

### 13.3. Relaxação das condições de continuidade

Conforme referido em 3.3.2.5, se o grau das funções de aproximação de deslocamento nos lados for inferior ao grau das funções de aproximação de tensões nos elementos, não existirá, em princípio, continuidade de tensão nos lados. Nesses casos, as soluções não serão equilibradas. Em contrapartida, em todas as experiências efectuadas para elementos simplexes, utilizar funções de aproximação de deslocamento de grau imediatamente inferior ao das funções de aproximação de tensões foi suficiente para que não existissem modos espúrios.

Conforme referido em 3.2.2.4, se o grau das funções de aproximação do fluxo de tensão nos lados for inferior ao grau das funções de aproximação dos deslocamentos nos elementos, não existirá, em princípio, continuidade de deslocamentos nos lados. Nesses casos, as soluções não serão compatíveis. Em contrapartida, utilizar funções de aproximação do fluxo de tensão de grau imediatamente inferior ao das funções de aproximação dos deslocamentos tem um efeito, sobre a rigidez da malha de elementos finitos, semelhante ao da integração reduzida na formulação clássica de elementos finitos.

Para estudar os efeitos desta relaxação das condições de continuidade nos lados dos elementos, utiliza-se o exemplo descrito em 6.3.1.

Na tabela 13.1, indicam-se os valores do erro na energia de deformação, obtidos com funções de aproximação de grau três, nos elementos, e de grau dois, nos lados. Para termo de comparação, indicam-se, na mesma tabela, os valores obtidos com elementos compatíveis e equilibrados de grau três e de grau dois.

h	U( $\sigma_e$ ) - U(u)		U( $\sigma_{e^c}$ )-U(u)	U(u)-U(u <sub>c</sub> )	U(u) - U(u <sub>c</sub> )	
	p = 2	p = 3			e relax	c relax
1	1.946	1.946	4.399×10 <sup>-1</sup>	6.586×10 <sup>-1</sup>	6.586×10 <sup>-1</sup>	9.486
0.5	3.300×10 <sup>-1</sup>	3.428×10 <sup>-2</sup>	-7.724×10 <sup>-2</sup>	-1.455×10 <sup>-2</sup>	8.442×10 <sup>-2</sup>	1.271
0.25	2.579×10 <sup>-2</sup>	8.915×10 <sup>-4</sup>	-1.579×10 <sup>-2</sup>	-3.067×10 <sup>-4</sup>	2.517×10 <sup>-3</sup>	1.332×10 <sup>-1</sup>

Tabela 13.1 - Erro na energia de deformação.

Conforme referido em 6.3.1, o valor exacto da energia de deformação foi estimado em 149.53. Não existindo deslocamentos impostos, as soluções equilibradas fornecem valores da energia de deformação superiores ao exacto e as soluções compatíveis fornecem valores inferiores ao exacto.

Observando a tabela 13.1, verifica-se que relaxar as condições de continuidade da tensão pode levar a que se obtenham valores da energia de deformação inferiores ao exacto. De igual modo, relaxar as condições de

continuidade dos deslocamentos pode levar a que se obtenham valores da energia de deformação superiores ao exacto.

Tendo em conta apenas o valor absoluto do erro na energia de deformação, relaxar as condições de continuidade da tensão permite obter soluções melhores do que as obtidas com elementos de equilíbrio de grau dois; relaxar as condições de continuidade dos deslocamentos permite mesmo obter melhores soluções do que as obtidas com elementos compatíveis de grau três.

Na tabela 13.2, indicam-se os valores do erro na energia e da energia do erro, para as malhas de elementos de grau dois, para as de elementos de grau três e para as dos elementos com condições de continuidade relaxadas.

h	$U(\sigma_e) - U(u_c) = U(\sigma_e - \sigma_c)$		Continuidade relaxada	
	p = 2	p = 3	$U(\sigma_{e^r}) - U(u_{c^r})$	$U(\sigma_{e^r} - \sigma_{c^r})$
1	11.43	2.604	1.098	1.636
0.5	1.601	$1.187 \times 10^{-1}$	$-9.179 \times 10^{-2}$	$1.895 \times 10^{-1}$
0.25	$1.590 \times 10^{-1}$	$3.409 \times 10^{-3}$	$-1.610 \times 10^{-2}$	$1.930 \times 10^{-2}$

Tabela 13.2 - Erro na energia e energia do erro.

Para as condições de fronteira deste exemplo, a expressão (9.1) simplifica-se para

$$U(\sigma_e - \sigma_c) = U(\sigma_e) - U(u_c). \quad (13.1)$$

As soluções equilibradas e compatíveis na tabela 13.2 verificam esta condição. Tal já não sucede quando se relaxam as condições de continuidade nos lados. Nestes casos,  $U(\sigma_{e^r} - \sigma_{c^r}) > |U(\sigma_{e^r}) - U(u_{c^r})|$ , o que possibilita que bons resultados obtidos para o erro na energia de deformação possam não corresponder à realidade.

Na figura 13.7, representa-se a variação, com a dimensão da malha, do erro relativo de cada uma das soluções da tabela 13.1.

O erro de cada uma das soluções equilibradas e de cada uma das soluções compatíveis foi calculado a partir do valor "exacto" da energia. A energia do erro das soluções obtidas relaxando as condições de equilíbrio foi calculada através de

$$U(e_{e^r}) = U(\sigma_{e^r} - \sigma), \quad (13.2)$$

onde se tomou como solução "exacta" a solução obtida com elementos finitos compatíveis de grau cinco. A energia do erro das soluções obtidas relaxando as condições de compatibilidade foi calculada através de

$$U(\mathbf{e}_{c^n}) = U(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{c^n}), \quad (13.3)$$

onde se tomou como solução "exacta" a que foi obtida com elementos finitos de equilíbrio de grau cinco.

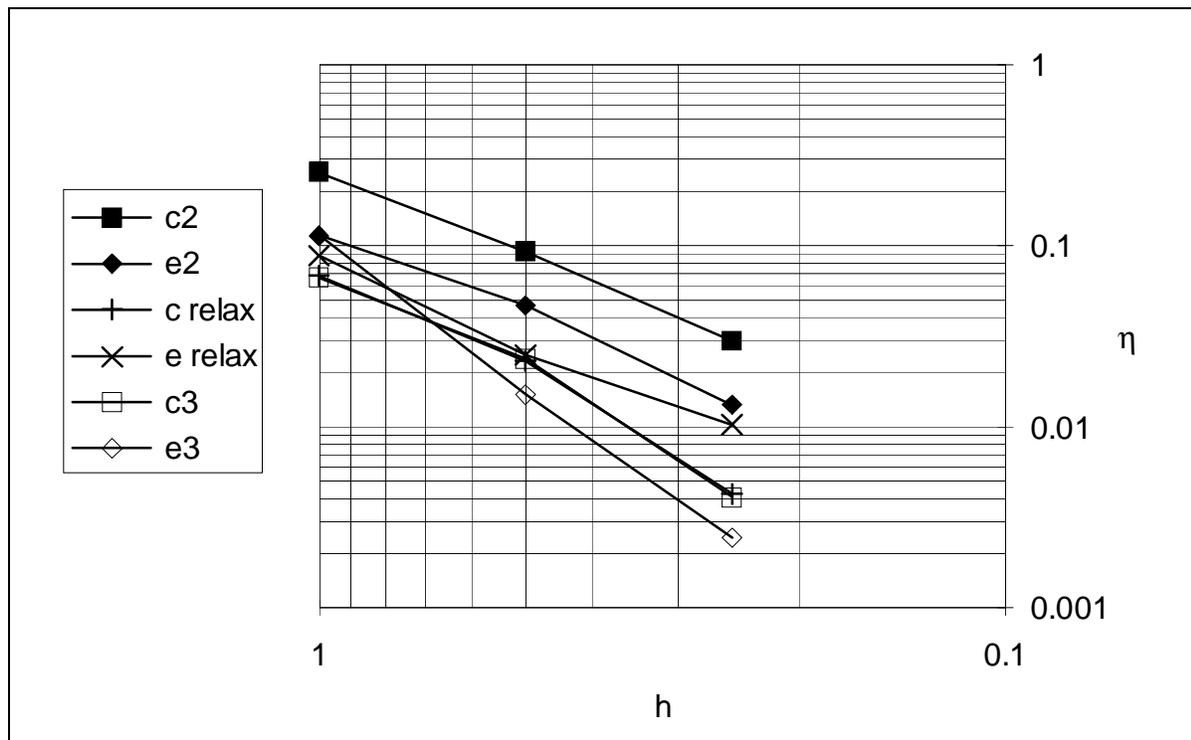


Figura 13.7 - Variação do erro relativo com a dimensão da malha.

A observação da figura 13.7 sugere que, utilizando funções de aproximação dos deslocamentos de grau três e funções de aproximação dos fluxos de tensão de grau dois se obtém um erro e uma taxa de convergência quase iguais aos que se obteriam utilizando elementos compatíveis de grau três. Isto está de acordo com os bons resultados geralmente obtidos ao utilizar a integração reduzida nos elementos finitos tradicionais. Em contrapartida, utilizando funções de aproximação das tensões de grau três e funções de aproximação dos deslocamentos de grau dois, o erro é um pouco menor do que o obtido com elementos de equilíbrio de segundo grau, mas a taxa de convergência parece ser semelhante.

Portanto, parece não haver vantagem em relaxar as condições de continuidade de tensão nos lados dos elementos de equilíbrio de grau baixo.

### 13.4. Refinamento adaptativo de uma malha dual bidimensional

Neste exemplo, analisa-se a placa representada na figura 13.8, sujeita ao carregamento indicado na mesma figura. Esta placa corresponde à simplificação de simetria de uma placa com uma abertura.

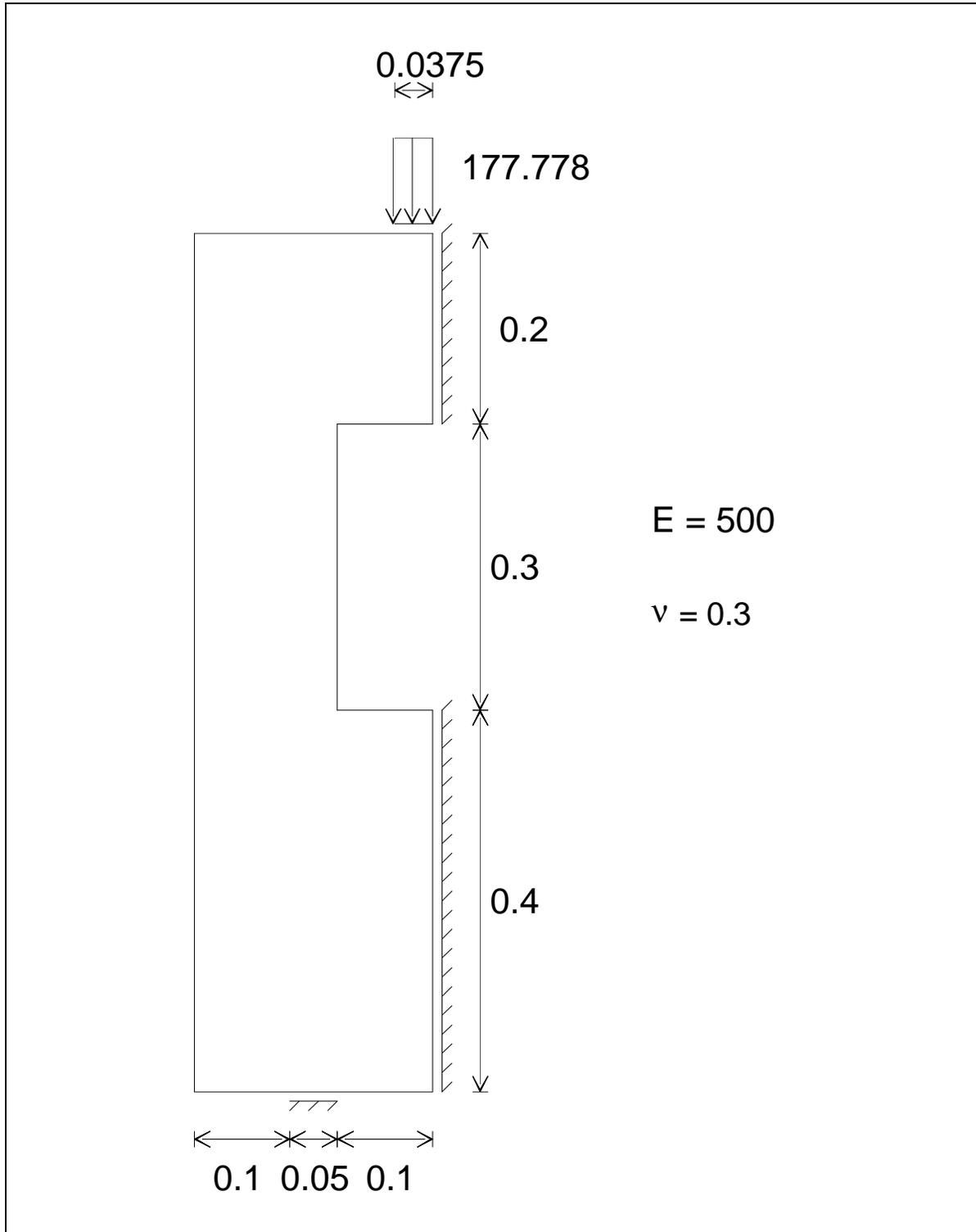


Figura 13.8 - Placa.