

Pretende-se analisar este problema utilizando malhas duais de elementos finitos de grau três.

Na figura 13.9, representam-se as deformadas obtidas com uma malha inicial, quase uniforme, de 29 elementos. Com o gerador de malhas utilizado, esta era a malha mais grosseira que era possível gerar de modo a que nenhum elemento contivesse mais do que uma singularidade.

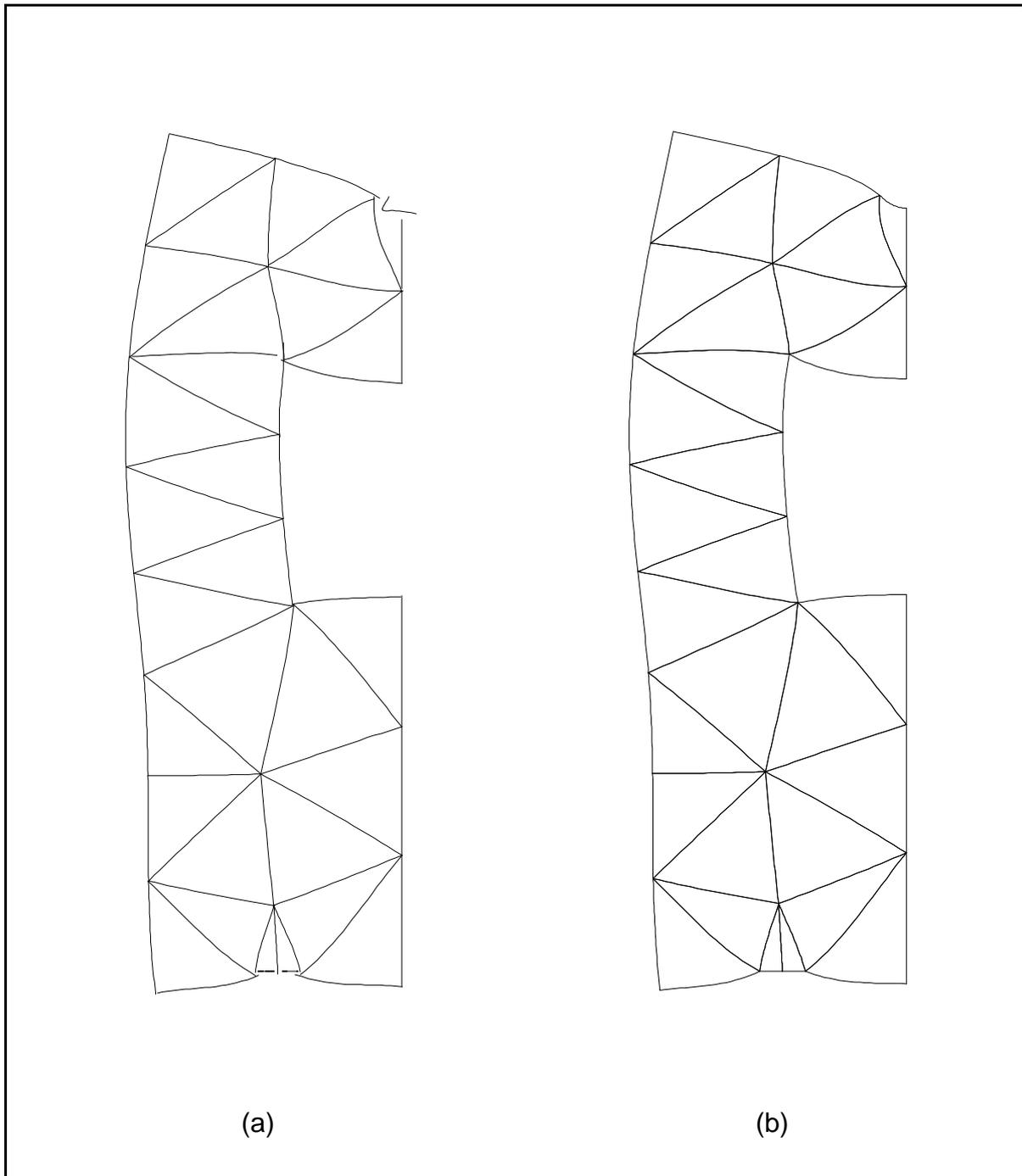


Figura 13.9 - Deformadas da malha de 29 elementos:
(a) elementos de equilíbrio; (b) elementos compatíveis.

A partir destas duas soluções, de (9.4) e de (11.2), obtém-se $\eta_h = 0.193028$, que, tendo em conta (9.3), é um majorante do erro relativo, na norma energética, de qualquer uma das soluções. Pretende-se obter $\eta_h \leq \bar{\eta} = 0.02$, utilizando a estratégia de refinamento descrita em 12.3.

A geometria do domínio e as condições de fronteira apresentam alguma complexidade, causando um número elevado de singularidades na solução. Estas singularidades são de diferentes tipos, umas em zonas de tensões elevadas, outras em zonas de tensões relativamente baixas. Existem ainda zonas, afastadas de qualquer singularidade, onde as tensões são relativamente elevadas. Este conjunto de circunstâncias dificulta a tarefa de refinamento adaptativo.

A estratégia de refinamento utilizada permitiu obter a precisão pretendida em três iterações. Na tabela 13.3, indicam-se, para cada malha: o número de elementos da malha, NE; o majorante do erro relativo, η_h ; o número de iterações que se estimam necessárias, m; o erro relativo que se pretende obter na malha seguinte, $k\bar{\eta}$; o número de elementos que se prevê serem necessários nessa malha, M.

Malha	NE	η_h	m	$k\bar{\eta}$	M
1	29	0.193028	2	0.062133	62
2	110	0.100394	1	0.02	322
3	347	0.030446	1	0.02	459
4	458	0.019812	-	-	-

Tabela 13.3 - Refinamento adaptativo.

Na tabela 13.4, indicam-se os valores da energia de deformação correspondentes a cada uma das soluções.

Malha	$U(\sigma_e)$	$U(u_c)$
1	0.433697	0.418118
2	0.429868	0.425578
3	0.428324	0.427927
4	0.428241	0.428073

Tabela 13.4 - Energias de deformação.

Nas figuras 13.10, 13.11 e 13.12, representam-se as deformadas obtidas, respectivamente, com as malhas 2, 3 e 4.

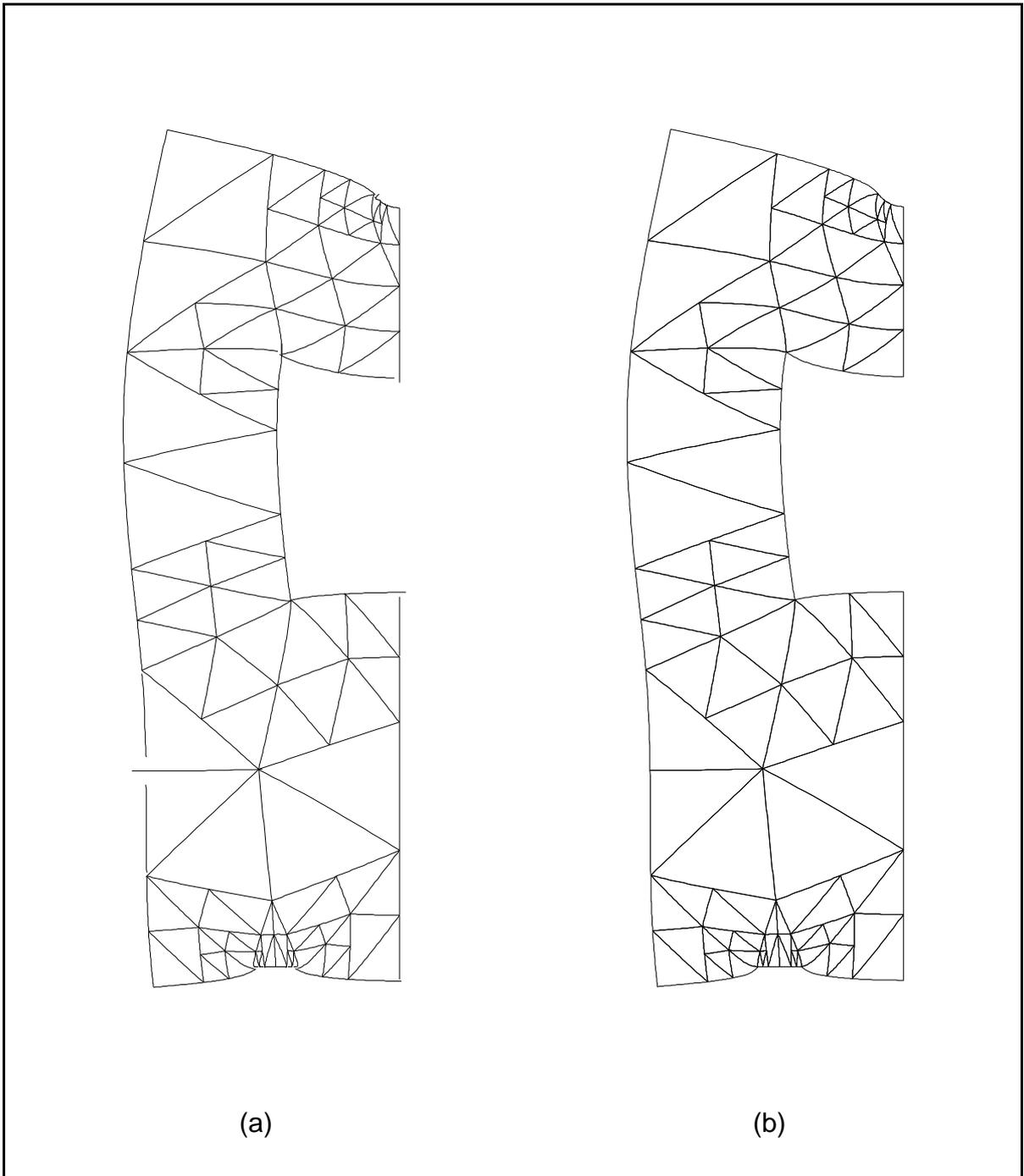


Figura 13.10 - Deformadas da malha de 110 elementos:
(a) elementos de equilíbrio; (b) elementos compatíveis.

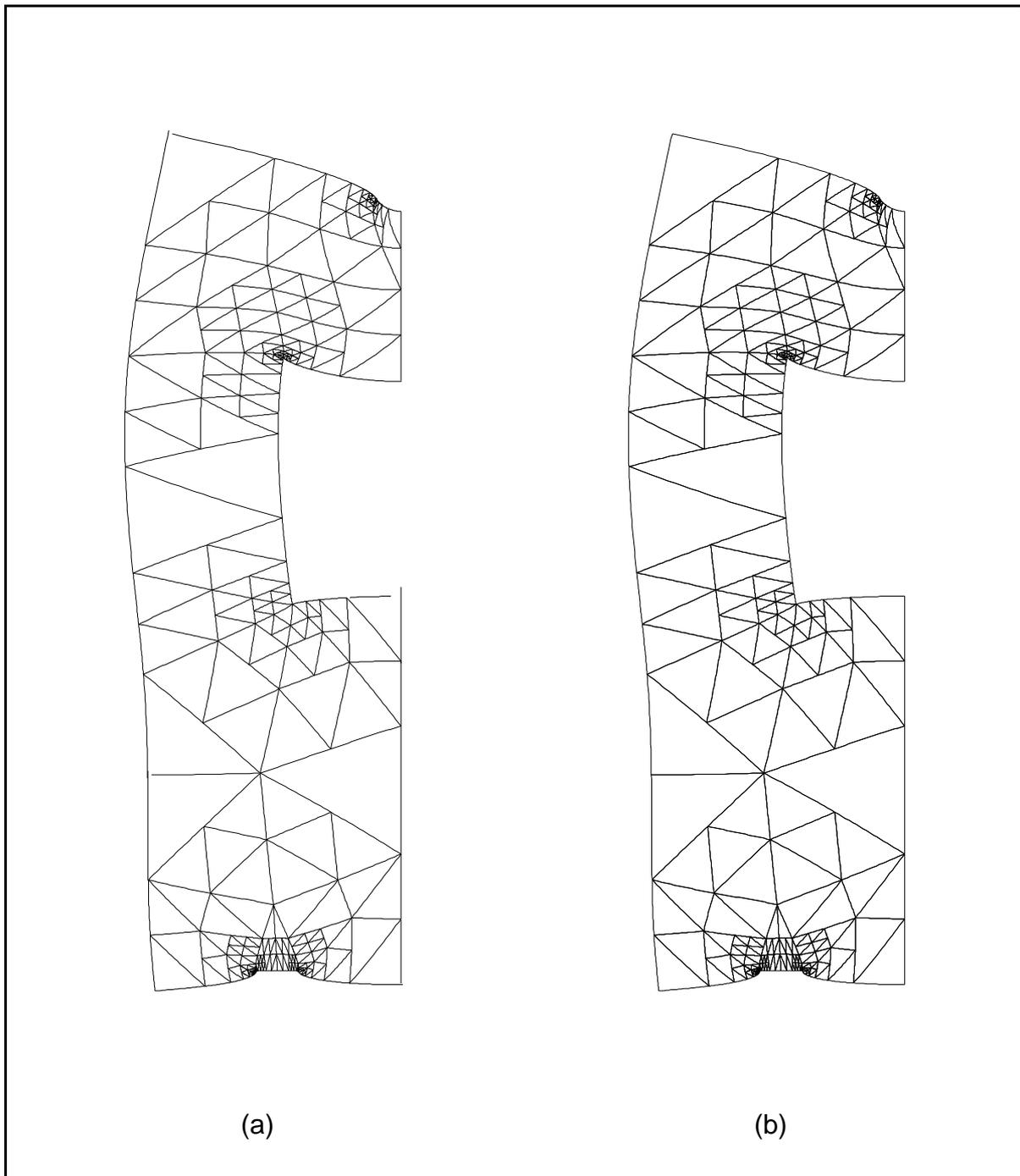


Figura 13.11 - Deformadas da malha de 347 elementos:
(a) elementos de equilíbrio; (b) elementos compatíveis.

Na resolução do sistema algébrico correspondente a qualquer uma das quatro malhas de elementos de equilíbrio foram sempre obtidos 11 modos espúrios. Pode observar-se que, neste caso, o seu efeito sobre as deformadas é aleatório mas local.

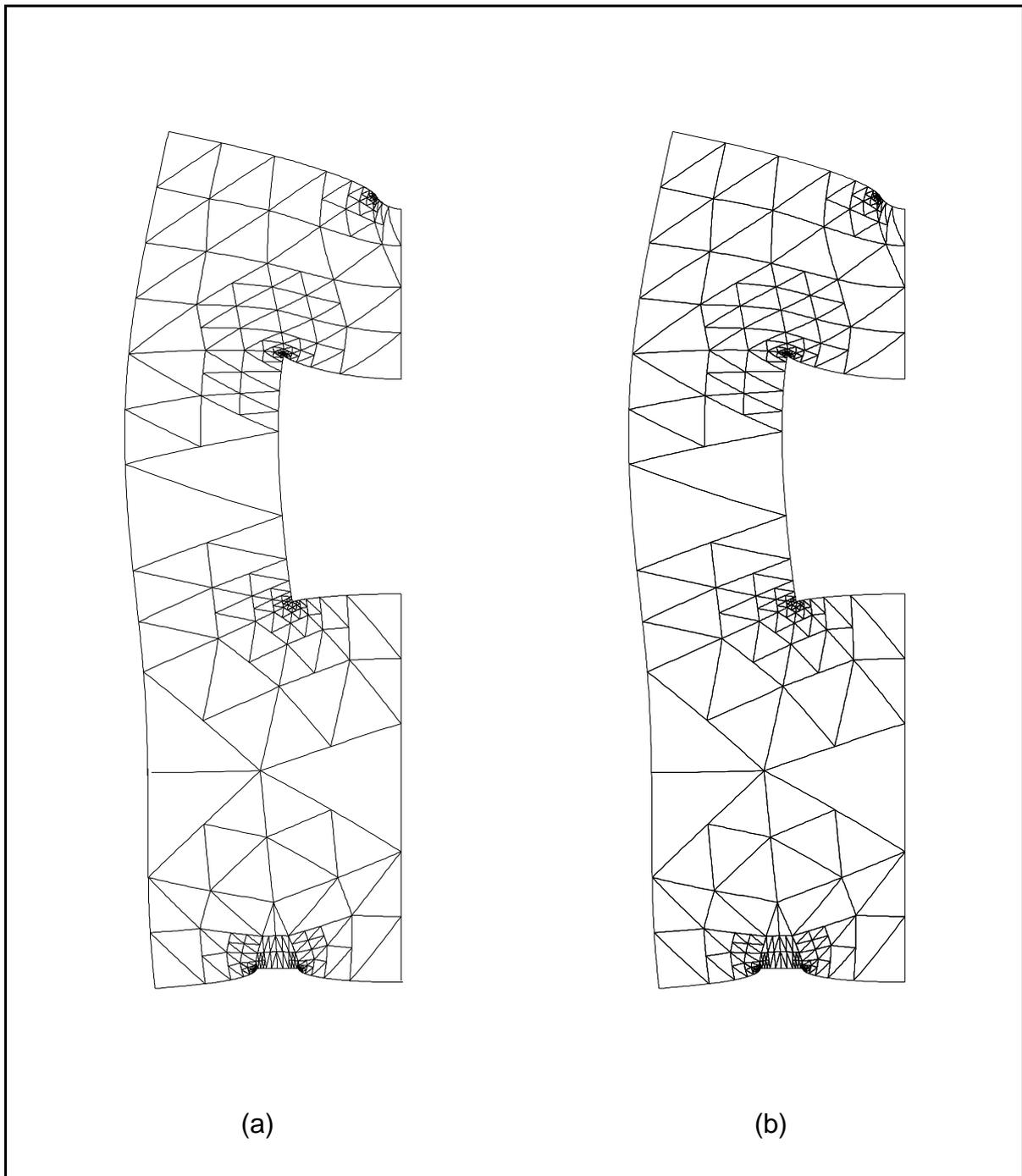


Figura 13.12 - Deformadas da malha de 458 elementos:
(a) elementos de equilíbrio; (b) elementos compatíveis.

Na figura 13.13, apresenta-se um gráfico da variação, com o número de elementos, do majorante do erro relativo e do erro relativo de cada uma das soluções. O valor "exacto" da energia de deformação, $U = 0.428182868$, foi estimado utilizando elementos de grau quatro, refinamento adaptativo e o método de extrapolação dual descrito em 7.5.

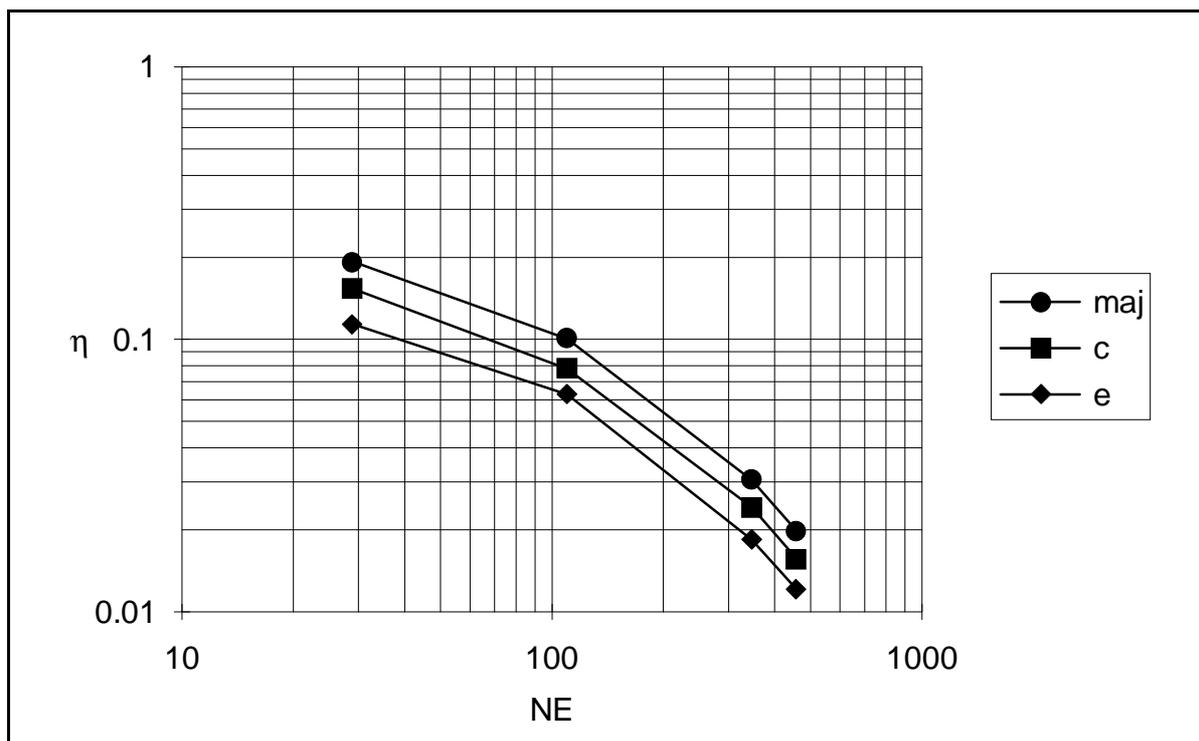


Figura 13.13 - Variação do erro relativo com o número de elementos.

A partir da tabela 13.3 e da figura 13.13, verifica-se que, inicialmente, a taxa de convergência em relação ao número de elementos é inferior à óptima. Contudo, à medida que o refinamento em torno das singularidades se torna adequado, a taxa torna-se óptima.

Na mesma figura, observa-se que a relação entre o erro de cada uma das soluções permanece sensivelmente constante, não se notando qualquer tendência para equidistribuir o erro pelas duas soluções. Neste exemplo, o majorante do erro é um bom estimador do erro da solução compatível e um mau estimador do erro da solução equilibrada. No entanto, o refinamento adaptativo, baseado nos indicadores de erro a partir dos quais se calculou o majorante do erro, não beneficia mais a solução compatível do que a solução equilibrada.

Nas figuras 13.14(a), 13.14(b), 13.15(a) e 13.15(b) representa-se a densidade da norma energética do erro na relação constitutiva (12.44) para cada uma das quatro malhas. Para facilitar a comparação com o valor da tensão aplicada, a densidade foi multiplicada por \sqrt{E} .