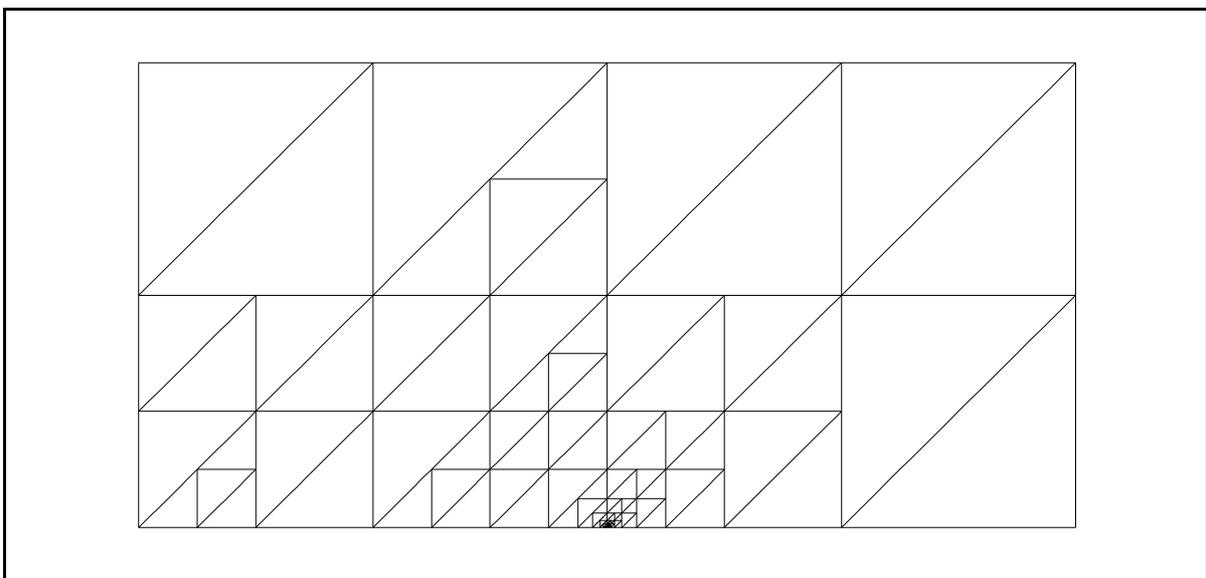


Figura 13.25 - Malha de 121 elementos.

Na figura 13.26, representa-se um gráfico do tempo de CPU gasto na resolução do sistema de equações, em função do número de equações.

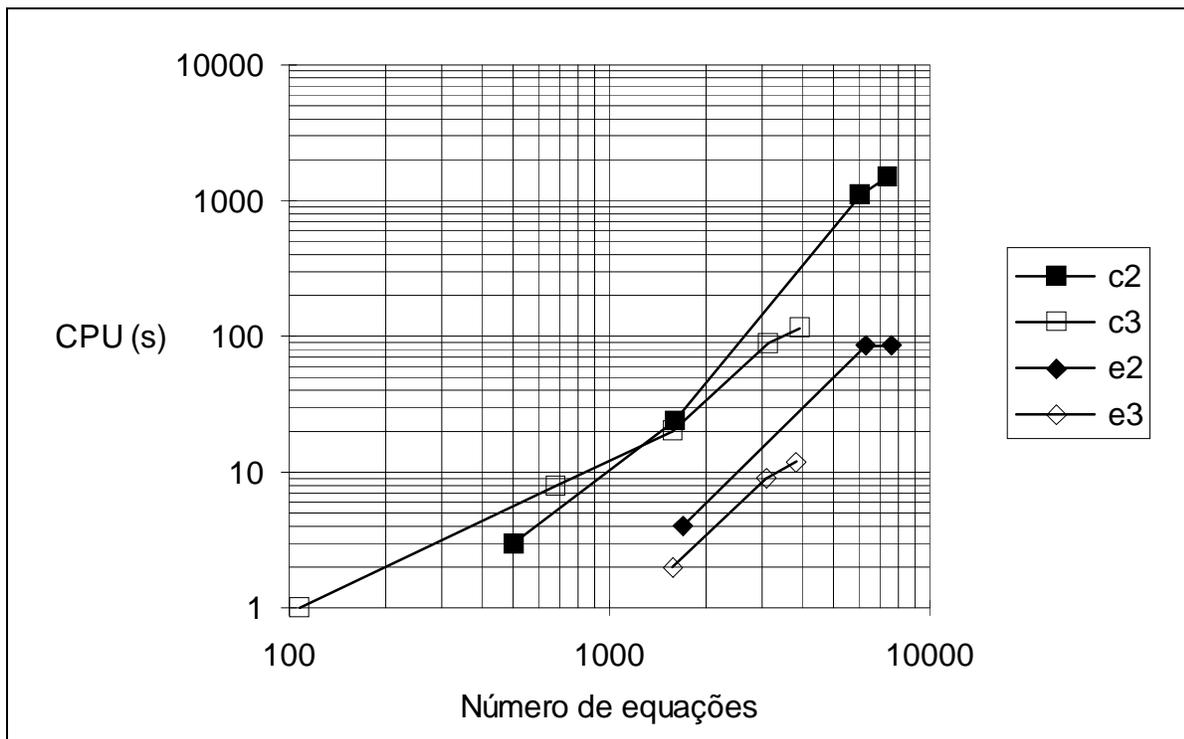


Figura 13.26 - Tempo de CPU gasto na resolução do sistema de equações.

Na figura 13.26, observa-se que o programa de resolução utilizado para os sistemas correspondentes a elementos finitos de equilíbrio é mais eficiente do que o utilizado para os sistemas correspondentes a elementos finitos compatíveis. Infelizmente, o primeiro programa não pode ser utilizado para resolver estes últimos sistemas.

Como se pode observar nas tabelas 13.7 e 13.9, o erro obtido com a penúltima malha é quase igual ao pretendido. Por isso, o número de elementos da última malha é semelhante ao da penúltima. Conseqüentemente, o tempo gasto com a última malha é semelhante ao gasto com a penúltima, como se pode verificar nas tabelas 13.8 e 13.10. Numa aplicação prática, não se iria analisar uma malha com um número de elementos tão próximo do da malha anterior. Para evitar, escolher-se-ia uma de duas alternativas: aceitar um erro um pouco superior ao pretendido ou, então, gerar a malha apontando para um erro um pouco menor do que o realmente pretendido. Este último erro poderia ser obtido admitindo que o quociente entre o erro pretendido e o efectivamente obtido seria igual ao correspondente à malha anterior. No entanto, nesta tese, leva-se sempre o refinamento até atingir a tolerância indicada e sem apontar para um valor mais baixo.

Para a penúltima malha, o tempo despendido nunca é inferior à soma dos tempos despendidos com as malhas anteriores, como se pode verificar nas tabelas 13.8 e 13.10.

Independentemente da eficiência dos programas, o tempo de resolução do sistema algébrico aumenta mais rapidamente do que o tempo de formação, o qual é proporcional ao número de graus de liberdade. Portanto, a partir de um dado número de graus de liberdade, dependente da eficiência dos programas, o tempo de resolução do sistema algébrico torna-se o factor determinante. Como se pode observar na figura 13.26, o tempo de resolução depende mais do número de equações e , portanto, do número de graus de liberdade, do que do grau dos elementos. Por estas razões, a comparação entre o desempenho de várias alternativas de refinamento é geralmente feita a partir do número de graus de liberdade.

Comparando os resultados das tabelas 13.8 e 13.10, observa-se que, para os elementos de grau três, apesar de a formação do sistema algébrico ser mais demorada, o tempo total é inferior. Neste exemplo, a utilização de elementos de grau três permite obter a mesma precisão com um número de graus de liberdade mais baixo, o que constitui o factor determinante.

13.7. Comparação entre alternativas de refinamento

13.7.1. Introdução

Para o problema descrito em 13.4, analisou-se a utilização da estratégia de refinamento de malhas duais de elementos finitos, aplicada a malhas de elementos de grau três. Para o problema descrito em 13.5, analisou-se a utilização da estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio, aplicada a malhas de elementos de grau dois.

Qualquer um destes problemas foi aproveitado para ser também analisado utilizando elementos de outros graus e outra estratégia de refinamento. Os resultados dessa análises são aqui resumidos, de forma a comparar as diversas alternativas de refinamento. Em 13.7.2, comparam-se os resultados obtidos utilizando diferentes graus dos elementos finitos. Em 13.7.3, comparam-se os resultados obtidos utilizando a estratégia de refinamento de malhas duais e utilizando a estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio.

13.7.2. Comparação entre o refinamento h-adaptativo de malhas de diferentes graus

Na figura 13.27, apresenta-se um gráfico da variação do majorante do erro relativo com o número de graus de liberdade, para o problema descrito em 13.4. Foram utilizadas malhas duais de elementos finitos e a correspondente estratégia de refinamento, descrita em 12.3. A malha inicial foi sempre a utilizada em 13.4, qualquer que fosse o grau dos elementos. A redução do valor do majorante do erro pretendida aumentava com o grau.

Para facilitar a comparação com as figuras de 13.7.3, associa-se o majorante do erro relativo ao número de graus de liberdade da malha de elementos de equilíbrio. Para o valor do número total de graus de liberdade duma malha de elementos finitos de equilíbrio, toma-se o número total de parâmetros de deslocamento dessa malha, pois, conforme referido em 3.3.2.3, é possível obter um sistema algébrico global condensado nos pesos das funções de aproximação de deslocamento.

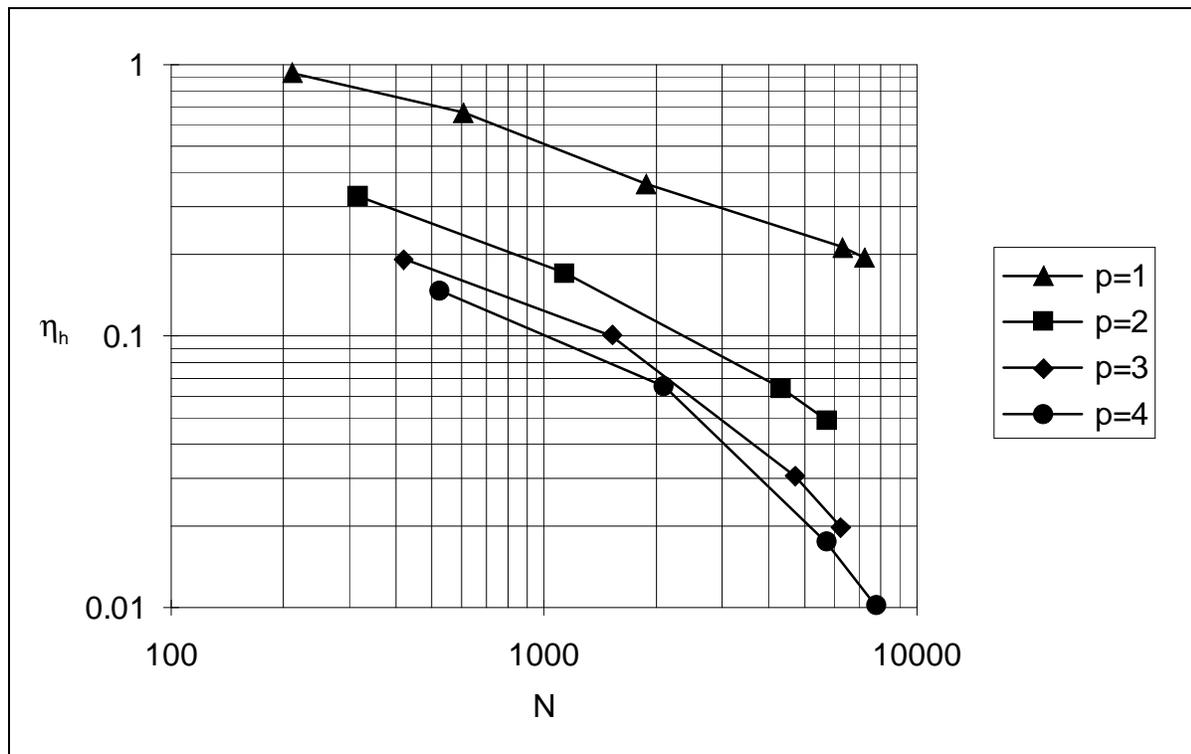


Figura 13.27 - Variação do majorante do erro relativo com o número total de graus de liberdade, para o problema de 13.4.

Na figura 13.28, apresenta-se um gráfico da variação do majorante do erro relativo com o número de graus de liberdade, para o problema descrito em 13.5, utilizando agora malhas duais de elementos finitos e a correspondente estratégia

de refinamento, descrita em 12.3. A malha inicial foi sempre a utilizada em 13.5, qualquer que fosse o grau dos elementos. A redução pretendida para o valor do majorante do erro aumentava com o grau.

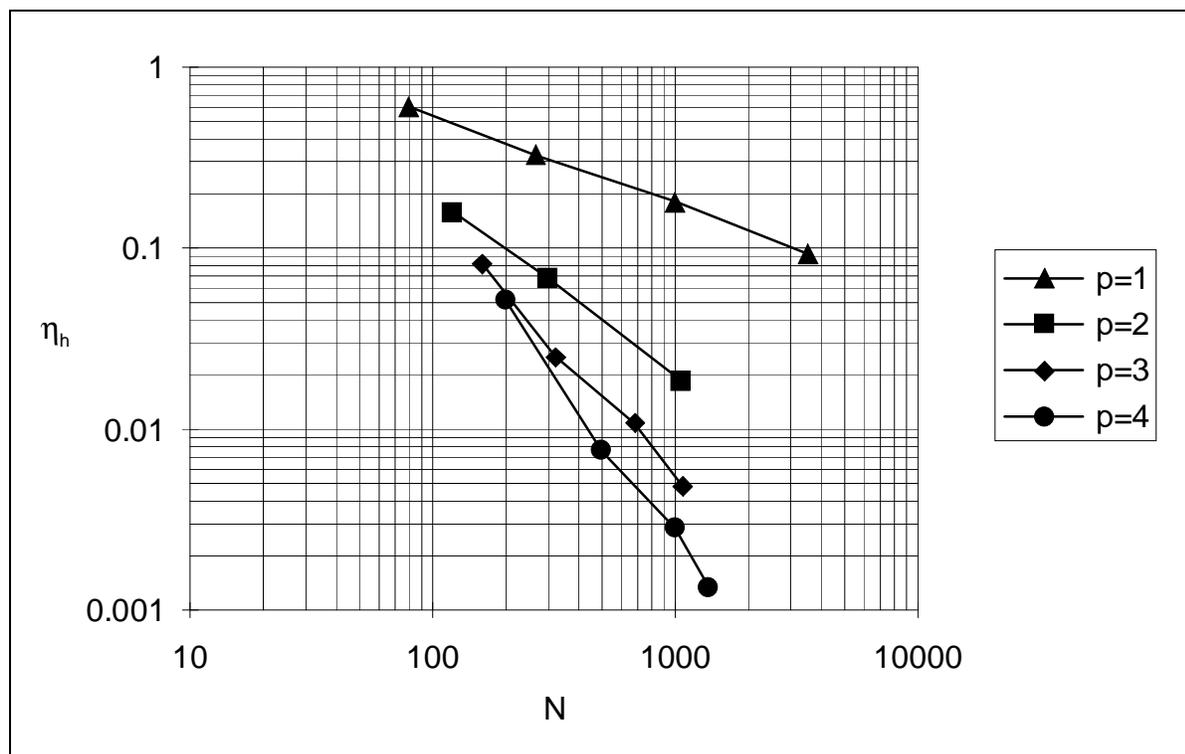


Figura 13.28 - Variação do majorante do erro relativo com o número total de graus de liberdade, para o problema de 13.5.

Quer na figura 13.27, quer na 13.28, observa-se que, na malha inicial, a taxa de convergência para o refinamento p diminui com o aumento do grau. Esta degradação da taxa de convergência do refinamento p é tanto mais pronunciada quanto mais fortes forem as singularidades e mais dominante for o seu efeito. Quando o refinamento p da malha inicial atinge o grau quatro, a taxa de convergência já é semelhante à taxa de convergência do refinamento h -adaptativo de malhas de elementos desse grau. Este tipo de comportamento leva a que, para uma dada precisão pretendida, não exista vantagem em utilizar elementos de grau superior a um dado valor, como se viu em 6.2.3. Nos problemas analisados, para precisões que não sejam muito superiores às obtidas nas malhas finais de elementos de grau quatro, não existe vantagem em utilizar elementos de grau superior a quatro. Claro que, se se pretender um erro muito inferior, a maior taxa de convergência assintótica, para o refinamento h -adaptativo, de malhas de elementos de grau mais elevado compensa o ponto de partida mais desfavorável.

13.7.3. Comparação entre estratégias de refinamento

Na figura 13.29, apresenta-se, para o problema descrito em 13.4, um gráfico da variação, com o número de graus de liberdade, do erro relativo de malhas de elementos finitos de equilíbrio, obtidas a partir do indicador de erro dual, e de malhas obtidas a partir do indicador de erro para elementos finitos de equilíbrio. Para as malhas obtidas a partir do primeiro indicador, a malha inicial foi a utilizada em 13.4; a redução pretendida para o majorante do erro aumentava com o grau dos elementos. Para as malhas obtidas a partir do segundo indicador, a malha inicial foi obtida dividindo em quatro todos os elementos da malha inicial utilizada em 13.4. Deste modo, nenhum elemento contém mais do que uma singularidade e nenhum vértice está adjacente a mais do que um vértice singular. A redução de erro pretendida aumentava com o grau dos elementos.

Na figura 13.30, apresenta-se, para o problema descrito em 13.5, um gráfico semelhante. A malha inicial foi sempre a utilizada nessa secção.

Observando as figuras 13.29 e 13.30, verifica-se que as duas estratégias de refinamento parecem fornecer resultados semelhantes.

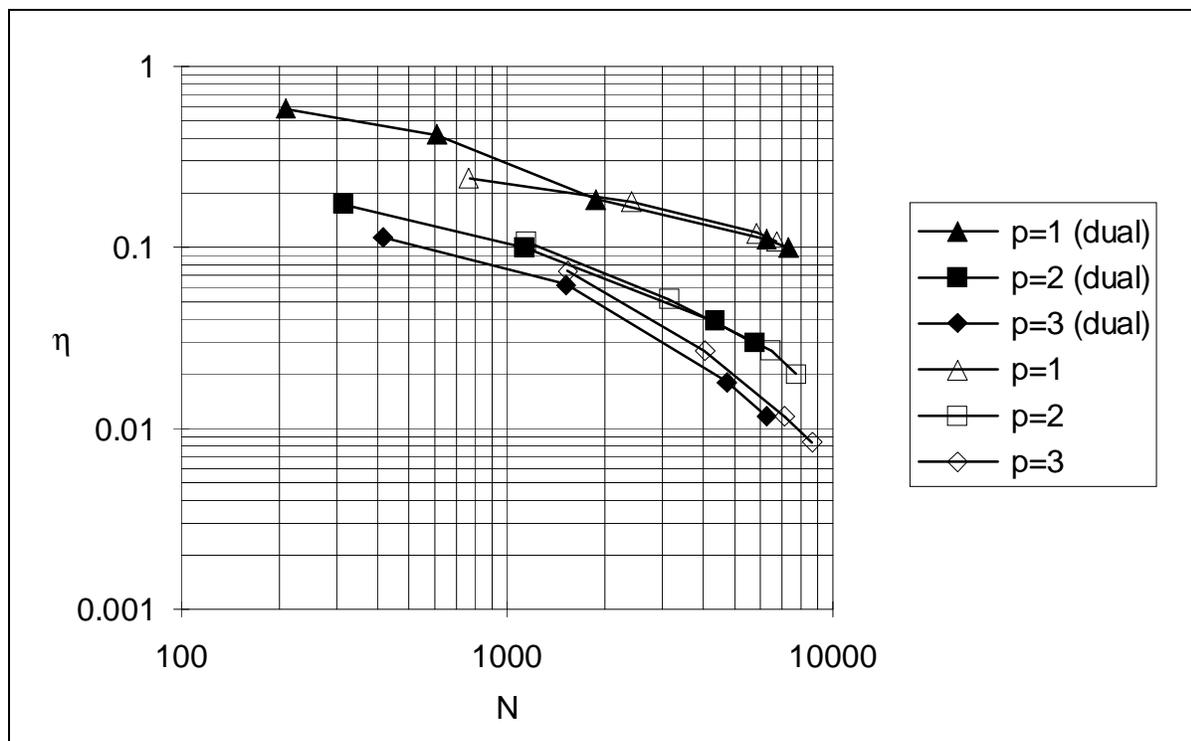


Figura 13.29 - Variação do erro relativo com o número total de graus de liberdade, para o problema de 13.4.

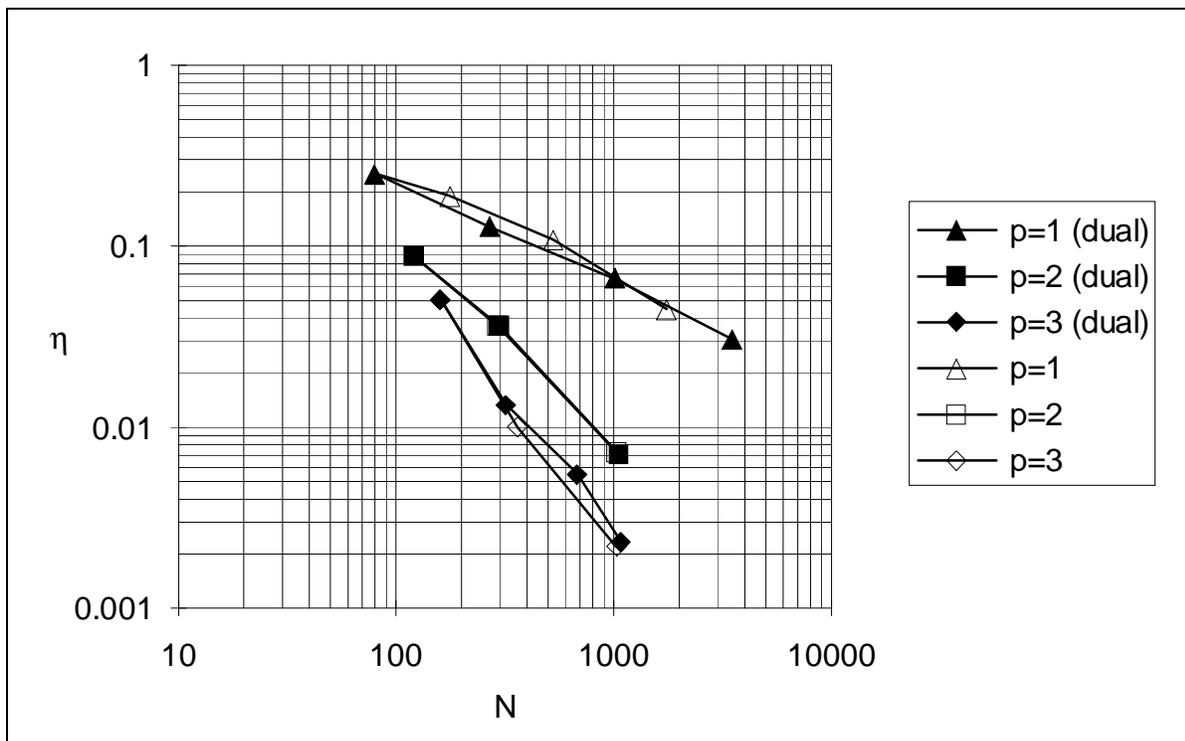


Figura 13.30 - Variação do erro relativo com o número total de graus de liberdade, para o problema de 13.5.

14. Conclusões e desenvolvimentos futuros

14.1. Conclusões

Esta tese constitui uma contribuição para o estudo do refinamento h-adaptativo de malhas duais e para o estudo da estimação de erro *a posteriori* e do refinamento h-adaptativo de malhas de elementos finitos de equilíbrio, em problemas estáticos de elasticidade linear. Qualquer destes domínios tem recebido, até agora, pouca atenção dos investigadores, o mesmo se passando com a estimação de erro e o refinamento adaptativo da maior parte dos elementos finitos não convencionais.

A análise dual de um modelo de elementos finitos de equilíbrio e de um modelo de elementos finitos compatíveis permite obter um majorante do erro e indicadores de erro elementares.

Com base nestes indicadores, implementou-se uma estratégia para o refinamento h-adaptativo de malhas duais de elementos triangulares de grau um a quatro. Esta estratégia permitiu atingir, nos problemas dominados por singularidades estudados nesta tese, a mesma taxa de convergência que se obteria em problemas sem singularidades.

Utilizando a análise dual, obtém-se um majorante do erro global, um campo de deslocamentos compatível e um campo de tensões equilibrado. Além disso, os indicadores de erro e o majorante são simples de calcular. Embora o custo total seja elevado, este método é simples de implementar, particularmente se não se utilizarem superelementos de equilíbrio. Parece ser adequado quando se utilizam elementos de grau elevado e se pretende partir de uma malha inicial grosseira. Por isso, a sua aplicação a problemas tridimensionais parece útil.

Nesta tese, propuseram-se várias alternativas para a obtenção de estimadores e indicadores de erro, com base apenas numa solução de elementos finitos de equilíbrio.

Uma destas alternativas é baseada na utilização explícita dos defeitos de compatibilidade da solução de elementos finitos. Em problemas bidimensionais, o cálculo destes defeitos e das suas normas é relativamente simples. A determinação dos coeficientes que são multiplicados por estas normas, para obter o indicador de erro elementar, foi realizada experimentalmente, para malhas de elementos triangulares de grau um a três, refinadas adaptativamente, aproveitando os resultados das malhas duais. Os exemplos testados parecem indicar que se obtêm bons indicadores de erro elementares e um bom estimador do erro global, para malhas refinadas adaptativamente.

Com base nestes últimos indicadores, implementou-se uma estratégia para o refinamento h-adaptativo de malhas de elementos finitos de equilíbrio triangulares de grau um a três. Esta estratégia permitiu atingir, nos problemas dominados por singularidades estudados nesta tese, a mesma taxa de convergência que se obteria em problemas sem singularidades. Esta estratégia obriga a gerar uma malha inicial mais fina do que a estratégia anterior, o que pode constituir um inconveniente quando se pretende utilizar elementos de grau elevado.

Planeava-se que o trabalho de preparação desta tese acompanhasse o de uma outra [PITERI, 1997], no âmbito da geração de malhas refinadas bidimensionais e tridimensionais. Infelizmente, a implementação do refinamento de malhas tridimensionais não ficou concluída em tempo útil. Por isso, não foi possível implementar a estratégia de refinamento adaptativo em problemas tridimensionais.

14.2. Desenvolvimentos futuros

A grande variedade de formulações de elementos finitos não convencionais e de modelos de comportamento existentes fornece diversas possibilidades de investigação nos domínios da estimação de erro e do refinamento adaptativo, abrindo um novo campo de desenvolvimento, no âmbito da mecânica computacional, que importa explorar.

Num âmbito mais imediato, a utilização de elementos finitos de equilíbrio em refinamento h-adaptativo para problemas estáticos de elasticidade linear, o desenvolvimento do trabalho aqui apresentado pode ser feito ao nível da formulação, ao nível da eficiência do cálculo automático e ao nível simplicidade de utilização.

Ao nível da formulação, os desenvolvimentos mais interessantes seriam: a aplicação dos métodos desenvolvidos a problemas tridimensionais; uma dedução rigorosa dos indicadores de erro para malhas de elementos de equilíbrio; a adaptação destes indicadores a malhas de super elementos de equilíbrio; o estudo

dos indicadores de erro obtidos por construção de uma solução compatível a partir de uma solução de elementos finitos de equilíbrio.

Quanto à aplicação a problemas tridimensionais, o método mais adequado parece ser o baseado no refinamento de malhas duais de elementos finitos tetraédricos. Uma vez que esteja implementado um algoritmo para gerar a malha refinada, a aplicação deste método poderá ser feita de forma relativamente rápida.

Embora os indicadores de erro para malhas de elementos finitos de equilíbrio pareçam satisfatórios, do ponto de vista dos resultados práticos, não estão fundamentados do ponto de vista formal. Seria conveniente dispor de uma fundamentação rigorosa destes indicadores.

A utilização de malhas de superelementos permite eliminar os modos espúrios. Por esta razão, a aceitação prática de programas auto-adaptativos de elementos finitos de equilíbrio será mais fácil se estes utilizarem superelementos. Sendo assim, é necessário dispor de indicadores de erro para malhas de superelementos de equilíbrio refinadas adaptativamente.

Para malhas de superelementos, a obtenção de indicadores de erro por construção de uma solução compatível a partir da solução de elementos finitos de equilíbrio poderá ser uma alternativa menos dispendiosa do que a análise dual. Contudo, existe a possibilidade de o majorante do erro ser excessivamente elevado.

Ao nível da eficiência do cálculo automático, poderiam ser estudadas rotinas alternativas para a formação e resolução do sistema algébrico, de modo a escolher a combinação mais eficiente. A implementação efectuada permite uma grande generalidade na definição da geometria dos elementos e na escolha das funções de aproximação. Muita desta generalidade poderia ser sacrificada em favor de uma maior eficiência computacional.

Ao nível da simplicidade de utilização, seriam necessários alguns desenvolvimentos para se dispor de um programa auto-adaptativo de elementos finitos de equilíbrio em que a única intervenção do utilizador consistisse em descrever o problema e indicar o erro pretendido. Esta quase total automatização da análise seria o ideal para uma utilização corrente deste tipo de elementos.

Referências

AINSWORTH M., ZHU J. Z., CRAIG A. W., ZIENKIEWICZ O. C., Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28**, 2161-2174, 1989.

AINSWORTH M., ODEN J. T., A Procedure for a Posteriori Error Estimation for h-p Finite Element Methods, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **101**, 73-96, 1992.

AINSWORTH M., ODEN J. T., WU W., A Posteriori Error Estimation for hp-Approximations in Elastostatics, *Applied Numerical Mathematics*, **14**, 23-54, 1994.

AIRY G. B., On the Strains in the Interior of Beams, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **153**, 49- , 1863.

ALMEIDA J. P. M., *Modelos de Elementos Finitos Para a Análise Elastoplástica*, Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, 1989.

ALMEIDA J. P. M., FREITAS J. A. T., An Alternative Approach to the Formulation of Hybrid Equilibrium Finite Elements, *Comp. Struct.*, **40**, 1043-1047, 1991.

ALMEIDA J. P. M., FREITAS J. A. T., Continuity Conditions for Finite Element Analysis of Solids, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **33**, 845-853, 1992.

ALMEIDA J. P. M., Janela: Uma Interface Gráfica Destinada a Aplicações de Mecânica Computacional, Instituto Superior Técnico, 1995.

ALMEIDA J. P. M., PEREIRA O. J. B. A., A Set of Hybrid Equilibrium Finite Element Models for the Analysis of Three-Dimensional Solids, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**, 2789-2802, 1996.

BABUSKA I., The Self-Adaptive Approach in the Finite Element Method, in WHITEMAN J. R., *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*, MAFELAP 1975, Academic Press, 125-142, 1976.

BABUSKA I., RHEINBOLT W. C., A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **12**, 1597-1615, 1978.

BABUSKA I., RHEINBOLT W. C., Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**(4), 736-754, 1978.

BABUSKA I., RHEINBOLT W. C., On the Reliability and Optimality of the Finite Element Method, *Comput. Struct.*, **10**, 87-94, 1979.

BABUSKA I., DORR M. R., Error Estimates for the Combined h and p Version of the Finite Element Method, *Numer. Math.*, **37**, 257-277, 1981.

BABUSKA I., SZABÒ B. A., KATZ I. N., The p-Version of the Finite Element Method, *SIAM J. Numer. Anal.*, **18**, 515-545, 1981.

BABUSKA I., MILLER A., VOGELIUS M., Adaptive Methods and Error Estimation for Elliptic Problems of Structural Mechanics, in BABUSKA I., CHANDRA J., FLAHERTY J. E., *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 57-73, 1983.

BABUSKA I., MILLER A., The Post-processing Approach in the Finite Element Method: Part 1 - Calculation of Displacements, Stresses and Other Higher Order Derivatives of the Displacements; Part 2 - The Calculation of the Stress Intensity Factors; Part 3 - A Posteriori Error Estimates and Adaptive Mesh Selection, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 1085-1129 e 2311-2324, 1984.

BABUSKA I., VOGELIUS M., Feedback and Adaptive Finite Element Solution of One-Dimensional Boundary Value Problems, *Numer. Math.*, **44**, 75-102, 1984.

BABUSKA I., Feedback, Adaptivity and A-Posteriori Estimates in Finite Elements: Aims, Theory and Experience, in BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., OLIVEIRA E. R. A., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, Chichester, 3-23, 1986.

BABUSKA I., MILLER A., A Feedback Finite Element Method with A Posteriori Error Estimations: Part 1 - The Finite Element Method and Some Basic Properties of the A Posteriori Error Estimator, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **61**, 1-40, 1987.

BABUSKA I., RANK E., An Expert-System-Like Feedback Approach in the hp-Version of the Finite Element Method, *F. E. Anal. Des.*, **3**, 127-147, 1987.

BABUSKA I., YU D., Assimptotically Exact A Posteriori Error Estimator for Biquadratic Elements, *F. E. Anal. Des.*, **3**, 341-354, 1987.

BABUSKA I., STROUBOULIS T., MATHUR A., UPADHYAY C. S., Pollution Error in the h-version of the Finite Element Method and the Local Quality of a Posteriori Error Estimators, *F. E. Anal. and Des.*, **17**, 273-321, 1994.

BABUSKA I., STROUBOULIS T., UPADHYAY C. S., A Model Study of the Quality of a Posteriori Error Estimators for Linear Elliptic Problems. Error Estimation in the interior of Patchwise Uniform Grids of Triangles, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **114**, 307-378, 1994.

BABUSKA I., STROUBOULIS T., UPADHYAY C. S., GANGARAJ S. K., A Model Study of Element Residual Estimators for Linear Elliptic Problems: The Quality of the Estimators in the Interior of Meshes of Triangles and Quadrilaterals, *Comput. Struct.*, **57**(6), 1009-1028, 1995.

BAEHMANN P. L., SHEPHARD M. S., FLAHERTY J. E., A Posteriori Error Estimation for Triangular and Tetrahedral Quadratic Elements Using Interior Residuals, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **34**, 979-996, 1992.

BANK R. E., SHERMAN A. H., An Adaptive Multi-Level Method for Elliptic Boundary Value Problems, *Computing*, **26**, 91-105, 1981.

BANK R. E., The Efficient Implementation of Local Mesh Refinement Algorithms, in BABUSKA I., CHANDRA J., FLAHERTY J. E., *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 74-81, 1983.

BANK R. E., WEISER A., Some A Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations, *Math. Comp.*, **44**, 283-301, 1985.

BANK R. E., Analysis of a Local A Posteriori Error Estimate for Elliptic Equations, in BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., OLIVEIRA E. R. A., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, Chichester, 119-128, 1986.

BANK R. E., SMITH R. K., A Posteriori Error Estimates Based on Hierarchical Bases, *SIAM J. Numer. Anal.*, **30**, 921-935, 1993.

BAUMANN M., SCHWEIZERHOF K., An Adaptive FE Concept for the Analysis of Shell Structures with Mixed Elements, in HUGHES T. J. R., OÑATE E., ZIENKIEWICZ O. C., *Recent Developments in Finite Element Analysis*, 191-204, 1994.

BECKERS P., ZHONG H. G., Influence of Element Distortions on the Reliability of Some A-Posteriori Error Estimators, in LADEVÈZE P., ZIENKIEWICZ O. C., *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Elsevier, 177-187, 1992.

BECKERS P., ZHONG H. G., Mesh Adaptation for Two Dimensional Stress Analysis, in PAPADRAKAKIS M., TOPPING B. H. V., *Advances in Post and Preprocessing for Finite Element Technology*, Civil-Comp, Edinburgh, 47-59, 1994.

BLACKER T., BELYTSCHKO T., Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium and Conjoint Interpolant Enhancements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, 517-536, 1994.

BORNEMANN F., ERDMANN B., KORNHUBER R., Adaptive Multilevel Methods in Three Space Dimensions, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 3187-3203, 1993.

BRAESS D., KLAAS O., NIEKAMP R., STEIN E., WOBSCHAL F., Error Indicators for Mixed Finite Elements in 2-Dimensional Linear Elasticity, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **127**, 345-356, 1995.

- BRANDT A., Multi-level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems, *Math. Comp.*, **31**(138), 333-390, 1977.
- BRINK U., KLAAS O., NIEKAMP R., STEIN E., Coupling of Adaptively Refined Dual Mixed Finite Elements and Boundary Elements in Linear Elasticity, *Adv. Eng. Software*, **24**, 13-26, 1995.
- CAREY G. F., A Mesh Refinement Scheme for Finite Element Computations, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **7**, 93-105, 1976.
- CAREY G. F., HUMPHREY D. L., Mesh Refinement and Iterative Solution Methods for Finite Element Computations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **17**(11), 1717-1734, 1981.
- CARROL W. E., BARKER R. M., A Theorem for Optimum Finite Element Idealizations, *Int. J. Solids and Struct.*, **9**, 883-895, 1973.
- COOREVITS P., LADEVÈZE P., PELLE J. P., An Automatic Procedure With a Control of Accuracy for Finite Element Analysis, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **121**, 91-120, 1995.
- DEBONGNIE J. F., A General Theory of Dual Error Bounds by Finite Elements, *Relatório LMF/D5*, Universidade de Liège, 1983.
- DEBONGNIE J. F., ZHONG H. G., BECKERS P., Dual Analysis with General Boundary Conditions, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **122**, 183-192, 1995.
- DEMKOWICZ L., DEVLOO P., ODEN J. T., On an h-Type Mesh Refinement Strategy Based on Minimization of Interpolation Errors, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **53**, 67-89, 1985.
- DIAZ A. R., KIKUCHI N., TAYLOR J. E., A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **41**, 29-45, 1983.
- DORR M. R., The Approximation of Solutions of Elliptic Boundary Value Problems via the p-Version of the Finite Element Method, *SIAM J. Numer. Anal.*, **23**(1), 58-77, 1986.

DUNAVANT D. A., SZABO B. A., A Posteriori Error Indicators for the p-Version of the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**, 1851-1870, 1983.

DURAN R., MUSCHETTI M. A., RODRIGUEZ R., On the Asymptotic Exactness of Error Estimators for Linear Triangular Finite Elements, *Numer. Math.*, **59**, 107-127, 1991.

ERIKSSON K., JOHNSON C., An Adaptive Finite Element Method for Linear Elliptic Problems, *Math. Comp.*, **50**, 361-383, 1988.

GAGO J. P. S. R., *A Posteriori Error Analysis and Adaptivity for the Finite Element Method*, Tese de Doutorado, University of Wales, Swansea, 1982.

GAGO J. P. S. R., KELLY D. W., ZIENKIEWICZ O. C., A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II - Adaptive Mesh Refinement, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**, 1621-1656, 1983.

GEORGES M. K., SHEPHARD M. S., Automated Adaptive Two-Dimensional System for the hp-Version of the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **32**, 867-893, 1991.

GUO B., BABUSKA I., The h-p Version of the Finite Element Method: Part 1 - The Basic Approximation Results; Part 2 - General Results and Applications, *Comput. Mech.*, **1**, 21-41 e 203-220, 1986.

HERMANN L. R., Interpretation of Finite Element Procedures as Stress Error Minimization Procedure, *Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, **98**(EM5), 1330-1336, 1972.

HINTON E., CAMPBELL J. S., Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **8**, 461-480, 1974.

HUGGER J., Recovery and Few Parameter Representation of the Optimal Mesh Density Functions for Near Optimal Finite Element Meshes, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **109**, 41-71, 1993.

JARAUCH H., On an Adaptive Grid Refining Technique for Finite Element Approximations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**, 1105-1120, 1986.

JIROUSEK J., LEON N., A Powerful Finite Element for Plate Bending, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **12**, 77-96, 1977.

JIROUSEK J., Basis for Development of Large Finite Elements Locally Satisfying All Field Equations, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **14**, 65-92, 1978.

JIROUSEK J., TEODORESCU P., Large Finite Elements Method for the Solution of Problems in the Theory of Elasticity, *Comput. Struct.*, **15**(5), 575-587, 1982.

JIROUSEK J., Hybrid-Trefftz Plate Bending Elements with p-Method Capabilities, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **24**, 1367-1393, 1987.

JIROUSEK J., VENKATESH A., A Simple Stress Error Estimator for Hybrid-Trefftz p-Version Elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28**, 211-236, 1989.

JIROUSEK J., VENKATESH A., Adaptivity in Hybrid-Trefftz Finite Element Formulations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **29**, 391-405, 1990.

JIROUSEK J., ZIELINSKI A. P., Dual Hybrid-Trefftz Element Formulation based on Independent Boundary Traction Frame, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 2955-2980, 1993.

JOHNSON C., MERCIER B., Some Equilibrium Finite Element Methods for Two-Dimensional Elasticity Problems, *Numer. Math.*, **30**, 103-116, 1978.

JOHNSON C., HANSBO P., Adaptive Finite Element Methods in Computational Mechanics, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **101**, 143-181, 1992.

KELLY D. W., GAGO J. P. S. R., ZIENKIEWICZ O. C., A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**, 1593-1619, 1983.

KELLY D. W., The Self-Equilibration of Residuals and Complementary A Posteriori Error Estimates in the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 1491-1506, 1984.

KELLY D. W., ISLES J. D., Procedures for Residual Equilibration and Local Error Estimation in the Finite Element Method, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **5**, 497-505, 1989.

KELLY D. W., ISLES J. D., A Procedure for A Posteriori Error Analysis for the Finite Element Method which Contains a Bounding Measure, *Comput. Struct.*, **31**,(1), 63-71, 1989.

KERNIGHAN B. W., RITCHIE D. M., *The C programming language*, Prentice-Hall, New Jersey, 1978.

KIKUCHI N., Adaptive Grid Design for Finite Element Analysis in Optimization: Part I - Review of Finite Element Error Analysis; Part II - Grid Optimization; Part III - Shape Optimization, in SOARES C. A. M., *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems*, NATO ASI Series, Vol. F27, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 493-562, 1987.

KLEIBER M., An Error Estimation Method in Finite Element Structural Analysis, *Comput. Struct.*, **11**, 343-347, 1980.

LADEVÈZE P., LEGUILLON D., Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**(3), 483-509, 1983.

LADEVÈZE P., COFFIGNAL G., PELLE J. P., Accuracy of Elastoplastic and Dynamic Analysis, in BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., OLIVEIRA E. R. A., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, Chichester, 181-203, 1986.

LADEVÈZE P., PELLE J. P., ROUGEOT P., Error Estimation and Mesh Optimization for Classical Finite Elements, *Eng. Comput.*, **8**, 69-80, 1991.

LADEVÈZE P., MAUNDER E. A. W., A General Method for Recovering Equilibrating Element Traction, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **137**, 111-151, 1996.

LEE C. K., LO S. H., An Automatic Adaptive Refinement Finite Element Procedure for 2D Elastostatic Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **35**, 1967-1989, 1992.

LEE N. S., BATHE K. J., Error Indicators and Adaptive Remeshing in Large Deformation Finite Element Analysis, *F. E. Anal. Des.*, **16**, 341-354, 1994.

LI L. Y., BETTESS P., BULL J. W., BOND T. J., APPLGARTH I., Theoretical Formulations for Adaptive Finite Element Computations, *Commun. Numer. Methods Eng.*, **11**, 857-868, 1995.

LI X. D., WIBERG N. E., A Posteriori Error Estimate by Element Patch Post-Processing, Adaptive Analysis in Energy and L_2 Norms, *Comput. Struct.*, **53**(4), 907-919, 1994.

LISZKA T., ORKISZ J., The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and its Application in Applied Mechanics, *Comput. Struct.*, **11**, 83-95, 1980.

LOVE A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, 1927.

MACKERLE J., Error Analysis, Adaptive Techniques and Finite and Boundary Elements - A Bibliography (1992-1993), *F. E. Anal. Des.*, **17**, 231-246, 1994.

MASHAIE A., HUGHES E., GOLDAK J., Error Estimates for Finite Element Solutions of Elliptic Boundary Value Problems, *Comput. Struct.*, **49**(1), 187-198, 1993.

MAUNDER E. A. W., On Assessing the Accuracy of Equilibrium Finite Element Models, in BATHE K. J., OWEN D. R. J., *Reliability of Methods for Engineering Analysis*, 29-46, 1986.

MAUNDER E. A. W., HILL W. G., Complementary use of Displacement and Equilibrium Models in Analysis and Design, in ROBINSON J., *FEM in the Design Process*, 493-501, 1990.

MAUNDER E. A. W., ALMEIDA J. P. M., On Spurious Kinematic Modes and the Hyperstatic Nature of Equilibrium Macro-Elements, *4th ACME UK*, 1996.

MAUNDER E. A. W., ALMEIDA J. P. M., Hybrid-Equilibrium Elements with Control of Spurious Kinematic Modes, *1st International Workshop on Trefftz Method*, Cracow, 1996.

MAUNDER E. A. W., ALMEIDA J. P. M., RAMSAY A. C. A., A General Formulation of Equilibrium Macro-Elements with Control of Spurious Kinematic Modes, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**, 3175-3194, 1996.

MAXWELL J. C., On Reciprocal Diagrams in Space, and Their Relation to Airy's Function of Stress, *Proc. London Math. Soc.*, **1**, 58-60, 1868.

MAY A. J., *Error Bounding in Meshes of Triangular Equilibrium Super-Elements*, Dissertação de Mestrado, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1996.

MCDILL J. M., GOLDAK J. A., ODDY A. S., BIBBY M. J., Isoparametric Quadrilaterals and Hexahedrons for Mesh-Grading Algorithms, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **3**, 155-163, 1987.

MC NEICE G. M., MARCAL P. V., Optimization of Finite Element Grids Based on Minimum Potential Energy, *Trans ASME, J. of Engng. for Industry*, **95**(1), 186-190, 1973.

MELOSH R. J., MARCAL P. V., An Energy Basis for Mesh Refinement of Structural Continua, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **11**, 1083-1091, 1977.

MITCHELL W. F., A Comparison of Adaptive Refinement Techniques for Elliptic Problems, *ACM Trans. on Math. Software*, **15**, 326-347, 1989.

MORERA G., Soluzione Generale Delle Equazione Indefinite Dell'Equilibrio di un Corpo Continuo, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (Ser 5) **1**, 1892.

NAMBIAR R. V., LAWRENCE K. L., The Zienkiewicz-Zhu Error Estimator for Multiple Material Problems, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **8**, 273-277, 1992.

NICOLAIDES R. A., On the L_2 Convergence of an Algorithm for Solving Finite Element Equations, *Math. Comp.*, **31**, 892-906, 1977.

NIU Q., SHEPHARD M. S., Superconvergent Extraction Techniques for Finite Element Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 811-836, 1993.

NIU Q., SHEPHARD M. S., Superconvergent Boundary Stress Extraction and Some Experiences with Adaptive Pointwise Error Control, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, 877-891, 1994.

NOOR A. K., BABUSKA I., Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions, *F. E. Anal. Des.*, **3**, 1-26, 1987.

ODEN J. T., BRAUCHLI H. T., On the Calculation of Consistent Stress Distributions in Finite Element Calculations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **3**, 317-325, 1971.

ODEN J. T., DEMKOWICZ L., RACHOWICZ W., WESTERMANN T. A., Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A Posteriori Error Estimation, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **77**, 113-180, 1989.

ODEN J. T., PATRA A., A Parallel Adaptive Strategy for hp-Finite Element Computations, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **121**, 449-470, 1995.

OHTSUBO H., KITAMURA M., Element by Element A Posteriori Error Estimation and Improvement of Stress Solutions for Two-Dimensional Elastic Problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **29**, 233-244, 1990.

OHTSUBO H., KITAMURA M., Element by Element A Posteriori Error Estimation of the Finite Element Analysis for Three-Dimensional Elastic Problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **33**, 1755-1769, 1992.

OLIVEIRA E. R. A., Optimization of Finite Element Solutions, *Proc. 3rd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Flight Dynamics Laboratory, 1974.

OÑATE E., BUGEDA G., A Study of Mesh Optimality Criteria in Adaptive Finite Element Analysis, *Eng. Comput.*, **10**, 307-321, 1993.

PAPADRAKAKIS M., BABILIS G., BRAOUZI G. P., Efficiency of Refinement Procedures for the p-Version of the Adaptive Finite Element Method, in PAPADRAKAKIS M., TOPPING B. H. V., *Advances in Post and Preprocessing for Finite Element Technology*, Civil-Comp, Edinburgh, 111-124, 1994.

PEANO A., RICCIONI R., Automated Discretization Error Control in Finite Element Analysis, in ROBINSON J., *Finite Element Methods in the Commercial Environment*, 367-388, 1978.

PEANO A., RICCIONI R., PASINI A., SARDELLA L., Adaptive Approximation in Finite Element Structural Analysis, *Comput. Struct.*, **10**, 333-342, 1979.

PERAIRE J., VAHDATI M., MORGAN K., ZIENKIEWICZ O. C., Adaptive Remeshing for Compressive Flow Computations, *J. Comp. Phys.*, **72**, 449-466, 1987.

PERAIRE J., PEIRO P., FORMAGGIA L., MORGAN K., ZIENKIEWICZ O. C., Finite Element Euler Computations in Three Dimensions, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **26**, 2135-2159, 1988.

PEREIRA O. J. B. A., *Um Modelo de Elementos Finitos de Equilíbrio para Elasticidade Tridimensional*, Dissertação de Mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, 1993.

PEREIRA O. J. B. A., ALMEIDA J. P. M., Utilização de Elementos Finitos de Equilíbrio em Elasticidade Tridimensional, *4º Encontro Nacional de Mecânica Computacional*, Lisboa, 1995.

PEREIRA O. J. B. A., ALMEIDA J. P. M., Equilibrium Finite Elements and Dual Analysis in Three-Dimensional Elastostatics, in OLIVEIRA E. R. A., BENTO J., *Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering Using Small Computers*, Techno-Press, Coreia, 955-960, 1995.

PIAN T. H. H., TONG P., Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **1**, 3-28, 1969.

PISSANETZKY S., *Sparse Matrix Technology*, Academic Press, Londres, 1984.

PITERI M. A., ALMEIDA J. P. M., Hierarchical 2D Mesh Generation Using a Topological Data Structure, in OLIVEIRA E. R. A., BENTO J., *Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering Using Small Computers*, Techno-Press, Coreia, 981-986, 1995.

PITERI M. A., *Geração de Malhas Hierárquicas em Domínios Bidimensionais e Tridimensionais*, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, em preparação, 1997.

PLANK L., Netzadaptation und Mehrgitterverfahren für die Numerische Behandlung von Faltwerken, *Dissertação*, Universidade de Hannover, 1990.

PRAGER W., SYNGE J. L., Approximations in Elasticity Based on the Concept of Function Space, *Quart. Appl. Math.*, **5**(3), 241-269, 1947.

PRESSBURGER Y., PERUCCHIO R., A Self-Adaptive FE System Based on Recursive Spatial Decomposition and Multigrid Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **38**, 1399-1421, 1995.

RACHOWICZ W., ODEN J. T., DEMKOWICZ L., Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 3. Design of h-p Meshes, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **77**, 181-212, 1989.

RAMSAY A. C. A., SBRESNY H., Some Studies of an Error Estimator Based on a Patch Recovery Scheme: Part I - The Patch Recovery Scheme; Part II - An Error Estimator Based on the Patch Recovery Scheme, *Finite Element News*, 2/4, 1994.

REBELO J. S., *Modelos de Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes*, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, 1993.

RHEINBOLT W. C., MESZTENYI C. K., On a Data Structure for Adaptive Finite Element Mesh Refinements, *ACM Trans. on Math. Software*, **6**(2), 166-187, 1980.

RHEINBOLT W. C., Feedback Systems and Adaptivity for Numerical Computations, in BABUSKA I., CHANDRA J., FLAHERTY J. E., *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 33-56, 1983.

RICHARDSON L. F., The Approximate Arithmetical Solution by finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam, *Trans. Roy. Soc.*, **A210**, 307-57, London, 1910.

RIVARA M. C., Algorithms for Refining Triangular Grids Suitable for Adaptive and Multigrid Techniques, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 745-756, 1984.

- RIVARA M. C., LEVIN C., A 3-D Refinement Algorithm Suitable for Adaptive and Multigrid Techniques, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **8**, 291-290, 1992.
- ROBERTI P., MELKANOFF M. A., Self-Adaptive Stress Analysis Based on Stress Convergence, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24**, 1973-1992, 1987.
- ROBINSON J., Basis for Isoparametric Stress Elements, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **2**, 43-63, 1973.
- RODRIGUES J., AZEVEDO A. V., Implementação dum Técnica Adaptativa de Recolocação dos Nós para Análise de Problemas de Elasticidade Plana, *4º Encontro Nacional de Mecânica Computacional*, Lisboa, 157-166, 1995.
- RYBICKI E. F., Approximate Three-Dimensional Solutions for Symmetric Laminates Under Inplane Loading, *J. Composite Materials*, **5**, 354-360, 1971.
- SANDER G., Application of the Dual Analysis Principle, in VEUBEKE F. J. de, *High Speed Computing of Elastic Structures*, Universidade de Liège, 1971.
- SEWELL G., An Adaptive Computer Program for the Solution of $\text{Div}(P(X,Y) \text{ Grad } U) = F(X,Y,U)$ on a Polygonal Region, in WHITEMAN J. R., *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*, MAFELAP 1975, Academic Press, 1976.
- SHEPHARD M. S., GALLAGHER R. H., ABEL J. F., The Synthesis of Near-Optimum Finite Element Meshes with Interactive Computer Graphics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **15**, 1021-1039, 1980.
- SHEPHARD M. S., YERRY M. A., BAEHMANN P. L., Automatic Mesh Generation Allowing for Efficient A Priori and A Posteriori Mesh Refinement, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **55**, 161-180, 1986.
- SPECHT B., A General Construction of Local Error Estimators for Conforming Finite Elements, *Comput. Struct.*, **19**(5/6), 815-822, 1984.
- SPIPKER R. L., MASKERI S. M., KANIA E., Plane Isoparametric Hybrid-Stress Elements: Invariance and Optimal Sampling, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **17**, 1469-1496, 1981.

STEIN E., RUST W., Mesh Adaptations for Linear 2D Finite Element Discretizations in Structural Mechanics, Especially in Thin Shell Analysis, *Journ. Comp. Appl. Math.*, **36**, 107-129, 1991.

STRANG G., FIX J. G., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, 1973.

STROUBOULIS T., HAQUE K. A., Recent Experiences with Error Estimation and Adaptivity: Part I - Review of Error Estimators for Scalar Elliptic Problems; Part II - Error Estimation for h-Adaptive Approximations on Grids of Triangles and Quadrilaterals, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **97**, 399-436 e **100**, 359-430, 1992.

SUHARA J., FUKUDA J., Automatic Mesh Generation for Finite Element Analysis, in *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, UAH Press, 607-624, 1972.

SZABÓ B. A., Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **55**, 181-197, 1986.

TURNER M. J., CLOUGH R. W., MARTIN H. C., TOPP L. J., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *Journal of Aeronautical Sciences*, **23**, 805-823, 1956.

UTKU S., MELOSH R. J., Solution Errors in Finite Element Analysis, *Comput. Struct.*, **18**(3), 379-393, 1984.

VERFÜRTH R., A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, *Journ. Comp. Appl. Math.*, **50**, 67-83, 1994.

VESLUD C. C. de, MAURICE G., An Autoadaptive Solver Associated with a Multigrid Input Data on a Macintosh Microcomputer, *Advances in Engineering Software*, **18**, 31-40, 1993.

VEUBEKE B. M. F. de, Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis, *AGARDograp*, **72**, 165-201, 1964.

VEUBEKE B. M. F. de, Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method, in ZIENKIEWICZ O. C., HOLLISTER G. S., *Stress Analysis*, Wiley, New York, 1965.

VEUBEKE B. M. F. de, ZIENKIEWICZ O. C., Strain Energy Bounds in Finite Element Analysis by Slab Analogy, *J. of Strain Analysis*, **2**(4), 1967.

VEUBEKE B. M. F. de, MILLARD A., Discretization of the Stress Field in the Finite Element Method, *J. Franklin Inst.*, **302**, 389-412, 1976.

VEUBEKE B. M. F. de, Diffusive Equilibrium Models, in GERADIN M., *B. M. Fraeijs de Veubeke Memorial Volume of Selected Papers*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 569-628, 1980.

WASHIZU K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1975.

WIBERG N. E., ABDULWAHAB F., Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 2703-2724, 1993.

WIBERG N. E., ABDULWAHAB F., ZIUKAS S., Enhanced Superconvergent Patch Recovery Incorporating Equilibrium and Boundary Conditions, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, 3417-3440, 1994.

WIBERG N. E., LI X. D., Superconvergent Patch Recovery of Finite Element Solution and a Posteriori L_2 Norm Error Estimate, *Commun. Numer. Methods Eng.*, **10**, 313-320, 1994.

WILLIAMS M. L., Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, *J. Appl. Mech.*, **19**, 526-528, 1952.

YERRY M. A., SHEPHARD M. S., A Modified-Quadtree Approach to Finite Element Mesh Generation, *IEEE Computer Graphics and Applications*, **3**(1), 39-46, 1983.

YERRY M. A., SHEPHARD M. S., Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Modified-Octree Technique, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 1965-1990, 1984.

YOKOYAMA M., Automated Computer Simulation of Two-Dimensional Elastostatic Problems by the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **21**, 2273-2287, 1985.

YU D.-H., A-Posteriori Local Error Estimates for Some Finite and Boundary Element Methods, *Adv. Eng. Software*, **15**, 175-179, 1992.

ZAVE P., RHEINBOLT W.C., Design of an Adaptive Parallel Finite Element System, *ACM Trans. on Math. Software*, **5**(1), 1-17, 1979.

ZENG L. F., WIBERG N.-E., Adaptive h-p Procedures for High Accuracy Finite Element Analysis of Two-Dimensional Linear Elastic Problems, *Comput. Struct.*, **42**(6), 869-886, 1992.

ZHONG H. G., BECKERS P., Equilibrium Default Error Estimators for the Finite Element Solution, *Relatório SA-139*, LTAS, Universidade de Liège, Janeiro de 1990.

ZHONG H. G., BECKERS P., Solution Approximation Error Estimators for the Finite Element Solution, *Relatório SA-140*, LTAS, Universidade de Liège, Janeiro de 1990.

ZHONG H. G., *Estimateurs d'Erreur A Posteriori et Adaptation de Maillages dans la Méthode des Éléments Finis*, Tese de Doutorado, Universidade de Liège, 1991.

ZHU J. Z., ZIENKIEWICZ O. C., Adaptive Techniques in the Finite Element Method, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **4**, 197-204, 1988.

ZHU J. Z., ZIENKIEWICZ O. C., HINTON E., WU J., A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **32**, 849-868, 1991.

ZIENKIEWICZ O. C., IRONS B. M., SCOTT F. C., CAMPBELL J. S., Three Dimensional Stress Analysis, *Proc. Int. Union of Theoretical and Appl. Mech.*, Liège, Bélgica, 1971.

ZIENKIEWICZ O. C., CRAIG A. W., Adaptive Mesh Refinement and A Posteriori Error Estimation for the p-Version of the Finite Element Method, in BABUSKA I.,

CHANDRA J., FLAHERTY J. E., *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 33-56, 1983.

ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., KELLY D. W., The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis, *Comput. Struct.*, **16**, 53-65, 1983.

ZIENKIEWICZ O. C., CRAIG A. W., Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution and Hierarchic Finite Element Method Concepts, in BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., OLIVEIRA E. R. A., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, Chichester, 25-59, 1986.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24**, 337-357, 1987.

ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., *The Finite Element Method*, Vol. 1, 4^a Edição, McGraw-Hill, London, 1988.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., GONG N. G., Effective and Practical h-p Version Adaptive Analysis Procedures for Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28**, 879-891, 1989.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., The Three R's of Engineering Analysis and Error Estimation and Adaptivity, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **82**, 95-113, 1990.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **101**, 207-224, 1992.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates: Part 1 - The Recovery Technique; Part 2 - Error Estimates and Adaptivity, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **33**, 1331-1382, 1992.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., Automatic Adaptive Analysis. The New Look of Finite Elements, in LADEVÈZE P., ZIENKIEWICZ O. C., *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Elsevier, 161-176, 1992.

Anexo - Refinamento adaptativo de elementos finitos de outros tipos

A utilização e a investigação nos domínios da estimação de erro e do refinamento adaptativo têm sido orientadas quase exclusivamente para os elementos finitos compatíveis. Existe também algum trabalho publicado sobre refinamento adaptativo de elementos finitos híbridos de Trefftz. Recentemente, surgiram alguns artigos sobre indicadores de refinamento e refinamento adaptativo para determinadas formulações de elementos finitos mistos [BAUMANN e SCHWEIZERHOF, 1994] [BRAESS *et al*, 1995] [BRINK *et al*, 1995].

Em seguida, faz-se um breve resumo da formulação de elementos finitos híbridos de Trefftz e do seu refinamento adaptativo.

Neste tipo de elementos finitos, discretiza-se o campo de deslocamentos nos elementos, utilizando funções de Trefftz, de modo a satisfazer, *a priori*, as equações de equilíbrio no interior dos elementos. Nos lados dos elementos, ou se discretizam os deslocamentos, obtendo os elementos híbridos de Trefftz de deslocamento (HT-D) [JIROUSEK e LEON, 1977], ou se discretiza a tensão, obtendo os elementos híbridos de Trefftz de tensão (HT-T) [JIROUSEK, 1978].

Nos elementos HT-D, os deslocamentos nos lados são discretizados de modo a satisfazerem, *a priori*, as condições de fronteira cinemáticas e a continuidade entre lados. A compatibilidade entre o campo de deslocamentos no interior dos elementos e os deslocamentos dos lados é imposta, de forma aproximada, elemento a elemento, através de resíduos pesados ou da minimização da energia potencial complementar do elemento. Deste modo, as variáveis do sistema algébrico global são apenas os deslocamentos dos nós dos lados. Este sistema é obtido impondo, de forma aproximada, o equilíbrio de tensão nos lados, através de resíduos pesados ou da minimização da energia potencial total [JIROUSEK, 1987].

Nos elementos HT-T, a tensão nos lados é discretizada de modo a satisfazer, *a priori*, as condições de fronteira estáticas e o equilíbrio de tensão nas ligações entre os lados. O equilíbrio entre o campo de tensões no interior dos elementos e a tensão nos lados é imposto, de forma aproximada, elemento a elemento, através de resíduos pesados ou da minimização da energia potencial do elemento. Deste modo, as variáveis do sistema algébrico global são apenas os pesos das funções de interpolação da tensão nos lados. Este sistema é obtido impondo, de forma aproximada, a compatibilidade nos lados, através de resíduos pesados ou da minimização da energia potencial complementar [JIROUSEK e ZIELINSKI, 1993].

Em nenhum dos tipos de elementos se impõe localmente o equilíbrio ou a compatibilidade entre dois elementos adjacentes. Consequentemente, as soluções obtidas não são, regra geral, compatíveis nem equilibradas.

O número de funções de Trefftz em cada elemento é escolhido de modo a que não existam modos espúrios a nível do elemento [JIROUSEK e LEON, 1977] [JIROUSEK, 1978].

JIROUSEK e TEODORESCU [1982] utilizaram, na discretização do campo de deslocamentos no interior dos elementos, além das funções de Trefftz polinomiais, funções que representam soluções na vizinhança de diversos tipos de singularidades. Isto permite tornar a malha independente das condições de fronteira e do carregamento.

Tendo em conta o referido no parágrafo anterior, a forma de refinamento mais adequada para este tipo de elementos é o refinamento p uniforme, sendo o grau de refinamento necessário para atingir uma dada precisão praticamente independente do carregamento [JIROUSEK, 1987].

Neste tipo de elementos, o erro é sempre máximo nos vértices e as funções de aproximação singulares fornecem valores infinitos para as componentes do tensor das tensões nos pontos singulares [JIROUSEK e VENKATESH, 1989]. Consequentemente, o controle do erro pode ser efectuado através do valor médio da densidade de energia de deformação do erro nos vértices não singulares [JIROUSEK e VENKATESH, 1990]. O erro num vértice é estimado comparando os valores das componentes do tensor das tensões nesse vértice com uma aproximação melhorada destes valores, construída com base na solução de elementos finitos [JIROUSEK e VENKATESH, 1989]. Numa situação em que existam múltiplos carregamentos, o nível de refinamento p uniforme necessário para obter, para todos eles, uma precisão não inferior à pretendida é calculado a partir daquele que tiver um erro mais elevado [JIROUSEK e VENKATESH, 1990].