

8. Indicadores de erro para elementos finitos compatíveis

8.1. Introdução

Os indicadores de erro fornecem uma indicação da contribuição de cada elemento para o erro global. Além de servirem para construir estimadores do erro, como foi referido em 7.4, podem também ser utilizados como indicadores de refinamento.

Algoritmos adaptativos que não tenham em consideração a norma energética do erro podem levar à convergência para uma solução errada [BABUSKA *et al*, 1994a] [NIU e SHEPHARD, 1994]. Por isso, neste trabalho, os algoritmos adaptativos visam obter, com um custo mínimo, um erro relativo na norma energética inferior a uma tolerância pré-definida. Por este motivo, como se verá no capítulo 12, os algoritmos adaptativos utilizados neste trabalho são baseados na utilização de indicadores da norma energética do erro como indicadores de refinamento.

Assim, neste capítulo, faz-se uma retrospectiva dos métodos de obter indicadores de erro num elemento, com base numa solução de elementos finitos compatíveis. Os princípios em que se baseiam muitos destes indicadores podem servir de inspiração para a obtenção de indicadores de erro para elementos finitos de equilíbrio.

Os indicadores de erro, $\varepsilon_{(i)}$, fornecem também alguma informação sobre o erro local. KELLY *et al* [1983] sugeriram que se tomasse, para indicador do erro relativo médio do campo de tensões num elemento,

$$\frac{\varepsilon_{(i)}}{\|\mathbf{u}_c\|_{E,(i)}}. \quad (8.1)$$

Os indicadores de erro podem ser obtidos através de processos globais, ou de processos locais. Os processos globais envolvem a resolução de um sistema de equações da ordem de grandeza do utilizado para obter a solução de elementos finitos. Os processos locais envolvem apenas alguns elementos.

A precisão dum indicador de erro só será elevada se o erro causado pela poluição da solução no elemento pelo erro da solução no resto da malha for desprezável. O erro causado pela poluição é desprezável se a malha for óptima em relação à norma energética do erro [BABUSKA *et al*, 1994a]. Por isso, a qualidade dos estimadores de erro obtidos a partir de indicadores de erro é melhor nas malhas óptimas [KELLY *et al*, 1983].

8.2. Resolução de um problema de Dirichlet local

Os deslocamentos nodais são superconvergentes, isto é, a sua convergência é mais rápida do que a dos deslocamentos dos outros pontos [KELLY *et al*, 1983]. Consequentemente, os deslocamentos nodais têm um erro inferior aos dos outros pontos. Portanto, a contribuição do erro dos deslocamentos nodais para o erro global pode ser desprezada, permitindo a obtenção de indicadores de erro através de cálculos locais.

Seja $T_{(l)}$ o conjunto dos elementos finitos que têm o nó l como vértice e $\partial T_{(l)}$ a fronteira de $T_{(l)}$. É possível obter uma melhor aproximação do campo de deslocamentos em $T_{(l)}$ resolvendo o problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{d}^* \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{f} &= \mathbf{0} \text{ em } T_{(l)}, \\ \mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{N} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta &= \mathbf{t}_\Gamma \text{ em } \partial T_{(l)} \cap \Gamma_\Gamma \text{ e } \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_c \text{ em } \partial T_{(l)} \setminus \Gamma_\Gamma \end{aligned} \quad (8.2)$$

através de um refinamento dos $\Omega_{(l)} \subset T_{(l)}$ [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b]. O indicador de erro associado a $T_{(l)}$ é

$$\varepsilon_{(l)}^2 = \int_{T_{(l)}} (\mathbf{d}(\mathbf{u}_c - \tilde{\mathbf{u}}))^T \mathbf{k} (\mathbf{d}(\mathbf{u}_c - \tilde{\mathbf{u}})) d\Omega. \quad (8.3)$$

Este método é equivalente a uma resolução local da equação do erro. O quadrado do estimador do erro global é obtido pela soma dos quadrados de todos os indicadores calculados. Pode ser obtido um indicador de erro para o elemento $\Omega_{(l)}$ a partir das contribuições de $\Omega_{(l)}$ para os indicadores associados aos vários $T_{(l)}$. O estimador do erro global, obtido por este método, é sempre um minorante do erro.

Utilizando elementos finitos hierárquicos, surge naturalmente um indicador semelhante ao de (8.3) para cada possível grau de liberdade adicional [PEANO *et al*, 1979], conforme a ideia de MELOSH e MARCAL [1977]. Neste caso, o método é imediatamente interpretável como um cálculo directo do erro [PEANO e RICCONI, 1978], utilizando, como carregamento, os defeitos de equilíbrio descritos em 4.4.2 [ZIENKIEWICZ *et al*, 1983]. Efectuando os cálculos deste modo, obtém-se

$$\varepsilon_{N+1}^2 = \frac{1}{K_{N+1,N+1}} \left(\sum_i \int_{\Omega_{(i)}} \phi_{N+1} r d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \phi_{N+1} J d\Gamma + \sum_k \int_{\Gamma_{(k)}} \phi_{N+1} G d\Gamma \right)^2, \quad (8.4)$$

para cada possível grau de liberdade adicional $N+1$, onde se considera apenas a componente dos defeitos de equilíbrio segundo o possível grau de liberdade $N+1$. O somatório em i é extensivo a todos os elementos afectados por esse grau de liberdade, o somatório em j é extensivo a todos os $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$ afectados por esse grau de liberdade e o somatório em k é extensivo a todos os $\Gamma_{(k)} \subset \Gamma_t$ afectados por esse grau de liberdade. O quadrado do estimador do erro global é obtido pela soma dos quadrados de todos os indicadores correspondentes a funções até um grau acima do máximo utilizado na malha.

Um indicador de erro elementar pode ser obtido a partir das contribuições do elemento para os indicadores associados aos graus de liberdade. Neste caso, a contribuição de cada lado entre elementos é arbitrariamente dividida em partes iguais por cada um deles [ZIENKIEWICZ *et al*, 1983], o que introduz uma aproximação adicional no cálculo dos indicadores elementares, mas não influencia o estimador global.

Dado que o estimador do erro, obtido a partir destes indicadores, é sempre um minorante do erro e que as funções de interpolação consideradas em (8.4) podem até ser ortogonais aos defeitos de equilíbrio, ZIENKIEWICZ *et al* [1983] sugeriram a fórmula alternativa

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N+1}^2 = & \frac{1}{K_{N+1,N+1}} \left(\sum_i \left(\left(\int_{\Omega_{(i)}} \phi_{N+1}^2 d\Omega \right) \left(\int_{\Omega_{(i)}} r^2 d\Omega \right) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_j \left(\left(\int_{\Gamma_{(j)}} \phi_{N+1}^2 d\Gamma \right) \left(\int_{\Gamma_{(j)}} J^2 d\Gamma \right) \right) + \sum_k \left(\left(\int_{\Gamma_{(k)}} \phi_{N+1}^2 d\Gamma \right) \left(\int_{\Gamma_{(k)}} G^2 d\Gamma \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (8.5)$$

para o cálculo do indicador de erro de cada possível grau de liberdade adicional.

8.3. Utilização implícita dos defeitos de equilíbrio

É possível obter uma aproximação do erro num elemento $\Omega_{(i)}$ calculando uma solução aproximada para a equação do erro [SPECHT, 1984] [BANK e WEISER, 1985] [BANK, 1986]:

$$\mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{e}}_{(i)} + \mathbf{r}_c = \mathbf{0} \text{ em } \Omega_{(i)}, \quad (8.6)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{e}}_{(i)} = \mathbf{G}_c \text{ em } \partial\Omega_{(i)} \cap \Gamma_v, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{N}_{(i),(j)} \mathbf{k} \mathbf{d} \tilde{\mathbf{e}}_{(i)} = \frac{1}{2} \mathbf{J}_{c,(i)} \text{ em cada } \Gamma_{(j)} \subset \partial\Omega_{(i)} \text{ tal que } \Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma, \quad (8.8)$$

utilizando um refinamento de $\Omega_{(i)}$ no qual as funções de aproximação usadas para $\tilde{\mathbf{e}}_{(i)}$ são tais que

$$\tilde{\mathbf{e}}_{(i)} = \mathbf{0} \text{ nos nós de } \partial\Omega_{(i)} \text{ e em } \Gamma_u. \quad (8.9)$$

O coeficiente 1/2 é uma aproximação arbitrária. A parcela de $\mathbf{J}_{c,(i)}$ correspondente a cada elemento pode ser calculada de formas mais adequadas, como a descrita em [ZHONG e BECKERS, 1990a] ou como as que fornecem defeitos de equilíbrio que equilibram cada elemento, que serão descritas em 8.5.

Para elementos de grau par, nos quais, como será referido em 8.4, o resíduo no interior é dominante, BAEHMANN *et al* [1992] estimaram o erro em cada elemento calculando uma solução aproximada para (8.6) utilizando funções de aproximação tais que

$$\tilde{\mathbf{e}}_{(i)} = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega_{(i)}. \quad (8.10)$$

Em [BABUSKA *et al*, 1995] pode encontrar-se um estudo sobre a qualidade de indicadores de erro deste tipo.

8.4. Utilização explícita dos defeitos de equilíbrio

Utilizando diversas hipóteses simplificativas, é possível obter explicitamente um indicador da norma do erro a partir dos defeitos de equilíbrio, sem ter de montar e resolver o respectivo sistema algébrico elementar [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978a] [BABUSKA e RHEINBOLT, 1979] [GAGO, 1982] [KELLY *et al*, 1983] [BABUSKA e MILLER, 1987] [JOHNSON e HANSBO, 1992]. A forma geral para qualquer dimensão D seria

$$\varepsilon_{(i)}^2 = c_1 h^2 \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{r}_c^T \mathbf{r}_c \, d\Omega + c_2 h \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{J}_{c,(j)}^T \mathbf{J}_{c,(j)} \, d\Gamma + 4c_2 h \sum_k \int_{\Gamma_{(k)}} \mathbf{G}_c^T \mathbf{G}_c \, d\Gamma, \quad (8.11)$$

em que o somatório em j é extensivo aos $\Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma$ do elemento $\Omega_{(i)}$ e o somatório em

k é extensivo aos $\Gamma_{(k)} \subset \Gamma_i$ do elemento $\Omega_{(i)}$. Em 1D, $c_1 = \frac{1}{12ap^2}$, com $a = E$, e $c_2 = 0$,

o que simplifica extraordinariamente a estimação do erro. Para quadriláteros de

lado h, $c_1 = c_2 = \frac{1}{24ap^2}$, com $a = \frac{E}{1-\nu}$ em estados planos de tensão e

$a = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ em estados planos de deformação.

Em [GAGO, 1982] [KELLY *et al*, 1983] e [VERFÜRTH, 1994] podem ser encontradas algumas alternativas para a definição das funções integrandas.

No caso dos elementos com funções de interpolação de grau ímpar, os defeitos de equilíbrio nos lados são dominantes; no caso dos elementos de grau par, os defeitos no interior são dominantes [NOOR e BABUSKA, 1987].

Em [BABUSKA e YU, 1987] e [YU, 1992] podem encontrar-se outros indicadores de erro para quadriláteros, assintoticamente exactos, calculados explicitamente com base nos defeitos de equilíbrio.

Efectuando um desenvolvimento em série de Taylor do campo de deslocamentos de grau p num rectângulo ou num triângulo rectângulo e admitindo que o erro e as parcelas dos defeitos de equilíbrio correspondentes a esse elemento só dependem dos termos de grau p+1, é possível obter relações explícitas aproximadas entre o erro e alguns dos defeitos [ZHONG e BECKERS, 1990a] [BECKERS e ZHONG, 1992]. As expressões para estes indicadores de erro variam consideravelmente com o tipo e o grau dos elementos. Conforme foi referido anteriormente, estes autores calcularam a parcela de \mathbf{J} correspondente a cada elemento de uma forma mais adequada do que a simples divisão por 2.

8.5. Cálculo local duma solução equilibrada para a equação do erro

Os saltos na tensão em cada lado $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$, $\mathbf{J}_{c,(j)}$, podem ser divididos pelos dois elementos adjacentes, de modo a que os defeitos de equilíbrio associados a cada elemento constituam um carregamento autoequilibrado. Isto permite obter uma solução equilibrada para a equação do erro, através de cálculos efectuados elemento a elemento. Esta solução permite obter um majorante da energia do erro [KELLY, 1984].

A tensão correspondente a cada um dos elementos adjacentes a $\Gamma_{(j)}$ é dada por [KELLY e ISLES, 1989a]:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{(j),(i)} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}_{c,(j)} + \Delta \mathbf{J}_{c,(j)}, \\ \mathbf{t}_{(j),(e)} &= \frac{1}{2} \mathbf{J}_{c,(j)} - \Delta \mathbf{J}_{c,(j)}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Os valores de $\Delta \mathbf{J}_{c,(j)}$ podem ser obtidos efectuando uma minimização, pelo método dos gradientes conjugados, para obter um dos zeros de

$$\sum_i \left(\left(\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{r}_c d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{t}_{(j),(i)} d\Gamma \right)^2 + \left(\int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}_c d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}_{(j),(i)} d\Gamma \right)^2 \right), \quad (8.13)$$

em que \mathbf{x}_0 é um ponto qualquer e os somatórios em j são extensivos aos lados do elemento $\Omega_{(i)}$. Esta expressão será igual a zero quando, para todos os elementos, existir equilíbrio de forças e de momentos dos defeitos de equilíbrio atribuídos a cada um.

A solução para o erro em cada elemento pode ser obtida através de um superelemento de equilíbrio, de um refinamento h do elemento [KELLY e ISLES, 1989b] ou utilizando um elemento de grau superior [KELLY e ISLES, 1989a]. No primeiro caso é possível garantir que o valor obtido para a energia do erro é sempre um majorante. No segundo, não é possível garantir a obtenção de um majorante. No terceiro, é necessário que as tensões $\mathbf{t}_{(j),(i)}$ sejam tais que não haja descontinuidades de tensão nos vértices e que o grau do elemento seja suficientemente elevado para obter uma solução equilibrada do problema aproximado.

É possível obter tensões $\mathbf{t}_{(j),(i)}$ obedecendo a (8.13) recorrendo apenas a cálculos locais [BANK e WEISER, 1985]. O método proposto em [AINSWORTH e

ODEN, 1992] e [AINSWORTH *et al*, 1994] não assegura o equilíbrio de momentos [LADEVÈZE e MAUNDER, 1996]. Os métodos para obter uma solução equilibrada a partir da solução de elementos finitos compatíveis, que serão descritos ou referidos em 8.9, podem ser adaptados para obter $\mathbf{t}_{(j)(i)}$ obedecendo a (8.13).

Em [BABUSKA *et al*, 1995] pode encontrar-se um estudo sobre a qualidade de indicadores de erro deste tipo.

OHTSUBO e KITAMURA [1990] utilizaram um método que fornece, através de cálculos efectuados elemento a elemento, tensões $\mathbf{t}_{(j)(i)}$ para as quais (8.13) é nulo, mas para as quais, em geral, se verifica apenas

$$\mathbf{t}_{(j)(i)} + \mathbf{t}_{(j)(e)} \cong \mathbf{J}_{c,(j)}. \quad (8.14)$$

Segundo este método, calculam-se tensões iniciais:

$$\mathbf{t}'_{(j)(e)} = \frac{l_{(j)(e)}}{l_{(j)(e)} + l_{(j)(i)}} \mathbf{J}_{c,(j)},$$

$$\mathbf{t}'_{(j)(i)} = \frac{l_{(j)(i)}}{l_{(j)(e)} + l_{(j)(i)}} \mathbf{J}_{c,(j)},$$
(8.15)

em que $l_{(j)(i)}$ é a distância entre o centróide do elemento $\Omega_{(i)}$ e o centróide do lado $\Gamma_{(j)}$.

As tensões finais são obtidas, elemento a elemento, através de

$$\mathbf{t}_{(j)(i)} = \mathbf{t}'_{(j)(i)} + \Delta \mathbf{t}'_{(j)(i)}. \quad (8.16)$$

As correcções $\Delta \mathbf{t}'_{(j)(i)}$ são tais que:

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{r}_c d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{t}_{(j)(i)} d\Gamma = \mathbf{0} \text{ e}$$

$$\int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}_c d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t}_{(j)(i)} d\Gamma = \mathbf{0},$$
(8.17)

onde \mathbf{x}_0 é um ponto qualquer e os somatórios em j são extensivos aos lados do elemento $\Omega_{(i)}$. Para aproximar (8.13) o melhor possível, as correcções devem ser as menores possíveis [OHTSUBO e KITAMURA, 1992].

O erro é então calculado, em cada elemento, utilizando um elemento de grau $p+1$.

8.6. Construção de uma aproximação melhorada do campo de tensões

8.6.1. Introdução

A partir da solução de elementos finitos, é possível obter uma aproximação melhorada do campo de tensões, $\tilde{\sigma}$, recorrendo a técnicas como as que vão ser descritas em seguida. Nesta situação, utiliza-se, como indicador do erro [ZIENKIEWICZ e ZHU, 1987],

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} (\sigma_c - \tilde{\sigma}) f(\sigma_c - \tilde{\sigma}) d\Omega. \quad (8.18)$$

8.6.2. Projecção ponderada

A partir de funções de interpolação do tipo das usadas para os deslocamentos, em 3.2.1, e de valores nodais das componentes do tensor das tensões, é possível obter um campo de tensões contínuo

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\phi} \hat{\sigma}_{ij}. \quad (8.19)$$

As funções de interpolação são geralmente as mesmas que são utilizadas para os deslocamentos, $\tilde{\phi} = \phi$.

Esta interpolação deve ser aplicada separadamente a cada região material [NAMBIAR e LAWRENCE, 1992], pois o campo de tensões não é contínuo nos pontos onde há descontinuidades materiais.

A interpolação pode também ser utilizada para impor, *a priori*, as condições de fronteira estáticas ao campo de tensões contínuo, o que permite obter melhores resultados [AINSWORTH *et al*, 1989].

Dado que a solução de elementos finitos minimiza a energia de deformação do erro, o campo de tensões contínuo pode ser escolhido de modo a minimizar

$$U(\tilde{\sigma} - \sigma_c). \quad (8.20)$$

Então, os valores nodais de cada uma das componentes do tensor das tensões são obtidos resolvendo o sistema de equações lineares [AINSWORTH *et al*, 1989]

$$\left(\int_{\Omega} \tilde{\Phi}^T f \tilde{\Phi} d\Omega \right) \hat{\tilde{\sigma}} = \int_{\Omega} \tilde{\Phi}^T f \sigma_c d\Omega. \quad (8.21)$$

O número de equações do sistema é igual ao número de nós da malha vezes o número de componentes de σ .

Note-se que o mais coerente com a interpretação do método dos elementos finitos como uma minimização da energia do erro seria resolver

$$\left(\int_{\Omega} (D\Phi)^T \tilde{\Phi} d\Omega \right) \hat{\tilde{\sigma}} = \int_{\Omega} (D\Phi)^T \sigma_c d\Omega. \quad (8.22)$$

Contudo, este sistema tem mais incógnitas do que equações.

8.6.3. Distribuição de tensões consistente

Projectando cada uma das $\sigma_{ij,c}$ no espaço das correspondentes $\tilde{\sigma}_{ij}$ definido em (8.19), é possível obter uma distribuição de tensões consistente [ODEN e BRAUCHLI, 1971]. Os valores nodais de cada uma das componentes do tensor das tensões, são obtidos resolvendo o sistema de equações lineares

$$\left(\int_{\Omega} \phi^T \phi d\Omega \right) \hat{\tilde{\sigma}}_{ij} = \int_{\Omega} \phi^T \sigma_{ij,c} d\Omega. \quad (8.23)$$

Note-se que a matriz na equação (8.23) é proporcional à matriz de massas consistente, desde que a densidade seja constante.

O número de equações do sistema é igual ao número de nós da malha. A matriz é a mesma para cada componente do tensor das tensões, variando apenas o termo independente.

HINTON e CAMPBELL [1974] mostraram que este método fornece a solução de mínimos quadrados para

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij,c} = 0. \quad (8.24)$$

A matriz do sistema (8.23) é de diagonal dominante. Este facto permite obter uma solução aproximada para o sistema resolvendo o sistema diagonal que se

obtem adicionando todos os elementos de cada linha da matriz. Esta matriz é proporcional à matriz de massas concentradas, de um domínio com densidade constante.

8.6.4. Médias ponderadas nodais

Para cada um dos elementos adjacentes a um dado nó, é possível calcular um valor diferente para uma componente do tensor das tensões $\sigma_{ij,c}$ nesse nó. O valor nodal de $\tilde{\sigma}_{ij}$, a utilizar em (8.19), pode ser obtido através de

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sum_k w_{(k)} \sigma_{ij,c,(k)}, \quad (8.25)$$

em que o somatório em k é extensivo a todos os elementos adjacentes a esse nó.

A média aritmética corresponde a fazer

$$w_{(l)} = \frac{1}{\sum_k 1}. \quad (8.26)$$

A média ponderada pelos volumes dos elementos corresponde a

$$w_{(l)} = \frac{V_{(l)}}{\sum_k V_{(k)}}. \quad (8.27)$$

Para elementos simplex (triângulos, em 2D, e tetraedros, em 3D) de grau 1, esta média fornece resultados iguais aos do método das massa concentradas referido anteriormente.

ZHONG e BECKERS [1990b] utilizaram os pesos

$$w_{(l)} = \frac{\alpha_{(l)}/L_{(l)}}{\sum_k \frac{\alpha_{(k)}}{L_{(k)}}}, \quad (8.28)$$

em que $\alpha_{(k)}$ é o ângulo de abertura do elemento $\Omega_{(k)}$ no nó e $L_{(k)}$ é a distância entre o nó e o centro isoparamétrico do elemento. Para os nós da fronteira, utilizaram um método de extrapolação.

Outra alternativa seria

$$w_{(l)} = \frac{1/V_{(l)}}{\sum_k \frac{1}{V_{(k)}}}. \quad (8.29)$$

Em 1D, esta média fornece os mesmos resultados que (8.28).

8.6.5. Alisamento local e média nodal

HINTON e CAMPBELL [1974] utilizaram um alisamento local, elemento a elemento, para calcular os valores das componentes do tensor das tensões nos nós de cada elemento. Em seguida, os valores nodais de $\tilde{\sigma}_{ij}$, a utilizar em (8.19), são calculados através da média aritmética dos valores obtidos nos elementos adjacentes a cada nó. Estes autores consideraram dois tipos de alisamento: uma aplicação, elemento a elemento, do método descrito em 8.2.5.2 e uma interpolação/extrapolação a partir dos pontos ótimos de amostragem das tensões.

8.6.6. *Superconvergent Patch Recovery*

ZIENKIEWICZ e ZHU [1992a] [1992b] utilizaram um processo em que se define, para cada vértice interior, um *patch* contendo os elementos adjacentes a esse vértice. Desta forma, utilizando, em cada *patch* e para cada componente do tensor das tensões, um polinómio completo de grau igual ao das funções de interpolação,

$$\check{\sigma}_{ij} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{p}}_{ij}, \quad (8.30)$$

é possível obter uma aproximação de mínimos quadrados aos valores dessa componente nos pontos ótimos de amostragem das tensões nesse *patch*. Para cada vértice interior, o valor nodal de cada componente, a utilizar em (8.19), é dado pela aproximação no respectivo *patch*. Para cada um dos restantes nós, o valor nodal de cada componente é a média aritmética dos valores obtidos a partir de cada um dos *patches* que contêm esse nó.

Caso se pretenda utilizar um polinómio não completo em (8.30), deve-se escolher um referencial local que evite a ocorrência de singularidades no sistema do qual se obtém a solução de mínimos quadrados [RAMSAY e SBRESNY, 1994].

Na forma até agora descrita, esta técnica é equivalente a uma média ponderada dos valores das componentes do tensor das tensões nos pontos óptimos de amostragem. Outros métodos têm também sido utilizados para o cálculo desta média ponderada. MASHAIE *et al* [1993] calcularam os valores nodais de $\tilde{\sigma}_{ij}$ através da média aritmética dos valores no ponto óptimo de amostragem, de cada um dos elementos adjacentes ao nó, mais próximo desse nó. O método descrito por LISZKA e ORKISZ [1980] tem também sido utilizado para este fim.

WIBERG e ABDULWAHAB [1993] utilizaram polinómios de grau $p+1$ para o campo de tensões em cada *patch*:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{p}}. \quad (8.31)$$

Este campo, além de aproximar as tensões nos pontos óptimos, deve também satisfazer aproximadamente as equações de equilíbrio no interior dos elementos. Os valores de $\hat{\mathbf{p}}$ são obtidos minimizando

$$\sum_k (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}_{(k)}) - \sigma_c(\mathbf{x}_{(k)}))^T (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}_{(k)}) - \sigma_c(\mathbf{x}_{(k)})) + \beta \int_{\Omega_{patch}} (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f})^T (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f}) d\Omega, \quad (8.32)$$

em que o somatório é extensivo a todos os pontos óptimos de amostragem do *patch* e β é um coeficiente de penalização, geralmente unitário. Para os vértices na fronteira, utilizam-se também *patches*, embora nestes o grau dos polinómios possa ter de ser reduzido para p .

BLACKER e BELYTCHKO [1994] utilizaram, em (8.31), polinómios de grau p para o campo de tensões em cada *patch*. Este campo, além de aproximar as tensões nos pontos óptimos, deve também satisfazer aproximadamente as equações de equilíbrio no interior dos elementos e o equilíbrio na fronteira estática. Os valores de $\hat{\mathbf{p}}$ são obtidos minimizando, em cada *patch*,

$$\begin{aligned} & \sum_k (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}_{(k)}) - \sigma_c(\mathbf{x}_{(k)}))^T (\tilde{\sigma}(\mathbf{x}_{(k)}) - \sigma_c(\mathbf{x}_{(k)})) + \\ & + \int_{\Omega_{patch}} (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f})^T (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f}) d\Omega + \int_{\Gamma_t \cap \Gamma_{patch}} (\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_T)^T (\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_T) d\Omega. \end{aligned} \quad (8.33)$$

As tensões no elemento $\Omega_{(e)}$ são obtidas, não de (8.19), mas de

$$\tilde{\sigma} = \sum_l \psi_{(l)} \mathbf{P} \hat{\mathbf{p}}_{(l)}, \quad (8.34)$$

em que o somatório é extensivo aos vértices dos elementos e $\psi_{(l)}$ é a função de interpolação associada ao vértice l .

LI e WIBERG [1994] definiram, para cada elemento $\Omega_{(e)}$, um *patch* contendo $\Omega_{(e)}$ e os elementos com vértices comuns a $\Omega_{(e)}$. Utilizando, em cada *patch* elementar e para cada componente do tensor das tensões, um polinómio de grau $p+2$, é possível obter uma aproximação de mínimos quadrados aos valores dessa componente nos pontos óptimos de amostragem das tensões nesse *patch*. As tensões no elemento $\Omega_{(e)}$ são obtidas, sem utilizar (8.19), directamente de

$$\tilde{\sigma} = \check{\sigma}, \quad (8.35)$$

podendo não ser contínuas de elemento para elemento.

8.7. Construção de uma aproximação melhorada do campo de deslocamentos

Utilizando funções de interpolação de grau $p+1$ em cada elemento finito, é possível obter um campo de deslocamentos mais regular

$$\tilde{u}_i = \check{\phi} \hat{u}_i. \quad (8.36)$$

Como indicador do erro, utiliza-se [ZHONG e BECKERS, 1990b] [BECKERS e ZHONG, 1992]

$$\varepsilon_{(e)}^2 = \int_{\Omega_{(e)}} (\varepsilon_c - \check{\varepsilon}) \mathbf{k} (\varepsilon_c - \check{\varepsilon}) d\Omega. \quad (8.37)$$

Os nós da malha inicial são os pontos óptimos de amostragem dos deslocamentos da solução de elementos finitos. Portanto, nesses pontos,

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_c. \quad (8.38)$$

Estes autores utilizaram dois métodos para construir $\tilde{\mathbf{u}}$, um método directo e um método indirecto.

No método directo, em cada elemento $\Omega_{(e)}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ coincide com \mathbf{u}_c nos nós do elemento e é uma aproximação de mínimos quadrados de \mathbf{u}_c nos nós vizinhos de $\Omega_{(e)}$.

No método indirecto, constrói-se um campo contínuo de derivadas de ordem p , utilizando os mesmos métodos que se utilizam para obter campos de tensões contínuos. A partir deste campo de derivadas, constrói-se um campo de deslocamentos que obedece a (8.38).

DURAN *et al* [1991] utilizaram métodos semelhantes para obter $\tilde{\epsilon}$ em triângulos lineares.

WIBERG *et al* [1994] utilizaram polinómios de grau $p+1$ ou $p+2$ para o campo de deslocamentos em *patches* associados a cada vértice:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{u}}. \quad (8.39)$$

Os valores de $\hat{\mathbf{u}}$ são então obtidos minimizando

$$\begin{aligned} & \sum (\tilde{\sigma} - \sigma_c)^T \frac{1}{E} (\tilde{\sigma} - \sigma_c) + \beta \int_{\Omega_{patch}} (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f})^T \frac{1}{E} (\mathbf{D}^* \tilde{\sigma} + \mathbf{f}) d\Omega + \\ & + \sum (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_c)^T \mathbf{E} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_c) + w_t \sum (\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_r)^T \frac{1}{E} (\tilde{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_r) + w_u \sum (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_r)^T \mathbf{E} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_r), \end{aligned} \quad (8.40)$$

em que os somatórios são extensivos aos pontos óptimos de amostragem da grandeza correspondente no *patch*, β é um coeficiente de penalização, geralmente unitário e w_t e w_u são pesos, geralmente iguais a 10. Os valores nodais $\hat{\mathbf{u}}_i$ são obtidos conforme descrito em 8.6.6.

WIBERG e LI [1994] definiram, para cada elemento $\Omega_{(e)}$, um *patch* contendo $\Omega_{(e)}$ e os elementos com vértices comuns a $\Omega_{(e)}$. Utilizando, em cada *patch* elementar e para cada deslocamento, um polinómio de grau $p+2$,

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{P} \hat{\mathbf{u}}_i, \quad (8.41)$$

é possível obter uma aproximação de mínimos quadrados aos valores desse deslocamento nos pontos óptimos de amostragem dos deslocamentos nesse *patch*. Os deslocamentos no elemento $\Omega_{(e)}$ são obtidos, sem utilizar (8.38), directamente de

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad (8.42)$$

podendo não ser contínuos de elemento para elemento.

8.8. Erro de interpolação

Seja \mathbf{u}_I a função que interpola a solução exacta \mathbf{u} , isto é, o campo de deslocamentos do modelo de elementos finitos que coincide com \mathbf{u} em todos os nós. Como consequência de (4.11), o erro da solução de elementos finitos é inferior ao erro de interpolação:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_E. \quad (8.43)$$

Portanto, as estimativas do erro de interpolação podem ser utilizadas como estimativas do erro da solução de elementos finitos [SEWELL, 1976].

Se \mathbf{u} for suficientemente regular, para um elemento finito de grau p [DIAZ *et al*, 1983],

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_{E,(i)} \leq C h_{(i)}^p |\mathbf{u}|_{p+1,(i)}, \quad (8.44)$$

em que $h_{(i)}$ é o diâmetro do elemento $\Omega_{(i)}$ e C é uma constante que depende apenas da forma do elemento. Em 2D e para $p = 1$ [DEMKOWICZ *et al*, 1985],

$$|\mathbf{u}|_{2,(i)} = \left(\int_{\Omega_{(i)}} \left((2G + 2\lambda) \left(\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right)^2 \right) + 2G \left(\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 \right) \right) d\Omega \right)^{1/2}, \quad (8.45)$$

onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ e $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

Assim, tendo calculado C e obtendo-se uma aproximação das derivadas de ordem $p+1$, pode-se utilizar como indicador de erro

$$\varepsilon_{(i)} = C h_{(i)}^p |\tilde{\mathbf{u}}|_{p+1,(i)}. \quad (8.46)$$

Regra geral, a teoria dos erros de interpolação é utilizada para obter indicadores de refinamento, como referido em 10.7, e não indicadores de erro.

8.9. Análise dual com cálculo local da solução equilibrada

A partir de uma solução de elementos finitos compatíveis é possível obter uma solução equilibrada, efectuando apenas cálculos locais.

LADEVÈZE e LEGUILLON [1983] utilizaram este método para calcular aquilo que designaram por norma energética do erro na relação constitutiva:

$$\|\sigma_e - \sigma_c\|_E. \quad (8.47)$$

A norma deste erro é um majorante da norma energética do erro, como se verá em 9.2:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \varepsilon = \|\sigma_e - \sigma_c\|_E, \quad (8.48)$$

e pode ser calculada a partir das contribuições elementares

$$\varepsilon_{(i)} = \|\sigma_e - \sigma_c\|_{E,(i)}. \quad (8.49)$$

Uma interpretação para o cálculo local da solução equilibrada é a que se exemplifica em seguida.

Considere-se um nó interior de uma malha de elementos finitos de quatro nós. Na figura 8.1, indicam-se as componentes, numa das direcções do referencial, da força de massa e da tensão na fronteira de cada um dos elementos adjacentes ao nó, correspondentes à solução de elementos finitos.

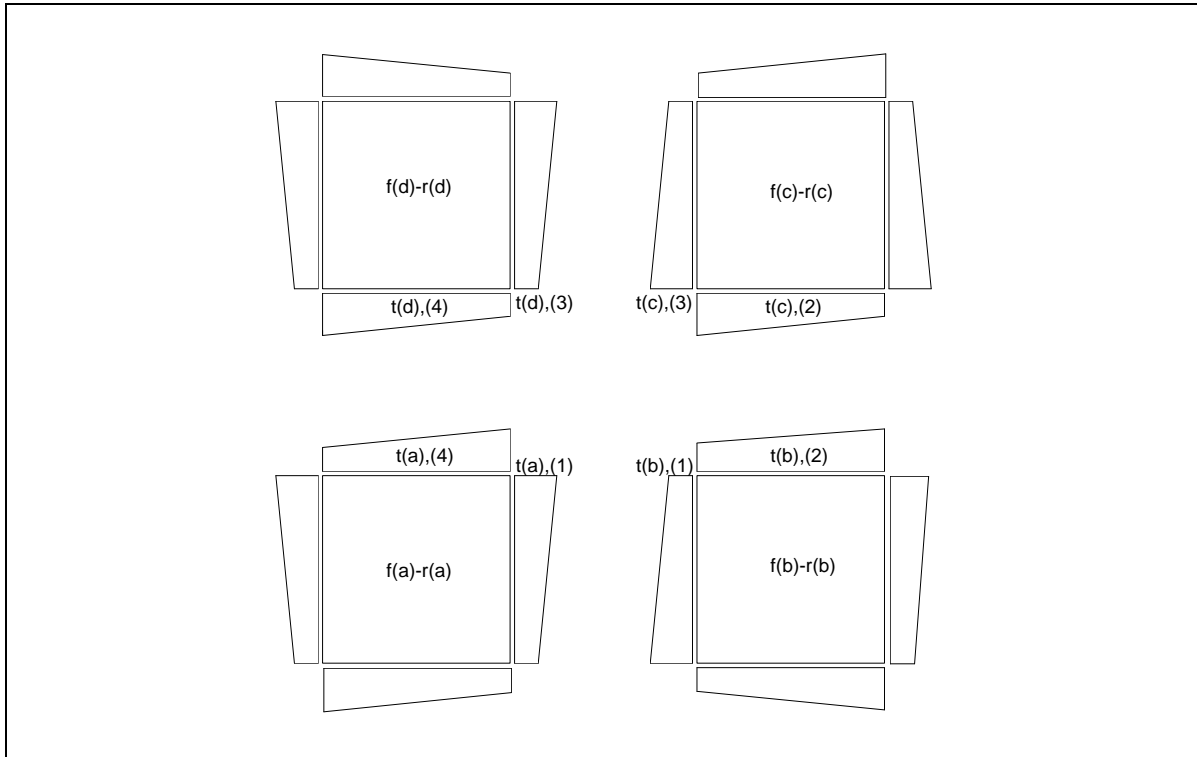


Figura 8.1 - Componentes, numa das direcções do referencial, das forças de massa e tensões nos lados correspondentes à solução de elementos finitos.

Na solução equilibrada, as forças de massa são as devidas ao carregamento. A tensão em cada lado é obtida adicionando uma correcção, por cada nó contido nesse lado, à média das tensões, nesse lado, correspondentes a cada um dos elementos adjacentes, obtidas da solução de elementos finitos.

As correcções, na direcção considerada, correspondentes a um nó são da forma indicada, para o nó central, na figura 8.2. Para cada elemento, o trabalho da correcção é nulo para todos os campos de deslocamento do elemento (figura 8.3) excepto para o correspondente ao nó central.

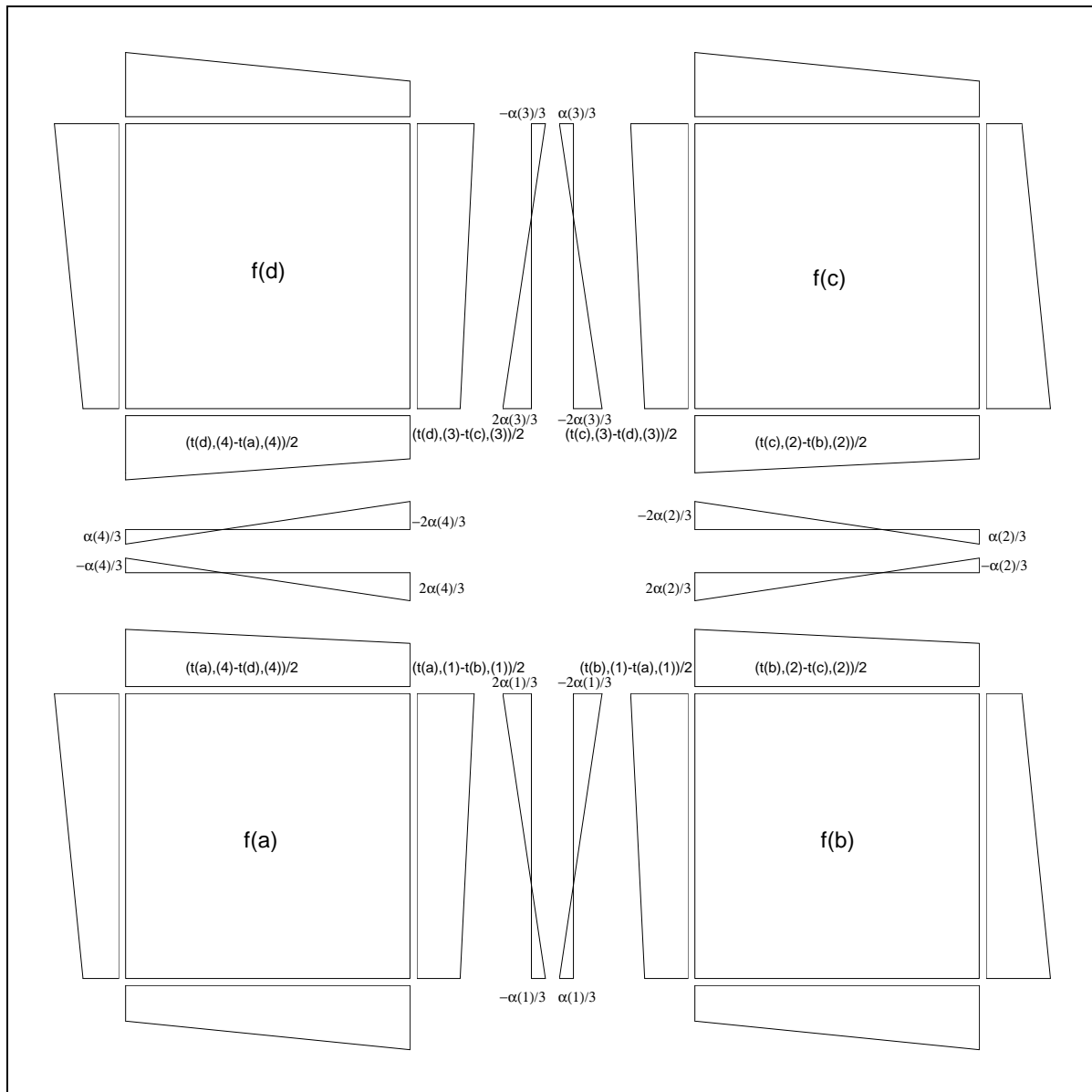


Figura 8.2 - Média das tensões e correcções correspondentes ao nó central.

Quaisquer que sejam as correcções correspondentes aos outros nós e os valores dos parâmetros α , as tensões em cada lado, correspondentes a cada um dos elementos adjacentes, serão equilibradas em todos os pontos.

Os valores dos parâmetros α do nó são calculados de modo a que, para cada elemento e para o correspondente campo de deslocamentos (figura 8.3) o trabalho das tensões nos lados e das forças de massa da solução de elementos finitos (figura 8.1) e da solução corrigida (figura 8.2) sejam iguais. Note-se que, dada a sua forma, as correcções correspondentes aos outros nós não afectam estas condições. Uma vez repetido este processo para todos os outros nós e para a outra direcção, as forças nodais equivalentes, em cada elemento, serão iguais para a solução de elementos finitos e para a solução corrigida. A tensão nos lados e a força de massa correspondentes a qualquer campo de deslocamentos de um elemento finito equilibram esse elemento. Portanto, a tensão nos lados obtida por este método e a força de massa aplicada pelo carregamento equilibrarão cada um dos elementos.

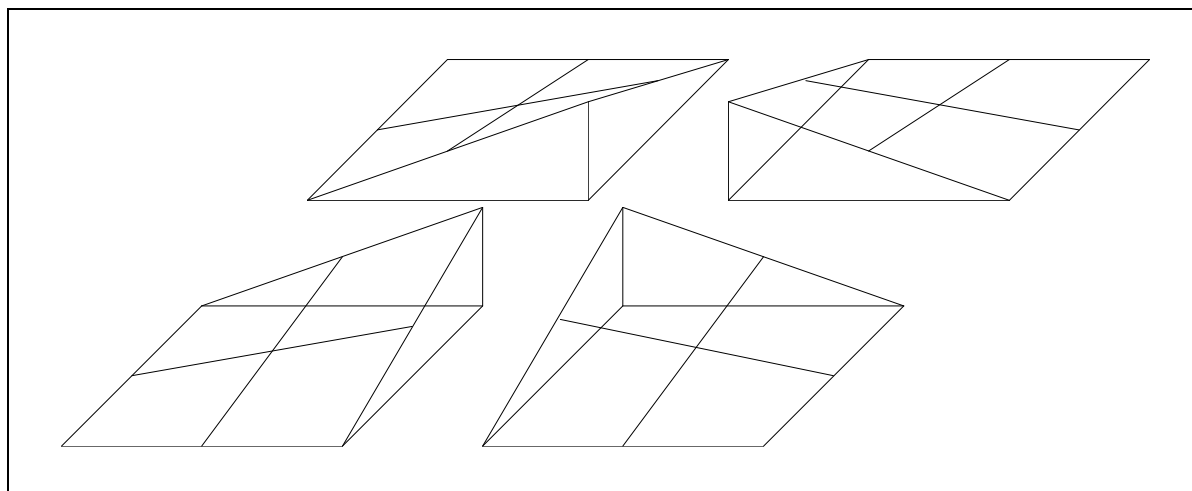


Figura 8.3 - Funções de interpolação dos elementos.

Aplicando a força de massa e a tensão nos lados obtidas para cada elemento a um superelemento de equilíbrio [LADEVÈZE *et al*, 1986], obtém-se uma solução equilibrada, recorrendo apenas a cálculos locais.

O trabalho das tensões nos lados e forças de massa da solução de elementos finitos (figura 8.1) é igual ao do carregamento, para cada uma das deformadas da malha de elementos finitos e, portanto, para a representada na figura 8.4. Consequentemente, existe uma dependência, em cada direcção, nas condições para a determinação dos α em cada nó interior. As indeterminações podem ser levantadas, em cada nó, de diversas maneiras [LADEVÈZE e

LEGUILLON, 1983] [LADEVÈZE *et al*, 1991]. Uma possibilidade consiste na minimização da soma dos quadrados dos α do nó.

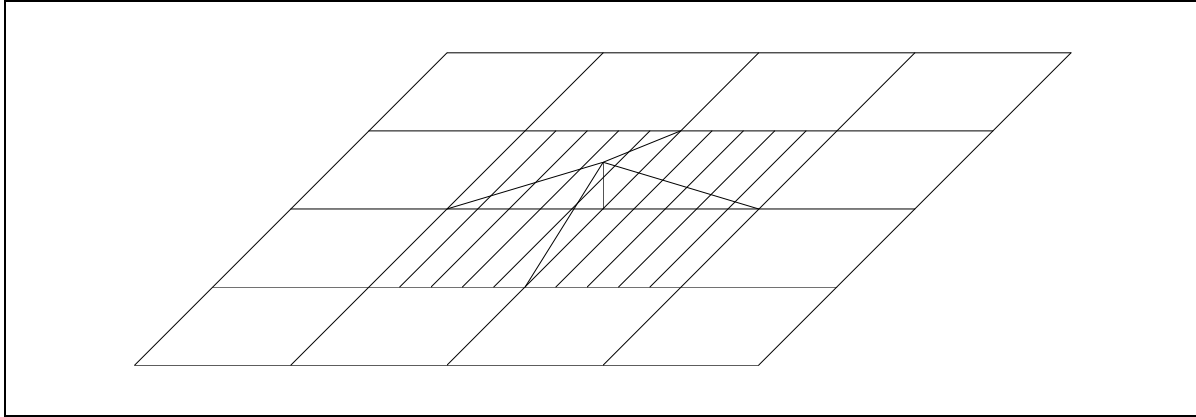


Figura 8.4 - Função de interpolação da malha.

Os métodos para obter saltos de tensão nos lados que equilibram cada elemento, descritos ou referidos em 8.5, podem também ser adaptados para obter soluções equilibradas a partir da solução de elementos finitos compatíveis.

Em [MAUNDER e HILL, 1990] e [LADEVÈZE e MAUNDER, 1996] pode encontrar-se uma interpretação, em termos de forças nodais, para o cálculo local da solução equilibrada.

9. Indicadores de erro para malhas de elementos finitos de equilíbrio

9.1. Introdução

A principal contribuição original da presente tese encontra-se neste capítulo. Na secção 9.2, descreve-se a obtenção de indicadores de erro a partir da análise dual global, um dos métodos utilizados neste trabalho. Parte desta secção corresponde a trabalho publicado pelo autor em [PEREIRA e ALMEIDA, 1995b]. Em seguida, sugerem-se vários métodos para obter indicadores de erro para elementos finitos de equilíbrio e descreve-se o método adoptado, baseado na utilização explícita dos defeitos de compatibilidade.

9.2. Indicadores de erro obtidos da análise dual global

Considerem-se um campo de deslocamentos compatível \mathbf{u}_c , com um erro \mathbf{e}_c e um campo de tensões equilibrado σ_e , com um erro \mathbf{e}_e .

Num caso genérico [DEBONGNIE, 1983],

$$U(\sigma_e - \sigma_c) = \pi_p(\mathbf{u}_c) + \pi_c(\sigma_e) \quad (9.1)$$

e [PRAGER e SYNGE, 1947]

$$U(\mathbf{e}_e) + U(\mathbf{e}_c) = U(\sigma_e - \sigma_c). \quad (9.2)$$

Portanto, para qualquer um dos campos,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \|\sigma_e - \sigma_c\|_E. \quad (9.3)$$

$\|\sigma_e - \sigma_c\|_E$ pode ser interpretado como um erro na relação constitutiva [LADEVÈZE e LEGUILLON, 1983].

Considere-se agora que u_c é uma solução obtida a partir de um modelo de elementos finitos compatíveis e que σ_e é uma solução obtida a partir de um modelo de elementos finitos de equilíbrio. Se a malha de elementos finitos compatíveis e a malha de elementos finitos de equilíbrio tiverem a mesma geometria, o estimador do erro

$$\varepsilon = \|\sigma_e - \sigma_c\|_E \quad (9.4)$$

pode ser calculado a partir dos indicadores de erro elementares [ODEN *et al*, 1989] [PEREIRA e ALMEIDA, 1995b]

$$\varepsilon_{(i)} = \|\sigma_e - \sigma_c\|_{E,(i)}. \quad (9.5)$$

Este estimador é válido quer para a solução compatível, quer para a solução equilibrada. Contudo, para uma das soluções, o índice de eficácia θ não pode ser inferior a $\sqrt{2}$, enquanto, para a outra, $1 \leq \theta \leq \sqrt{2}$. Se uma das soluções for significativamente melhor do que a outra, este estimador será um majorante próximo do erro da pior solução e um majorante afastado do erro da melhor. Se o erro das duas soluções for igual, $\theta = \sqrt{2}$ para ambas.

Note-se que as fórmulas (9.1), (9.2) e (9.3), bem como as (7.8), (7.9) e (7.10), são válidas para quaisquer tipos de acções e para quaisquer soluções equilibradas e compatíveis, como é exemplificado de seguida, de forma extrema.

Considere-se a placa representada na figura 9.1, sujeita à pressão, aos deslocamentos impostos e à variação de temperatura aí indicadas.

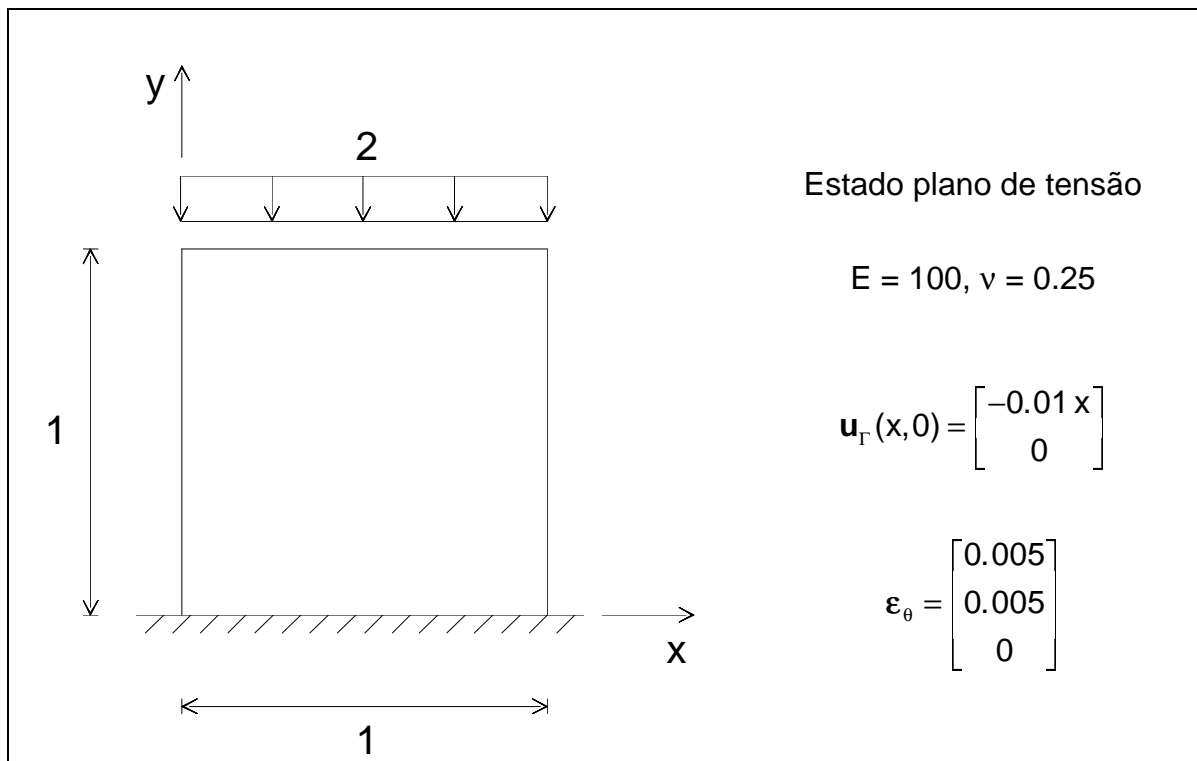


Figura 9.1 - Placa sujeita simultaneamente a vários tipos de acções.

Como solução compatível, considera-se

$$\mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} -0.01x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.6)$$

para a qual se tem:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_c = \begin{bmatrix} -1.73333 \\ -0.93333 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.7)$$

$U(\mathbf{u}_c) = 0.015333$, $W(\mathbf{u}_c) = 0$ e $\pi_p(\mathbf{u}_c) = 0.015333$.

Como solução equilibrada, considera-se

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.8)$$

para a qual se tem:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.015 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.9)$$

$U(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0.02$, $U^*(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0.01$, $W^*(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0$ e $\pi_C(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0.01$.

Verifica-se que

$$U(\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_c) = 0.025333 = \pi_p(\mathbf{u}_c) + \pi_C(\boldsymbol{\sigma}_e). \quad (9.10)$$

Então, para qualquer uma das soluções,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq 0.225093 = \|\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_c\|_E. \quad (9.11)$$

Além disso,

$$-0.01 \leq -\pi_C(\mathbf{u}) = \pi_p(\mathbf{u}) \leq 0.015333. \quad (9.12)$$

Como era de esperar, sendo as soluções arbitradas tão grosseiras, o valor obtido para o majorante do erro é muito elevado.

9.3. Construção de um campo de deslocamentos compatível

9.3.1. Introdução

A partir de funções de interpolação do tipo das usadas nos elementos finitos de deslocamento e de valores nodais dos deslocamentos, é possível obter um campo de deslocamentos,

$$\mathbf{u}_{i,c} = \tilde{\boldsymbol{\phi}} \hat{\mathbf{u}}_i, \quad (9.13)$$

compatível, isto é, contínuo e satisfazendo as condições de fronteira cinemáticas.

Os métodos de obter os valores nodais dos deslocamentos, a partir duma solução de elementos finitos de equilíbrio, irão ser descritos em 9.3.2 e 9.3.3.

Como indicador do erro, utiliza-se

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} (\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_c) \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_e - \boldsymbol{\sigma}_c) d\Omega. \quad (9.14)$$

Como se viu em 9.2, o estimador do erro obtido a partir destes indicadores é um majorante do erro.

Em geral, os deslocamentos nos lados, obtidos da solução de elementos finitos de equilíbrio, não são contínuos. Este método de obter o indicador de erro tem a vantagem de permitir apresentar ao utilizador uma deformada contínua e que respeita as condições de fronteira cinemáticas.

9.3.2. Cálculo da solução compatível a partir dos deslocamentos elementares

Em 4.5.2, descreveram-se métodos para obter um campo de deslocamentos incompatível correspondente à solução equilibrada, \mathbf{u}_e . Os valores nodais dos deslocamentos, a utilizar em (9.13), podem ser obtidos a partir de \mathbf{u}_e , utilizando, com as necessárias adaptações, um dos métodos para obter um campo de tensões contínuo descritos em 8.6.3 e 8.6.4. De entre estes métodos, o descrito em 8.6.3 obriga a formar e resolver um sistema de equações da ordem de grandeza do sistema correspondente à solução de elementos finitos. Portanto, não parece trazer vantagens em relação à análise dual global, descrita em 9.2.

Para elementos com funções de aproximação de tensões de grau p , devem usar-se funções de interpolação $\tilde{\phi}$ de grau $p+1$.

Conforme indicado em 4.5.2, se existirem modos espúrios, para que \mathbf{u}_e e, portanto, o estimador de erro, sejam independentes da amplitude destes, \mathbf{u}_e tem de ser obtido através de cálculos globais. Se não existirem modos espúrios, \mathbf{u}_e pode de ser obtido através de cálculos locais. Portanto, este método é mais adequado para malhas de superelementos.

Como exemplo ilustrativo, considere-se a placa triangular representada na figura 9.2.

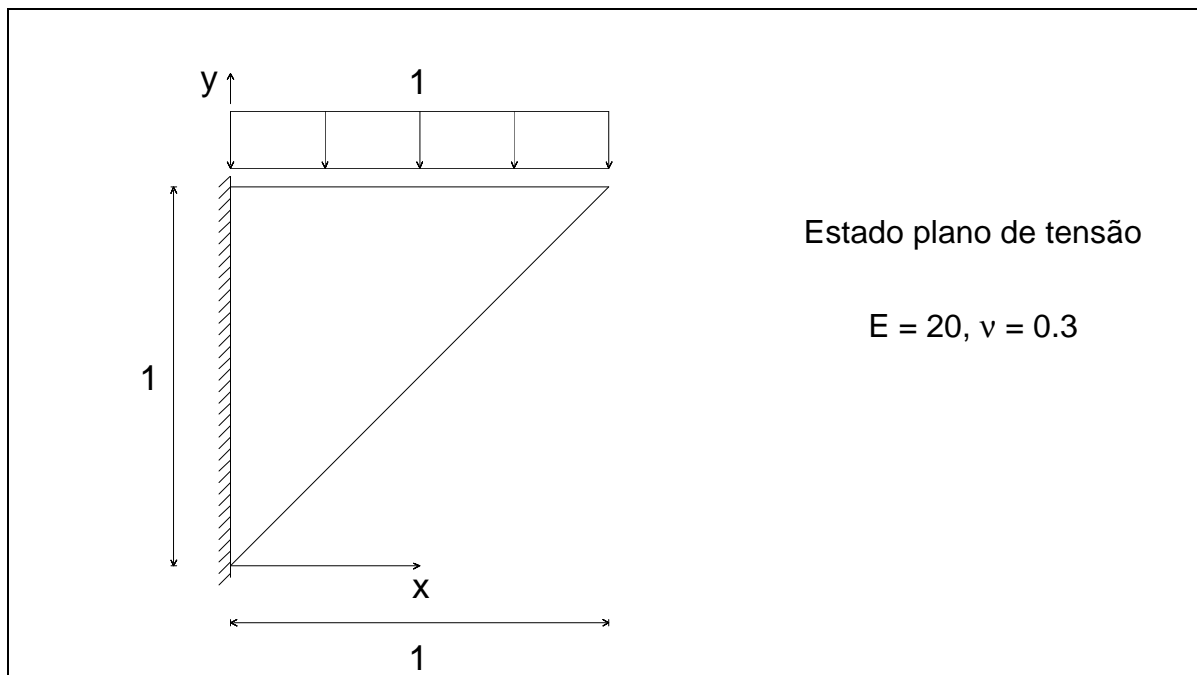


Figura 9.2 - Placa triangular.

Note-se que não existe nenhum campo de tensões contínuo que satisfaça as condições de fronteira estáticas no vértice mais à direita.

A placa foi discretizada em dois elementos finitos de equilíbrio triangulares com funções de aproximação constantes, conforme indicado na figura 9.3.

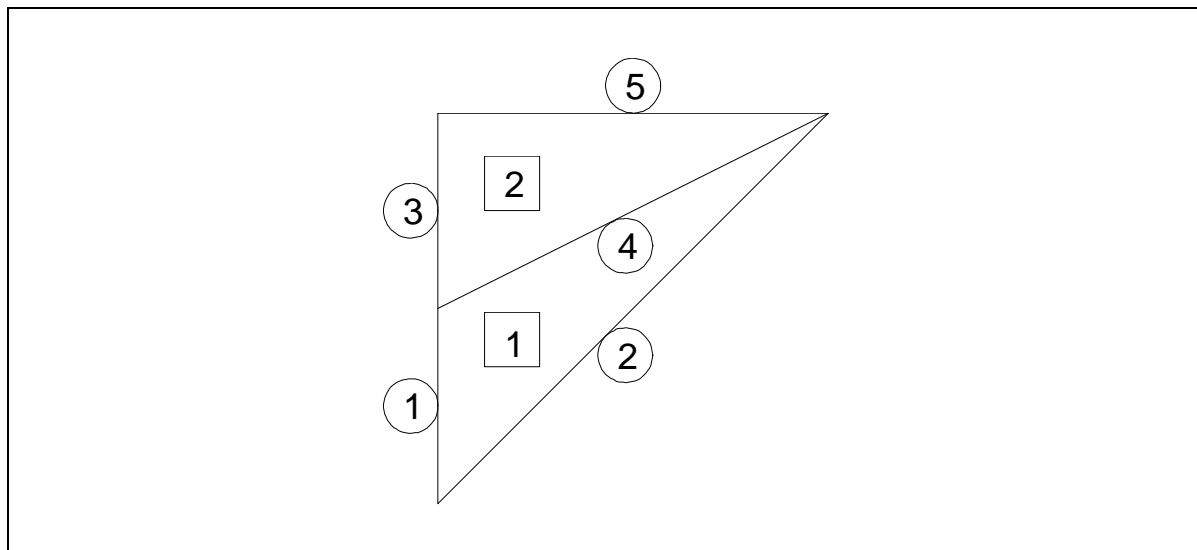


Figura 9.3 - Discretização da placa triangular.

Com esta discretização, obtém-se o campo de tensões equilibrado:

$$\boldsymbol{\sigma}_{e,(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\sigma}_{e,(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

e os deslocamentos nos lados:

$$\mathbf{v}_{e,(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{e,(2)} = \begin{bmatrix} 0.01125 \\ -0.24 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{e,(3)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_{e,(4)} = \begin{bmatrix} 0.0575 \\ -0.2575 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (9.16)$$

$$\mathbf{v}_{e,(5)} = \begin{bmatrix} 0.18625 \\ -0.2775 \end{bmatrix},$$

que se representam na figura 9.4(a). A solução obtida para estes deslocamentos é única, pois nesta malha não existem modos espúrios. Para esta solução, $U(\boldsymbol{\sigma}_e) = \pi_C(\boldsymbol{\sigma}_e) = 0.13875$.

Utilizando (4.43) e (4.45), (4.43) e (4.46), ou (4.43) e (4.50), com funções de aproximação de deslocamentos lineares, obtém-se o campo de deslocamentos incompatível:

$$\mathbf{u}_{e,(1)} = \begin{bmatrix} -0.04625 - 0.07x + 0.185y \\ 0.0175 - 0.445x - 0.07y \end{bmatrix} \text{ e} \quad (9.17)$$

$$\mathbf{u}_{e,(2)} = \begin{bmatrix} -0.38625 + 0.115x + 0.515y \\ 0.06 - 0.515x - 0.08y \end{bmatrix},$$

que se representa na figura 9.4(b).

Fazendo a média aritmética dos deslocamentos nodais e impondo as condições de fronteira cinemáticas, obtém-se o campo de deslocamentos compatível

$$\mathbf{u}_{c,(1)} = \mathbf{u}_{c,(2)} = \begin{bmatrix} 0.15625x \\ -0.51625x \end{bmatrix}, \quad (9.18)$$

que se representa na figura 9.4(c).

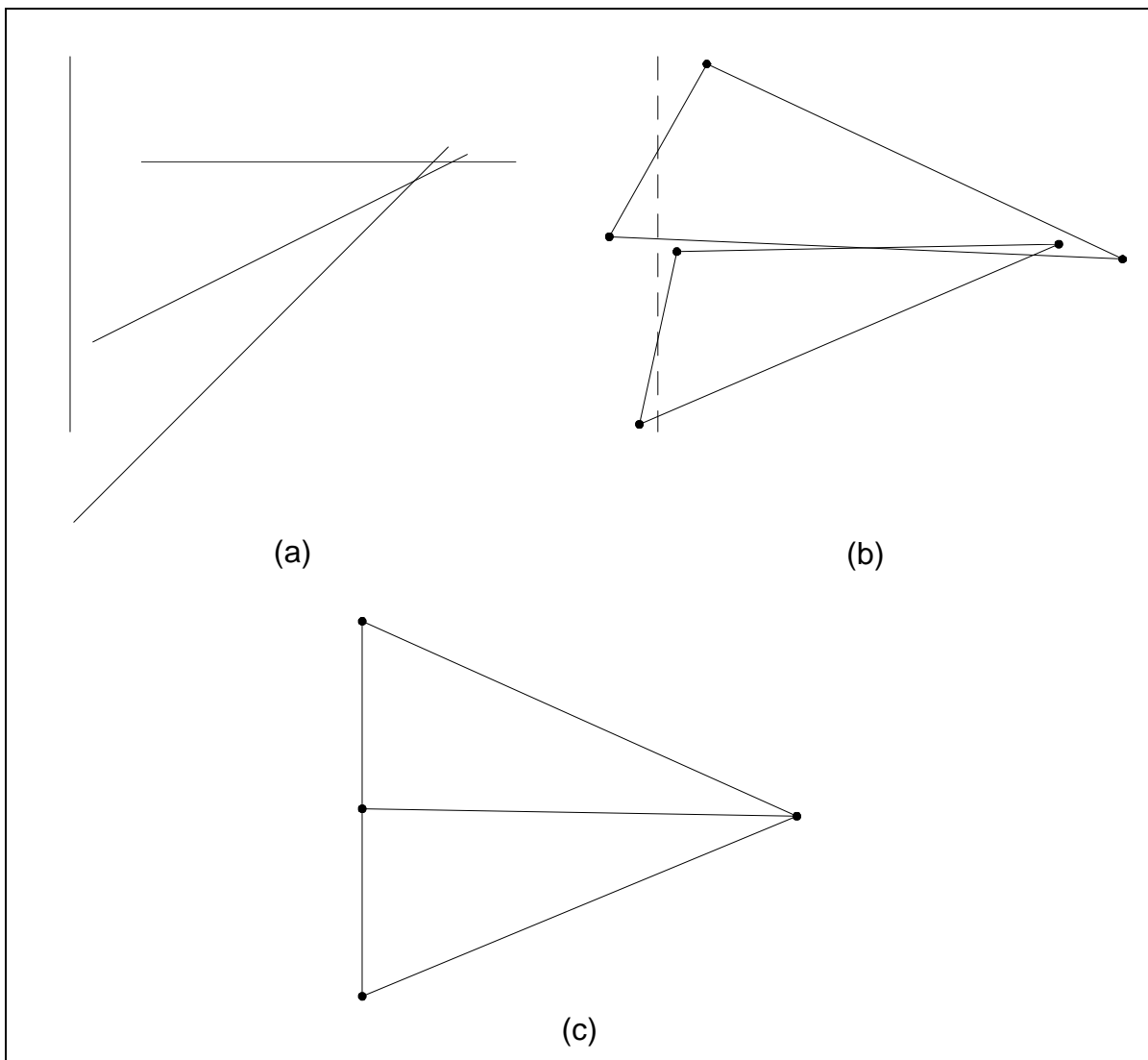


Figura 9.4 - Deformadas da placa triangular: (a) \mathbf{v}_e , (b) \mathbf{u}_e , (c) \mathbf{u}_c .

Para este campo de deslocamentos, tem-se $\varepsilon^2 = 0.5273$, o que é um majorante muito elevado. Tomando, simplesmente, $\mathbf{u}_c = \mathbf{0}$, obtém-se $U(\mathbf{e}_e) \leq 0.13875$.

Dado que os deslocamentos impostos são nulos, é fácil obter melhor fazendo

$$\mathbf{u}_{c,(1)}(\delta) = \mathbf{u}_{c,(2)}(\delta) = \begin{bmatrix} 0.15625x \\ -0.51625x \end{bmatrix} \delta \quad (9.19)$$

e minimizando

$$\pi_p(\mathbf{u}_c(\delta)). \quad (9.20)$$

O valor mínimo é obtido para $\delta = 0.19957$, para o qual $U(\sigma_e - \sigma_c) = 0.112993$.

Durante a elaboração desta tese, o autor colaborou na orientação de uma dissertação de Mestrado [MAY, 1996], na qual este método de construção de um campo de deslocamentos compatível foi utilizado para obter um majorante do erro para malhas uniformes de superelementos de equilíbrio de grau um. Os valores nodais dos deslocamentos, a utilizar em (9.13), foram obtidos através da média aritmética dos valores nodais.

9.3.3. Cálculo da solução compatível a partir dos deslocamentos dos lados

Para algumas funções de interpolação de deslocamento $\tilde{\phi}$, tais como as funções de interpolação clássicas de grau 1 e 2 em triângulos e de grau 1, 2 e 3 em tetraedros, todos os nós estão localizados nos lados dos elementos. Utilizando funções deste tipo em (9.13), os valores nodais dos deslocamentos podem ser obtidos exclusivamente a partir de um campo de deslocamentos dos lados compatível, \mathbf{v}_c . Este campo pode ser obtido apenas com base nos deslocamentos dos lados correspondentes à solução de elementos finitos, \mathbf{v}_e . Nos nós onde \mathbf{v}_e é descontínuo, basta fazer a média dos valores obtidos a partir de cada um dos lados adjacentes ao nó e impor as eventuais condições de fronteira cinemáticas.

Esta alternativa tem a vantagem de não necessitar do cálculo de \mathbf{u}_e . Contudo, se existirem modos espúrios, \mathbf{v}_e e, portanto, o estimador de erro dependerão da amplitude destes. Além disso, como se referiu em 4.5.2, a solução obtida para o campo de tensões pode ser exacta sem que os deslocamentos \mathbf{v}_e o sejam. Portanto, o estimador de erro que se obtém pode não ser nulo quando a solução de elementos finitos é exacta.

9.4. Resolução de um problema de Neumann local

Seja $T_{(l)}$ o conjunto dos elementos finitos que têm o nó l como vértice. É possível obter uma melhor aproximação do campo de tensões em $T_{(l)}$ resolvendo, através de um refinamento dos $\Omega_{(i)} \subset T_{(l)}$, o problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^* \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f} &= \mathbf{0} \text{ em } T_{(l)}, \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{v}_\Gamma \text{ em } \partial T_{(l)} \cap \Gamma_u \text{ e } \mathbf{N}_{(j),(i)} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{(i)} + \mathbf{N}_{(j),(k)} \boldsymbol{\sigma}_{e,(k)} = \bar{\mathbf{t}}_{(j)} \text{ nos } \Gamma_{(j)} \subset \partial T_{(l)} \setminus \Gamma_u. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Nesta última equação, $\Omega_{(i)} \subset T_{(l)}$ e $\Omega_{(k)} \not\subset T_{(l)}$. O indicador de erro associado a $T_{(l)}$ é

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{T_{(i)}} (\sigma_e - \tilde{\sigma})^T f(\sigma_e - \tilde{\sigma}) d\Omega. \quad (9.22)$$

O estimador do erro global é obtido a partir de todos os indicadores calculados, tal como para indicadores elementares. Pode ser obtido um indicador de erro para o elemento $\Omega_{(i)}$ a partir das contribuições de $\Omega_{(i)}$ para todos os indicadores associados aos $T_{(i)} \supset \Omega_{(i)}$.

Este método de obter o indicador de erro tem a vantagem de não necessitar do cálculo do campo de deslocamentos incompatível correspondente à solução equilibrada, u_e . Tem a desvantagem de fornecer sempre um minorante do erro.

9.5. Construção de um campo de tensões contínuo

O campo de tensões correspondente à solução de elementos finitos, apesar de equilibrado, apresenta, em geral, descontinuidades.

A partir de funções de interpolação do tipo das usadas nos elementos finitos de deslocamento e de valores nodais das componentes do tensor das tensões, é possível obter um campo de tensões contínuo

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\phi} \hat{\sigma}_{ij}. \quad (9.23)$$

Para elementos com funções de aproximação de tensões de grau p , devem usar-se funções de interpolação $\tilde{\phi}$ de grau p ou $p+1$.

Este processo deve ser aplicado separadamente a cada região material, pois o campo de tensões não é contínuo nos pontos onde há descontinuidades materiais.

Embora seja possível impor as condições de fronteira estáticas ao campo de tensões contínuo, não deverá haver grande vantagem em fazê-lo, pois σ_e já obedece as essas condições.

Como indicador do erro, utiliza-se

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} (\sigma_e - \tilde{\sigma}) f(\sigma_e - \tilde{\sigma}) d\Omega. \quad (9.24)$$

Os valores nodais das componentes do tensor das tensões podem ser obtidos, a partir da solução de elementos finitos, utilizando um dos métodos utilizados para obter campos de tensões contínuos, a partir de soluções de elementos finitos compatíveis, descritos em 8.6.2, 8.6.3, 8.6.4 e 8.6.6. De entre

estes métodos, os descritos em 8.6.2 e 8.6.3 obrigam a formar e resolver um sistema de equações da ordem de grandeza do sistema correspondente à solução de elementos finitos. Portanto, não parecem trazer vantagens em relação à análise dual global, descrita em 9.2.

Este método de obter o indicador de erro tem a vantagem de não necessitar do cálculo de \mathbf{u}_e . Pode fornecer um majorante ou um minorante do erro.

9.6. Construção de um campo de deformações contínuo

O campo de deformações correspondente à solução de elementos finitos apresenta, em geral, descontinuidades. Além disso, para elementos de grau superior a um, em geral, não obedece às equações de compatibilidade de St Venant.

A partir de funções de interpolação do tipo das usadas nos elementos finitos de deslocamento e de valores nodais das componentes do tensor das deformações, é possível obter um campo de deformações contínuo

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\phi} \hat{\varepsilon}_{ij}, \quad (9.25)$$

Para elementos com funções de aproximação de tensões de grau p , devem usar-se funções de interpolação $\tilde{\phi}$ de grau p ou $p+1$.

Este processo deve ser aplicado separadamente a cada região material, pois o campo de deformações não é contínuo nos pontos onde há descontinuidades materiais.

A interpolação pode também ser utilizada para impor, *a priori*, as condições de fronteira cinemáticas: a anulação de $\mathbf{G1}$ e $\mathbf{G2}$ em Γ_u para o campo de deformações contínuo.

Note-se que, se o campo de deformações contínuo for de grau superior a um, não obedecerá, em geral, às equações de compatibilidade de St Venant.

Como indicador do erro, utiliza-se

$$\varepsilon_{(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} (\varepsilon_e - \tilde{\varepsilon}) \mathbf{k} (\varepsilon_e - \tilde{\varepsilon}) d\Omega. \quad (9.26)$$

Quanto à obtenção dos valores nodais das componentes do tensor das deformações e às características deste método, podem fazer-se considerações análogas às de 9.5.

9.7. Utilização explícita dos defeitos de compatibilidade

Neste trabalho, o indicador de erro utilizado para os elementos finitos de equilíbrio é um indicador baseado na utilização explícita dos defeitos de compatibilidade, descritos em 4.5.2.

Os defeitos de compatibilidade considerados são \mathbf{r}_e , em cada $\Omega_{(i)}$, $\mathbf{J1}_{e,(i)}$ e $\mathbf{J2}_{e,(i)}$, em cada $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$, $\mathbf{G1}_e$ e $\mathbf{G2}_e$, análogos de $\mathbf{J1}_{e,(i)}$ e de $\mathbf{J2}_{e,(i)}$ em Γ_u .

Admite-se que $\mathbf{J1}_{e,(i)}$ e $\mathbf{J2}_{e,(i)}$ são divididos igualmente pelos elementos adjacentes a $\Gamma_{(j)}$.

Para um dado campo de extensões exacto e um dado campo de extensões aproximado, ε^2 é uma função linear de E. Para obter um indicador de erro elementar dimensionalmente correcto, a fórmula geral é

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(i)}^2 = & c_1 a h_{(i)}^4 \|\mathbf{r}_e\|_{l,(i)}^2 + c_2 a \sum_j \left(h_{(j)} \left\| \frac{1}{2} \mathbf{J1}_{e,(i)} \right\| \right)^2 + c_2 a \sum_k \left(h_{(k)} \|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)} \right)^2 + \\ & + c_3 a \sum_j \left(h_{(j)}^3 \left\| \frac{1}{2} \mathbf{J2}_{e,(i)} \right\| \right)^2 + c_3 a \sum_k \left(h_{(k)}^3 \|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)} \right)^2, \end{aligned} \quad (9.27)$$

em que os somatórios em j são extensivos aos $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$ do elemento $\Omega_{(i)}$ e os somatórios em k são extensivos aos $\Gamma_{(k)} \subset \Gamma_u$ do elemento $\Omega_{(i)}$.

As normas utilizadas em (9.27) têm de ser invariantes.

Em 3D, utiliza-se

$$\|\mathbf{r}_e\|_{l,(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} \left(2r_{xyz}^2 + 2r_{xyyz}^2 + 2r_{xzyz}^2 + r_{xxyy}^2 + r_{xxzz}^2 + r_{yyzz}^2 \right) d\Omega \quad (9.28)$$

e

$$\left\| \frac{1}{2} \mathbf{J1}_{e,(i)} \right\| \right)^2 = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_{(j)}} \left(J1_{t_1 t_1}^2 + 2J1_{t_1 t_2}^2 + J1_{t_2 t_2}^2 \right) d\Gamma. \quad (9.29)$$

As definições de $\|\mathbf{J2}_e\|_{l,(k)}^2$, $\|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2$ e $\|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)}^2$ são análogas a (9.29). A função integranda em (9.28) foi escolhida tendo em conta o número de repetições dos termos não nulos do tensor \mathbf{r}_e , tendo-se verificado que era um invariante. A função integranda em (9.29) é facilmente identificável como um invariante dum tensor de segunda ordem.

Em 2D, utiliza-se

$$\|\mathbf{r}_e\|_{l,(i)}^2 = \int_{\Omega_{(i)}} r^2 d\Omega \quad (9.30)$$

e

$$\left\| \frac{1}{2} \mathbf{J1}_{e,(i)} \right\|_{l,(i)}^2 = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{J1}_{tt}^2 d\Gamma. \quad (9.31)$$

As definições de $\|\mathbf{J2}_e\|_{l,(k)}^2$, $\|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2$ e $\|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)}^2$ são análogas a (9.31). As funções integrandas em (9.30) e (9.31) são invariantes.

Para c_1 , c_2 e c_3 serem adimensionais, a deve ter dimensões de tensão. Uma alternativa seria utilizar o maior valor próprio da matriz de rigidez infinitesimal \mathbf{k} :

$\frac{E}{1-\nu}$, para estados planos de tensão e $\frac{E}{1-2\nu}$, em elasticidade tridimensional. No entanto, a experiência parece indicar que se obtém um melhor estimador do erro

global utilizando $a = \frac{E}{1-\nu^2}$, para estados planos de tensão e $a = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, em

elasticidade tridimensional. Como se pode verificar, a partir das expressões (2.28) e (2.29), esta alternativa corresponde à variação da energia de deformação com ν para um estado de deformação simples, enquanto o maior valor próprio de \mathbf{k} corresponde à variação da energia de deformação com ν para um estado de deformação uniforme.

Os termos h devem ter dimensões de comprimento. Para o termo correspondente ao integral de volume, utiliza-se $h_{(i)}^4 = V_{(i)}^{4/D}$. Experiências realizadas com versões preliminares do indicador parecem mostrar que esta escolha conduz a um melhor estimador do erro global do que o que se obteria tomando para $h_{(i)}$ o valor da maior distância entre dois vértices do elemento $\Omega_{(i)}$. Para os termos correspondentes a $\|\mathbf{J1}_e\|_{l,(i)}^2$ e $\|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2$, utiliza-se $h_{(i)} = V_{(i)} / A_{(i)}$, valor que é proporcional à "altura" do elemento. Como alternativa, poder-se-ia fazer $h_{(i)} = A_{(i)}^{1/(D-1)}$ ou tomar para $h_{(i)}$ o valor da maior distância entre dois vértices do lado $\Gamma_{(i)}$; experiências realizadas com versões preliminares do indicador parecem mostrar que estas alternativas conduzem a um pior estimador do erro global. Para os termos correspondentes a $\|\mathbf{J2}_e\|_{l,(i)}^2$ e $\|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)}^2$, utiliza-se $h_{(i)}^3 = V_{(i)} A_{(i)}^{3-D}$, o que corresponde a multiplicar a "altura" do elemento por uma potência da "base".

Poder-se-iam utilizar as alternativas já referidas para os termos correspondentes a $\|\mathbf{J1}_e\|_{l,(j)}^2$ e $\|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2$ e, ainda, multiplicar $V_{(j)} / A_{(j)}$ pelo quadrado do valor da maior distância entre dois vértices do lado $\Gamma_{(j)}$. Experiências realizadas com versões preliminares do indicador parecem mostrar que estas alternativas conduzem a um pior estimador do erro global.

Os valores de c_1 , c_2 e c_3 , para elementos triangulares de malhas refinadas adaptativamente, indicados na tabela 9.1, foram determinados experimentalmente, pelo processo que se descreve em seguida.

grau	c_1	c_2	c_3
1	-	1.67×10^{-1}	1.66×10^{-2}
2	1.03×10^{-3}	2.03×10^{-1}	0
3	1.48×10^{-4}	7.78×10^{-2}	2.56×10^{-6}

Tabela 9.1

Para três placas, com diferentes valores do coeficiente de Poisson, foi efectuado um refinamento adaptativo, com base no indicador dual descrito em 9.2. As três placas foram as descritas em 13.4 e 13.5 e uma consola quadrada com $\nu = 0.3$, uniformemente carregada no lado superior. Para as malhas finais, foram calculados, para cada elemento:

$$R_{(j)}^2 = ah_{(j)}^4 \|\mathbf{r}_e\|_{l,(j)}^2; \quad (9.32)$$

$$J1_{(j)}^2 = a \sum_j \left(h_{(j)} \left\| \frac{1}{2} \mathbf{J1}_{e,(j)} \right\| \right)^2 + a \sum_k \left(h_{(k)} \|\mathbf{G1}_e\|_{l,(k)}^2 \right); \quad (9.33)$$

$$J2_{(j)}^2 = a \sum_j \left(h_{(j)} \left\| \frac{1}{2} \mathbf{J2}_{e,(j)} \right\| \right)^2 + a \sum_k \left(h_{(k)} \|\mathbf{G2}_e\|_{l,(k)}^2 \right). \quad (9.34)$$

Para cada uma dessas malhas, foram também calculados:

$$R^2 = \sum_{i=1}^{NE} R_{(i)}^2; \quad (9.35)$$

$$J1^2 = \sum_{i=1}^{NE} J1_{(i)}^2; \quad (9.36)$$

$$J2^2 = \sum_{i=1}^{NE} J2_{(i)}^2. \quad (9.37)$$

Note-se que, para elementos de grau um, $R^2 = R_{(i)}^2 = 0$.

Para cada caso, o valor "exacto" do erro global, $\|\mathbf{e}\|_E$, foi calculado com base numa estimativa de $\|\mathbf{u}\|_E$, obtida utilizando elementos de grau quatro e o processo de extrapolação dual descrito em 7.5. O valor "exacto" do erro elementar, $\|\mathbf{e}\|_{E,(i)}$, foi calculado a partir de uma malha de elementos compatíveis de grau uma unidade acima do grau dos elementos de equilíbrio.

Os valores de c_1 , c_2 e c_3 são dados por

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a \\ c_b \\ c_c \end{bmatrix} c_d. \quad (9.38)$$

Os valores de c_a , c_b e c_c foram determinados obtendo uma solução de mínimos quadrados de:

$$\begin{bmatrix} R_{(1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J1_{(1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J2_{(1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{(NE_1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J1_{(NE_1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J2_{(NE_1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{(1),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J1_{(1),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J2_{(1),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{(NE_n),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J1_{(NE_n),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J2_{(NE_n),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ c_b \\ c_c \end{bmatrix} =$$

(9.39)

$$= \begin{bmatrix} \|\mathbf{e}\|_{E,(1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ \vdots \\ \|\mathbf{e}\|_{E,(NE_1),1}^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ \vdots \\ \|\mathbf{e}\|_{E,(1),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \\ \vdots \\ \|\mathbf{e}\|_{E,(NE_n),n}^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \end{bmatrix}.$$

Cada equação está multiplicada por $\|\sigma_e\|_E^2/\|\mathbf{e}\|_E^4$, de modo a dar maior peso aos casos com um menor erro relativo. O valor de c_d foi determinado obtendo uma solução de mínimos quadrados de:

$$\begin{bmatrix} R_1^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J1_1^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 & J2_1^2 \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^4 \\ R_2^2 \|\sigma_e\|_{E,2}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,2}^4 & J1_2^2 \|\sigma_e\|_{E,2}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,2}^4 & J2_2^2 \|\sigma_e\|_{E,2}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,2}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_n^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J1_n^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 & J2_n^2 \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ c_b \\ c_c \end{bmatrix} c_d = \begin{bmatrix} \|\sigma_e\|_{E,1}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,1}^2 \\ \|\sigma_e\|_{E,2}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,2}^2 \\ \vdots \\ \|\sigma_e\|_{E,n}^2 / \|\mathbf{e}\|_{E,n}^2 \end{bmatrix}. \quad (9.40)$$

Deste modo, procurou-se obter um indicador de erro elementar que fosse um bom indicador de refinamento e, simultaneamente, permitisse obter um bom estimador do erro global.

Em princípio, nenhum dos coeficientes deveria ser nulo. Para elementos de grau dois, a aplicação directa do método descrito fornecia um valor negativo para um dos coeficientes, o que é ainda menos razoável. Por isso, arbitrou-se um valor nulo para esse coeficiente e aplicou-se o método descrito para calcular os restantes dois.

Este método de obter o indicador de erro tem a vantagem de não necessitar do cálculo de \mathbf{u}_e . A forma utilizada para obter os valores de c_1 , c_2 e c_3 implica que o estimador possa ser um majorante ou um minorante do erro.

A qualidade do estimador foi testada, nas mesmas três placas, em duas sequências de malhas refinadas adaptativamente, uma com base no indicador dual descrito em 9.2, a outra no indicador (9.27). Para duas das placas, as malhas iniciais das duas sequências foram diferentes. Para cada grau, foi elaborado um histograma de

$$\max\left(\frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{e}\|_E^2}, \frac{\|\mathbf{e}\|_E^2}{\varepsilon^2}\right) = \max\left(\theta^2, \frac{1}{\theta^2}\right). \quad (9.41)$$

Estes histogramas estão representados nas figuras 9.5, 9.6 e 9.7, onde se indica, também, quantos casos correspondem a majorantes e quantos a minorantes.

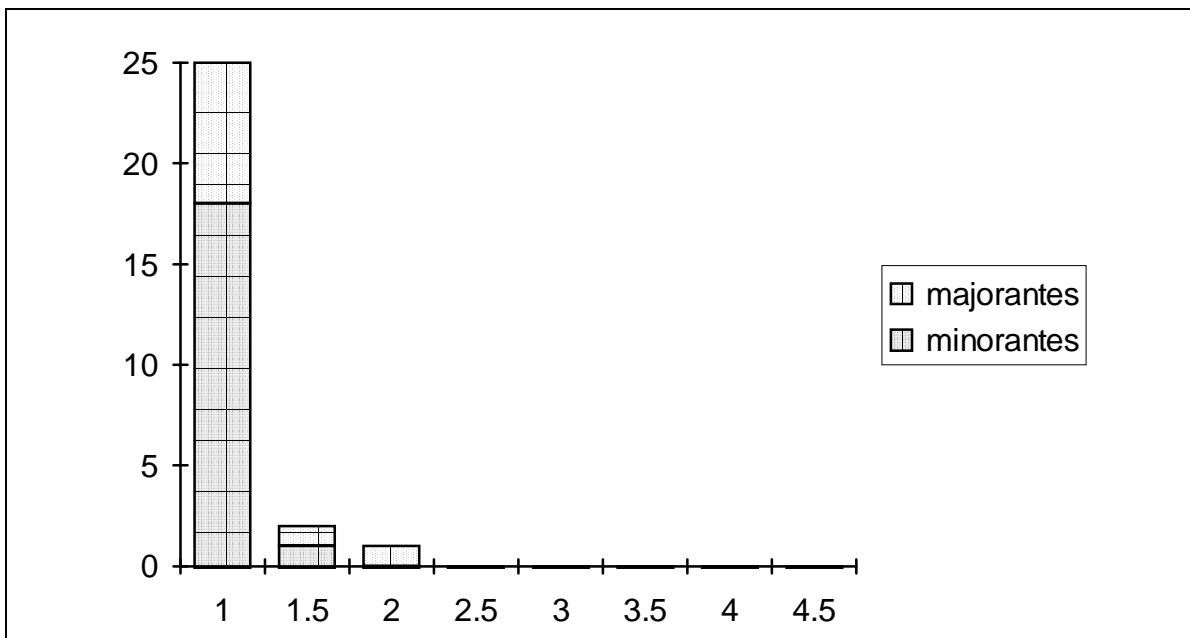


Figura 9.5 - Histograma de $\max(\theta^2, 1/\theta^2)$ para elementos de grau 1.

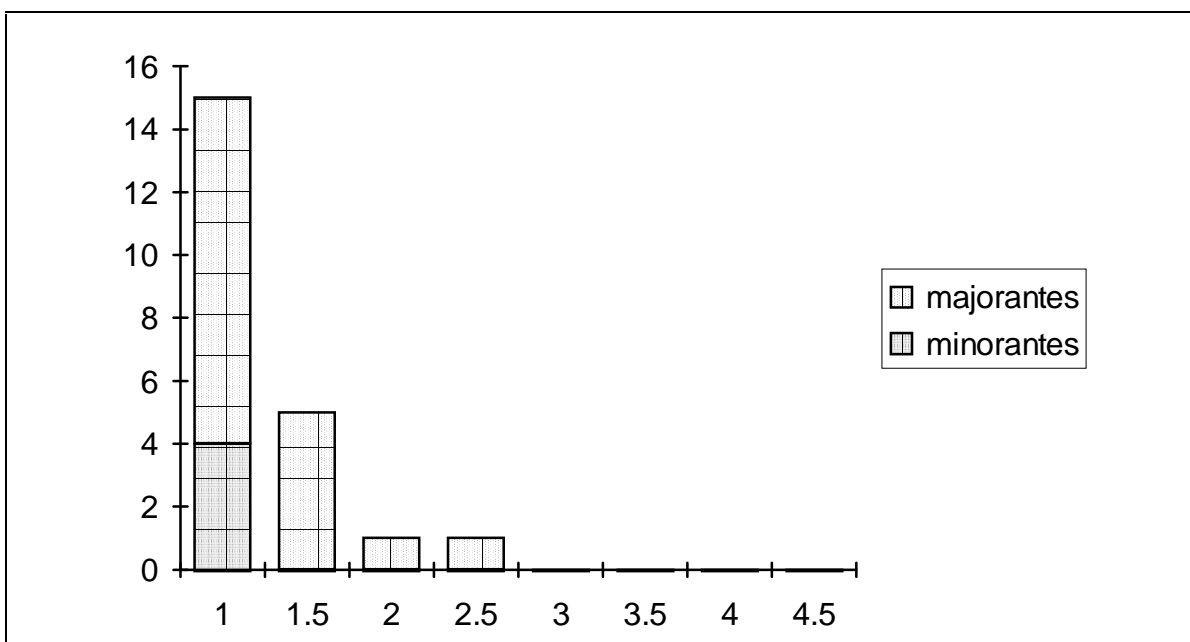


Figura 9.6 - Histograma de $\max(\theta^2, 1/\theta^2)$ para elementos de grau 2.

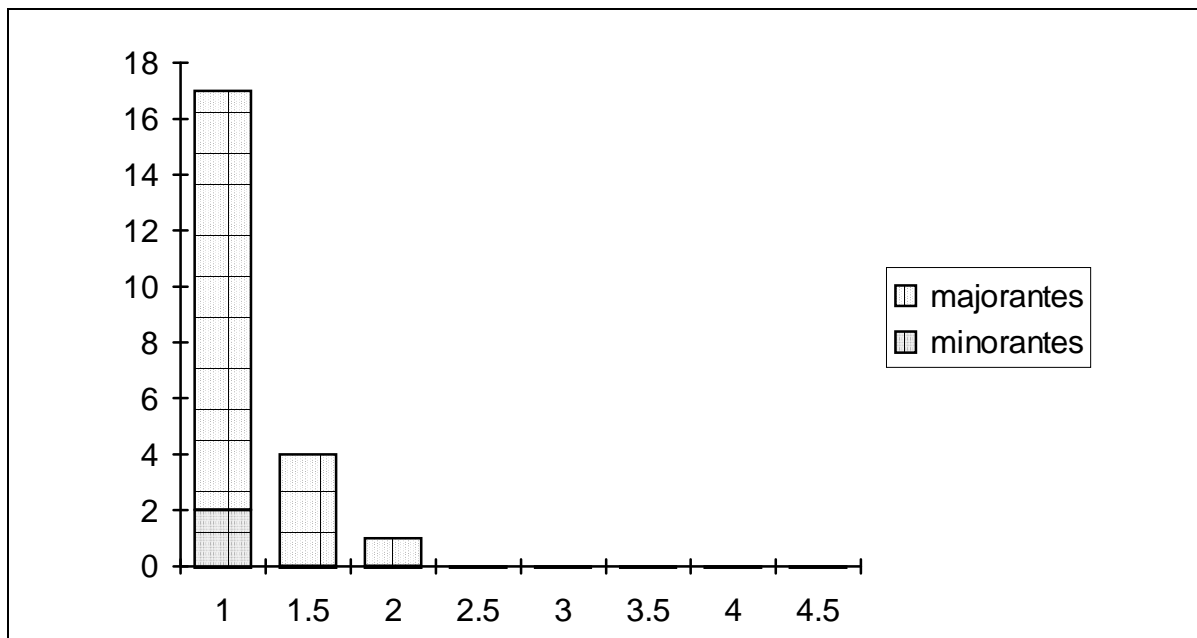


Figura 9.7 - Histograma de $\max(\theta^2, 1/\theta^2)$ para elementos de grau 3.

Estes histogramas parecem indicar que a qualidade deste estimador de erro é boa, para malhas refinadas adaptativamente. Contudo, seria conveniente dispor de uma justificação formal para as várias opções efectuadas quanto aos valores de a , $h_{(i)}$, $h_{(j)}$, c_1 , c_2 e c_3 . Além disso, os valores de c_1 , c_2 e c_3 utilizados não serão provavelmente os mais adequados para malhas de superelementos.

10. Indicadores de refinamento

10.1. Introdução

Os indicadores de refinamento indicam as regiões onde o aumento do número de graus de liberdade é mais adequado para a diminuição do erro.

Todos os indicadores de erro podem ser utilizados como indicadores de refinamento. Mesmo os indicadores de erro que levam a estimadores de erro inaceitáveis são geralmente indicadores de refinamento relativamente bons.

Em contrapartida, algoritmos adaptativos que não tenham em consideração a norma energética do erro podem levar à convergência para uma solução errada. Por isso, neste trabalho, os indicadores de erro são utilizados como indicadores de refinamento. Deste modo, este capítulo constitui apenas uma retrospectiva dos indicadores de refinamento que não são indicadores de erro.

Dado que a optimalidade da malha depende da distribuição do erro, estes indicadores de refinamento são, em geral, menos aptos para a obtenção de malhas ótimas do que os indicadores de erro. Contudo, permitem quase sempre obter malhas melhores do que as malhas uniformes. Podem ser utilizados para melhorar a malha, na maior parte dos algoritmos adaptativos, da mesma maneira que os indicadores de erro. No entanto, não fornecem qualquer informação sobre o valor do erro nem, portanto, qualquer critério para terminar o processo de refinamento.

10.2. Análise de malhas com a mesma densidade geradas aleatoriamente

SUHARA e FUKUDA [1972] utilizaram a variação dos valores das componentes do tensor das tensões num dado local, obtidas a partir de malhas com a mesma densidade mas geradas aleatoriamente, como indicador do erro

dessas componentes nesse local. Como este indicador tem um custo excessivamente elevado, não voltou a receber qualquer atenção.

10.3. Variação da solução no domínio

OLIVEIRA [1973] sugeriu que os elementos fossem dispostos ao longo das isoenergéticas, ou seja, das linhas de igual densidade de energia de deformação. Nesta situação, a variação da densidade de energia de deformação é igual em cada elemento, sendo a malha mais fina onde o gradiente da densidade de energia de deformação é maior.

CAREY [1976] utilizou directamente a variação da solução numa dada zona como indicador do refinamento nessa zona.

MELOSH e MARCAL [1977] sugeriram que a diferença entre a energia de deformação dum elemento e a energia de deformação que seria obtida apenas com os modos de tensões constantes fosse utilizada como indicador de refinamento. Na prática, utilizaram a diferença entre a densidade de energia de deformação num ponto do elemento e a densidade de energia de deformação no centróide do elemento, que designaram por diferença de energia específica.

SHEPHARD *et al* [1980] utilizaram a variação da densidade de energia de deformação como indicador de refinamento.

Qualquer indicador baseado na variação da solução tenderá para valores infinitos junto às singularidades.

10.4. Variação da solução entre refinamentos sucessivos

CAREY [1976] sugeriu que a variação das tensões, num ponto, entre dois refinamentos sucessivos, fosse utilizada como indicador do erro nas tensões nesse ponto. Este indicador tende para valores infinitos junto às singularidades.

YOKOYAMA [1985] dividiu o valor da variação numa componente do tensor das tensões, num ponto, entre dois refinamentos sucessivos, pelo valor máximo dessa componente no domínio, de modo a obter um indicador do erro relativo nessa componente. Quando existem singularidades, este indicador tende para só não ser nulo junto da singularidade.

10.5. Defeitos de Equilíbrio

Desde o início da utilização de elementos finitos compatíveis que os defeitos de equilíbrio foram utilizados como indicadores de refinamento.

Os indicadores deste tipo podem ser escritos na forma genérica

$$\varepsilon_{(i)}^2 = c_1 R_{(i)} + c_2 T_{(i)}, \quad (10.1)$$

em que $R_{(i)}$ depende do resíduo no interior do elemento, $T_{(i)}$ depende das descontinuidades nos lados dos elementos e tanto c_1 como c_2 são constantes.

Para malhas de elementos finitos de grau par, pode utilizar-se $c_1 = 1$, $c_2 T_{(i)} = 0$ e

$$R_{(i)} = h^2 \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{r}_c^T \mathbf{r}_c \, d\Omega. \quad (10.2)$$

Para malhas de elementos finitos de grau ímpar, pode utilizar-se $c_1 R_{(i)} = 0$, $c_2 = 1$ e

$$T_{(i)} = \frac{h}{2} \sum_j \int_{\Gamma_{(j)}} \mathbf{J}_{c,(j)}^T \mathbf{J}_{c,(j)} \, d\Gamma + h \sum_k \int_{\Gamma_{(k)}} \mathbf{G}_c^T \mathbf{G}_c \, d\Gamma, \quad (10.3)$$

em que o somatório em j é extensivo aos $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$ do elemento $\Omega_{(i)}$ e o somatório em k é extensivo aos $\Gamma_{(k)} \subset \Gamma_t$ do elemento $\Omega_{(i)}$. Com esta escolha, os indicadores de refinamento irão convergir do mesmo modo que os indicadores de erro referidos em 8.4.

DUNAVANT e SZABO [1983] apresentaram expressões para $R_{(i)}$ e $T_{(i)}$ para malhas compatíveis em que o grau dos elementos não é uniforme, tendo utilizado

$$c_1 = 1 \text{ e } c_2 = \frac{\sum_{i=1}^{NE} R_{(i)}}{\sum_{i=1}^{NE} T_{(i)}}. \quad (10.4)$$

10.6. Densidade média do erro

CAREY e HUMPHREY [1981] utilizaram o valor do indicador de erro $\varepsilon_{(i)}$ dividido pelo volume do elemento como indicador de refinamento.

LADEVÈZE e LEGUILLON [1983] utilizaram como indicador de refinamento

$$\varepsilon_{(i)}^2 \frac{V}{V_{(i)}}. \quad (10.5)$$

Qualquer um destes indicadores tenderá para valores infinitos junto às singularidades.

10.7. Erro de interpolação

Tendo em conta o que foi descrito em 8.8, desde que se obtenha uma aproximação das derivadas de ordem $p+1$, pode-se utilizar como indicador de refinamento o valor

$$h_{(i)}^p |\tilde{\mathbf{u}}|_{p+1,(i)}, \quad (10.6)$$

sem ser necessário estimar a constante C em (8.46).

Por esta razão, a teoria do erro de interpolação é mais utilizada para obter indicadores de refinamento do que para obter indicadores de erro.

A teoria do erro de interpolação pode também ser utilizada para obter um indicador da norma de máximo do erro do campo de tensões num elemento, o qual pode ser utilizado como indicador de refinamento [ERIKSSON e JOHNSON, 1988].

11. Custos, *feedback* e adaptatividade

11.1. Custos de obtenção da solução

O custo total da obtenção de uma solução através de um programa de elementos finitos é a soma dos custos de diversas operações:

- geração e refinamento de malhas;
- montagem de sistemas algébricos;
- resolução de sistemas algébricos;
- estimação do erro;
- determinação do refinamento a efectuar;
- obtenção de informação a partir dos dados armazenados;
- transferência de informação entre malhas diferentes;
- apresentação de resultados.

Estes custos irão depender do grau de automatização de todo o processo, dos métodos utilizados para efectuar cada operação, da estrutura de dados e da estratégia de refinamento.

As estruturas de dados em árvore são, provavelmente, as mais adequadas para as malhas obtidas por refinamento [RHEINBOLT e MESZTENYI, 1980].

Os métodos iterativos de resolução de sistema algébrico podem ser mais eficientes do que os directos, se a solução actual for utilizada para obter os valores iniciais da solução seguinte [BABUSKA, 1976] [CAREY e HUMPHREY, 1981]. Além disso, para as malhas iniciais, em que o erro de discretização é elevado, pode ser fixado um número de iterações baixo, pois a solução do sistema não necessita de uma precisão muito elevada. A utilização de elementos finitos hierárquicos permite reduzir o custo da formação e resolução do sistema algébrico [PEANO e RICCIONI, 1978]. Se forem utilizados elementos finitos hierárquicos, a utilização da solução anterior como solução inicial é extremamente simples e a matriz de rigidez é melhor condicionada [ZIENKIEWICZ *et al*, 1983].

As sequências de malhas obtidas através de refinamentos sucessivos podem ser utilizadas na resolução dos sistemas algébricos através de métodos multimalha [BRANDT,1977] [NICOLAIDES,1977] [BANK e SHERMAN, 1981], especialmente se cada malha contiver estritamente as anteriores. As malhas e matrizes obtidas quando o refinamento é hierárquico são muito adequadas para a utilização de métodos multimalha [ZIENKIEWICZ e CRAIG, 1986].

Num programa de elementos finitos auto-adaptativo, certas operações respeitantes a diferentes partes do domínio podem ser executadas em paralelo. O cálculo das matrizes elementares, a resolução do sistema algébrico, o cálculo dos indicadores de erro e o refinamento são exemplos de operações em que isso poderá ser possível, com maior ou menor dificuldade, dependendo dos algoritmos e estruturas de dados utilizados [ZAVE e RHEINBOLT, 1979]. Se a estrutura de dados permitir a divisão automática do domínio em subestruturas, isso poderá ser facilmente utilizado na resolução do sistema algébrico e na paralelização do algoritmo. KELA *et al* [1987] utilizaram uma estrutura de dados em árvore, a que corresponde uma subdivisão espacial recursiva [YERRY e SHEPHARD, 1983, 1984], para fazer uma divisão recursiva em subestruturas.

11.2. Métodos com *feedback* e métodos adaptativos

Nas aplicações práticas, pretende-se geralmente obter uma solução para a qual:

$$\eta_h \leq \bar{\eta}, \quad (11.1)$$

em que $\bar{\eta}$ é uma tolerância pré-definida, geralmente igual a 5% ou 10% e:

$$\eta_h = \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{u}_c\|_E}, \quad \eta_h = \frac{\varepsilon}{\min(\|\mathbf{u}_c\|_E, \|\boldsymbol{\sigma}_e\|_E)} \quad \text{ou} \quad \eta_h = \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{\sigma}_e\|_E}, \quad (11.2)$$

conforme se utilizem apenas elementos compatíveis, se faça uma análise dual global ou se utilizem apenas elementos de equilíbrio.

O algoritmo:

1. Gerar uma malha inicial
2. Resolver a malha
3. Estimar o erro
4. Se $\eta_h \leq \bar{\eta}$, parar
5. Refinar uniformemente a malha

6. Estimar o custo de resolver a malha
7. Se resolver a malha faz ultrapassar o custo total máximo admitido, parar
8. Ir para 2

permite obter a precisão desejada, se isso for possível dentro do custo máximo estabelecido. Em muitos casos, devido a limitações dos meios de cálculo, não é possível obter a precisão pretendida através dum algoritmo deste tipo. Nos casos em que é possível, o custo total é geralmente muito elevado.

O algoritmo:

1. Gerar uma malha inicial
2. Resolver a malha
3. Estimar o erro
4. Se $\eta_h \leq \bar{\eta}$, parar
5. Calcular indicadores de refinamento
6. Melhorar a malha com base nos indicadores
7. Estimar o custo de resolver a malha
8. Se resolver a malha faz ultrapassar o custo total máximo admitido, parar
9. Ir para 2

permite, em princípio, obter melhores resultados. Note-se que, para garantir que a precisão pretendida vai ser atingida, mesmo não havendo limite de custo, é necessário que a estratégia para melhorar a malha assegure um aumento mínimo do número de graus de liberdade em cada iteração.

Qualquer um destes algoritmos utiliza os resultados intermédios para determinar o caminho a seguir. São, portanto, algoritmos com *feedback*. Um algoritmo com *feedback* será considerado adaptativo se for óptimo em relação a um dado critério de desempenho [RHEINBOLT, 1983]. O algoritmo será óptimo se o seu desempenho nunca for inferior ao de qualquer outro para todos os problemas duma determinada classe.

O critério de desempenho de maior interesse em problemas de engenharia é o do custo total. Este critério é também aquele para o qual é mais difícil demonstrar a optimalidade. Por isso, são utilizados outros critérios, tais como o da taxa de convergência, o do número de graus de liberdade da última malha, o do erro para um dado número de graus de liberdade, o do número de malhas geradas até atingir a tolerância pretendida ou o do erro ao fim de um dado número de malhas.

O máximo valor da taxa de convergência, para uma dada versão - h , p , ou hp - do método dos elementos finitos, é atingido para uma sequência de malhas óptimas. Em cada uma destas malhas, o número de graus de liberdade é mínimo, para o erro obtido. O custo associado a cada malha pode, geralmente, ser considerado uma função crescente do número de graus de liberdade. Para vários

algoritmos, o custo total não é muito superior ao custo associado à última malha. Por estas razões, o critério da máxima taxa de convergência, para uma dada versão do método dos elementos finitos, é o mais utilizado para definir a adaptatividade e é o critério utilizado neste trabalho.

GAGO et al [1983] recomendaram, como medida da validade duma estratégia de refinamento, que o custo total de todo o processo não deveria ser superior a duas vezes o custo total da malha final. Admitindo que a taxa de convergência é próxima da óptima, a minimização do custo total é geralmente tentada por uma de duas vias, muitas vezes contraditórias.

Na primeira, tenta-se que o custo associado a cada malha seja mínimo, recorrendo a métodos iterativos e utilizando estruturas de dados que permitam utilizar facilmente a informação relativa às malhas anteriores. Os métodos multimalha, que utilizam as malhas anteriores na resolução do sistema algébrico são, provavelmente, os mais eficientes dentro desta via.

Na segunda, tenta-se que o número de malhas a analisar seja mínimo, de modo a que o custo associado à malha final seja preponderante. É esta a via seguida neste trabalho.

Em qualquer das vias, pretende-se que o cálculo do estimador do erro tenha um custo reduzido face ao da obtenção da solução correspondente, o que geralmente é conseguido obtendo-o através de cálculos locais.

12. Estratégia adaptativa

12.1. Introdução

Neste capítulo, consideram-se apenas os procedimentos que, com base nos indicadores de erro ou nos indicadores de refinamento associados a uma malha e num método de refinamento, fornecem a malha seguinte.

Após uma revisão das estratégias adaptativas conhecidas, descreve-se a estratégia utilizada.

12.2. Estratégias adaptativas

12.2.1. Introdução

Algumas destas estratégias têm apenas por objectivo criar uma malha mais próxima de uma malha óptima, outras têm também o objectivo adicional de criar directamente uma malha para a qual a solução tenha uma dada precisão.

Uma malha é óptima, para um determinado número de graus de liberdade, quando a diminuição de erro que se obteria ao introduzir um grau de liberdade é a mesma para todas as maneiras de introduzir esse grau de liberdade [RACHOWICZ *et al*, 1989]. Quando o refinamento é hierárquico, isto corresponde à igualdade dos indicadores de erro associados aos possíveis graus de liberdade adicionais [ZIENKIEWICZ *et al*, 1983].

Em malhas de elementos do mesmo tipo, a optimalidade em relação ao número de graus de liberdade é obtida quando a energia do erro for igual em todos os elementos [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b]. É este o critério utilizado nas estratégias de alteração da posição dos nós, remalhagem e refinamento *h*. Nestes casos, como medida da optimalidade duma malha, pode ser usada [BABUSKA e RHEINBOLT, 1979]

$$\omega = \frac{\max_i \varepsilon_{(i)}^2}{\min_i \varepsilon_{(i)}^2}. \quad (12.1)$$

Como alternativas para a medida de optimalidade poder-se-iam utilizar

$$\frac{\max_i \varepsilon_{(i)}^2}{\varepsilon^2/NE}, \quad (12.2)$$

ou o coeficiente de dispersão de $\varepsilon_{(i)}^2$, dado por

$$\frac{\sqrt{NE \sum_{i=1}^{NE} (\varepsilon_{(i)}^2)^2 - \left(\sum_{i=1}^{NE} \varepsilon_{(i)}^2 \right)^2}}{\sum_{i=1}^{NE} \varepsilon_{(i)}^2}. \quad (12.3)$$

Note-se que, entre malhas com uma geometria próxima da óptima e com o mesmo número de graus de liberdade, os valores do erro e do estimador do erro variam muito pouco [BABUSKA e RHEINBOLT, 1979]. Por isso, estas medidas de optimalidade das malhas não são de grande importância.

Neste trabalho, a optimalidade das malhas é medida indirectamente: considera-se que uma sequência de malhas está tanto mais próxima duma sequência de malhas óptimas quanto mais próxima a taxa de convergência estiver da taxa óptima.

12.2.2. Estratégias de alteração da posição dos vértices

Neste tipo de estratégias, tenta-se obter a quase optimalidade da malha refinada através da equidistribuição do erro elementar.

DIAZ *et al* [1983] calcularam cada uma das novas coordenadas de cada vértice através de

$$x_{\text{novo}} = \frac{\sum_i \bar{x}_{(i)} \frac{\varepsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}}{\sum_i \frac{\varepsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}}, \quad (12.4)$$

em que o somatório é extensivo a todos os elementos adjacentes ao vértice, $\bar{x}_{(i)}$ é a coordenada do centro geométrico do elemento $\Omega_{(i)}$ e $V_{(i)}$ é o volume desse elemento. Note-se que, em 2D, se os elementos não forem rectangulares, a aplicação desta fórmula pode deslocar ligeiramente os vértices em casos em que o erro já está equidistribuído [KIKUCHI, 1987].

ZHONG [1991] utilizou

$$x_{\text{novo}} = \frac{\sum_i \bar{x}_{(i)} \frac{\epsilon_{(i)}^{D/(p+D/2)}}{V_{(i)}}}{\sum_i \frac{\epsilon_{(i)}^{D/(p+D/2)}}{V_{(i)}}}. \quad (12.5)$$

RODRIGUES e AZEVEDO [1995] utilizaram

$$x_{\text{novo}} = \frac{\sum_i \bar{x}_{(i)} \epsilon_{(i)}}{\sum_i \epsilon_{(i)}}. \quad (12.6)$$

Como foi referido em 5.2.2, qualquer que seja a forma de calcular as novas coordenadas de cada vértice, pode não ser possível obter a precisão pretendida com os graus de liberdade escolhidos *a priori*. Por esta razão, este método merece pouca atenção.

12.2.3. Estratégias de remalhagem

Neste tipo de estratégias, pretende-se obter uma nova malha, com o menor número de graus de liberdade possível, para a qual

$$\epsilon \leq \bar{\epsilon} = k \bar{\eta} \|\mathbf{u}_c\|_{\mathbb{E}}, \quad (12.7)$$

em que k é um factor destinado a controlar o número de iterações [JOHNSON e HANSBO, 1992].

ZIENKIEWICZ e ZHU [1987] utilizaram $k = 1$. BECKERS e ZHONG [1994] calcularam o número óptimo de iterações através da fórmula heurística

$$m = \log_{2p} \left(\frac{\eta_h}{\bar{\eta}} \right), \quad (12.8)$$

o que leva a

$$k\bar{\eta} = \left(\frac{\bar{\eta}}{\eta_h} \right)^{1/m} \eta_h. \quad (12.9)$$

COOREVITS *et al* [1995] utilizaram, para $p = 1$ e $p = 2$, $k = 1$, se $\eta_h \leq 4\bar{\eta}$ e $k\bar{\eta} = \eta_h/3$, no caso contrário. Uma abordagem alternativa consiste em impor que, em cada iteração, o número de elementos seja multiplicado por 2^D , o que leva a

$$k\bar{\eta} = \frac{\eta_h}{2^D}. \quad (12.10)$$

O menor número de graus de liberdade é obtido gerando uma malha em que, para cada um dos M elementos da malha [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b],

$$\varepsilon_{(e)}^2 = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{M}. \quad (12.11)$$

Para cada elemento da malha actual, calcula-se um factor de redução (ou ampliação) do diâmetro e , a partir deste, um novo diâmetro para os elementos a gerar no espaço ocupado pelo elemento actual. Em cada nó da malha actual, calcula-se o valor médio dos novos diâmetros correspondentes a cada um dos elementos adjacentes ao nó [ZHU *et al*, 1991]. Utilizando as funções de interpolação associadas a cada um destes nós, obtém-se uma distribuição contínua de diâmetros, a partir da qual é gerada a nova malha [PERAIRE *et al*, 1987].

ZIENKIEWICZ e ZHU [1987] calcularam o factor de redução do diâmetro do elemento, $\chi_{(i)}$, admitindo uma taxa de convergência em cada elemento igual à taxa de convergência assintótica global para malhas óptimas, $O(h^p)$, e $M = NE$ [ZIENKIEWICZ e ZHU, 1990] [ZIENKIEWICZ e ZHU, 1992c]. Obtiveram, assim,

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} NE^{1/2}} \right)^{1/p}. \quad (12.12)$$

Para os elementos adjacentes aos pontos singulares, a convergência seria $O(h^\lambda)$, utilizando-se $\lambda = 0.5$, em 2D [ZHU e ZIENKIEWICZ, 1988].

LEE e LO [1992] detectaram as singularidades a partir dos índices de concentração da energia de deformação do elemento,

$$\text{SECI}_{(i)} = \frac{U_{(i)}}{V_{(i)}} \quad (12.13)$$

e do domínio,

$$\text{GSECI} = \frac{U}{V}. \quad (12.14)$$

A convergência, em cada elemento, seria $O(h^{q(i)})$. Em 2D,

$$\frac{1}{q_{(i)}} = \frac{1}{1 - 2 \frac{\text{GSECI}}{\max_e(\text{SECI}_{(e)})}} \left[\left(1 - 2 \frac{\text{GSECI}}{\text{SECI}_{(i)}} \right) \frac{1}{0.5} + \left(2 \frac{\text{GSECI}}{\text{SECI}_{(i)}} - 2 \frac{\text{GSECI}}{\max_e(\text{SECI}_{(e)})} \right) \frac{1}{p} \right]. \quad (12.15)$$

Quando existe mais do que uma singularidade, pode acontecer que o valor máximo de $\text{SECI}_{(i)}$ se torne tão elevado que inviabilize a detecção das restantes singularidades, efeito que se vai agravando com cada iteração.

OÑATE e BUGEDA [1993] consideraram que o factor de redução era obtido através do produto de um factor global, obtido a partir da taxa de convergência global,

$$\chi_g = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^{1/p} \quad (12.16)$$

e de um factor local, obtido a partir da equidistribuição do erro e da taxa de convergência local,

$$\chi_{l(i)} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{(i)} \text{NE}^{1/2}} \right)^{1/(p+D/2)}. \quad (12.17)$$

Obtém-se, assim,

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^{1/p} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{(i)} \text{NE}^{1/2}} \right)^{1/(p+D/2)}. \quad (12.18)$$

Note-se que, se $\varepsilon_{(i)}^2 = \varepsilon^2 / \text{NE}$, esta expressão fornece o mesmo resultado que (12.12).

HUGGER [1993] utilizou um procedimento, para obter o factor de redução, em que se calcula, com base na distribuição do indicador do erro, o número de elementos da nova malha e a densidade relativa de elementos em cada ponto.

Outros procedimentos baseiam-se em admitir que cada elemento é dividido em $1/\chi_{(i)}^D$ elementos e admitir que [LADEVÈZE e LEGUILLON, 1983]

$$\sum_{\Omega_{(e)} \subset \Omega_{(i)}} \varepsilon_{(e)}^2 = \chi_{(i)}^{2p} \varepsilon_{(i)}^2, \quad (12.19)$$

ou que a taxa de convergência em cada elemento é $O(h^{p+D/2})$ [LI *et al*, 1995]. Em qualquer dos casos, obtém-se

$$M = \left(\sum_{k=1}^{NE} \left(\frac{\varepsilon_{(k)}}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/(p+D/2)} \right)^{(p+D/2)/p} \quad (12.20)$$

e

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} \left(\sum_{k=1}^{NE} \left(\frac{\varepsilon_{(k)}}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/(p+D/2)} \right)^{(p+D/2)/2p}} \right)^{1/(p+D/2)}. \quad (12.21)$$

Note-se que, se $\varepsilon_{(i)}^2 = \varepsilon^2/NE$, esta expressão fornece o mesmo resultado que (12.12).

ODEN e PATRA [1995] obtiveram os $\chi_{(i)}$ e M resolvendo iterativamente o sistema formado pelas equações

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} M^{1/2}} \right)^{1/q_{(i)}} \quad (12.22)$$

e

$$M = \sum_{i=1}^{NE} 1/\chi_{(i)}^D. \quad (12.23)$$

Se, em vez de partir directamente de (12.11), se minimizar $\sum_k 1/\chi_{(k)}^D$, sujeito a

$$\sum_k \chi_{(k)}^{2p} \varepsilon_{(k)}^2 = \bar{\varepsilon}^2 \text{ [LADEVÈZE } et al, 1991], \text{ obtém-se}$$

$$\chi_{(i)} = \frac{\bar{\varepsilon}^{-1/p}}{\varepsilon_{(i)}^{1/(p+D/2)} \left(\sum_{k=1}^{NE} \varepsilon_{(k)}^{D/(p+D/2)} \right)^{1/(2p)}}. \quad (12.24)$$

Note-se que esta expressão é equivalente à (12.21). Existindo taxas de convergência diferentes em cada elemento, a minimização tem de ser realizada numericamente. Para os elementos adjacentes às singularidades, a convergência é $O(h^{q_{(i)}})$. Estes elementos são detectados a partir da densidade média da energia do erro em cada elemento,

$$\frac{\varepsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}, \quad (12.25)$$

que é mais do que 4 vezes superior à densidade média da energia do erro no domínio. O valor de $q_{(i)}$ é estimado a partir da variação da densidade média de energia da solução de elementos finitos com a distância à singularidade, através do processo descrito em [COOREVITS *et al*, 1995].

12.2.4. Estratégias de refinamento

12.2.4.1. Estratégias de refinamento h

12.2.4.1.1. Introdução

Neste tipo de estratégias, tenta-se obter, através da equidistribuição do erro elementar, a quase optimalidade da malha refinada.

12.2.4.1.2. Refinamento dos elementos cuja diminuição de erro será maior

Para uma dada malha, faz-se uma previsão do valor do erro elementar que seria obtido subdividindo cada elemento em 2^D elementos. A malha seguinte é

obtida subdividindo os elementos com um erro superior ao maior desses valores [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b].

A previsão do erro que seria obtido pela subdivisão de um elemento é feita admitindo que a redução do erro será igual à da subdivisão anterior [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b]:

$$\varepsilon_{(\text{seguinte})} = \frac{\varepsilon_{(\text{actual})}^2}{\varepsilon_{(\text{anterior})}}. \quad (12.26)$$

Para efectuar a previsão por este método, o processo tem de ser iniciado subdividindo todos os elementos da malha inicial.

BANK [1983] sugeriu que a previsão do erro que seria obtido pela subdivisão fosse feita admitindo uma taxa de convergência q para a norma energética do erro:

$$\varepsilon_{(\text{seguinte})} = \frac{\varepsilon_{(\text{actual})}}{2^q}. \quad (12.27)$$

Se o elemento não contiver singularidades, $q = p + D/2$.

Este método pode ser aperfeiçoado, de modo a analisar uma nova malha com um aumento do número de elementos não inferior a uma dada percentagem do número de elementos da malha actual [BABUSKA e VOGELIUS, 1984]. Se o aumento do número de elementos for inferior ao pretendido, não se calcula a solução de elementos finitos. O método é aplicado novamente, admitindo que o erro nos elementos obtidos do refinamento é igual ao previsto. O processo é repetido até que o aumento do número de elementos, em relação ao da última malha para a qual se obteve solução, seja suficiente.

JARAUCH [1986] utilizou uma estratégia alternativa, que consiste em estimar quantas vezes deveria ser subdividido cada elemento, para obter a maior diminuição de erro possível para o número máximo de elementos pretendido, e subdividir uma vez os elementos que deveriam ser subdivididos uma ou mais vezes.

12.2.4.1.3. Refinamento dos elementos com indicadores superiores à média

Nesta abordagem [CAREY e HUMPHREY, 1981], calcula-se a média ε_{med} e o desvio padrão s dos indicadores. Consideram-se t intervalos: $I_1 = [\varepsilon_{\text{med}}, \varepsilon_{\text{med}} + k s]$, $I_2 = [\varepsilon_{\text{med}} + k s, \varepsilon_{\text{med}} + 2 k s]$, ... , $I_t = [\varepsilon_{\text{med}} + (t - 1) k s, + \infty]$, onde k é um número arbitrário, geralmente igual a um. Cada elemento cujo indicador esteja no intervalo I_m é subdividido em $(2^D)^m$ elementos.

12.2.4.1.4. Refinamento dos elementos com maiores indicadores

Segundo estas estratégias, cada um dos elementos cujo indicador é superior a um determinado valor é subdividido em 2^D elementos. Normalmente, este valor é uma dada fracção do maior indicador. Neste caso, contudo, se o maior indicador for muito superior aos restantes, o número de elementos refinados na iteração pode ser muito pequeno, o que pode levar a um número excessivo de iterações. Se o indicador tender para infinito junto às singularidades, a precisão pretendida pode nunca ser atingida.

Se, em (12.27), q for igual para todos os elementos, a primeira estratégia descrita em 12.2.4.1.2 é um caso particular das aqui descritas.

BABUSKA *et al* [1983] aplicaram várias estratégias alternativas para o refinamento dos elementos com maiores indicadores. Na primeira, refinam-se todos os elementos com indicadores iguais ou superiores a uma dada fracção do maior indicador. Na segunda, refina-se uma fracção fixa do número actual de elementos. Na terceira, refinam-se todos os elementos que se refinariam por aplicação de alguma das duas primeiras estratégias.

Se o número de elementos com indicadores iguais ou superiores a uma dada fracção do maior indicador for inferior ao desejado, pode-se obter uma solução nos novos elementos por interpolação da solução anterior e calcular indicadores de erro para esses elementos. O sistema algébrico só será resolvido quando o aumento do número de elementos em relação à resolução anterior for suficiente [BANK e SMITH, 1993].

Se a diminuição do erro obtida refinando os elementos com indicadores iguais ou superiores a uma determinada fracção do maior indicador numa dada malha se tornar insuficiente, podem-se refinar todos os elementos com um nível de refinamento inferior ao máximo da malha anterior à actual [PRESSBURGER e PERUCCHIO, 1995].

12.2.4.1.5. Obtenção de uma distribuição de diâmetros

Utilizando um dos métodos descritos em 12.2.3, é possível obter uma distribuição de diâmetros a obter na nova malha. Esta distribuição de diâmetros pode ser aproximada através de subdivisões sucessivas dos elementos cujo diâmetro excede o pretendido [SHEPHARD *et al*, 1986].

Se cada elemento for dividido em $(2^D)^{RL_{(i)}}$ elementos, o nível de refinamento necessário, $RL_{(i)}$, pode ser calculado directamente, a partir do factor de redução do diâmetro, arredondando para um inteiro

$$\log_2 \left(\frac{1}{\chi_{(i)}} \right). \quad (12.28)$$

Para indicadores calculados apenas com integrais de domínio, em vez de efectuar todas as subdivisões com base na mesma distribuição de diâmetros, é possível, após cada subdivisão, prever o erro nos novos elementos, utilizando a solução obtida para os elementos "pais" e admitindo uma taxa de convergência $O(h^q)$ para o erro.

Em certas zonas do domínio, pode acontecer que, para obter uma malha óptima, o diâmetro dos elementos deva ser aumentado. Esta operação só será possível se o método de refinamento permitir igualmente inverter refinamentos, juntando elementos.

12.2.4.2. Estratégias de refinamento p

ZIENKIEWICZ *et al* [1983] utilizaram uma estratégia adaptada ao refinamento p hierárquico. Nesta estratégia, são activados todos os graus de liberdade cujos indicadores sejam iguais ou superiores a uma tolerância, dependente do estimador do erro global, ou a uma determinada fracção do maior indicador:

$$\varepsilon_{(k)} \geq \gamma \varepsilon_{\max}, \quad (12.29)$$

com $0 \leq \gamma \leq 1$. O valor de γ pode aumentar com as iterações, por exemplo [PAPADRAKAKIS *et al*, 1994],

$$\gamma = (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) \frac{\varepsilon_{\text{inicial}} - \varepsilon}{\varepsilon_{\text{inicial}}} + \gamma_{\min}. \quad (12.30)$$

Se os graus de liberdade forem ordenados de acordo com o erro a eles associado, podem activar-se aqueles a que corresponde um maior indicador de erro, de modo a que, para os graus de liberdade não activados [PAPADRAKAKIS *et al*, 1994],

$$\sum_k \varepsilon_{(k)}^2 \leq \bar{\varepsilon}^2. \quad (12.31)$$

SZABÓ [1986] utilizou também elementos hierárquicos, mas numa estratégia baseada em refinamento p uniforme. A malha inicial é a mais grosseira possível, sendo os pontos singulares isolados por uma ou mais camadas de elementos com tamanhos decrescendo em progressão geométrica com um factor de 0.15. Se não for possível obter a precisão pretendida com as funções de grau mais elevado disponíveis, o número de elementos e de camadas é aumentado. Isolando os pontos singulares com algumas camadas de elementos, retarda-se a entrada no regime assintótico, em que a taxa de convergência é muito inferior à do regime pré-assintótico.

12.2.4.3. Estratégias de refinamento hp

BABUSKA e RANK [1987] utilizaram um sistema pericial e as soluções obtidas com uma malha grosseira e $p = 1, 2$ e 3 para prever o erro que se obteria com várias combinações do número de camadas de elementos em torno dos pontos singulares e do grau dos elementos. Escolhe-se a combinação para a qual se prevê que a precisão pretendida seja obtida com o menor número de graus de liberdade. Se não se obtiver a precisão pretendida, a solução obtida é utilizada para efectuar novas previsões.

RACHOWICZ *et al* [1989] estimaram, elemento a elemento, a diminuição de erro que se obteria por subdivisão em 2^D elementos, $\Delta\varepsilon_h$, ou por aumentar p uma unidade, $\Delta\varepsilon_p$, e calcularam os correspondentes aumentos do número total de graus de liberdade, ΔN_h e ΔN_p . Para cada elemento, calcula-se

$$(\Delta\varepsilon/\Delta N)_{(i)} = \max ((\Delta\varepsilon_h/\Delta N_h)_{(i)}, (\Delta\varepsilon_p/\Delta N_p)_{(i)}). \quad (12.32)$$

Se

$$(\Delta\varepsilon/\Delta N)_{(i)} \geq \gamma \max ((\Delta\varepsilon/\Delta N)_{(i)}), \quad (12.33)$$

com $0 \leq \gamma \leq 1$, o elemento é refinado, utilizando o método mais adequado. Os elementos adjacentes a um ponto singular são considerados em conjunto.

ZIENKIEWICZ *et al* [1989] utilizaram dois procedimentos em que alternaram a versão h e o refinamento p , de modo a obter uma taxa de convergência superior.

No primeiro procedimento, começa-se por remalhar com elementos de grau p_1 , até atingir um erro relativo

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{p_1} \bar{\eta}, \quad (12.34)$$

em que p_2 é o grau para o qual se pretende atingir o erro relativo $\bar{\eta}$. Em seguida, utilizara-se o refinamento p uniforme até atingir a precisão pretendida.

No segundo procedimento, começa-se por utilizar a solução correspondente a p_{\max} para estimar o erro da solução correspondente a $p_{\max}-1$ em cada elemento de uma malha grosseira. Em seguida, remalha-se, com base nesses indicadores de erro elementares, e utiliza-se o refinamento p uniforme até atingir a precisão pretendida. Se essa precisão não for atingida com $p = p_{\max}$, o procedimento é repetido.

GEORGES e SHEPHARD [1991] utilizaram um algoritmo que determina se a precisão pretendida pode ser obtida através de refinamento p uniforme, através de refinamento p com aumento do número de camadas junto às singularidades ou se é necessário refinamento h nas zonas afastadas das singularidades. A partir duma estimativa da regularidade da solução, baseada nos resultados anteriores, o algoritmo determina o valor de p necessário para o refinamento p uniforme. Se este for excessivo, determina o valor de p e o número de camadas. Se o erro nas zonas afastadas dos pontos singulares se tornar predominante, determina uma nova distribuição de diâmetros dos elementos.

ZENG e WIBERG [1992] utilizaram a remalhagem seguida de refinamento h para obter um erro relativo $\bar{\eta}_h$, seguido de refinamento p para obter o erro relativo $\bar{\eta}$.

ODEN e PATRA [1995] utilizaram um procedimento em que se começa por efectuar um refinamento h , tentando obter um erro relativo $\gamma \bar{\eta}$, com $5 \leq \gamma \leq 10$. Em seguida, efectua-se um refinamento p dos elementos estimados sensíveis a este tipo de refinamento, tentando obter o erro relativo $\bar{\eta}$. Se o erro relativo $\bar{\eta}$ não for atingido, estes passos são repetidos, com um γ menor.

12.2.5. Carregamentos múltiplos

Nos casos de carregamentos múltiplos é conveniente, por economia, utilizar a mesma malha em todas as análises. Determinar uma malha óptima para um conjunto de carregamentos é um problema de difícil abordagem. Contudo, existem

métodos para criar uma malha razoável para o conjunto de carregamentos, com base nos indicadores obtidos para cada um deles.

ZIENKIEWICZ e CRAIG [1983] utilizaram, para cada elemento, um indicador $\varepsilon_{(i)}^2$ igual à média aritmética dos $\varepsilon_{(i)}^2$ obtidos para cada um dos carregamentos.

BABUSKA [1986] utilizou, para cada elemento, um indicador $\varepsilon_{(i)}^2$ igual à soma dos $\varepsilon_{(i)}^2$ obtidos para cada um dos carregamentos, o que é equivalente ao anterior.

ZIENKIEWICZ e ZHU [1990] utilizaram, em cada ponto, o menor dos valores do diâmetro dos elementos, obtidos a partir dos vários carregamentos, para remalhar.

12.3. Estratégia utilizada

Neste trabalho, a estratégia adaptativa utilizada é uma estratégia de refinamento h .

Geralmente, não é possível obter o erro relativo pretendido, $\bar{\eta}$, com uma só iteração. Nestes casos, é geralmente mais económico tentar distribuir as reduções do erro equitativamente pelas várias iterações. Assim, dada uma solução com um erro relativo η_h , na iteração seguinte tenta-se obter um erro relativo

$$k\bar{\eta} = \left(\frac{\bar{\eta}}{\eta_h} \right)^{1/m} \eta_h, \quad (12.35)$$

em que m é uma estimativa do número óptimo de iterações. Este número foi estimado utilizando a fórmula heurística de BECKERS e ZHONG [1994]. Assim, m será igual ao menor inteiro não inferior a

$$\log_{2p} \left(\frac{\eta_h}{\bar{\eta}} \right). \quad (12.36)$$

Pretende-se obter uma nova malha, para a qual

$$\varepsilon \leq \bar{\varepsilon} = k\bar{\eta} \min(\|\mathbf{u}_c\|_E, \|\boldsymbol{\sigma}_e\|_E) \quad \text{ou} \quad \varepsilon \leq \bar{\varepsilon} = k\bar{\eta} \|\boldsymbol{\sigma}_e\|_E, \quad (12.37)$$

conforme se faça uma análise dual global ou se utilizem apenas elementos de equilíbrio.

Admitindo que a taxa de convergência global, em relação ao número total de elementos, é a óptima, o número de elementos da nova malha será

$$M = \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/p} NE, \quad (12.38)$$

onde NE é o número de elementos da malha actual. O menor número de graus de liberdade é obtido gerando uma malha em que, para cada um dos M elementos da malha [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978b],

$$\varepsilon_{(e)}^2 = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{M}. \quad (12.39)$$

Dado que o número de elementos é $O(h^{-D})$, a taxa de convergência, em relação ao diâmetro, dum elemento que não contenha singularidades, é $O(h^{p+D/2})$. Assim, o factor de redução do diâmetro desse elemento é

$$\chi_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} \left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/p} NE \right)^{1/2}} \right)^{1/(p+D/2)}. \quad (12.40)$$

Note-se que esta expressão é equivalente à (12.18). No método de refinamento utilizado, cada elemento é dividido em $(2^D)^{RL_{(i)}}$ elementos. O nível de refinamento necessário, $RL_{(i)}$, é o menor inteiro não inferior a

$$\log_2 \left(\frac{1}{\chi_{(i)}} \right) + 0.5. \quad (12.41)$$

Podem ocorrer situações em que, apesar de (12.37) não ser respeitada, a aplicação de (12.41) não dê origem a qualquer refinamento. Isto acontece sempre que

$$0 < \max_i \left(\log_2 \left(\frac{1}{\chi_{(i)}} \right) \right) < 0.5. \quad (12.42)$$

Para garantir que existe sempre algum refinamento, toma-se $RL_{(i)} = 1$ em todos os elementos em que:

$$0 < \log_2 \left(\frac{1}{\chi_{(i)}} \right) < 0.5 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{(i)} > \frac{\max_e \varepsilon_{(e)}}{2^{D/2}}. \quad (12.43)$$

Para os elementos que contêm singularidades, a taxa de convergência é inferior. Se, nestes elementos, fosse apenas aplicada a fórmula (12.40), a redução do erro seria inferior à pretendida. Dado que o algoritmo de refinamento o permite, nestes elementos o refinamento não é uniforme. Nos vértices em que forem detectadas singularidades utiliza-se um nível de refinamento superior ao dos restantes vértices

Quando é utilizada a análise dual global, descrita em 7.3 e 9.2, a detecção de vértices singulares é feita com base na densidade da norma energética do erro na relação constitutiva,

$$\left((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \right)^{1/2}, \quad (12.44)$$

que pode ser usado como indicador de erro local.

Para cada vértice da malha, é calculada a média aritmética dos valores, nesse vértice, da densidade da norma energética do erro na relação constitutiva, calculados a partir de cada um dos elementos adjacentes ao vértice,

$$\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \left((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \right)_{(i)}, \quad (12.45)$$

em que o somatório em i é extensivo aos $NE_{(k)}$ elementos adjacentes ao vértice k . Admite-se que existe uma singularidade no vértice l , se

$$\frac{1}{NE_{(l)}} \sum_{i=1}^{NE_{(l)}} \left((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \right)_{(i)} > \frac{\text{sing}}{NV_{(l)}} \sum_{k=1}^{NV_{(l)}} \left(\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \left((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \right)_{(i)} \right), \quad (12.46)$$

em que o somatório em k é extensivo aos $NV_{(l)}$ vértices adjacentes ao vértice l e sing é uma constante superior a um. Nos vértices que satisfazem a condição (12.46), o nível de refinamento é calculado a partir do maior valor de

$$\chi'_{(i)} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{(i)} \left(\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} \right)^{D/p} NE \right)^{1/2}} \right)^{1/q} \quad (12.47)$$

dos elementos adjacentes ao vértice I. O valor de q a utilizar nesta expressão é dado por

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\text{sing} \sum_{k=1}^{NV_{(i)}} \left(\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} ((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c))_{(i)} \right)}{\frac{1}{NE_{(i)}} \sum_{i=1}^{NE_{(i)}} ((\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c))_{(i)}} \right)} + D/2. \quad (12.48)$$

Em 2D, tomou-se $\lambda = 0.5$.

Quando, num vértice, $(\sigma_e - \sigma_c)^T (\varepsilon_e - \varepsilon_c) \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \lambda + D/2$; no limiar de detecção de singularidade através de (12.46), $q = p + D/2$. Quanto maior for o valor de sing, mais difícil é detectar as singularidades e menor será o número de elementos que serão criados em torno destes pontos. Quanto menor for o valor de sing, mais fácil é admitir a existência de singularidades onde elas não existem e maior será o número de elementos que serão criados em torno destes pontos.

Em 2D, as experiências efectuadas parecem indicar que, para os valores da tabela 12.1, a detecção das singularidades é boa e melhora com o aumento do grau dos elementos. O número de elementos da nova malha parece ser adequado.

grau	sing
1	2.2
2	3
3	9.5
4	45

Tabela 12.1

Quando se utilizam apenas elementos finitos de equilíbrio, a detecção de vértices singulares é feita com base nos indicadores de erro elementares, $\varepsilon_{(i)}$, calculados de acordo com o descrito em 9.7.

Para cada vértice da malha, é calculada a média aritmética

$$\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}, \quad (12.49)$$

em que o somatório em j é extensivo aos $NE_{(k)}$ elementos adjacentes ao vértice k . Admite-se que existe uma singularidade no vértice l , se

$$\frac{1}{NE_{(l)}} \sum_{i=1}^{NE_{(l)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}} > \frac{\text{sing}}{NV_{(l)}} \sum_{k=1}^{NV_{(l)}} \left(\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}} \right), \quad (12.50)$$

em que o somatório em k é extensivo aos $NV_{(l)}$ vértices adjacentes ao vértice l e sing é uma constante superior a um. Nos vértices que satisfazem a condição (12.50), o nível de refinamento é calculado a partir do maior valor de $\chi'_{(i)}$ dos elementos adjacentes ao vértice l . O valor de q a utilizar em (12.47) para calcular $\chi'_{(i)}$ é dado por

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\frac{\text{sing}}{NV_{(l)}} \sum_{k=1}^{NV_{(l)}} \left(\frac{1}{NE_{(k)}} \sum_{i=1}^{NE_{(k)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}} \right)}{\frac{1}{NE_{(l)}} \sum_{i=1}^{NE_{(l)}} \frac{\epsilon_{(i)}^2}{V_{(i)}}} \right)^2} + D/2. \quad (12.51)$$

Em 2D, utiliza-se $\lambda = 0.5$.

Em 2D, as experiências efectuadas parecem indicar que, para $\text{sing} = 2$, a detecção das singularidades é razoável. Na expressão (12.51) utiliza-se um expoente 2 em vez do expoente 1 da expressão (12.48) pois, para este último, o número de elementos da nova malha era demasiado baixo, face ao previsto por (12.38). Quando o grau é elevado, devido ao método de refinamento utilizado, podem existir elementos com um indicador de erro bastante maior do que o dos elementos adjacentes, sem que tal se deva à existência de singularidades. Por esta razão, a detecção de singularidades não melhora com o aumento do grau dos elementos.

13. Exemplos de aplicação

13.1. Introdução

Neste capítulo, são apresentados e discutidos alguns exemplos de aplicação dos estimadores de erro e estratégias de refinamento desenvolvidos neste trabalho.

Em 13.2, aplica-se a análise dual a um sólido tridimensional. Na secção 13.3, exemplifica-se o que sucede quando se relaxam as condições de continuidade nos lados dos elementos. Em 13.4, aplica-se a estratégia de refinamento de malhas duais de elementos finitos à análise de uma placa. Na secção 13.5, aplica-se a estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio à análise de uma consola curta bidimensional. Em 13.6, aplica-se a estratégia de refinamento dual à análise de uma placa, de modo a comparar os tempos gastos em cada iteração. Na secção 13.7, comparam-se os resultados obtidos utilizando diferentes graus dos elementos finitos; compara-se, também, a estratégia de refinamento de malhas duais com a estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio.

Nestes exemplos, as malhas iniciais e as refinadas foram geradas utilizando um programa desenvolvido por PITERI [1997] [PITERI e ALMEIDA, 1995].

Os sistemas algébricos (3.39), correspondentes a elementos finitos de equilíbrio, foram resolvidos utilizando um programa de resolução de sistemas esparsos baseado num algoritmo apresentado por PISSANETZKY [1984]. Os sistemas algébricos (3.25), correspondentes a elementos finitos compatíveis, foram resolvidos utilizando um programa de resolução de sistemas esparsos por blocos [REBELO, 1993].

Para a representação gráfica dos resultados, recorreu-se a uma biblioteca de rotinas gráficas desenvolvida por ALMEIDA [1995].

Todos os programas utilizados foram escritos na linguagem de programação C [KERNIGHAN e RITCHIE, 1978].

13.2. Análise dual de um sólido tridimensional

Neste exemplo, analisa-se a peça representada na figura 13.1, sujeita ao carregamento indicado na mesma figura.

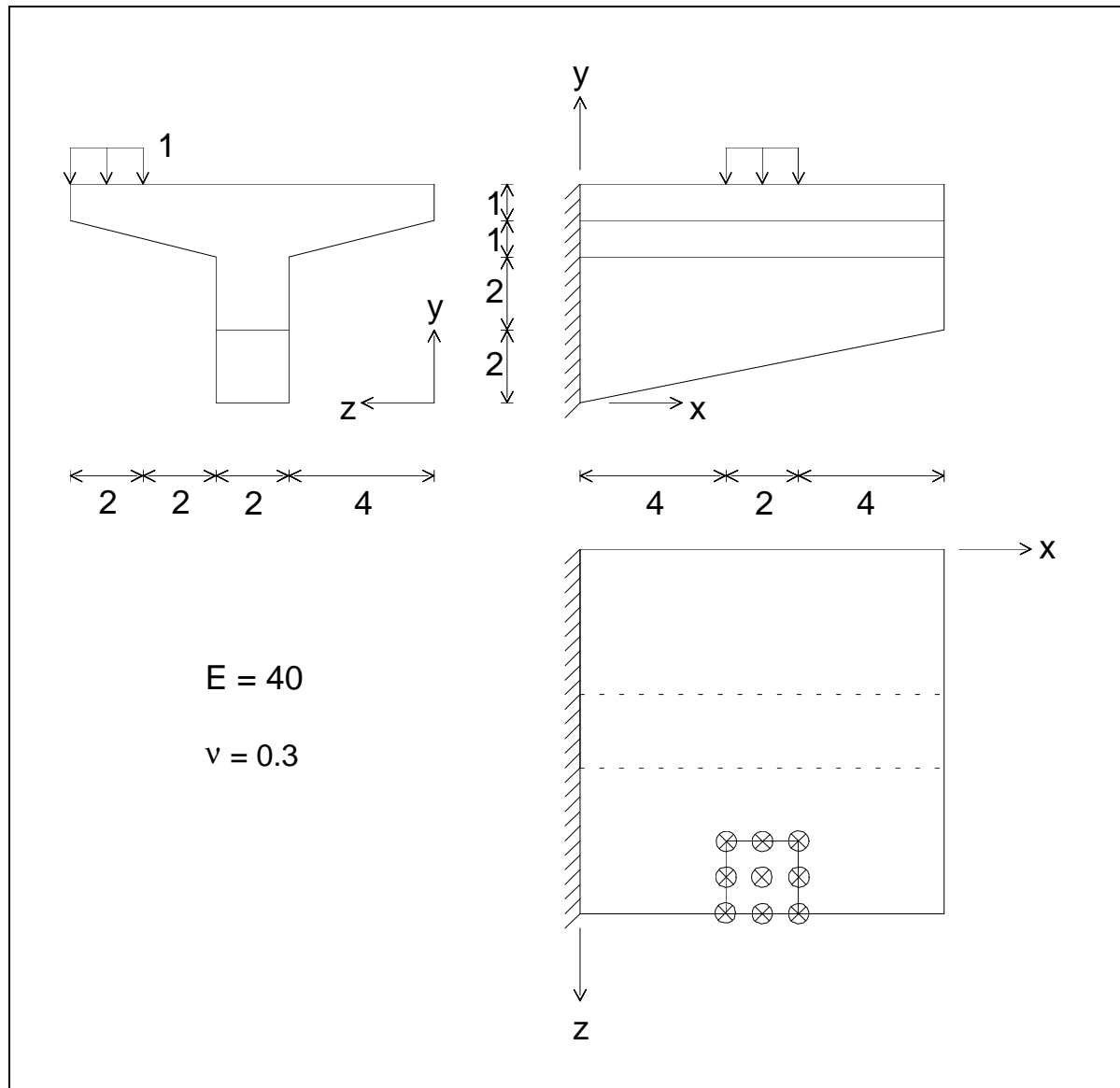


Figura 13.1 - Peça tridimensional.

Esta peça foi discretizada em 146 tetraedros. O programa de geração de malhas de tetraedros utilizado [PITERI, 1997] está vocacionado para a geração de malhas uniformes. Contudo, impondo a colocação de vértices em alguns pontos da fronteira, foi possível obter uma malha um pouco mais fina nas regiões mais importantes.