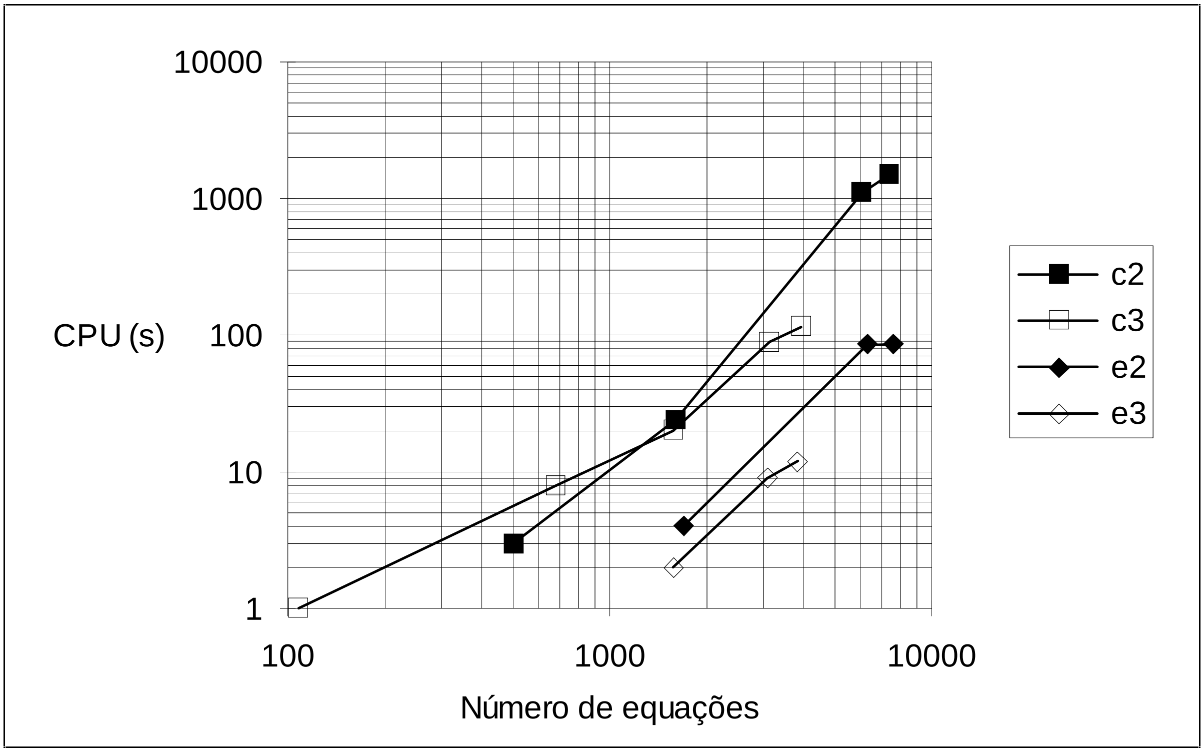

Figura 13.26 - Tempo de CPU gasto na resolução do sistema de equações.

Na figura 13.26, observa-se que o programa de resolução utilizado para os sistemas correspondentes a elementos finitos de equilíbrio é mais eficiente do que o utilizado para os sistemas correspondentes a elementos finitos compatíveis. Infelizmente, o primeiro programa não pode ser utilizado para resolver estes últimos sistemas.

Como se pode observar nas tabelas 13.7 e 13.9, o erro obtido com a penúltima malha é quase igual ao pretendido. Por isso, o número de elementos da última malha é semelhante ao da penúltima. Consequentemente, o tempo gasto com a última malha é semelhante ao gasto com a penúltima, como se pode verificar nas tabelas 13.8 e 13.10. Numa aplicação prática, não se iria analisar uma malha com um número de elementos tão próximo do da malha anterior. Para o evitar, escolher-se-ia uma de duas alternativas: aceitar um erro um pouco superior ao pretendido ou, então, gerar a malha apontando para um erro um pouco menor do que o realmente pretendido. Este último erro poderia ser obtido admitindo que o quociente entre o erro pretendido e o efectivamente obtido seria igual ao correspondente à malha anterior. No entanto, nesta tese, leva-se sempre o refinamento até atingir a tolerância indicada e sem apontar para um valor mais baixo.

Para a penúltima malha, o tempo despendido nunca é inferior à soma dos tempos despendidos com as malhas anteriores, como se pode verificar nas tabelas 13.8 e 13.10.

Independentemente da eficiência dos programas, o tempo de resolução do sistema algébrico aumenta mais rapidamente do que o tempo de formação, o qual é proporcional ao número de graus de liberdade. Portanto, a partir de um dado número de graus de liberdade, dependente da eficiência dos programas, o tempo de resolução do sistema algébrico torna-se o factor determinante. Como se pode observar na figura 13.26, o tempo de resolução depende mais do número de equações e, portanto, do número de graus de liberdade, do que do grau dos elementos. Por estas razões, a comparação entre o desempenho de várias alternativas de refinamento é geralmente feita a partir do número de graus de liberdade.

Comparando os resultados das tabelas 13.8 e 13.10, observa-se que, para os elementos de grau três, apesar de a formação do sistema algébrico ser mais demorada, o tempo total é inferior. Neste exemplo, a utilização de elementos de grau três permite obter a mesma precisão com um número de graus de liberdade mais baixo, o que constitui o factor determinante.

13.7. Comparação entre alternativas de refinamento

13.7.1. Introdução

Para o problema descrito em 13.4, analisou-se a utilização da estratégia de refinamento de malhas duais de elementos finitos, aplicada a malhas de elementos de grau três. Para o problema descrito em 13.5, analisou-se a utilização da estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio, aplicada a malhas de elementos de grau dois.

Qualquer um destes problemas foi aproveitado para ser também analisado utilizando elementos de outros graus e outra estratégia de refinamento. Os resultados dessa análises são aqui resumidos, de forma a comparar as diversas alternativas de refinamento. Em 13.7.2, comparam-se os resultados obtidos utilizando diferentes graus dos elementos finitos. Em 13.7.3, comparam-se os resultados obtidos utilizando a estratégia de refinamento de malhas duais e utilizando a estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio.

13.7.2. Comparação entre o refinamento h-adaptativo de malhas de diferentes graus

Na figura 13.27, apresenta-se um gráfico da variação do majorante do erro relativo com o número de graus de liberdade, para o problema descrito em 13.4. Foram utilizadas malhas duais de elementos finitos e a correspondente estratégia de refinamento, descrita em 12.3. A malha inicial foi sempre a utilizada em 13.4, qualquer que fosse o grau dos elementos. A redução do valor do majorante do erro pretendida aumentava com o grau.

Para facilitar a comparação com as figuras de 13.7.3, associa-se o majorante do erro relativo ao número de graus de liberdade da malha de elementos de equilíbrio. Para o valor do número total de graus de liberdade duma malha de elementos finitos de equilíbrio, toma-se o número total de parâmetros de deslocamento dessa malha, pois, conforme referido em 3.3.2.3, é possível obter um sistema algébrico global condensado nos pesos das funções de aproximação de deslocamento.

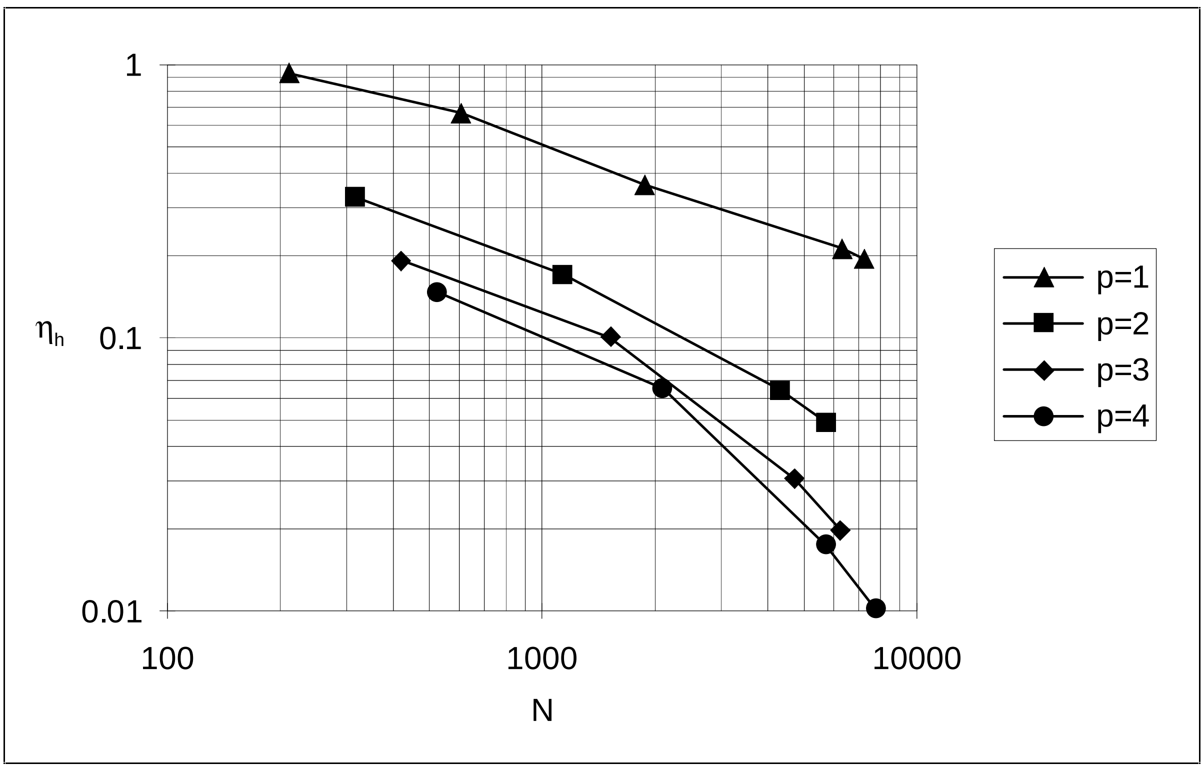

Figura 13.27 - Variação do majorante do erro relativo com o número total de graus de liberdade, para o problema de 13.4.

Na figura 13.28, apresenta-se um gráfico da variação do majorante do erro relativo com o número de graus de liberdade, para o problema descrito em 13.5, utilizando agora malhas duais de elementos finitos e a correspondente estratégia de refinamento, descrita em 12.3. A malha inicial foi sempre a utilizada em 13.5, qualquer que fosse o grau dos elementos. A redução pretendida para o valor do majorante do erro aumentava com o grau.

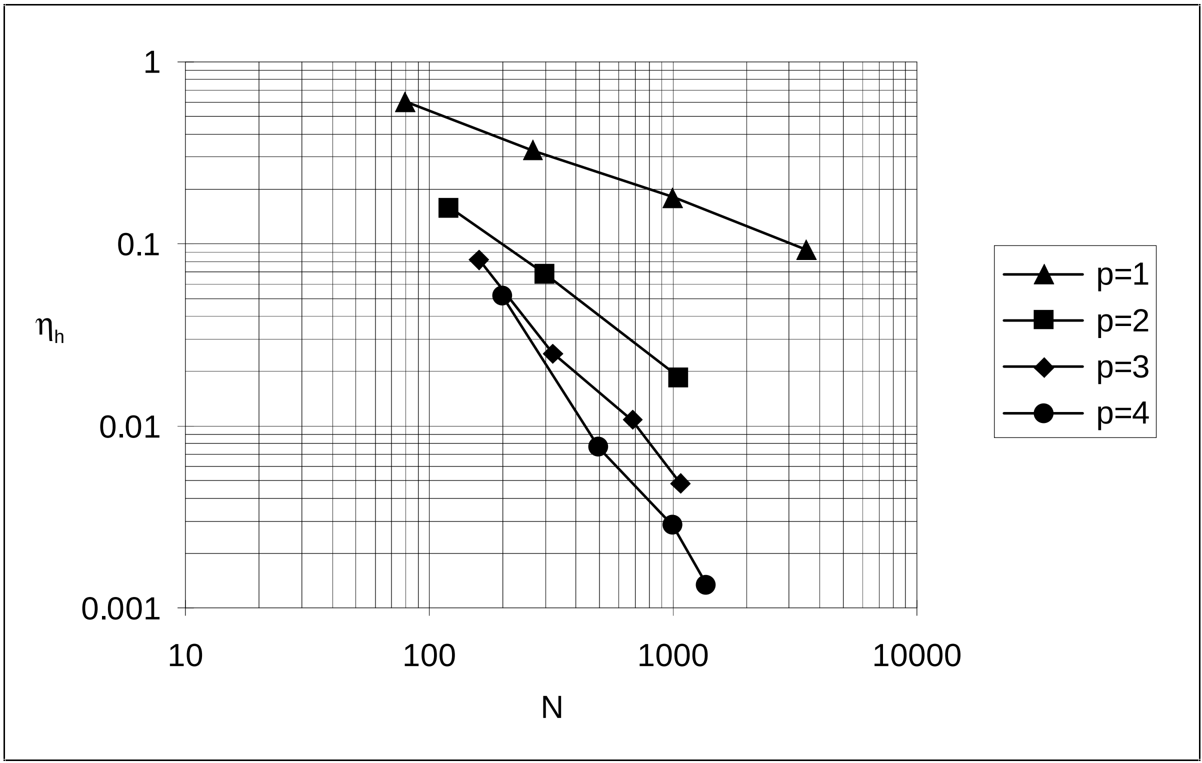

Figura 13.28 - Variação do majorante do erro relativo com o número total de graus de liberdade, para o problema de 13.5.

Quer na figura 13.27, quer na 13.28, observa-se que, na malha inicial, a taxa de convergência para o refinamento p diminui com o aumento do grau. Esta degradação da taxa de convergência do refinamento p é tanto mais pronunciada quanto mais fortes forem as singularidades e mais dominante for o seu efeito. Quando o refinamento p da malha inicial atinge o grau quatro, a taxa de convergência já é semelhante à taxa de convergência do refinamento h-adaptativo de malhas de elementos desse grau. Este tipo de comportamento leva a que, para uma dada precisão pretendida, não exista vantagem em utilizar elementos de grau superior a um dado valor, como se viu em 6.2.3. Nos problemas analisados, para precisões que não sejam muito superiores às obtidas nas malhas finais de elementos de grau quatro, não existe vantagem em utilizar elementos de grau superior a quatro. Claro que, se se pretender um erro muito inferior, a maior taxa de convergência assimptótica, para o refinamento h-adaptativo, de malhas de elementos de grau mais elevado compensa o ponto de partida mais desfavorável.

13.7.3. Comparação entre estratégias de refinamento

Na figura 13.29, apresenta-se, para o problema descrito em 13.4, um gráfico da variação, com o número de graus de liberdade, do erro relativo de malhas de elementos finitos de equilíbrio, obtidas a partir do indicador de erro dual, e de malhas obtidas a partir do indicador de erro para elementos finitos de equilíbrio. Para as malhas obtidas a partir do primeiro indicador, a malha inicial foi a utilizada em 13.4; a redução pretendida para o majorante do erro aumentava com o grau dos elementos. Para as malhas obtidas a partir do segundo indicador, a malha inicial foi obtida dividindo em quatro todos os elementos da malha inicial utilizada em 13.4. Deste modo, nenhum elemento contém mais do que uma singularidade e nenhum vértice está adjacente a mais do que um vértice singular. A redução de erro pretendida aumentava com o grau dos elementos.

Na figura 13.30, apresenta-se, para o problema descrito em 13.5, um gráfico semelhante. A malha inicial foi sempre a utilizada nessa secção.

Observando as figuras 13.29 e13.30, verifica-se que as duas estratégias de refinamento parecem fornecer resultados semelhantes.

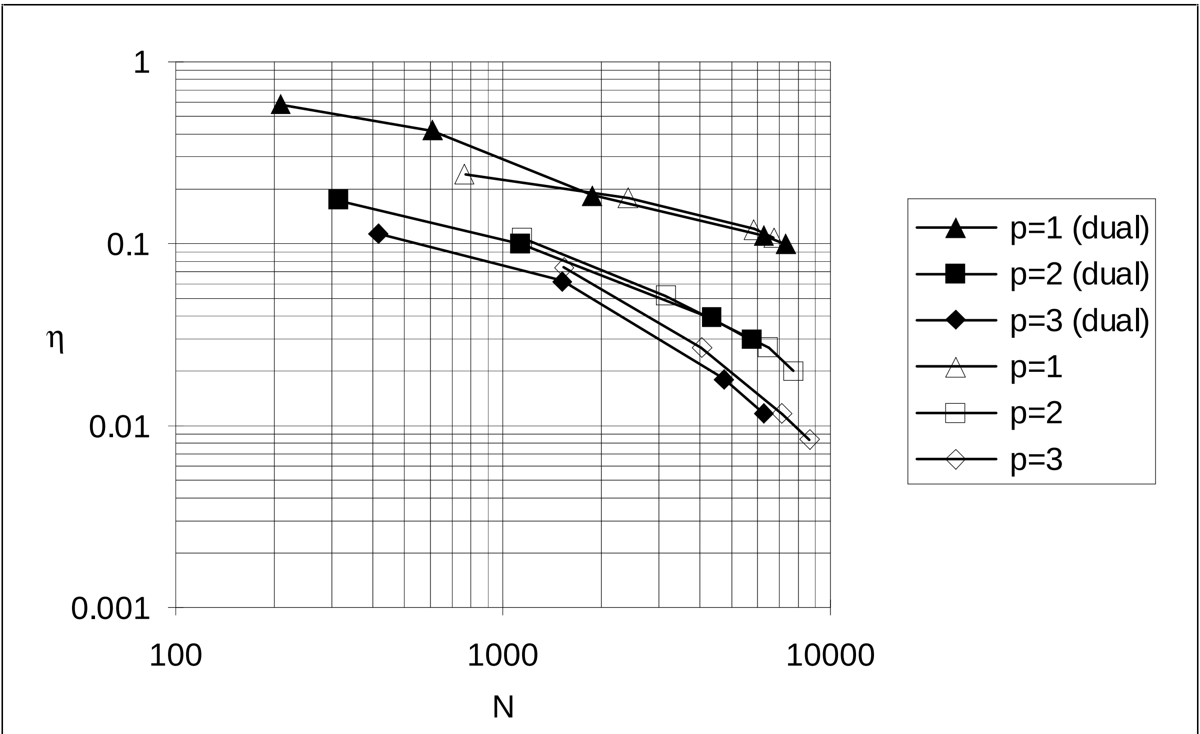

Figura 13.29 - Variação do erro relativo com o número total de graus de liberdade, para o problema de 13.4.

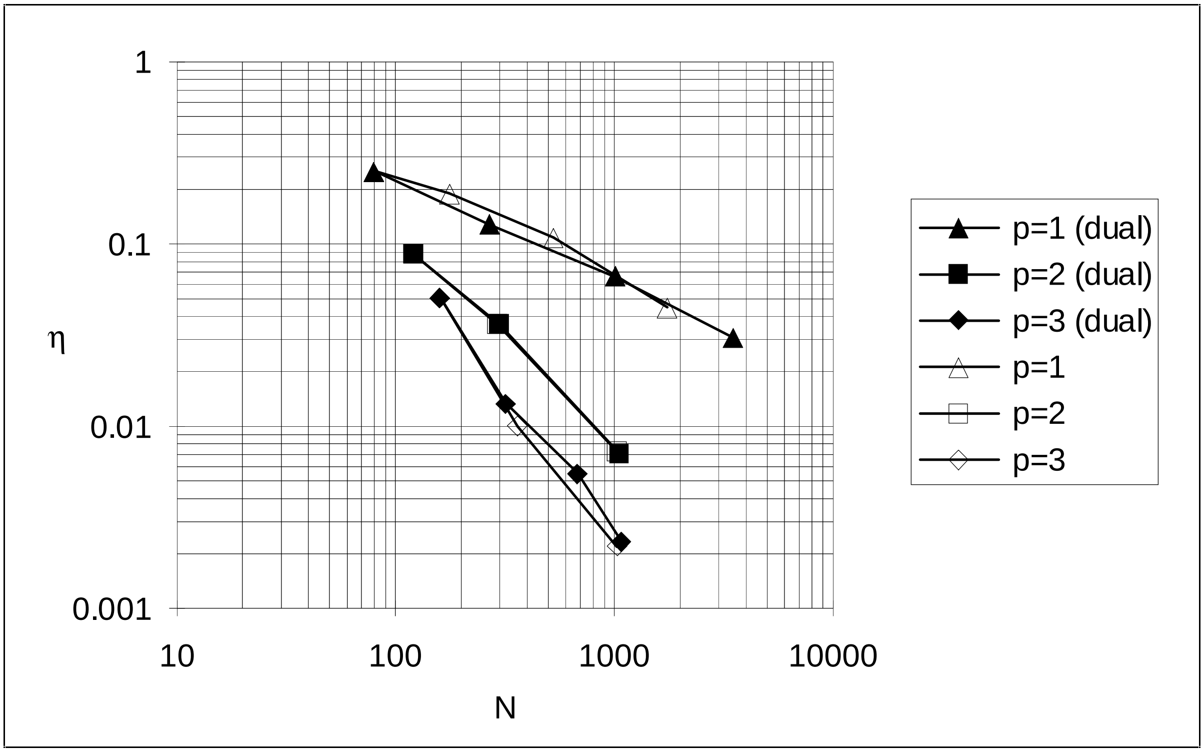

Figura 13.30 - Variação do erro relativo com o número total de graus de liberdade, para o problema de 13.5.

14. Conclusões e desenvolvimentos futuros

14.1. Conclusões

Esta tese constitui uma contribuição para o estudo do refinamento h-adaptativo de malhas duais e para o estudo da estimação de erro *a posteriori* e do refinamento h-adaptativo de malhas de elementos finitos de equilíbrio, em problemas estáticos de elasticidade linear. Qualquer destes domínios tem recebido, até agora, pouca atenção dos investigadores, o mesmo se passando com a estimação de erro e o refinamento adaptativo da maior parte dos elementos finitos não convencionais.

A análise dual de um modelo de elementos finitos de equilíbrio e de um modelo de elementos finitos compatíveis permite obter um majorante do erro e indicadores de erro elementares.

Com base nestes indicadores, implementou-se uma estratégia para o refinamento h-adaptativo de malhas duais de elementos triangulares de grau um a quatro. Esta estratégia permitiu atingir, nos problemas dominados por singularidades estudados nesta tese, a mesma taxa de convergência que se obteria em problemas sem singularidades.

Utilizando a análise dual, obtém-se um majorante do erro global, um campo de deslocamentos compatível e um campo de tensões equilibrado. Além disso, os indicadores de erro e o majorante são simples de calcular. Embora o custo total seja elevado, este método é simples de implementar, particularmente se não se utilizarem superelementos de equilíbrio. Parece ser adequado quando se utilizam elementos de grau elevado e se pretende partir de uma malha inicial grosseira. Por isso, a sua aplicação a problemas tridimensionais parece útil.

Nesta tese, propuseram-se várias alternativas para a obtenção de estimadores e indicadores de erro, com base apenas numa solução de elementos finitos de equilíbrio.

Uma destas alternativas é baseada na utilização explícita dos defeitos de compatibilidade da solução de elementos finitos. Em problemas bidimensionais, o cálculo destes defeitos e das suas normas é relativamente simples. A determinação dos coeficientes que são multiplicados por estas normas, para obter o indicador de erro elementar, foi realizada experimentalmente, para malhas de elementos triangulares de grau um a três, refinadas adaptativamente, aproveitando os resultados das malhas duais. Os exemplos testados parecem indicar que se obtêm bons indicadores de erro elementares e um bom estimador do erro global, para malhas refinadas adaptativamente.

Com base nestes últimos indicadores, implementou-se uma estratégia para o refinamento h-adaptativo de malhas de elementos finitos de equilíbrio triangulares de grau um a três. Esta estratégia permitiu atingir, nos problemas dominados por singularidades estudados nesta tese, a mesma taxa de convergência que se obteria em problemas sem singularidades. Esta estratégia obriga a gerar uma malha inicial mais fina do que a estratégia anterior, o que pode constituir um inconveniente quando se pretende utilizar elementos de grau elevado.

Planeava-se que o trabalho de preparação desta tese acompanhasse o de uma outra [PITERI, 1997], no âmbito da geração de malhas refinadas bidimensionais e tridimensionais. Infelizmente, a implementação do refinamento de malhas tridimensionais não ficou concluída em tempo útil. Por isso, não foi possível implementar a estratégia de refinamento adaptativo em problemas tridimensionais.

14.2. Desenvolvimentos futuros

A grande variedade de formulações de elementos finitos não convencionais e de modelos de comportamento existentes fornece diversas possibilidades de investigação nos domínios da estimação de erro e do refinamento adaptativo, abrindo um novo campo de desenvolvimento, no âmbito da mecânica computacional, que importa explorar.

Num âmbito mais imediato, a utilização de elementos finitos de equilíbrio em refinamento h-adaptativo para problemas estáticos de elasticidade linear, o desenvolvimento do trabalho aqui apresentado pode ser feito ao nível da formulação, ao nível da eficiência do cálculo automático e ao nível simplicidade de utilização.

Ao nível da formulação, os desenvolvimentos mais interessantes seriam: a aplicação dos métodos desenvolvidos a problemas tridimensionais; uma dedução rigorosa dos indicadores de erro para malhas de elementos de equilíbrio; a adaptação destes indicadores a malhas de superelementos de equilíbrio; o estudo dos indicadores de erro obtidos por construção de uma solução compatível a partir de uma solução de elementos finitos de equilíbrio.

Quanto à aplicação a problemas tridimensionais, o método mais adequado parece ser o baseado no refinamento de malhas duais de elementos finitos tetraédricos. Uma vez que esteja implementado um algoritmo para gerar a malha refinada, a aplicação deste método poderá ser feita de forma relativamente rápida.

Embora os indicadores de erro para malhas de elementos finitos de equilíbrio pareçam satisfatórios, do ponto de vista dos resultados práticos, não estão fundamentados do ponto de vista formal. Seria conveniente dispor de uma fundamentação rigorosa destes indicadores.

A utilização de malhas de superelementos permite eliminar os modos espúrios. Por esta razão, a aceitação prática de programas auto-adaptativos de elementos finitos de equilíbrio será mais fácil se estes utilizarem superelementos. Sendo assim, é necessário dispor de indicadores de erro para malhas de superelementos de equilíbrio refinadas adaptativamente.

Para malhas de superelementos, a obtenção de indicadores de erro por construção de uma solução compatível a partir da solução de elementos finitos de equilíbrio poderá ser uma alternativa menos dispendiosa do que a análise dual. Contudo, existe a possibilidade de o majorante do erro ser excessivamente elevado.

Ao nível da eficiência do cálculo automático, poderiam ser estudadas rotinas alternativas para a formação e resolução do sistema algébrico, de modo a escolher a combinação mais eficiente. A implementação efectuada permite uma grande generalidade na definição da geometria dos elementos e na escolha das funções de aproximação. Muita desta generalidade poderia ser sacrificada em favor de uma maior eficiência computacional.

Ao nível da simplicidade de utilização, seriam necessários alguns desenvolvimentos para se dispor de um programa auto-adaptativo de elementos finitos de equilíbrio em que a única intervenção do utilizador consistisse em descrever o problema e indicar o erro pretendido. Esta quase total automatização da análise seria o ideal para uma utilização corrente deste tipo de elementos.

Referências

AINSWORTH M., ZHU J. Z., CRAIG A. W., ZIENKIEWICZ O. C., Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28**, 2161-2174, 1989.

AINSWORTH M., ODEN J. T., A Procedure for a Posteriori Error Estimation for h-p Finite Element Methods, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **101**, 73-96, 1992.

AINSWORTH M., ODEN J. T., WU W., A Posteriori Error Estimation for hp-Approximations in Elastostatics, *Applied Numerical Mathematics*, **14**, 23-54, 1994.

AIRY G. B., On the Strains in the Interior of Beams, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **153**, 49- , 1863.

ALMEIDA J. P. M., *Modelos de Elementos Finitos Para a Análise Elastoplástica*, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, 1989.

ALMEIDA J. P. M., FREITAS J. A. T., An Alternative Approach to the Formulation of Hybrid Equilibrium Finite Elements, *Comp. Struct.*, **40**, 1043-1047, 1991.

ALMEIDA J. P. M., FREITAS J. A. T., Continuity Conditions for Finite Element Analysis of Solids, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **33**, 845-853, 1992.

ALMEIDA J. P. M., Janela: Uma Interface Gráfica Destinada a Aplicações de Mecânica Computacional, Instituto Superior Técnico, 1995.

ALMEIDA J. P. M., PEREIRA O. J. B. A., A Set of Hybrid Equilibrium Finite Element Models for the Analysis of Three-Dimensional Solids, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**, 2789-2802, 1996.

BABUSKA I., The Self-Adaptive Approach in the Finite Element Method, in WHITEMAN J. R., *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*, MAFELAP 1975, Academic Press, 125-142, 1976.

BABUSKA I., RHEINBOLT W. C., A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **12**, 1597-1615, 1978.

BABUSKA I., RHEINBOLT W. C., Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**(4), 736-754, 1978.

BABUSKA I., RHEINBOLT W. C., On the Reliability and Optimality of the Finite Element Method, *Comput. Struct.*, **10**, 87-94, 1979.

BABUSKA I., DORR M. R., Error Estimates for the Combined h and p Version of the Finite Element Method, *Numer. Math.*, **37**, 257-277, 1981.

BABUSKA I., SZABÒ B. A., KATZ I. N., The p-Version of the Finite Element Method, *SIAM J. Numer. Anal.*, **18**, 515-545, 1981.

BABUSKA I., MILLER A., VOGELIUS M., Adaptive Methods and Error Estimation for Elliptic Problems of Structural Mechanics, in BABUSKA I., CHANDRA J., FLAHERTY J. E., *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 57-73, 1983.

BABUSKA I., MILLER A., The Post-processing Approach in the Finite Element Method: Part 1 - Calculation of Displacements, Stresses and Other Higher Order Derivatives of the Displacements; Part 2 - The Calculation of the Stress Intensity Factors; Part 3 - A Posteriori Error Estimates and Adaptive Mesh Selection, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 1085-1129 e 2311-2324, 1984.

BABUSKA I., VOGELIUS M., Feedback and Adaptive Finite Element Solution of One-Dimensional Boundary Value Problems, *Numer. Math.*, **44**, 75-102, 1984.

BABUSKA I., Feedback, Adaptivity and A-Posteriori Estimates in Finite Elements: Aims, Theory and Experience, in BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., OLIVEIRA E. R. A., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, Chichester, 3-23, 1986.

BABUSKA I., MILLER A., A Feedback Finite Element Method with A Posteriori Error Estimations: Part 1 - The Finite Element Method and Some Basic Properties of the A Posteriori Error Estimator, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **61**, 1-40, 1987.

BABUSKA I., RANK E., An Expert-System-Like Feedback Approach in the hp-Version of the Finite Element Method, *F. E. Anal. Des.*, **3**, 127-147, 1987.

BABUSKA I., YU D., Assimptotically Exact A Posteriori Error Estimator for Biquadratic Elements, *F. E. Anal. Des.*, **3**, 341-354, 1987.

BABUSKA I., STROUBOULIS T., MATHUR A., UPADHYAY C. S., Pollution Error in the h-version of the Finite Element Method and the Local Quality of a Posteriori Error Estimators, *F. E. Anal. and Des.*, **17**, 273-321, 1994.

BABUSKA I., STROUBOULIS T., UPADHYAY C. S., A Model Study of the Quality of a Posteriori Error Estimators for Linear Elliptic Problems. Error Estimation in the interior of Patchwise Uniform Grids of Triangles, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **114**, 307-378, 1994.

BABUSKA I., STROUBOULIS T., UPADHYAY C. S., GANGARAJ S. K., A Model Study of Element Residual Estimators for Linear Elliptic Problems: The Quality of the Estimators in the Interior of Meshes of Triangles and Quadrilaterals, *Comput. Struct.*, **57**(6), 1009-1028, 1995.

BAEHMANN P. L., SHEPHARD M. S., FLAHERTY J. E., A Posteriori Error Estimation for Triangular and Tetrahedral Quadratic Elements Using Interior Residuals, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **34**, 979-996, 1992.

BANK R. E., SHERMAN A. H., An Adaptive Multi-Level Method for Elliptic Boundary Value Problems, *Computing*, **26**, 91-105, 1981.

BANK R. E., The Efficient Implementation of Local Mesh Refinement Algorithms, in BABUSKA I., CHANDRA J., FLAHERTY J. E., *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 74-81, 1983.

BANK R. E., WEISER A., Some A Posteriori Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations, *Math. Comp.*, **44**, 283-301, 1985.

BANK R. E., Analysis of a Local A Posteriori Error Estimate for Elliptic Equations, in BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., OLIVEIRA E. R. A., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, Chichester, 119-128, 1986.

BANK R. E., SMITH R. K., A Posteriori Error Estimates Based on Hierarchical Bases, *SIAM J. Numer. Anal.*, **30**, 921-935, 1993.

BAUMANN M., SCHWEIZERHOF K., An Adaptive FE Concept for the Analysis of Shell Structures with Mixed Elements, in HUGHES T. J. R., OÑATE E., ZIENKIEWICZ O. C., *Recent Developments in Finite Element Analysis*, 191-204, 1994.

BECKERS P., ZHONG H. G., Influence of Element Distortions on the Reliability of Some A-Posteriori Error Estimators, in LADEVÈZE P., ZIENKIEWICZ O. C., *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Elsevier, 177-187, 1992.

BECKERS P., ZHONG H. G., Mesh Adaptation for Two Dimensional Stress Analysis, in PAPADRAKAKIS M., TOPPING B. H. V., *Advances in Post and Preprocessing for Finite Element Technology*, Civil-Comp, Edinburgh, 47-59, 1994.

BLACKER T., BELYTSCHKO T., Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium and Conjoint Interpolant Enhancements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, 517-536, 1994.

BORNEMANN F., ERDMANN B., KORNHUBER R., Adaptive Multilevel Methods in Three Space Dimensions, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 3187-3203, 1993.

BRAESS D., KLAAS O., NIEKAMP R., STEIN E., WOBSCHAL F., Error Indicators for Mixed Finite Elements in 2-Dimensional Linear Elasticity, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **127**, 345-356, 1995.

BRANDT A., Multi-level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems, *Math. Comp.*, **31**(138), 333-390, 1977.

BRINK U., KLAAS O., NIEKAMP R., STEIN E., Coupling of Adaptively Refined Dual Mixed Finite Elements and Boundary Elements in Linear Elasticity, *Adv. Eng. Software*, **24**, 13-26, 1995.

CAREY G. F., A Mesh Refinement Scheme for Finite Element Computations, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **7**, 93-105, 1976.

CAREY G. F., HUMPHREY D. L., Mesh Refinement and Iterative Solution Methods for Finite Element Computations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **17**(11), 1717-1734, 1981.

CARROL W. E., BARKER R. M., A Theorem for Optimum Finite Element Idealizations, *Int. J. Solids and Struct.*, **9**, 883-895, 1973.

COOREVITS P., LADEVÈZE P., PELLE J. P., An Automatic Procedure With a Control of Accuracy for Finite Element Analysis, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **121**, 91-120, 1995.

DEBONGNIE J. F., A General Theory of Dual Error Bounds by Finite Elements, *Relatório* **LMF/D5**, Universidade de Liège, 1983.

DEBONGNIE J. F., ZHONG H. G., BECKERS P., Dual Analysis with General Boundary Conditions, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **122**, 183-192, 1995.

DEMKOWICZ L., DEVLOO P., ODEN J. T., On an h-Type Mesh Refinement Strategy Based on Minimization of Interpolation Errors, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **53**, 67-89, 1985.

DIAZ A. R., KIKUCHI N., TAYLOR J. E., A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **41**, 29-45, 1983.

DORR M. R., The Approximation of Solutions of Elliptic Boundary Value Problems via the p-Version of the Finite Element Method, *SIAM J. Numer. Anal.*, **23**(1), 58-77, 1986.

DUNAVANT D. A., SZABO B. A., A Posteriori Error Indicators for the p-Version of the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**, 1851-1870, 1983.

DURAN R., MUSCHETTI M. A., RODRIGUEZ R., On the Asymptotic Exactness of Error Estimators for Linear Triangular Finite Elements, *Numer. Math.*, **59**, 107-127, 1991.

ERIKSSON K., JOHNSON C., An Adaptive Finite Element Method for Linear Elliptic Problems, *Math. Comp.*, **50**, 361-383, 1988.

GAGO J. P. S. R., *A Posteriori Error Analysis and Adaptivity for the Finite Element Method*, Tese de Doutoramento, University of Wales, Swansea, 1982.

GAGO J. P. S. R., KELLY D. W., ZIENKIEWICZ O. C., A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II - Adaptive Mesh Refinement, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**, 1621-1656, 1983.

GEORGES M. K., SHEPHARD M. S., Automated Adaptive Two-Dimensional System for the hp-Version of the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **32**, 867-893, 1991.

GUO B., BABUSKA I., The h-p Version of the Finite Element Method: Part 1 - The Basic Approximation Results; Part 2 - General Results and Applications, *Comput. Mechs.*, **1**, 21-41 e 203-220, 1986.

HERMANN L. R., Interpretation of Finite Element Procedures as Stress Error Minimization Procedure, *Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, **98**(EM5), 1330-1336, 1972.

HINTON E., CAMPBELL J. S., Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **8**, 461-480, 1974.

HUGGER J., Recovery and Few Parameter Representation of the Optimal Mesh Density Functions for Near Optimal Finite Element Meshes, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **109**, 41-71, 1993.

JARAUCH H., On an Adaptive Grid Refining Technique for Finite Element Approximations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**, 1105-1120, 1986.

JIROUSEK J., LEON N., A Powerful Finite Element for Plate Bending, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **12**, 77-96, 1977.

JIROUSEK J., Basis for Development of Large Finite Elements Locally Satisfying All Field Equations, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **14**, 65-92, 1978.

JIROUSEK J., TEODORESCU P., Large Finite Elements Method for the Solution of Problems in the Theory of Elasticity, *Comput. Struct.*, **15**(5), 575-587, 1982.

JIROUSEK J., Hybrid-Trefftz Plate Bending Elements with p-Method Capabilities, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **24**, 1367-1393, 1987.

JIROUSEK J., VENKATESH A., A Simple Stress Error Estimator for Hybrid-Trefftz p-Version Elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28**, 211-236, 1989.

JIROUSEK J., VENKATESH A., Adaptivity in Hybrid-Trefftz Finite Element Formulations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **29**, 391-405, 1990.

JIROUSEK J., ZIELINSKI A. P., Dual Hybrid-Trefftz Element Formulation based on Independent Boundary Traction Frame, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 2955-2980, 1993.

JOHNSON C., MERCIER B., Some Equilibrium Finite Element Methods for Two-Dimensional Elasticity Problems, *Numer. Math.*, **30**, 103-116, 1978.

JOHNSON C., HANSBO P., Adaptive Finite Element Methods in Computational Mechanics, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **101**, 143-181, 1992.

KELLY D. W., GAGO J. P. S. R., ZIENKIEWICZ O. C., A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**, 1593-1619, 1983.

KELLY D. W., The Self-Equilibration of Residuals and Complementary A Posteriori Error Estimates in the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 1491-1506, 1984.

KELLY D. W., ISLES J. D., Procedures for Residual Equilibration and Local Error Estimation in the Finite Element Method, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **5**, 497-505, 1989.

KELLY D. W., ISLES J. D., A Procedure for A Posteriori Error Analysis for the Finite Element Method which Contains a Bounding Measure, *Comput. Struct.*, **31**,(1), 63-71, 1989.

KERNIGHAN B. W., RITCHIE D. M., *The C programming language*, Prentice-Hall, New Jersey, 1978.

KIKUCHI N., Adaptive Grid Design for Finite Element Analysis in Optimization: Part I - Review of Finite Element Error Analysis; Part II - Grid Optimization; Part III - Shape Optimization, in SOARES C. A. M., *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems*, NATO ASI Series, Vol. F27, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 493-562, 1987.

KLEIBER M., An Error Estimation Method in Finite Element Structural Analysis, *Comput. Struct.*, **11**, 343-347, 1980.

LADEVÈZE P., LEGUILLON D., Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**(3), 483-509, 1983.

LADEVÈZE P., COFFIGNAL G., PELLE J. P., Accuracy of Elastoplastic and Dynamic Analysis, in BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., OLIVEIRA E. R. A., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, Chichester, 181-203, 1986.

LADEVÈZE P., PELLE J. P., ROUGEOT P., Error Estimation and Mesh Optimization for Classical Finite Elements, *Eng. Comput.*, **8**, 69-80, 1991.

LADEVÈZE P., MAUNDER E. A. W., A General Method for Recovering Equilibrating Element Tractions, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **137**, 111-151, 1996.

LEE C. K., LO S. H., An Automatic Adaptive Refinement Finite Element Procedure for 2D Elastostatic Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **35**, 1967-1989, 1992.

LEE N. S., BATHE K. J., Error Indicators and Adaptive Remeshing in Large Deformation Finite Element Analysis, *F. E. Anal. Des.*, **16**, 341-354, 1994.

LI L. Y., BETTESS P., BULL J. W., BOND T. J., APPLEGARTH I., Theoretical Formulations for Adaptive Finite Element Computations, *Commun. Numer. Methods Eng.*, **11**, 857-868, 1995.

LI X. D., WIBERG N. E., A Posteriori Error Estimate by Element Patch Post-Processing, Adaptive Analysis in Energy and L_2 Norms, *Comput. Struct.*, **53**(4), 907-919, 1994.

LISZKA T., ORKISZ J., The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and its Application in Applied Mechanics, *Comput. Struct.*, **11**, 83-95, 1980.

LOVE A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, 1927.

MACKERLE J., Error Analysis, Adaptive Techniques and Finite and Boundary Elements - A Bibliography (1992-1993), *F. E. Anal. Des.*, **17**, 231-246, 1994.

MASHAIE A., HUGHES E., GOLDAK J., Error Estimates for Finite Element Solutions of Elliptic Boundary Value Problems, *Comput. Struct.*, **49**(1), 187-198, 1993.

MAUNDER E. A. W., On Assessing the Accuracy of Equilibrium Finite Element Models, in BATHE K. J., OWEN D. R. J., *Reliability of Methods for Engineering Analysis*, 29-46, 1986.

MAUNDER E. A. W., HILL W. G., Complementary use of Displacement and Equilibrium Models in Analysis and Design, in ROBINSON J., *FEM in the Design Process*, 493-501, 1990.

MAUNDER E. A. W., ALMEIDA J. P. M., On Spurious Kinematic Modes and the Hyperstatic Nature of Equilibrium Macro-Elements, *4th ACME UK*, 1996.

MAUNDER E. A. W., ALMEIDA J. P. M., Hybrid-Equilibrium Elements with Control of Spurious Kinematic Modes, *1st International Workshop on Trefftz Method*, Cracow, 1996.

MAUNDER E. A. W., ALMEIDA J. P. M., RAMSAY A. C. A., A General Formulation of Equilibrium Macro-Elements with Control of Spurious Kinematic Modes, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**, 3175-3194, 1996.

MAXWELL J. C., On Reciprocal Diagrams in Space, and Their Relation to Airy's Function of Stress, *Proc. London Math. Soc.*, **1**, 58-60, 1868.

MAY A. J., *Error Bounding in Meshes of Triangular Equilibrium Super-Elements*, Dissertação de Mestrado, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1996.

MCDILL J. M., GOLDAK J. A., ODDY A. S., BIBBY M. J., Isoparametric Quadrilaterals and Hexahedrons for Mesh-Grading Algorithms, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **3**, 155-163, 1987.

MC NEICE G. M., MARCAL P. V., Optimization of Finite Element Grids Based on Minimum Potential Energy, *Trans ASME*, *J. of Engng. for Industry*, **95**(1), 186-190, 1973.

MELOSH R. J., MARCAL P. V., An Energy Basis for Mesh Refinement of Structural Continua, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **11**, 1083-1091, 1977.

MITCHELL W. F., A Comparison of Adaptive Refinement Techniques for Elliptic Problems, *ACM Trans. on Math. Software*, **15**, 326-347, 1989.

MORERA G., Soluzione Generale Delle Equazione Indefinite Dell'Equilibrio di un Corpo Continuo, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (Ser 5) **1**, 1892.

NAMBIAR R. V., LAWRENCE K. L., The Zienkiewicz-Zhu Error Estimator for Multiple Material Problems, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **8**, 273-277, 1992.

NICOLAIDES R. A., On the L_2 Convergence of an Algorithm for Solving Finite Element Equations, *Math. Comp.*, **31**, 892-906, 1977.

NIU Q., SHEPHARD M. S., Superconvergent Extraction Techniques for Finite Element Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 811-836, 1993.

NIU Q., SHEPHARD M. S., Superconvergent Boundary Stress Extraction and Some Experiences with Adaptive Pointwise Error Control, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, 877-891, 1994.

NOOR A. K., BABUSKA I., Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions, *F. E. Anal. Des.*, **3**, 1-26, 1987.

ODEN J. T., BRAUCHLI H. T., On the Calculation of Consistent Stress Distributions in Finite Element Calculations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **3**, 317-325, 1971.

ODEN J. T., DEMKOWICZ L., RACHOWICZ W., WESTERMANN T. A., Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A Posteriori Error Estimation, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **77**, 113-180, 1989.

ODEN J. T., PATRA A., A Parallel Adaptive Strategy for hp-Finite Element Computations, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **121**, 449-470, 1995.

OHTSUBO H., KITAMURA M., Element by Element A Posteriori Error Estimation and Improvement of Stress Solutions for Two-Dimensional Elastic Problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **29**, 233-244, 1990.

OHTSUBO H., KITAMURA M., Element by Element A Posteriori Error Estimation of the Finite Element Analysis for Three-Dimensional Elastic Problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **33**, 1755-1769, 1992.

OLIVEIRA E. R. A., Optimization of Finite Element Solutions, *Proc. 3rd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Flight Dynamics Laboratory, 1974.

OÑATE E., BUGEDA G., A Study of Mesh Optimality Criteria in Adaptive Finite Element Analysis, *Eng. Comput.*, **10**, 307-321, 1993.

PAPADRAKAKIS M., BABILIS G., BRAOUZI G. P., Efficiency of Refinement Procedures for the p-Version of the Adaptive Finite Element Method, in PAPADRAKAKIS M., TOPPING B. H. V., *Advances in Post and Preprocessing for Finite Element Technology*, Civil-Comp, Edinburgh, 111-124, 1994.

PEANO A., RICCIONI R., Automated Discretization Error Control in Finite Element Analysis, in ROBINSON J., *Finite Element Methods in the Commercial Environment*, 367-388, 1978.

PEANO A., RICCIONI R., PASINI A., SARDELLA L., Adaptive Approximation in Finite Element Structural Analysis, *Comput. Struct.*, **10**, 333-342, 1979.

PERAIRE J., VAHDATI M., MORGAN K., ZIENKIEWICZ O. C., Adaptive Remeshing for Compressive Flow Computations, *J. Comp. Phys.*, **72**, 449-466, 1987.

PERAIRE J., PEIRO P., FORMAGGIA L., MORGAN K., ZIENKIEWICZ O. C., Finite Element Euler Computations in Three Dimensions, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **26**, 2135-2159, 1988.

PEREIRA O. J. B. A., *Um Modelo de Elementos Finitos de Equilíbrio para Elasticidade Tridimensional*, Dissertação de Mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, 1993.

PEREIRA O. J. B. A., ALMEIDA J. P. M., Utilização de Elementos Finitos de Equilíbrio em Elasticidade Tridimensional, *4º Encontro Nacional de Mecânica Computacional*, Lisboa, 1995.

PEREIRA O. J. B. A., ALMEIDA J. P. M., Equilibrium Finite Elements and Dual Analysis in Three-Dimensional Elastostatics, in OLIVEIRA E. R. A., BENTO J., *Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering Using Small Computers*, Techno-Press, Coreia, 955-960, 1995.

PIAN T. H. H., TONG P., Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **1**, 3-28, 1969.

PISSANETZKY S., *Sparse Matrix Technology*, Academic Press, Londres, 1984.

PITERI M. A., ALMEIDA J. P. M., Hierarchical 2D Mesh Generation Using a Topological Data Structure, in OLIVEIRA E. R. A., BENTO J., *Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering Using Small Computers*, Techno-Press, Coreia, 981-986, 1995.

PITERI M. A., *Geração de Malhas Hierárquicas em Domínios Bidimensionais e Tridimensionais*, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, em preparação, 1997.

PLANK L., Netzadaptation und Mehrgitterverfahren für die Numerische Behandlung von Faltwerken, *Dissertação*, Universidade de Hannover, 1990.

PRAGER W., SYNGE J. L., Approximations in Elasticity Based on the Concept of Function Space, *Quart. Appl. Math.*, **5**(3), 241-269, 1947.

PRESSBURGER Y., PERUCCHIO R., A Self-Adaptive FE System Based on Recursive Spatial Decomposition and Multigrid Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **38**, 1399-1421, 1995.

RACHOWICZ W., ODEN J. T., DEMKOWICZ L., Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 3. Design of h-p Meshes, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **77**, 181-212, 1989.

RAMSAY A. C. A., SBRESNY H., Some Studies of an Error Estimator Based on a Patch Recovery Scheme: Part I - The Patch Recovery Scheme; Part II - An Error Estimator Based on the Patch Recovery Scheme, *Finite Element News*, 2/4, 1994.

REBELO J. S., *Modelos de Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes*, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, 1993.

RHEINBOLT W. C., MESZTENYI C. K., On a Data Structure for Adaptive Finite Element Mesh Refinements, *ACM Trans. on Math. Software*, **6**(2), 166-187, 1980.

RHEINBOLT W. C., Feedback Systems and Adaptivity for Numerical Computations, in BABUSKA I., CHANDRA J., FLAHERTY J. E., *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 33-56, 1983.

RICHARDSON L. F., The Approximate Arithmetical Solution by finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam, *Trans. Roy. Soc.*, **A210**, 307-57, London, 1910.

RIVARA M. C., Algorithms for Refining Triangular Grids Suitable for Adaptive and Multigrid Techniques, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 745-756, 1984.

RIVARA M. C., LEVIN C., A 3-D Refinement Algorithm Suitable for Adaptive and Multigrid Techniques, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **8**, 291-290, 1992.

ROBERTI P., MELKANOFF M. A., Self-Adaptive Stress Analysis Based on Stress Convergence, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24**, 1973-1992, 1987.

ROBINSON J., Basis for Isoparametric Stress Elements, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **2**, 43-63, 1973.

RODRIGUES J., AZEVEDO A. V., Implementação duma Técnica Adaptativa de Recolocação dos Nós para Análise de Problemas de Elasticidade Plana, *4º Encontro Nacional de Mecânica Computacional*, Lisboa, 157-166, 1995.

RYBICKI E. F., Approximate Three-Dimensional Solutions for Symmetric Laminates Under Inplane Loading, *J. Composite Materials*, **5**, 354-360, 1971.

SANDER G., Application of the Dual Analysis Principle, in VEUBEKE F. J. de, *High Speed Computing of Elastic Structures*, Universidade de Liège, 1971.

SEWELL G., An Adaptive Computer Program for the Solution of Div(P(X,Y) Grad U) = F(X,Y,U) on a Polygonal Region, in WHITEMAN J. R., *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*, MAFELAP 1975, Academic Press, 1976.

SHEPHARD M. S., GALLAGHER R. H., ABEL J. F., The Synthesis of Near-Optimum Finite Element Meshes with Interactive Computer Graphics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **15**, 1021-1039, 1980.

SHEPHARD M. S., YERRY M. A., BAEHMANN P. L., Automatic Mesh Generation Allowing for Efficient A Priori and A Posteriori Mesh Refinement, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **55**, 161-180, 1986.

SPECHT B., A General Construction of Local Error Estimators for Conforming Finite Elements, *Comput. Struct.*, **19**(5/6), 815-822, 1984.

SPILKER R. L., MASKERI S. M., KANIA E., Plane Isoparametric Hybrid-Stress Elements: Invariance and Optimal Sampling, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **17**, 1469-1496, 1981.

STEIN E., RUST W., Mesh Adaptations for Linear 2D Finite Element Discretizations in Structural Mechanics, Especially in Thin Shell Analysis, *Journ. Comp. Appl. Math.*, **36**, 107-129, 1991.

STRANG G., FIX J. G., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, 1973.

STROUBOULIS T., HAQUE K. A., Recent Experiences with Error Estimation and Adaptivity: Part I - Review of Error Estimators for Scalar Elliptic Problems; Part II - Error Estimation for h-Adaptive Approximations on Grids of Triangles and Quadrilaterals, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **97**, 399-436 e **100**, 359-430, 1992.

SUHARA J., FUKUDA J., Automatic Mesh Generation for Finite Element Analysis, in *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, UAH Press, 607-624, 1972.

SZABÓ B. A., Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **55**, 181-197, 1986.

TURNER M. J., CLOUGH R. W., MARTIN H. C., TOPP L. J., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *Journal of Aeronautical Sciences*, **23**, 805-823, 1956.

UTKU S., MELOSH R. J., Solution Errors in Finite Element Analysis, *Comput. Struct.*, **18**(3), 379-393, 1984.

VERFÜRTH R., A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, *Journ. Comp. Appl. Math.*, **50**, 67-83, 1994.

VESLUD C. C. de, MAURICE G., An Autoadaptive Solver Associated with a Multigrid Input Data on a Macintosh Microcomputer, *Advances in Engineering Software*, **18**, 31-40, 1993.

VEUBEKE B. M. F. de, Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis, *AGARDograf*, **72**, 165-201, 1964.

VEUBEKE B. M. F. de, Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method, in ZIENKIEWICZ O. C., HOLLISTER G. S., *Stress Analysis*, Wiley, New York, 1965.

VEUBEKE B. M. F. de, ZIENKIEWICZ O. C., Strain Energy Bounds in Finite Element Analysis by Slab Analogy, *J. of Strain Analysis*, **2**(4), 1967.

VEUBEKE B. M. F. de, MILLARD A., Discretization of the Stress Field in the Finite Element Method, *J. Franklin Inst.*, **302**, 389-412, 1976.

VEUBEKE B. M. F. de, Diffusive Equilibrium Models, in GERADIN M., *B. M. Fraeijs de Veubeke Memorial Volume of Selected Papers*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 569-628,1980.

WASHIZU K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1975.

WIBERG N. E., ABDULWAHAB F., Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 2703-2724, 1993.

WIBERG N. E., ABDULWAHAB F., ZIUKAS S., Enhanced Superconvergent Patch Recovery Incorporating Equilibrium and Boundary Conditions, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, 3417-3440, 1994.

WIBERG N. E., LI X. D., Superconvergent Patch Recovery of Finite Element Solution and a Posteriori L_2 Norm Error Estimate, *Commun. Numer. Methods Eng.*, **10**, 313-320, 1994.

WILLIAMS M. L., Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, *J. Appl. Mech.*, **19**, 526-528, 1952.

YERRY M. A., SHEPHARD M. S., A Modified-Quadtree Approach to Finite Element Mesh Generation, *IEEE Computer Graphics and Applications*, **3**(1), 39-46, 1983.

YERRY M. A., SHEPHARD M. S., Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Modified-Octree Technique, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 1965-1990, 1984.

YOKOYAMA M., Automated Computer Simulation of Two-Dimensional Elastostatic Problems by the Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **21**, 2273-2287, 1985.

YU D.-H., A-Posteriori Local Error Estimates for Some Finite and Boundary Element Methods, *Adv. Eng. Software*, **15**, 175-179, 1992.

ZAVE P., RHEINBOLT W.C., Design of an Adaptive Parallel Finite Element System, *ACM Trans. on Math. Software*, **5**(1), 1-17, 1979.

ZENG L. F., WIBERG N.-E., Adaptive h-p Procedures for High Accuracy Finite Element Analysis of Two-Dimensional Linear Elastic Problems, *Comput. Struct.*, **42**(6), 869-886, 1992.

ZHONG H. G., BECKERS P., Equilibrium Default Error Estimators for the Finite Element Solution, *Relatório* **SA-139**, LTAS, Universidade de Liège, Janeiro de 1990.

ZHONG H. G., BECKERS P., Solution Approximation Error Estimators for the Finite Element Solution, *Relatório* **SA-140**, LTAS, Universidade de Liège, Janeiro de 1990.

ZHONG H. G., *Estimateurs d'Erreur A Posteriori et Adaptation de Maillages dans la Méthode des Élements Finis*, Tese de Doutoramento, Universidade de Liège, 1991.

ZHU J. Z., ZIENKIEWICZ O. C., Adaptive Techniques in the Finite Element Method, *Commun. Appl. Numer. Methods*, **4**, 197-204, 1988.

ZHU J. Z., ZIENKIEWICZ O. C., HINTON E., WU J., A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **32**, 849-868, 1991.

ZIENKIEWICZ O. C., IRONS B. M., SCOTT F. C., CAMPBELL J. S., Three Dimensional Stress Analysis, *Proc. Int. Union of Theoretical and Appl. Mech.*, Liège, Bélgica, 1971.

ZIENKIEWICZ O. C., CRAIG A. W., Adaptive Mesh Refinement and A Posteriori Error Estimation for the p-Version of the Finite Element Method, in BABUSKA I., CHANDRA J., FLAHERTY J. E., *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 33-56, 1983.

ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., KELLY D. W., The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis, *Comput. Struct.*, **16**, 53-65, 1983.

ZIENKIEWICZ O. C., CRAIG A. W., Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution and Hierarchic Finite Element Method Concepts, in BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O. C., GAGO J. P. S. R., OLIVEIRA E. R. A., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Wiley, Chichester, 25-59, 1986.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24**, 337-357, 1987.

ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., *The Finite Element Method*, Vol. 1, 4ª Edição, McGraw-Hill, London, 1988.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., GONG N. G., Effective and Practical h-p Version Adaptive Analysis Procedures for Finite Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28**, 879-891, 1989.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., The Three R's of Engineering Analysis and Error Estimation and Adaptivity, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **82**, 95-113, 1990.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **101**, 207-224, 1992.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates: Part 1 - The Recovery Technique; Part 2 - Error Estimates and Adaptivity, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **33**, 1331-1382, 1992.

ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z., Automatic Adaptive Analysis. The New Look of Finite Elements, in LADEVÈZE P., ZIENKIEWICZ O. C., *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Elsevier, 161-176, 1992.

Anexo - Refinamento adaptativo de elementos finitos de outros tipos

A utilização e a investigação nos domínios da estimação de erro e do refinamento adaptativo têm sido orientadas quase exclusivamente para os elementos finitos compatíveis. Existe também algum trabalho publicado sobre refinamento adaptativo de elementos finitos híbridos de Trefftz. Recentemente, surgiram alguns artigos sobre indicadores de refinamento e refinamento adaptativo para determinadas formulações de elementos finitos mistos [BAUMANN e SCHWEIZERHOF, 1994] [BRAESS *et al*, 1995] [BRINK *et al*, 1995].

Em seguida, faz-se um breve resumo da formulação de elementos finitos híbridos de Trefftz e do seu refinamento adaptativo.

Neste tipo de elementos finitos, discretiza-se o campo de deslocamentos nos elementos, utilizando funções de Trefftz, de modo a satisfazer, *a priori*, as equações de equilíbrio no interior dos elementos. Nos lados dos elementos, ou se discretizam os deslocamentos, obtendo os elementos híbridos de Trefftz de deslocamento (HT-D) [JIROUSEK e LEON, 1977], ou se discretiza a tensão, obtendo os elementos híbridos de Trefftz de tensão (HT-T) [JIROUSEK, 1978].

Nos elementos HT-D, os deslocamentos nos lados são discretizados de modo a satisfazerem, *a priori*, as condições de fronteira cinemáticas e a continuidade entre lados. A compatibilidade entre o campo de deslocamentos no interior dos elementos e os deslocamentos dos lados é imposta, de forma aproximada, elemento a elemento, através de resíduos pesados ou da minimização da energia potencial complementar do elemento. Deste modo, as variáveis do sistema algébrico global são apenas os deslocamentos dos nós dos lados. Este sistema é obtido impondo, de forma aproximada, o equilíbrio de tensão nos lados, através de resíduos pesados ou da minimização da energia potencial total [JIROUSEK, 1987].

Nos elementos HT-T, a tensão nos lados é discretizada de modo a satisfazer, *a priori*, as condições de fronteira estáticas e o equilíbrio de tensão nas ligações entre os lados. O equilíbrio entre o campo de tensões no interior dos elementos e a tensão nos lados é imposto, de forma aproximada, elemento a elemento, através de resíduos pesados ou da minimização da energia potencial do elemento. Deste modo, as variáveis do sistema algébrico global são apenas os pesos das funções de interpolação da tensão nos lados. Este sistema é obtido impondo, de forma aproximada, a compatibilidade nos lados, através de resíduos pesados ou da minimização da energia potencial complementar [JIROUSEK e ZIELINSKI, 1993].

Em nenhum dos tipos de elementos se impõe localmente o equilíbrio ou a compatibilidade entre dois elementos adjacentes. Consequentemente, as soluções obtidas não são, regra geral, compatíveis nem equilibradas.

O número de funções de Trefftz em cada elemento é escolhido de modo a que não existam modos espúrios a nível do elemento [JIROUSEK e LEON, 1977] [JIROUSEK, 1978].

JIROUSEK e TEODORESCU [1982] utilizaram, na discretização do campo de deslocamentos no interior dos elementos, além das funções de Trefftz polinomiais, funções que representam soluções na vizinhança de diversos tipos de singularidades. Isto permite tornar a malha independente das condições de fronteira e do carregamento.

Tendo em conta o referido no parágrafo anterior, a forma de refinamento mais adequada para este tipo de elementos é o refinamento p uniforme, sendo o grau de refinamento necessário para atingir uma dada precisão praticamente independente do carregamento [JIROUSEK, 1987].

Neste tipo de elementos, o erro é sempre máximo nos vértices e as funções de aproximação singulares fornecem valores infinitos para as componentes do tensor das tensões nos pontos singulares [JIROUSEK e VENKATESH, 1989]. Consequentemente, o controle do erro pode ser efectuado através do valor médio da densidade de energia de deformação do erro nos vértices não singulares [JIROUSEK e VENKATESH, 1990]. O erro num vértice é estimado comparando os valores das componentes do tensor das tensões nesse vértice com uma aproximação melhorada destes valores, construída com base na solução de elementos finitos [JIROUSEK e VENKATESH, 1989]. Numa situação em que existam múltiplos carregamentos, o nível de refinamento p uniforme necessário para obter, para todos eles, uma precisão não inferior à pretendida é calculado a partir daquele que tiver um erro mais elevado [JIROUSEK e VENKATESH, 1990].