

4. Erro nas soluções de elementos finitos

4.1. Introdução

Este capítulo aborda a existência de erro nas soluções de elementos finitos compatíveis e equilibradas. Resumem-se as propriedades do erro dos elementos finitos compatíveis e dos elementos finitos de equilíbrio. Estudam-se os defeitos de compatibilidade nas soluções de elementos finitos de equilíbrio. Parte significativa deste estudo constitui trabalho original. Estes defeitos de compatibilidade são utilizados para calcular alguns dos indicadores de erro para elementos finitos de equilíbrio sugeridos no capítulo 9, nomeadamente aquele adoptado nesta tese.

4.2. Origens do erro nas soluções de elementos finitos

Em geral, as soluções fornecidas pelo método dos elementos finitos para um dado problema físico são diferentes da realidade física. Esta diferença constitui o erro. O erro pode ser originado por diversas causas, podendo ser classificado em erro de modelação, erro de discretização do domínio, erro de discretização das funções e erro numérico.

O erro de modelação é devido ao modelo matemático do problema em cuja resolução o método dos elementos finitos vai ser aplicado. O modelo matemático é uma abstracção da realidade e, regra geral, não reproduz exactamente o comportamento do modelo físico: as propriedades do material consideradas no modelo matemático podem não ser as reais; as hipóteses feitas sobre os deslocamentos podem ser excessivamente afastadas da realidade; as acções reais podem vir a estar fora dos limites considerados.

O erro de discretização do domínio é devido à geometria dos elementos finitos utilizados, a qual pode não permitir discretizar exactamente a geometria do domínio.

O erro de discretização das funções é devido ao facto de, em geral, a discretização das funções de aproximação nos elementos finitos não conter a solução exacta do modelo matemático. Pode até acontecer que as funções de aproximação nos elementos não permitam sequer discretizar exactamente as condições de fronteira essenciais, que deviam ser satisfeitas *a priori*, ou que a implementação efectuada não permita discretizar exactamente as condições de fronteira naturais, que o modelo de elementos finitos vai aproximar.

O erro numérico é devido aos erros nos cálculos efectuados no método dos elementos finitos. Se for utilizada a integração numérica, esta pode introduzir um erro no cálculo do sistema algébrico. Os cálculos são efectuados em precisão finita, o que origina erros de truncatura. Os erros de truncatura aumentam com o número de graus de liberdade, ao contrário dos outros. Quando se tornam maiores do que os erros com outras origens, as grandezas que deviam convergir monotonicamente passam a ter um comportamento errático [UTKU e MELOSH, 1984]. A existência deste tipo de erros pode levar a que uma determinada precisão só possa ser atingida através de métodos adaptativos.

Na generalidade dos problemas estáticos de elasticidade linear bidimensional ou tridimensional, o erro mais importante na solução do modelo matemático é o erro associado à discretização das funções a aproximar [ZHONG, 1991]. Este tipo de erro, daqui em diante designado apenas por erro de discretização ou simplesmente erro, é o único abordado neste trabalho.

4.3. Medidas de erro

Genericamente, o erro é a diferença entre a solução exacta e a solução aproximada. Esta diferença pode ser medida a nível local, elementar e global, de diversas formas.

Para uma solução compatível, a partir do erro do campo de deslocamentos,

$$\mathbf{e}_c = \mathbf{u} - \mathbf{u}_c, \quad (4.1)$$

é possível obter o erro em qualquer outro campo e qualquer medida de erro.

O erro que, geralmente, tem maior interesse em problemas de engenharia é o erro no campo de tensões:

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_c \quad \text{ou} \quad \mathbf{e}_\sigma = \mathbf{e}_e = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_e. \quad (4.2)$$

Para obter uma medida de erro escalar, a nível elementar ou a nível global, deve ser utilizada uma norma.

A norma de máximo - ou norma L_∞ - do erro do campo de deslocamentos é definida como

$$\|\mathbf{e}_c\|_{L_\infty} = \text{Max}_\Omega |\mathbf{e}_c| \quad (4.3)$$

e a norma de máximo do erro do campo de tensões como

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_{L_\infty} = \text{Max}_\Omega |\mathbf{e}_\sigma|. \quad (4.4)$$

A norma L_2 do erro do campo de tensões é definida como

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_{L_2} = \left(\int_\Omega \mathbf{e}_\sigma^T \mathbf{e}_\sigma d\Omega \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

As normas definidas em (4.4) e (4.5) têm o inconveniente de não serem invariantes em relação ao sistema de eixos.

Uma norma associada aos invariantes do tensor do erro do campo de tensões é definida como

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_I = \left(\int_\Omega \sum_{ij} e_{\sigma,ij}^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (4.6)$$

A norma associada à tensão de von Mises e aos invariantes da parcela tangencial do tensor do erro do campo de tensões é definida como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_\sigma\|_M &= \\ &= \left(\int_\Omega \frac{1}{2} \left((e_{\sigma,xx} - e_{\sigma,yy})^2 + (e_{\sigma,yy} - e_{\sigma,zz})^2 + (e_{\sigma,zz} - e_{\sigma,xx})^2 + 6(e_{\sigma,xy}^2 + e_{\sigma,yz}^2 + e_{\sigma,zx}^2) \right) d\Omega \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A norma energética do erro é também invariante em relação ao sistema de eixos, sendo definida como

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left(\int_\Omega \mathbf{e}_\sigma^T \mathbf{f} \mathbf{e}_\sigma d\Omega \right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

Como se irá referir mais adiante, a norma energética é a norma natural para medir o erro, a mais importante num método adaptativo e, por isso, a mais utilizada na literatura. A energia de deformação relaciona-se com a norma energética através de

$$U(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|_E^2. \quad (4.9)$$

Geralmente, a precisão pretendida é expressa em termos de erro relativo. O erro relativo na norma energética é:

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_E}. \quad (4.10)$$

Este valor pode ser interpretado como um erro relativo médio do campo de tensões [KELLY *et al*, 1983], enquanto η^2 pode ser interpretado como um erro relativo médio no campo de deslocamentos [ZHONG, 1991].

4.4. Erro de discretização em elementos finitos compatíveis

4.4.1. Propriedades do erro

A solução de elementos finitos compatíveis, \mathbf{u}_c , minimiza a energia do erro [HERMANN, 1972], ou seja,

$$U(\mathbf{u}-\mathbf{u}_c) \leq U(\mathbf{u}-\mathbf{u}_{c,v}), \quad (4.11)$$

para todos os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis do modelo de elementos finitos, $\mathbf{u}_{c,v}$. Portanto, a norma energética é a norma natural para medir a distância entre a solução exacta e a solução de elementos finitos.

Como consequência do Princípio do Mínimo da Energia Potencial, uma solução de elementos finitos compatíveis fornece um limite superior para a energia potencial total,

$$\pi_p(\mathbf{u}) \leq \pi_p(\mathbf{u}_c). \quad (4.12)$$

Se $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ e \mathbf{u}_T forem nulos, ou seja, se as condições essenciais forem homogêneas, então [STRANG e FIX, 1973],

$$U(\mathbf{e}_c) = U(\mathbf{u}) - U(\mathbf{u}_c). \quad (4.13)$$

Se \mathbf{t}_Γ e \mathbf{f} forem nulas, ou seja, se as condições naturais forem homogêneas, então,

$$U(\mathbf{e}_c) = U(\mathbf{u}_c) - U(\mathbf{u}). \quad (4.14)$$

Num caso genérico [ODEN *et al*, 1989],

$$U(\mathbf{e}_c) = \pi_p(\mathbf{u}_c) - \pi_p(\mathbf{u}), \quad (4.15)$$

ou seja, a energia do erro é igual ao erro na energia. Mais uma vez se verifica que a norma energética é a norma natural para medir o erro.

4.4.2. Defeitos de equilíbrio

A existência de erro numa discretização por elementos finitos compatíveis pode ser detectada a partir da não satisfação das condições de equilíbrio pela solução de elementos finitos. Este fenómeno manifesta-se através dos defeitos de equilíbrio, que se definem em seguida.

O resíduo na equação de equilíbrio (2.34), \mathbf{r}_c ,

$$\mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u}_c - \mathbf{d}^* \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{f} = \mathbf{r}_c. \quad (4.16)$$

O defeito na tensão na fronteira estática Γ_t , \mathbf{G}_c ,

$$\mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u}_c - \mathbf{N} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{G}_c = \mathbf{t}_\Gamma. \quad (4.17)$$

O salto na tensão nos lados $\Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma$, $\mathbf{J}_{c,(i)}$,

$$\sum_i (\mathbf{N}_{(i),(i)} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u}_{c,(i)} - \mathbf{N}_{(i),(i)} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) + \mathbf{J}_{c,(i)} = \mathbf{0}, \quad (4.18)$$

em que o somatório em i é extensivo aos dois elementos adjacentes ao lado $\Gamma_{(i)}$.

Estes defeitos de equilíbrio podem ser imediatamente interpretados como uma força de massa ou uma tensão aplicada num lado. Deste modo, a solução de elementos finitos é a solução exacta de um "problema perturbado" obtido do problema original subtraindo ao carregamento os defeitos de equilíbrio.

O erro no campo de deslocamentos é a solução exacta do problema obtido substituindo o carregamento original pelos defeitos de equilíbrio:

$$\mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{e}_c + \mathbf{r}_c = \mathbf{0}, \text{ no interior de cada } \Omega_{(i)}; \quad (4.19)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{e}_c = \mathbf{G}_c, \text{ em } \Gamma_t; \quad (4.20)$$

$$\mathbf{e} \sum_i \mathbf{N}_{(i),(i)} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{e}_{c,(i)} = \mathbf{J}_{c,(i)}, \text{ em cada } \Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma. \quad (4.21)$$

Estas equações são designadas por equações do erro.

4.5. Erro de discretização em elementos finitos de equilíbrio

4.5.1. Propriedades do erro

A solução de elementos finitos de equilíbrio, σ_e , minimiza a energia do erro, ou seja,

$$U(\sigma - \sigma_e) \leq U(\sigma - \sigma_{e,v}), \quad (4.22)$$

para todos os campos de tensões estaticamente admissíveis do modelo de elementos finitos, $\sigma_{e,v}$. Portanto, para os elementos finitos de equilíbrio, a norma energética é também a norma natural para medir o erro.

Como consequência do Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar, uma solução de elementos finitos de equilíbrio fornece um limite superior para a energia potencial complementar,

$$\pi_c(\sigma) \leq \pi_c(\sigma_e). \quad (4.23)$$

Se ε_θ e \mathbf{u}_Γ forem nulos, então,

$$U(\mathbf{e}) = U(\sigma_e) - U(\sigma). \quad (4.24)$$

Se \mathbf{t}_Γ e \mathbf{f} forem nulas, então,

$$U(\mathbf{e}) = U(\sigma) - U(\sigma_e). \quad (4.25)$$

Num caso genérico [ODEN *et al*, 1989],

$$U(\mathbf{e}) = \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e) - \pi_c(\boldsymbol{\sigma}), \quad (4.26)$$

ou seja, a energia do erro é igual ao erro na energia.

4.5.2. Defeitos de compatibilidade

A existência de erro numa discretização por elementos finitos de equilíbrio pode ser detectada a partir da não satisfação das condições de compatibilidade pela solução de elementos finitos. Este fenómeno manifesta-se através de defeitos de compatibilidade no interior dos elementos e nos lados dos elementos.

No interior dos elementos, a falta de compatibilidade pode ser medida através do resíduo nas equações de compatibilidade de St Venant, referidas em 2.7.

Em 3D, este resíduo é um tensor de quarta ordem, \mathbf{r}_e , com 81 componentes:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = r_{ijkl}. \quad (4.27)$$

Destas componentes, 27 são sempre nulas, 12 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} = r_{xyxz}, \quad (4.28)$$

12 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} = r_{xyyz}, \quad (4.29)$$

12 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} = r_{xzyz}, \quad (4.30)$$

6 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = r_{xxyy}, \quad (4.31)$$

6 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = r_{xxzz}, \quad (4.32)$$

e 6 são iguais a

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = r_{yyzz}. \quad (4.33)$$

Em 2D o resíduo é:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = r. \quad (4.34)$$

Note-se que, para elementos com tensões de grau não superior a um, estes resíduos são sempre nulos.

Considere-se agora um lado entre dois elementos. As fibras contidas nesse lado sofrem extensões e variações de curvatura. Estas extensões e variações de curvatura não são, em geral, as mesmas em ambos os elementos, o que impede a continuidade entre os deslocamentos de um elemento e os do outro.

Para medir esta falta de compatibilidade, considere-se um lado genérico $\Gamma_{(j)}$. Para esse lado e para cada elemento $\Omega_{(i)}$ adjacente a ele, define-se, com base na matriz de rotação $\mathbf{M}_{(i),(i)}$ definida em (3.12) ou (3.13), a matriz $\mathbf{M}'_{(j),(i)}$, dada por

$$\mathbf{M}'_{(j),(i)} = \begin{bmatrix} -n_y \\ n_x \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

em 2D e:

$$\mathbf{M}'_{(j),(i)} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{2x} \\ t_{1y} & t_{2y} \\ t_{1z} & t_{2z} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

em 3D.

Para cada $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma$, pode definir-se o salto nas extensões, $\mathbf{J1}_{e,(j)}$:

$$\mathbf{M}'_{(j),(i)}{}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)} \mathbf{M}'_{(j),(i)} - \mathbf{M}'_{(j),(k)}{}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} \mathbf{M}'_{(j),(k)} = \mathbf{J1}_{e,(j)}, \quad (4.37)$$

em que $\Omega_{(i)}$ e $\Omega_{(k)}$ são os elementos adjacentes a $\Gamma_{(j)}$.

Em 3D, o salto nas extensões é o tensor

$$\mathbf{J1}_{e,(j)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t_1 t_1} & \varepsilon_{t_1 t_2} \\ \varepsilon_{t_1 t_2} & \varepsilon_{t_2 t_2} \end{bmatrix}_{(j),(i)} - \begin{bmatrix} \varepsilon_{t_1 t_1} & \varepsilon_{t_1 t_2} \\ \varepsilon_{t_1 t_2} & \varepsilon_{t_2 t_2} \end{bmatrix}_{(j),(k)}. \quad (4.38)$$

Em 2D,

$$\mathbf{J1}_{e,(j)} = [\varepsilon_{tt}]_{(j),(i)} - [\varepsilon_{tt}]_{(j),(k)}. \quad (4.39)$$

Na fronteira cinemática Γ_u , pode definir-se um defeito nas extensões, $\mathbf{G1}_e$, análogo.

Para cada $\Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma$, pode também definir-se o salto nas curvaturas, $\mathbf{J2}_{e,(j)}$.

Em 3D, o salto nas curvaturas é o tensor

$$\mathbf{J2}_{e,(j)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_2^2} \end{bmatrix}_{(j),(i)} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_2^2} \end{bmatrix}_{(j),(k)}, \quad (4.40)$$

que pode ser calculado, a partir das extensões, através de

$$\mathbf{J2}_{e,(j)} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_1}}{\partial n} & \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_2}}{\partial n} \\ \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_2}}{\partial n} & 2 \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_2} - \frac{\partial \varepsilon_{t_2 t_2}}{\partial n} \end{bmatrix}_{(j),(i)} + \quad (4.41)$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_1}}{\partial n} & \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_2}}{\partial n} \\ \frac{\partial \varepsilon_{nt_1}}{\partial t_2} + \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial \varepsilon_{t_1 t_2}}{\partial n} & 2 \frac{\partial \varepsilon_{nt_2}}{\partial t_2} - \frac{\partial \varepsilon_{t_2 t_2}}{\partial n} \end{bmatrix}_{(j),(k)}.$$

Em 2D,

$$\mathbf{J2}_{e,(j)} = \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right]_{(j),(i)} + \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right]_{(j),(k)} = \left[2 \frac{\partial \varepsilon_{nt}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial n} \right]_{(j),(i)} + \left[2 \frac{\partial \varepsilon_{nt}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial n} \right]_{(j),(k)}. \quad (4.42)$$

Na fronteira cinemática Γ_u , pode definir-se um defeito nas curvaturas, \mathbf{G}_e , análogo.

Além do resíduo nas equações de compatibilidade e dos saltos nas extensões e nas curvaturas, é possível definir outras medidas dos defeitos de compatibilidade. Estas medidas são baseadas no campo de deslocamentos, \mathbf{u}_e , correspondente a uma solução equilibrada, σ_e .

A parcela de \mathbf{u}_e não correspondente a movimentos de corpo rígido pode ser obtida, em cada elemento $\Omega_{(i)}$, através de (3.4), sendo $\hat{\mathbf{u}}_{(i)}$ tal que

$$\left(\int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\Psi_{(i)})^T \mathbf{k} (\mathbf{d}\Psi_{(i)}) d\Omega \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\Psi_{(i)})^T \sigma_{e,(i)} d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\Psi_{(i)})^T \mathbf{k} \varepsilon_\theta d\Omega. \quad (4.43)$$

As funções de interpolação $\Psi_{(i)}$ devem ser do grau imediatamente acima do grau das funções de aproximação de tensões $\mathbf{S}_{(i)}$.

Tendo determinado a parcela de \mathbf{u}_e não correspondente a movimentos de corpo rígido, pode definir-se a medida da incompatibilidade das deformações [KLEIBER, 1980]

$$\mathbf{i} = \mathbf{f} \sigma_e + \varepsilon_\theta - \mathbf{d} \mathbf{u}_e. \quad (4.44)$$

Note-se que \mathbf{i} só é nula se o campo de extensões satisfizer as equações de compatibilidade de St Venant.

Os deslocamentos de corpo rígido podem ser escolhidos de modo a satisfazer da forma mais aproximada possível, para todos os lados $\Gamma_{(i)}$, as equações

$$\left(\int_{\Gamma_{(i)}} \Psi_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \Psi_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)}, \quad (4.45)$$

em que $\Omega_{(i)}$ e $\Omega_{(j)}$ são os elementos adjacentes a $\Gamma_{(i)}$. Estas equações formam um sistema global envolvendo toda a malha. Se existirem modos espúrios, algumas destas equações serão dependentes. Para \mathbf{u}_e ser independente da amplitude destes modos, as equações dependentes terão de ser substituídas por equações envolvendo as rotações médias dos lados.

Se não existirem modos espúrios, em vez de utilizar (4.45), os deslocamentos de corpo rígido podem ser escolhidos de modo a satisfazer da forma mais aproximada possível, para cada lado $\Gamma_{(i)}$ de cada elemento $\Omega_{(i)}$,

$$\left(\int_{\Gamma_{(i)}} \boldsymbol{\Psi}_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma. \quad (4.46)$$

Esta alternativa permite determinar $\mathbf{u}_{e,(i)}$ elemento a elemento. Se existirem modos espúrios, a solução dependerá da amplitude destes, podendo não ser igual à obtida utilizando (4.45).

Se o campo de extensões satisfizer as equações de compatibilidade de St Venant, a equação de compatibilidade de um elemento finito de equilíbrio (3.37) transforma-se em

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T d\mathbf{u}_{e,(i)} d\Omega = \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma. \quad (4.47)$$

Integrando por partes o primeiro termo e tendo em conta (3.27), obtém-se

$$\sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \mathbf{u}_{e,(i)} d\Gamma = \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma. \quad (4.48)$$

Se os lados do elemento não forem curvos e se utilizarem apenas as equações correspondentes aos termos constantes de $\mathbf{S}_{(i)}$, obtém-se

$$\sum_j \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{u}_{e,(i)} d\Gamma = \sum_j \mathbf{N}_{(j),(i)}^T \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma. \quad (4.49)$$

Assim, para elementos triangulares, em 2D, e tetraédricos, em 3D, o número de movimentos de corpo rígido mais o número de equações em (4.49) é igual ao número de equações em (4.46). Consequentemente, nestes casos, é possível satisfazer exactamente as equações (4.46) e, portanto, também as (4.45).

Note-se que, para triângulos, em vez de utilizar (4.46), pode ser utilizada

$$\left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{M}'_{(i),(i)}^T \boldsymbol{\Psi}_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} + \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{M}'_{(i),(e)}^T \mathbf{v}_{e,(i)} d\Gamma = 0. \quad (4.50)$$

o que permite obter 3 equações, em vez de 6. Estas 3 equações são sempre linearmente independentes.

Tendo determinado \mathbf{u}_e , pode definir-se, para cada $\Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma$, a descontinuidade de deslocamento [MAUNDER, 1986]

$$\mathbf{d}_{(j)} = \mathbf{u}_{e,(j)} - \mathbf{u}_{e,(i)}. \quad (4.51)$$

Em Γ_u , a descontinuidade de deslocamento é

$$\mathbf{d} = \mathbf{u}_\Gamma - \mathbf{u}_e. \quad (4.52)$$

A existência de modos espúrios, embora não afecte \mathbf{i} , afecta estas descontinuidades de deslocamentos.

Note-se que, se a solução exacta para o campo de tensões for polinomial de grau n , o campo de tensões obtido com funções de grau n é o exacto, mas os deslocamentos nos lados, \mathbf{v}_e , não são nem exactos nem compatíveis. Para obter deslocamentos \mathbf{v}_e exactos e, portanto, compatíveis, seria necessário utilizar funções de grau $n+1$. Isto impossibilita a interpretação das descontinuidades entre os deslocamentos \mathbf{v}_e como defeitos de compatibilidade.

5. Método de refinamento

5.1. Introdução

Neste capítulo, após um resumo dos vários métodos de melhorar as soluções de elementos finitos já publicados, descreve-se o método utilizado neste trabalho.

5.2 Métodos de melhorar as soluções de elementos finitos

5.2.1. Introdução

Em geral, o erro de discretização pode ser diminuído aumentando o número de graus de liberdade e/ou distribuindo os graus de liberdade pelo domínio de uma forma mais adequada. O aumento do número de graus de liberdade pode ser obtido utilizando mais elementos e/ou utilizando elementos de grau mais elevado. Se a malha com maior número de graus de liberdade contiver estritamente as malhas anteriores, a convergência, para modelos compatíveis ou equilibrados, é monotónica.

Note-se que, na aplicação de qualquer método de melhorar uma malha, os nós que definem a geometria da fronteira devem ser sempre colocados na fronteira do domínio a discretizar e não na fronteira da malha inicial. Se isto não for feito, o erro de discretização do domínio pode tornar-se maior do que o erro de discretização da função a aproximar.

Nesta secção, descrevem-se diversos métodos de melhorar as malhas de modo a diminuir o erro de discretização. Apesar de serem sempre exemplificados para elementos finitos de deslocamento tradicionais, estes métodos podem ser aplicados a qualquer tipo de elementos finitos.

5.2.2. Alteração da posição dos vértices

Considere-se o modelo de elementos finitos compatíveis. A energia potencial total de uma malha com um determinado número de nós e uma determinada topologia é função quer dos deslocamentos nodais quer das coordenadas dos vértices [CARROL e BARKER, 1973] [MC NEICE e MARCAL, 1973]:

$$\pi_p(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}. \quad (5.1)$$

Estacionarizando a energia potencial total em relação a todas estas variáveis, obtêm-se as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{F} &= \mathbf{0}, \\ \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Estas equações formam um sistema não linear. A sua solução fornece a malha óptima para um determinado tipo de elementos e uma determinada topologia. Como a solução explícita deste sistema tem um custo demasiado elevado, este método não é utilizado na prática.

Dada uma determinada malha inicial e a solução a ela associada, pode ser obtida uma solução melhor alterando a posição dos vértices da malha inicial, com base na solução já obtida. Estes métodos têm um custo menos elevado do que a solução directa das equações (5.2).

Contudo, quer utilizando um método quer o outro, pode não ser possível obter a precisão necessária com os graus de liberdade escolhidos *a priori*, razão pela qual este método merece pouca atenção.

5.2.3. Remalhagem

Uma maneira de obter uma solução melhor é gerar uma malha inteiramente nova. Existem algoritmos que permitem gerar malhas a partir de uma distribuição de diâmetros (h) ou de volumes dos elementos. Estes algoritmos geram malhas não estruturadas de elementos triangulares ou quadrangulares, em 2D, e

tetraédricos, em 3D. Utilizando um algoritmo deste tipo, é possível gerar uma malha adaptada à solução e à precisão pretendida.

SUHARA e FUKUDA [1972] utilizaram, em refinamento adaptativo, um algoritmo que permite gerar malhas de triângulos com densidades diferentes em diferentes subdomínios de um domínio em 2D.

YERRY e SHEPHARD [1983] e PERAIRE *et al* [1987] desenvolveram algoritmos que permitem gerar malhas de elementos triangulares com uma distribuição de diâmetros arbitrária, muito utilizados em refinamento adaptativo. O primeiro algoritmo baseia-se na decomposição espacial do domínio através de uma estrutura de dados em árvore, enquanto o segundo se baseia na técnica de avanço da frente. YERRY e SHEPHARD [1984] e PERAIRE *et al* [1988] adaptaram os algoritmos anteriores para gerar malhas de elementos tetraédricos com uma distribuição de diâmetros arbitrária.

ZHU *et al* [1991] desenvolveram um algoritmo que permite gerar malhas de elementos quadrangulares com uma distribuição de diâmetros arbitrária, o qual tem sido utilizado em refinamento adaptativo.

5.2.4. Refinamento de malhas

5.2.4.1. Introdução

O refinamento de uma malha consiste em subdividir e/ou aumentar o grau de elementos dessa malha.

O refinamento de uma malha pode ser uniforme ou não uniforme. No refinamento uniforme, todos os elementos da malha são processados da mesma maneira, sendo a sua implementação directa. No entanto, é menos económico do que o refinamento não uniforme.

5.2.4.2. Refinamento h

5.2.4.2.1. Introdução

No refinamento h, mantém-se o grau dos elementos e subdividem-se alguns deles.

As sucessivas subdivisões não devem degradar a qualidade geométrica dos elementos. Esta condição é satisfeita se um elemento for refinado dividindo-o em k^D elementos e dividindo cada aresta em k partes iguais, sendo k um inteiro não

negativo e D a dimensão espacial do problema. Deste modo, os elementos "filhos" herdam as proporções do "pai".

No refinamento não uniforme, pretende-se obter uma malha refinada com uma dada distribuição de diâmetros dos elementos. Esta distribuição pode ser aproximada dividindo cada elemento de uma malha em k^D elementos, com k variável de elemento para elemento. Contudo, para impor a compatibilidade, é preferível fazer refinamentos sucessivos em que os elementos são divididos em 2^D elementos.

5.2.4.2.2. Malhas irregulares

Quando se subdividem apenas alguns elementos, criam-se vértices que não pertencem a todos os elementos que lhes são adjacentes. Estes vértices designam-se por vértices irregulares e, nos exemplos bidimensionais da figura 5.1, estão representados a branco.

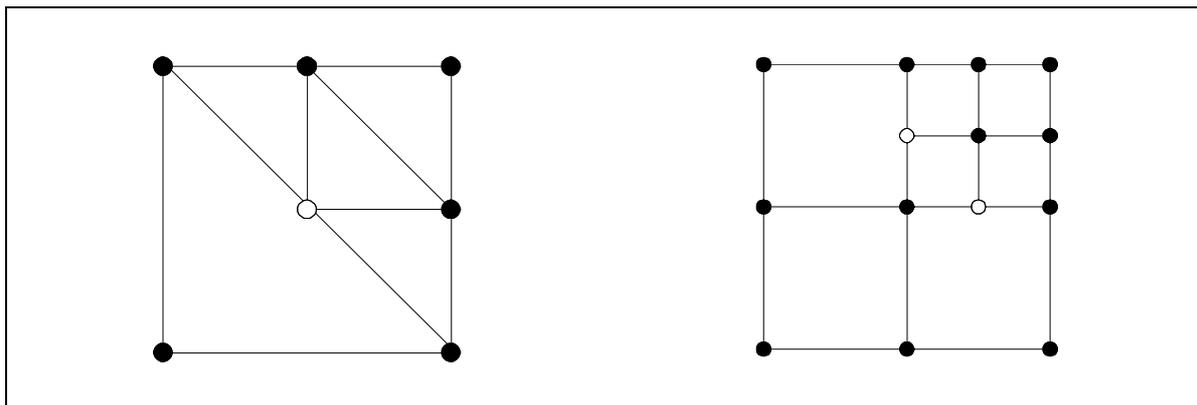


Figura 5.1 - Refinamento h , criando vértices irregulares.

Se os elementos forem de grau superior a um, existirão também nós irregulares não coincidentes com os vértices irregulares.

A compatibilidade é assegurada impondo restrições aos deslocamentos dos nós irregulares. Só os deslocamentos dos nós regulares são independentes. Se a relação entre os deslocamentos de todos os nós e os deslocamentos dos nós regulares for escrita na forma:

$$\hat{\mathbf{u}}' = \mathbf{T} \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.3)$$

a matriz de rigidez do modelo restringido será obtida da do modelo não restringido através de [CAREY, 1976]:

$$K = T^T K' T. \quad (5.4)$$

A estrutura de dados utilizada para descrever a malha e os cálculos serão mais simples se as malhas forem 1-irregulares, isto é, se nenhum elemento tiver mais do que 1 vértice irregular num mesmo lado (ou aresta, em 3D).

Se forem refinados apenas os elementos indicados pela estratégia adaptativa, a malha pode não ser 1-irregular. Se cada elemento refinado foi subdividido em 2^D elementos, a malha pode ser tornada 1-irregular refinando todos os elementos que tenham dois ou mais vértices irregulares [BANK e SHERMAN, 1981] no mesmo lado (ou aresta, em 3D). Isto é equivalente a não permitir diferenças superiores a um entre os níveis de refinamento de elementos adjacentes.

Uma variante para a colocação dos nós irregulares é a representada na figura 5.2, onde as subdivisões a traço interrompido foram efectuadas em elementos que não necessitavam de refinamento [STEIN e RUST, 1991].

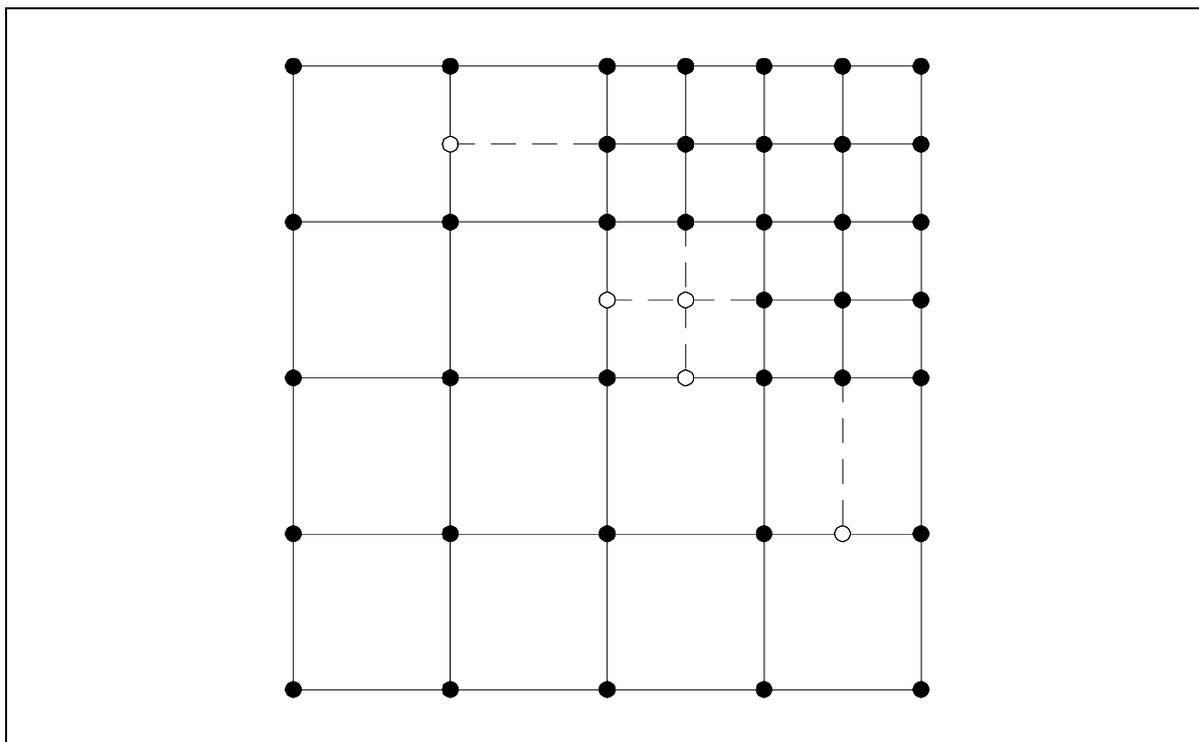


Figura 5.2 - Variante para o refinamento h de quadriláteros, criando vértices irregulares.

5.2.4.2.3. Malhas regulares

Uma malha de triângulos 1-irregular pode ser transformada numa malha regular dividindo em quatro todos os triângulos com um vértice irregular em dois ou mais lados e, em seguida, dividindo os triângulos com um vértice irregular num dos lados em dois triângulos temporários [BANK e SHERMAN, 1981], que serão juntos antes do refinamento seguinte [BANK, 1983]. Esta última operação é necessária para evitar o aparecimento de triângulos com ângulos internos demasiado pequenos. Contudo, tem o inconveniente de fazer com que as malhas anteriores não estejam estritamente contidas nas malhas refinadas, o que não garante a monotonicidade da convergência. Em [BORNEMANN *et al*, 1993] pode encontrar-se uma descrição de uma generalização deste método para tetraedros, em 3D.

Se o refinamento de uma malha de triângulos for feito bissectando o maior lado de cada triângulo a refinar, a malha refinada pode ser tornada regular utilizando um dos dois algoritmos de RIVARA [1984]. Após uma sequência de refinamentos feitos utilizando um destes algoritmos, o menor ângulo interno dum triângulo da malha final nunca é inferior a metade do menor ângulo interno dum triângulo da malha inicial, e a transição entre triângulos grandes e pequenos é sempre suave. Cada uma das malhas anteriores está estritamente contida nas refinadas. O algoritmo mais simples é:

1. Bissectar cada triângulo a refinar pelo seu maior lado
2. Bissectar cada triângulo com vértices irregulares pelo maior lado
3. Se a malha é regular, parar
4. Ir para 2

Este algoritmo foi generalizado para malhas de tetraedros por RIVARA e LEVIN [1992].

ROBERTI e MELKANOFF [1987] utilizaram um algoritmo semelhante para tornar regulares malhas obtidas por divisão dos triângulos a refinar em quatro:

1. Dividir em quatro cada triângulo a refinar
2. Dividir em quatro cada triângulo com um vértice irregular nos três lados
3. Bissectar cada triângulo com vértices irregulares pelo maior lado
4. Se a malha é regular, parar
5. Ir para 2

Em [SEWELL, 1976] e [MITCHELL, 1989] podem encontrar-se descrições de algoritmos baseados na bissecção de pares de triângulos, os quais dão sempre origem a malhas regulares.

Uma malha de quadriláteros 1-irregular pode ser transformada numa malha regular refinando todos os quadriláteros com um vértice irregular em três ou mais lados e, em seguida, dividindo os quadriláteros com um vértice irregular num dos

lados em três triângulos temporários e dividindo os quadriláteros com um vértice irregular em dois lados em dois ou três quadriláteros temporários, que serão juntos antes do refinamento seguinte [BANK, 1983]. Tal como para os triângulos, esta última operação tem o inconveniente de fazer com que as malhas anteriores não estejam estritamente contidas nas malhas refinadas. Utilizando o método de PLANK [1990], não é necessário recorrer a triângulos, obtendo-se malhas como a representada na figura 5.3.

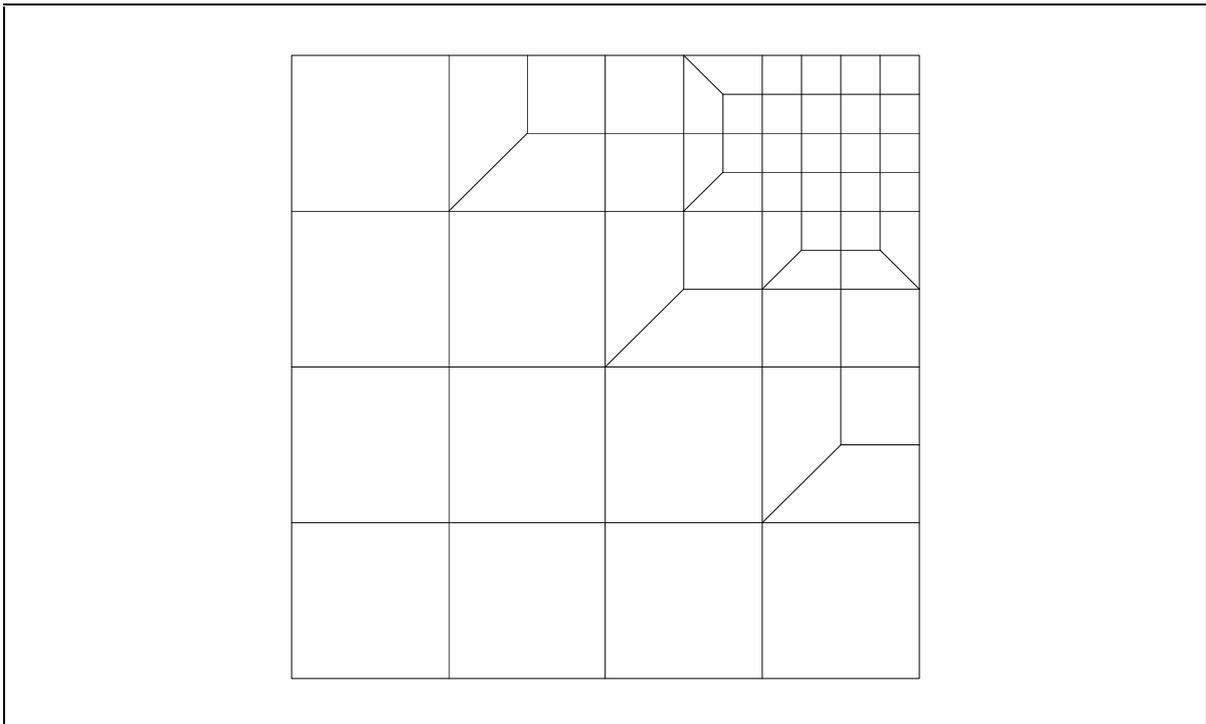


Figura 5.3 - Refinamento h de quadriláteros, sem criar vértices irregulares.

Uma malha de quadriláteros de quatro nós 1-irregular pode ser transformada numa malha regular através dos elementos de transição utilizados por MCDILL *et al* [1987]. Estes elementos podem ter um nó a meio de qualquer lado. Na figura 5.4, representam-se algumas das funções de interpolação utilizadas num elemento com um nó num só lado. Os mesmos autores utilizaram elementos análogos para fazer transições em malhas de elementos hexaédricos de oito nós.

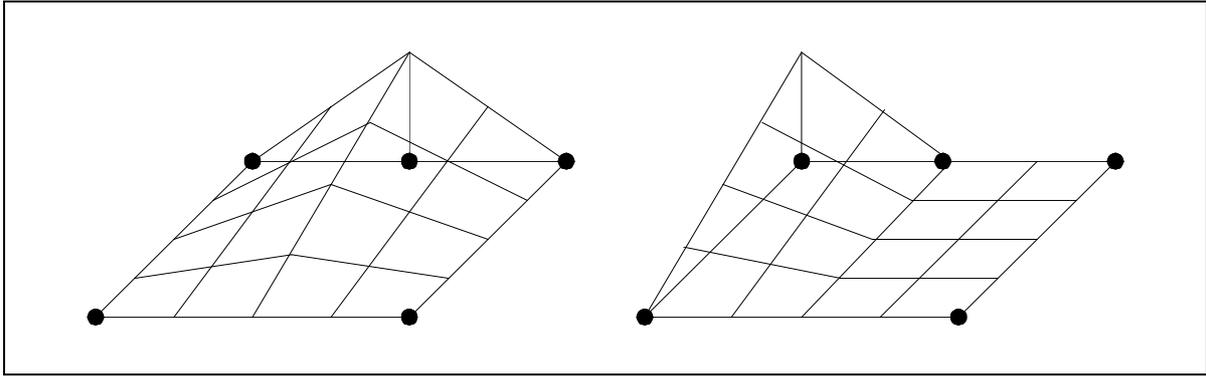


Figura 5.4 - Elemento de transição para o refinamento h.

Se, em vez de dividir em quatro os quadriláteros a refinar, estes forem divididos em nove, a malha pode ser tornada regular, sem recorrer a triângulos, conforme descrito por VESLUD e MAURICE [1993], obtendo-se malhas como a representada na figura 5.5. Em contrapartida, a transição dum elemento de não refinado para refinado é mais brusca.

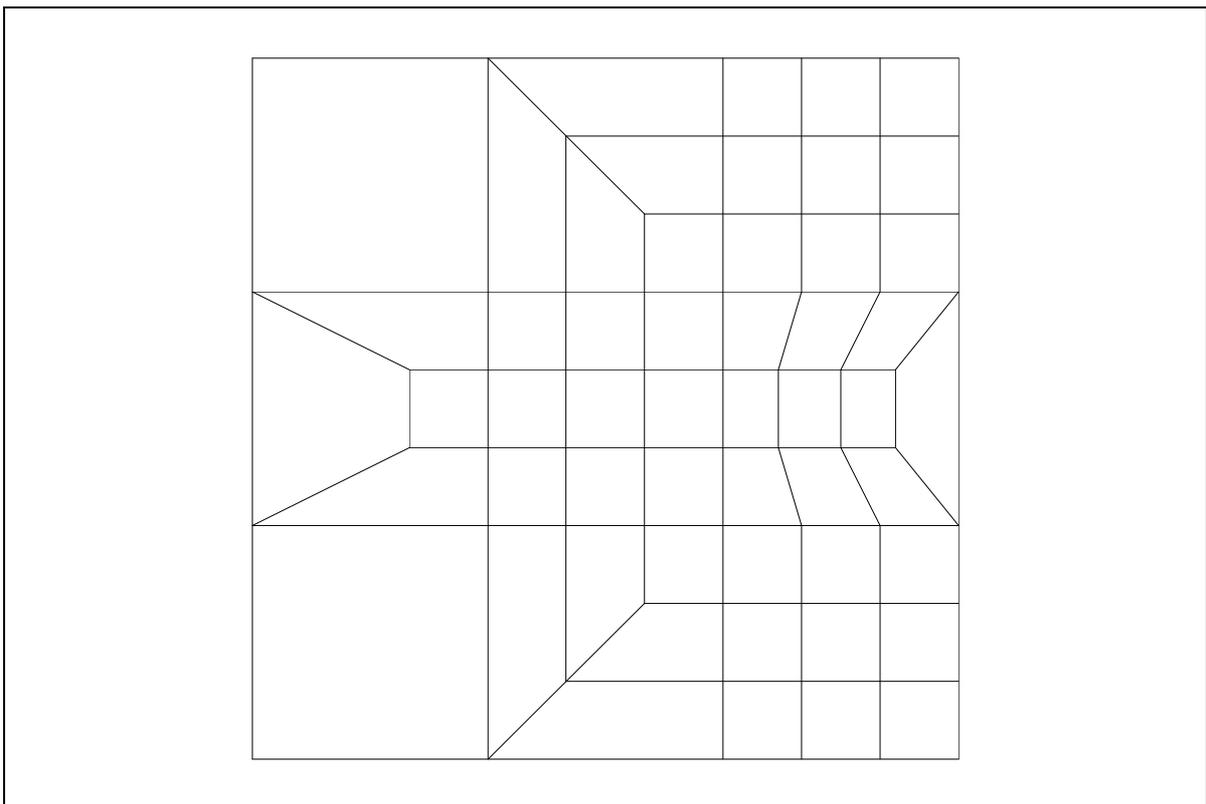


Figura 5.5 - Refinamento h de quadriláteros, sem criar vértices irregulares.

LEE e BATHE [1994] utilizaram uma abordagem que permite obter malhas regulares de quadriláteros, recorrendo a uma biblioteca de malhas para subdomínios quadriláteros, com valores pré-definidos para a densidade de elementos nos vértices do subdomínio. Dada uma distribuição de densidades de

elementos nos vértices da malha inicial, cada elemento desta é considerado como um subdomínio para o qual se escolhe na biblioteca a malha apropriada. As malhas da biblioteca são tais que a nova malha é sempre regular.

5.2.4.3. Refinamento p

No refinamento p, mantém-se o número e a topologia dos elementos e aumenta-se o grau de alguns deles. Geralmente, o refinamento p é efectuado utilizando elementos hierárquicos, conforme descrito em 5.2.4.5.

O refinamento p pode ser efectuado criando nós irregulares ao refinar apenas alguns elementos, como é exemplificado, em 2D, na figura 5.6. Estes nós não pertencem a todos os elementos que lhes são adjacentes.

A compatibilidade é assegurada impondo restrições aos deslocamentos desses nós, da forma descrita em 5.2.4.2.2.

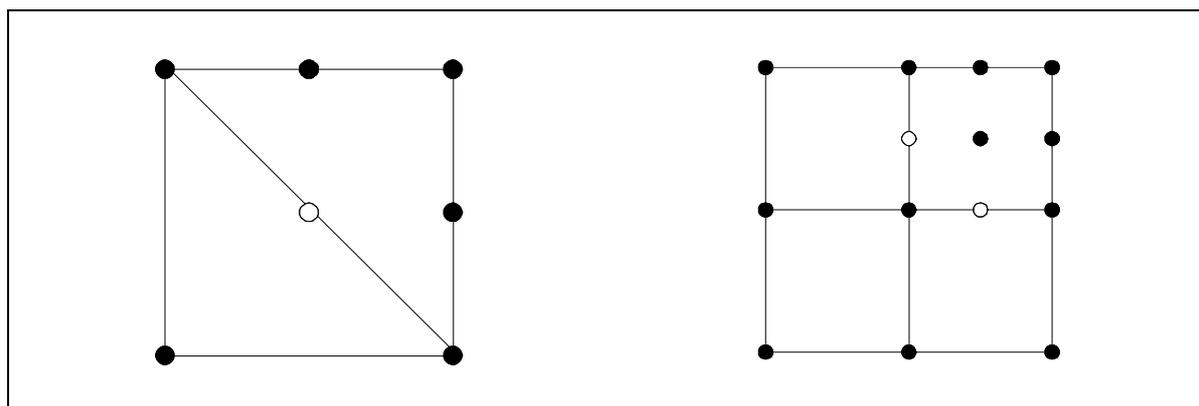


Figura 5.6 - Refinamento p, criando nós irregulares.

Podem também ser criadas malhas regulares, com elementos de graus diferentes, utilizando elementos de transição como o representado na figura 5.7.

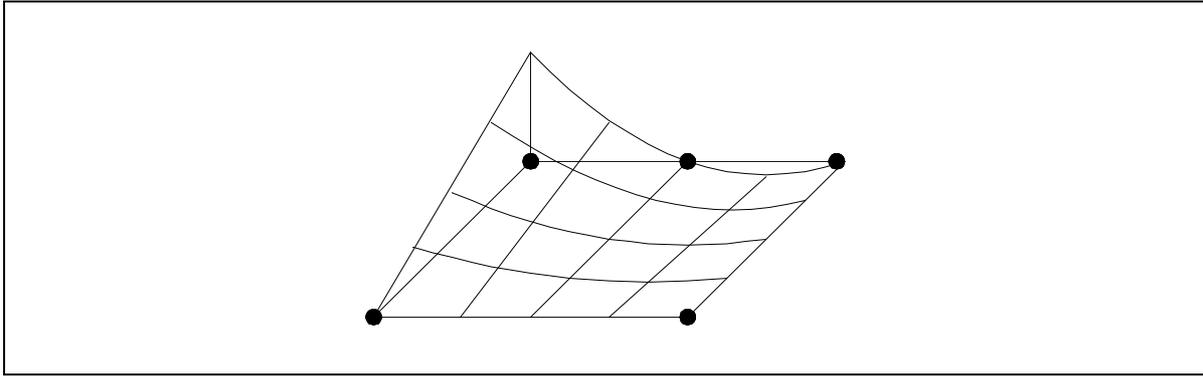


Figura 5.7 - Elemento de transição para o refinamento p.

5.2.4.4. Refinamento hp

No refinamento hp, diminui-se o diâmetro e , simultaneamente, aumenta-se o grau dos elementos da malha.

5.2.4.5. Refinamento hierárquico

Elementos hierárquicos são aqueles em que as variáveis nodais e as funções de aproximação do elemento são um subconjunto das variáveis nodais e funções de aproximação dos elementos de ordem mais elevada. Estas propriedades dos elementos hierárquicos facilitam a compatibilização de elementos de ordem diferente numa dada malha.

O refinamento hierárquico pode ser do tipo h [GAGO, 1982] ou do tipo p [ZIENKIEWICZ et al, 1971].

Na figura 5.8, representam-se, para o refinamento h de um elemento finito bidimensional, as funções de aproximação correspondentes a um nó num vértice, a meio de um lado e no centro do elemento. À esquerda, representam-se as funções de aproximação tradicionais e, à direita, as hierárquicas.

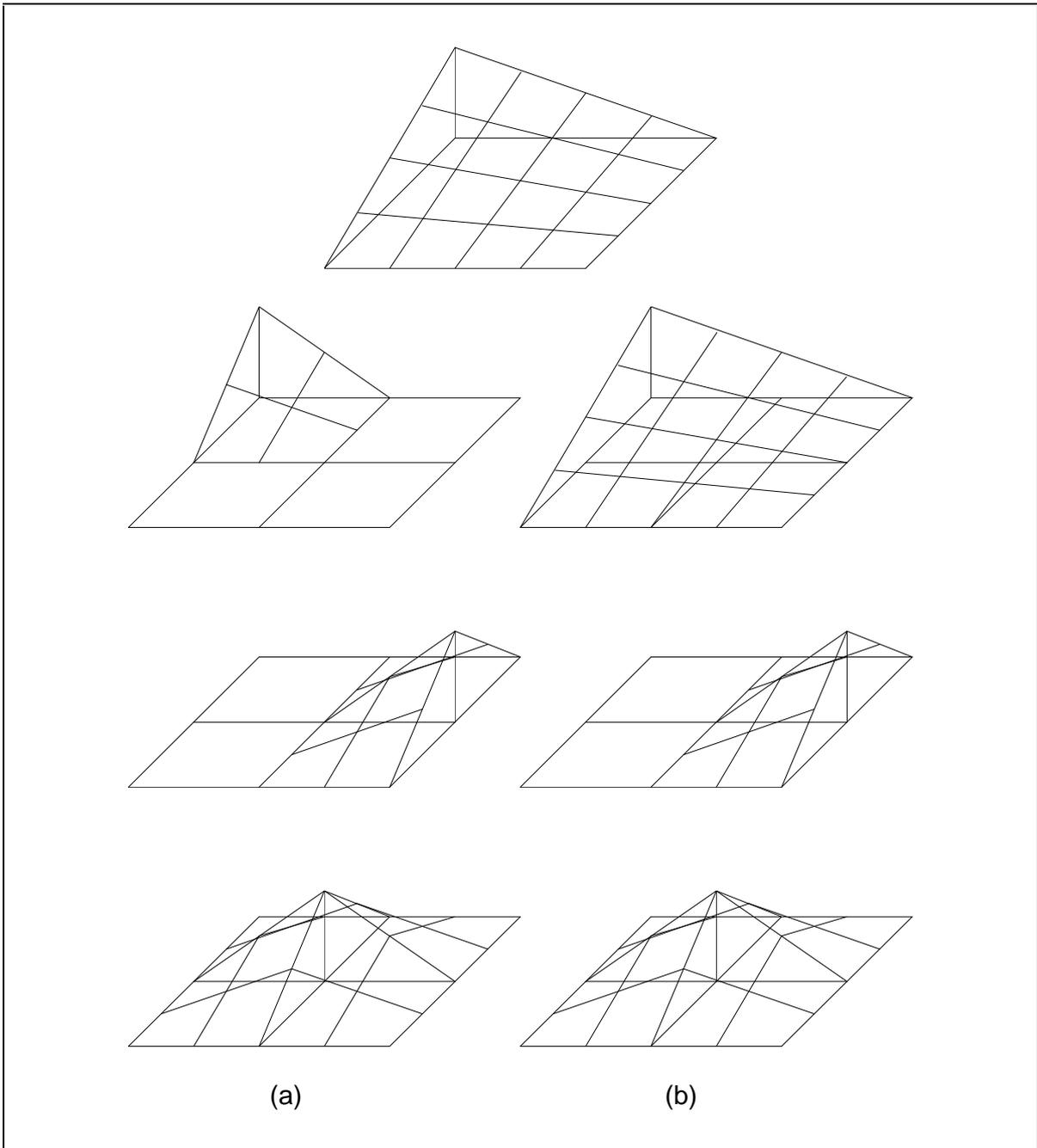


Figura 5.8 - Refinamento h tradicional (a) e hierárquico (b).

Na figura 5.9, representam-se, para o refinamento p de um elemento finito bidimensional, as funções de aproximação correspondentes a um nó num vértice, a meio de um lado e no centro do elemento. À esquerda, representam-se as funções de aproximação tradicionais e, à direita, as hierárquicas.

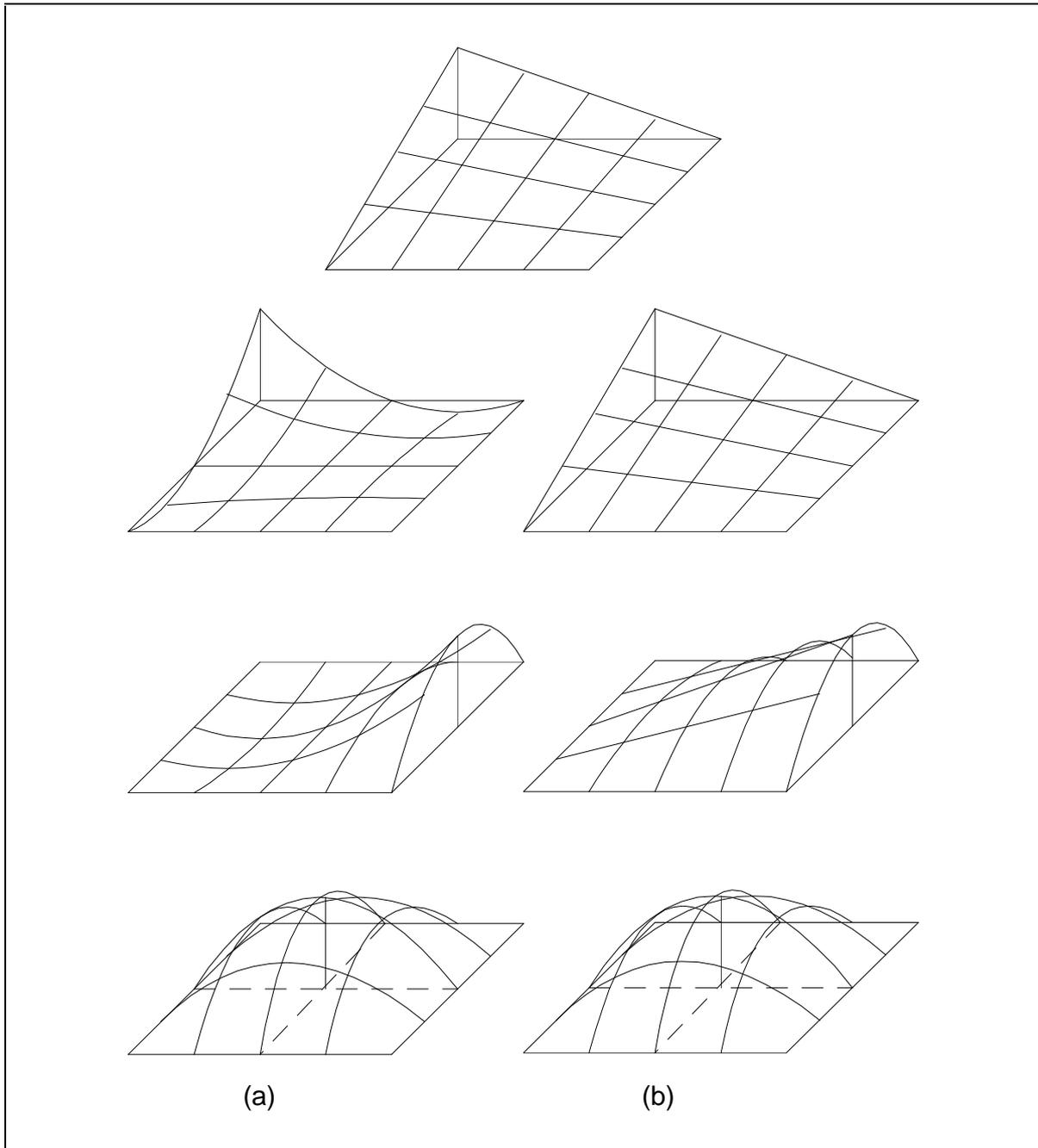


Figura 5.9 - Refinamento p tradicional (a) e hierárquico (b).

De modo semelhante ao que acontece com as funções de aproximação, as matrizes de rigidez e os vectores de forças de elementos hierárquicos são submatrizes e subvectores, respectivamente, das matrizes e vectores dos elementos de ordem mais elevada. O mesmo se passa em relação às matrizes e vectores globais de malhas refinadas hierarquicamente.

Como inconveniente deste método de refinamento, aponta-se a necessidade de uma estrutura de dados de maior complexidade para definir e gerir a malha de elementos hierárquicos.

5.3. Método utilizado

Como as formulações de elementos finitos utilizadas neste trabalho permitem que o número de lados dum elemento seja independente das funções de aproximação utilizadas no interior desse elemento, simplificando a ligação entre elementos de malhas irregulares, utiliza-se um método de refinamento h não uniforme que dá origem a malhas irregulares [PITERI e ALMEIDA, 1995] [PITERI, 1997].

A ligação entre os elementos criados pelo refinamento e os que lhes são adjacentes é efectuada aumentando o número de lados destes últimos, de modo a tornar os vértices regulares. Este processo é exemplificado, em 2D, na figura 5.10: ao refinar o elemento b , o elemento a , embora mantendo a forma triangular e as funções de aproximação utilizadas no seu interior, passou a ter quatro lados: 1, 6, 9 e 2.

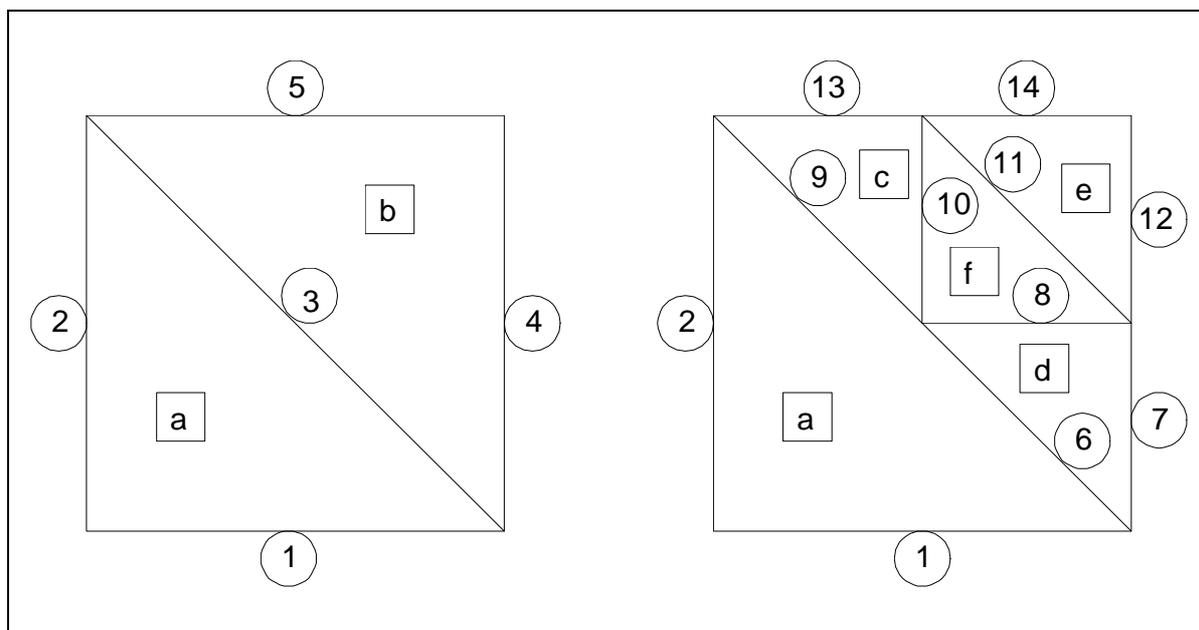


Figura 5.10 - Refinamento do elemento b , transformando o elemento a num elemento de quatro lados.

Não existe limite para o número de lados de um elemento, sendo possíveis situações como a exemplificada, em 2D, na figura 5.11.

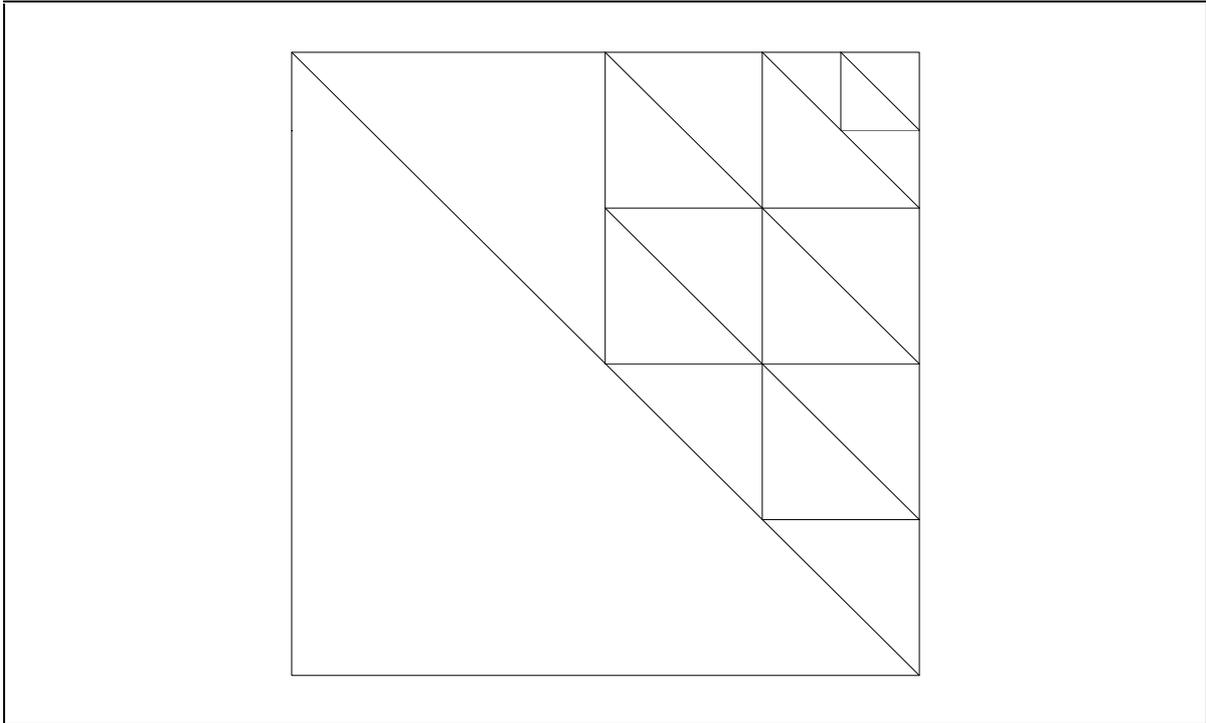


Figura 5.11 - Triângulo de 5 lados, originado por refinamentos sucessivos.

Em todas as experiências realizadas, quer para elementos de equilíbrio quer para os superelementos de equilíbrio descritos em 3.3.2.6, este aumento do número de lados de alguns elementos não introduziu modos espúrios adicionais. Note-se que nenhum elemento tem mais do que um lado em comum com outro e todos os lados pertencem a um elemento de três lados. Além disso, se é possível obter uma solução com a malha original, é também possível obter uma solução com a malha refinada.

Para os elementos compatíveis descritos em 3.2.2, este aumento do número de lados de alguns elementos introduz modos espúrios adicionais.

Para permitir uma maior versatilidade no refinamento de uma malha, o algoritmo de refinamento aceita valores diferentes para o nível de refinamento, RL, a efectuar em cada vértice de cada elemento da malha. Cada elemento é refinado de acordo com o algoritmo recursivo:

1. Se o maior RL não for positivo, parar
2. Subtrair um ao RL de cada vértice do elemento
3. Dividir o elemento em 2^D elementos
4. A cada novo vértice, atribuir um RL igual ao menor RL do correspondente lado do elemento "pai"
5. Para cada novo elemento, aplicar este algoritmo.

A aplicação deste algoritmo permitiria obter a malha da figura 5.11 através da sequência indicada na figura 5.12.

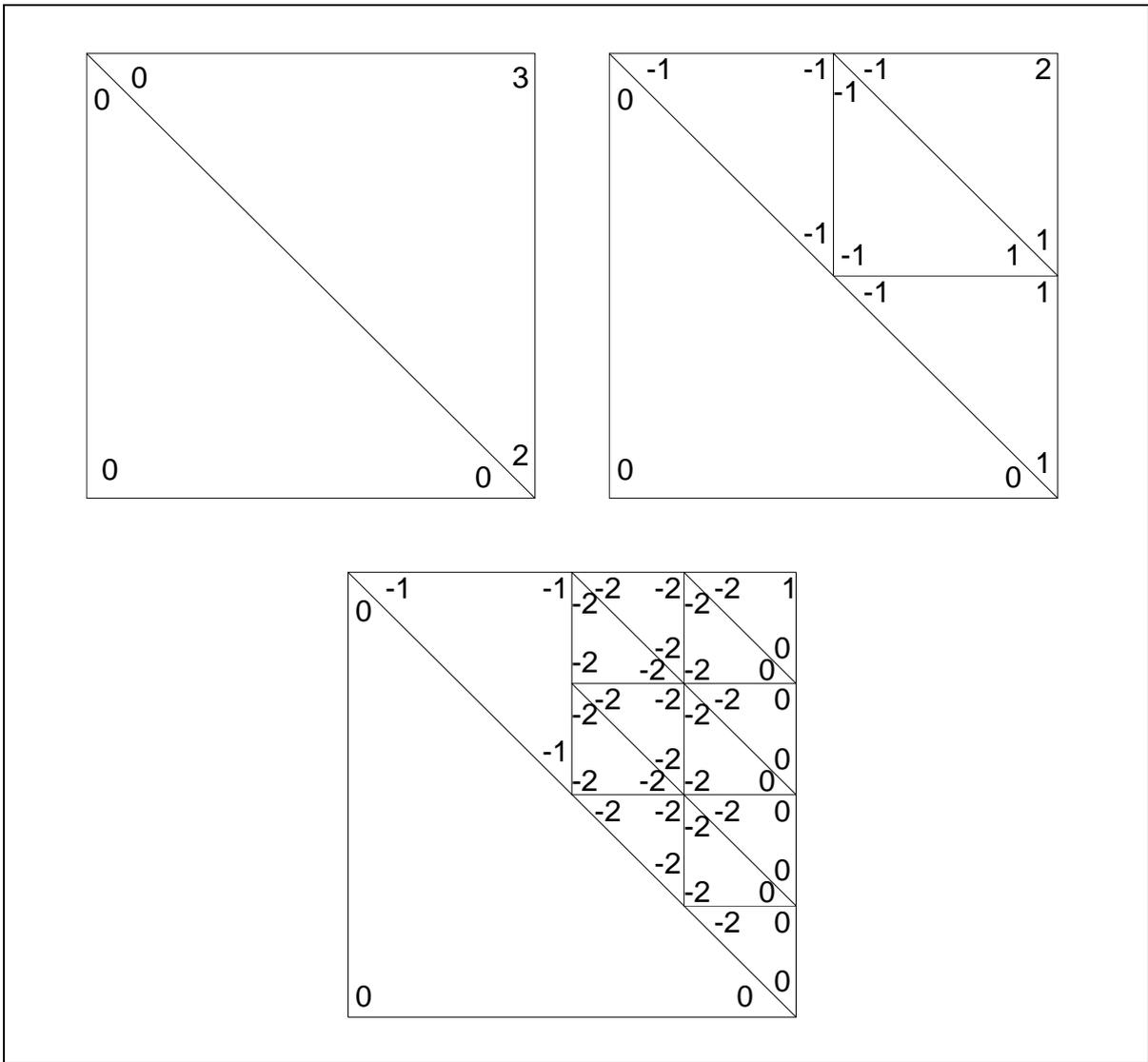


Figura 5.12 - Sequência de refinamentos.

Este método limita mais a nova malha do que a remalhagem. Contudo, permite refinar progressivamente onde é necessário e, graças à sua simplicidade, tem um custo de geração muito menor.

Na implementação efectuada, não existe a possibilidade de inverter refinamentos, juntando elementos. No entanto, no tipo de problemas estudado, desde que a malha inicial não seja muito fina, isto não constitui inconveniente.

6. Convergência e estimativas de erro *a priori*

6.1. Introdução

Conforme exposto no capítulo 5, a convergência para a solução exacta pode ser obtida de três maneiras:

- mantendo o grau dos elementos e diminuindo o seu diâmetro, o que constitui a versão h do método dos elementos finitos;
- mantendo o número e a topologia dos elementos e aumentando o seu grau, o que constitui a versão p do método dos elementos finitos;
- diminuindo o diâmetro e aumentando o grau de elementos da malha, o que constitui a versão hp do método dos elementos finitos.

Conforme referido no capítulo 4, o método dos elementos finitos baseia-se na obtenção de uma aproximação global da energia. Embora a energia não seja a grandeza de maior interesse num problema de engenharia, é possível obter o valor de qualquer grandeza, num ponto, com um erro da mesma ordem que o erro na energia global, utilizando métodos de extracção superconvergentes [BABUSKA e MILLER, 1984] [NIU e SHEPHARD, 1993]. Por isso, a investigação sobre estimativas de erro *a priori* tem sido orientada para a obtenção de estimativas da norma energética do erro.

As estimativas de erro *a priori* permitem calcular, com base na regularidade da função a aproximar, a taxa de convergência assintótica, na norma energética. Contudo, não é possível, *a priori*, estimar com precisão útil a norma energética do erro numa dada malha de elementos finitos, nem gerar malhas que garantam um erro inferior à tolerância pretendida.

A quase totalidade das publicações neste campo, conhecidas do autor, referem-se a elementos finitos compatíveis. Assim, este capítulo vai incidir, principalmente, sobre este tipo de elementos. No final, apresentam-se alguns resultados relativos a elementos finitos de equilíbrio.

6.2. Elementos finitos compatíveis

6.2.1. Versão h

Para uma sequência de malhas quase uniformes de elementos finitos cujas funções de aproximação são polinómios completos do grau p [BABUSKA *et al*, 1981],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^{\min(\lambda,p)} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}, \quad (6.1)$$

ou, em função do número total de graus de liberdade, N ,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq CN^{-\min(\lambda,p)/D} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}. \quad (6.2)$$

Nestas expressões, C não depende de \mathbf{u} nem de N , λ caracteriza a regularidade de σ e $\|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}$ é uma norma de Sobolev da solução exacta. Se σ for singular, isto é, se nalgum ponto alguma componente do tensor das tensões for infinita, a taxa de convergência assintótica depende só de λ . Em 2D, se existir uma fenda no domínio, $\lambda = 0.5$ [WILLIAMS, 1952]. Em 3D, se existir no domínio uma fenda com um ângulo recto na frente da fenda, $\lambda = 0.304$ [DORR, 1986].

Para um dado problema, um dado grau dos elementos e um dado número de graus de liberdade, existe uma malha para a qual o erro é mínimo. Esta malha é designada por malha óptima. Para uma sequência de malhas quase óptimas,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq CN^{-p/D} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}. \quad (6.3)$$

Esta fórmula permite concluir que, em malhas óptimas, para obter a mesma taxa de convergência em relação ao número de graus de liberdade que se obtém em 1D com elementos de grau um, são necessários elementos de grau dois em 2D e de grau três em 3D.

6.2.2. Versão p

Para malhas em que o grau dos elementos é quase uniforme, σ é singular e as singularidades estão em vértices de elementos [BABUSKA *et al*, 1981],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Cp^{-2\lambda} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}, \quad (6.4)$$

ou seja,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq CN^{-2\lambda/D} \|\mathbf{u}\|_{H^{\lambda+1}}, \quad (6.5)$$

em que C não depende de \mathbf{u} nem de N . Em 3D, σ pode também ser singular nas arestas dos elementos [DORR, 1986].

Portanto, a taxa de convergência assintótica da versão p é dupla da taxa de convergência assintótica da versão h com malhas quase uniformes. Contudo, a taxa de convergência assintótica da versão h , com malhas ótimas de elementos de grau superior a um, é superior à taxa de convergência assintótica da versão p uniforme.

Se σ for regular [SZABÓ, 1986],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ce^{-\gamma N^\theta}, \quad (6.6)$$

onde γ e θ não dependem de \mathbf{u} nem de N . Portanto, neste caso, a taxa de convergência assintótica da versão p é exponencial.

6.2.3. Versão hp

Considere-se uma sequência de malhas em que o número de elementos, a geometria e o grau de cada elemento são tais que cada malha é óptima para o respectivo N [BABUSKA e DORR, 1981]. Então, independentemente da existência de singularidades [GUO e BABUSKA, 1986],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ce^{-\gamma N^\theta}. \quad (6.7)$$

Portanto, utilizando a versão hp , é possível obter uma taxa de convergência assintótica exponencial.

Se o grau for igual em todos os elementos, os resultados não serão tão bons. Contudo, para este caso, a convergência assintótica pode ser caracterizada com base nas expressões indicadas em 6.2.1 e 6.2.2, como se exemplifica de seguida.

Considere-se que, para determinado problema, com uma determinada malha inicial de elementos de grau p_0 , se obteve um erro $\|\mathbf{e}_{p_0, h_0}\|_E$. Admita-se que, para o refinamento p uniforme, a taxa de convergência é sempre igual à taxa assintótica correspondente a uma singularidade. Então,

$$\frac{\|\mathbf{e}_{p, h_0}\|_E}{\|\mathbf{e}_{p_0, h_0}\|_E} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-2\lambda}. \quad (6.8)$$

Admita-se também que, para a versão h, com malhas ótimas de elementos de grau p, a taxa de convergência é sempre igual à taxa assintótica correspondente ao grau p. Então,

$$\frac{\|e_{p,h}\|_E}{\|e_{p_0,h_0}\|_E} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{p-2\lambda} \left(\frac{N}{N_{p_0,h_0}}\right)^{-p/D}, \quad (6.9)$$

$$\text{para } \frac{N}{N_{p_0,h_0}} \geq \left(\frac{p}{p_0}\right)^D.$$

Na figura 6.1, representa-se a redução do erro com o aumento do número de graus de liberdade, calculada através de (6.9), para $p_0 = 1$, $\lambda = 0.5$, $D = 2$ e p entre 1 e 10.

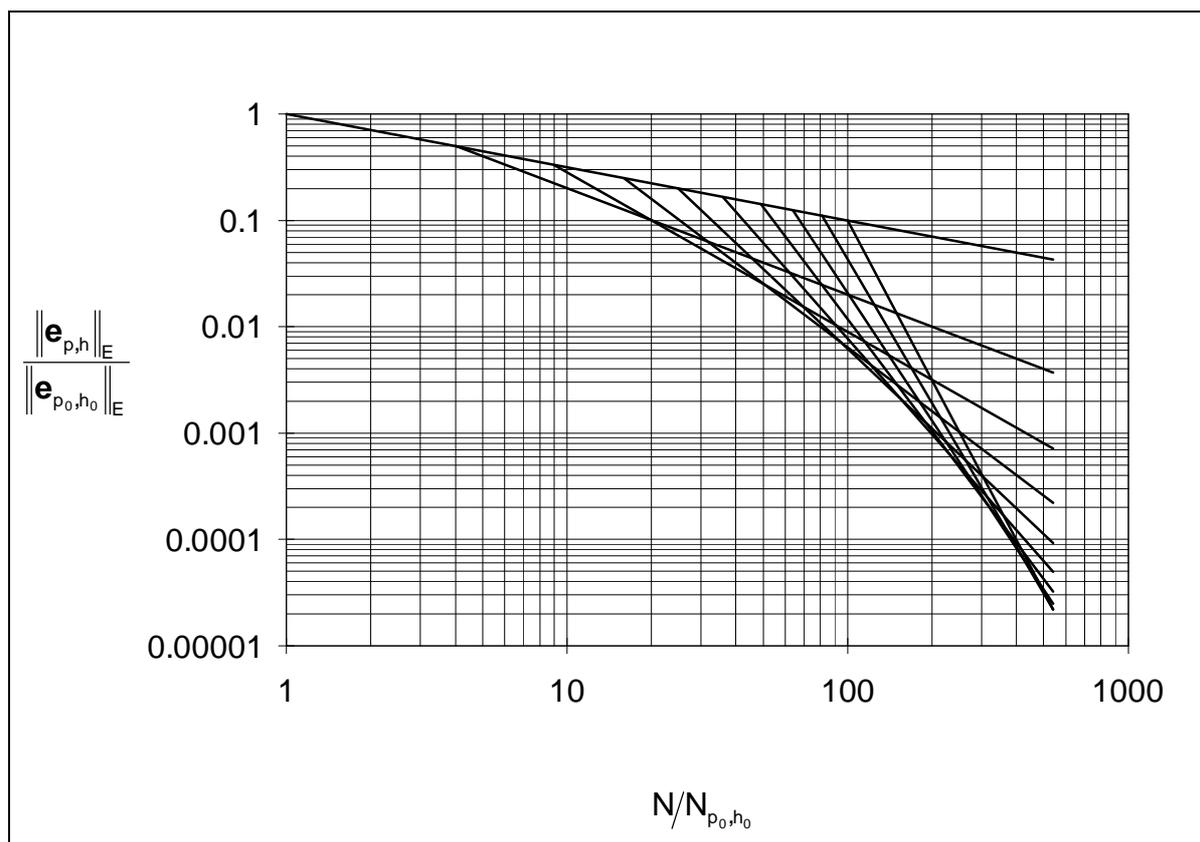


Figura 6.1 - Redução do erro com o aumento do número de graus de liberdade.

Observa-se que, para cada valor da redução do erro, existe um valor ótimo do grau dos elementos, para o qual o aumento do número de graus de liberdade é mínimo. O grau p deixa de ser ótimo para uma redução do erro de

$$\frac{\|e_{p,h_p}\|_E}{\|e_{p_0,h_0}\|_E} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{p-2\lambda} \left(\frac{p_0 p^{p-2\lambda}}{(p+1)^{p+1-2\lambda}}\right)^p, \quad (6.10)$$

para a qual é necessário um aumento do número de graus de liberdade de

$$\frac{N_{p,h_p}}{N_{p_0,h_0}} = \left(\frac{p_0 p^{p-2\lambda}}{(p+1)^{p+1-2\lambda}}\right)^{-D}. \quad (6.11)$$

Se, para cada valor da precisão pretendida, se utilizar o grau óptimo, a taxa de convergência aumenta com o número de graus de liberdade.

6.3. Elementos finitos de equilíbrio

6.3.1. Versão h

Como exemplo, considere-se a placa quadrada representada na figura 6.2, sujeita às cargas aí indicadas. Note-se que a resultante deste carregamento é nula. A solução exacta, embora desconhecida, não contém singularidades.

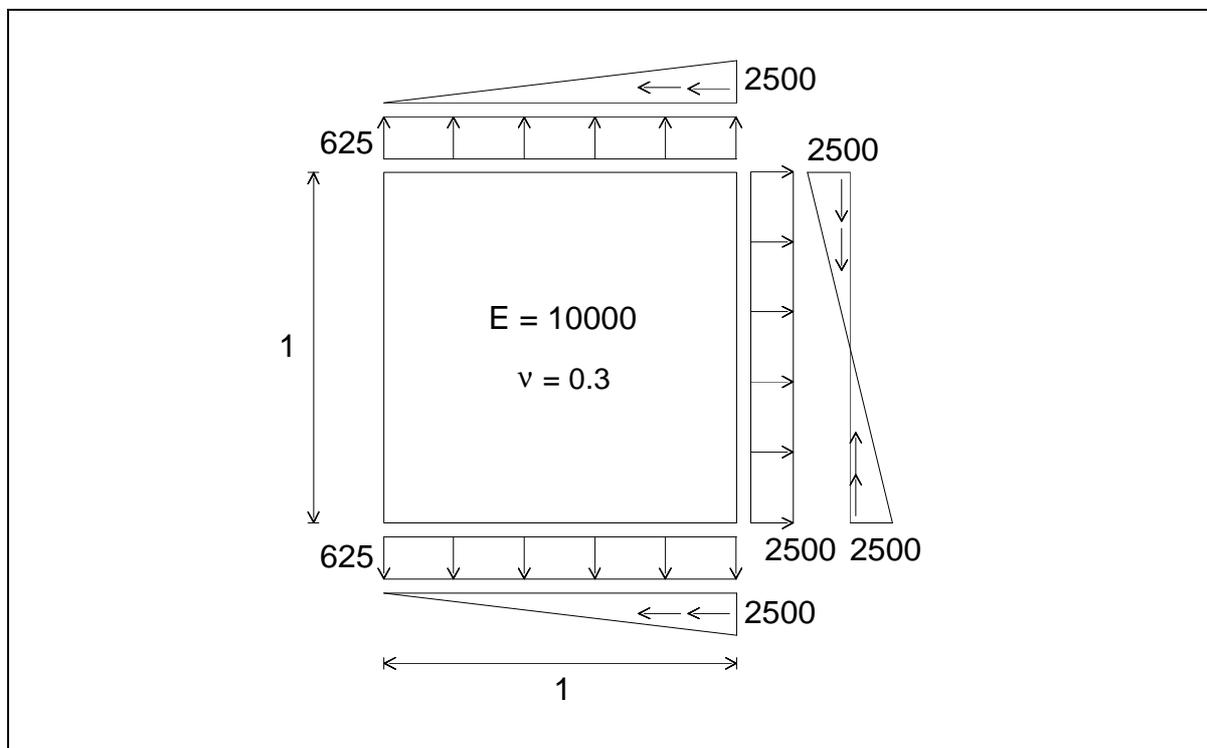


Figura 6.2 - Placa quadrada.

O domínio foi discretizado através das três malhas uniformes representadas na figura 6.3.

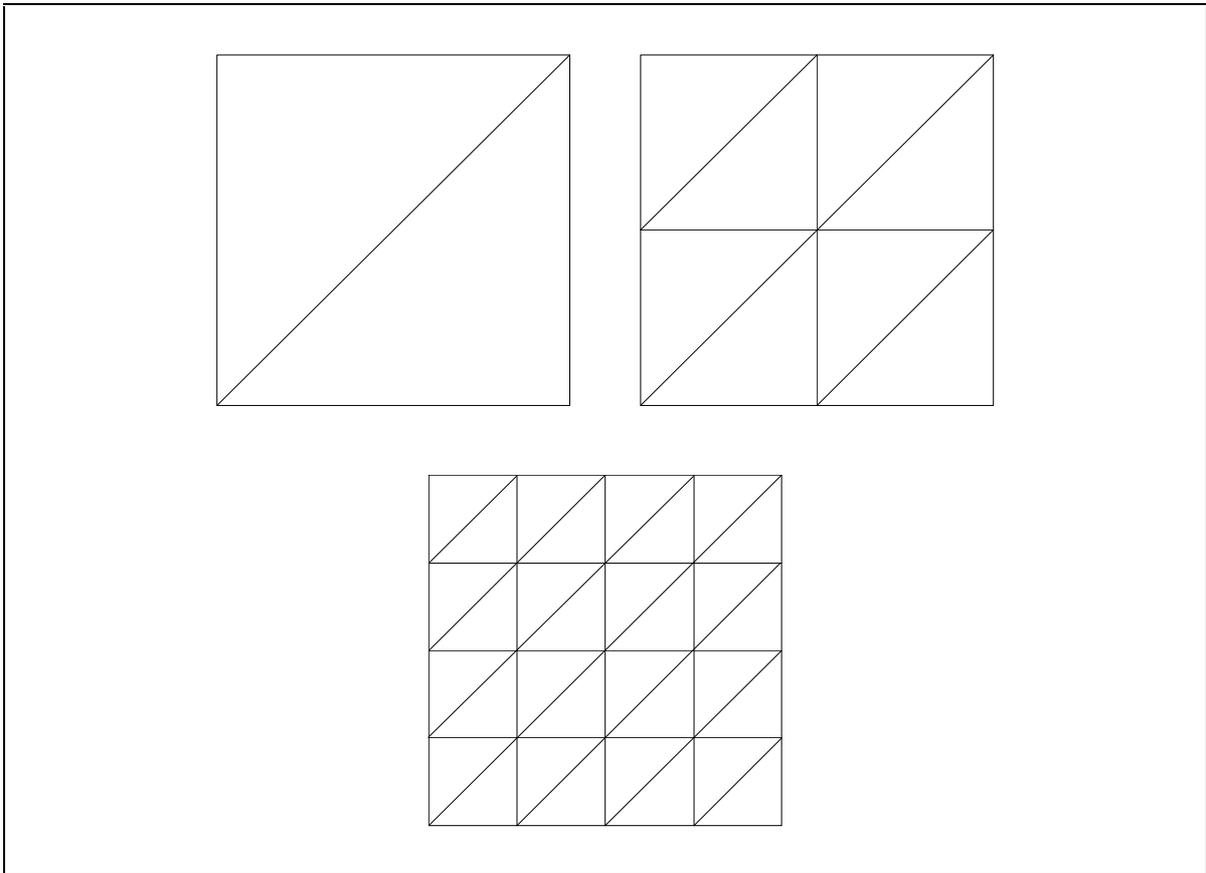


Figura 6.3 - Discretização da placa quadrada através de malhas uniformes.

Na figura 6.4, apresenta-se um gráfico da variação do erro relativo na norma energética obtido utilizando superelementos de equilíbrio de grau um e dois, elementos compatíveis de grau dois e três e elementos de equilíbrio de grau dois e três. O valor "exacto" da energia de deformação, $U = 149.530094$, foi estimado utilizando elementos de grau cinco e o método de extrapolação dual que será descrito em 7.5.

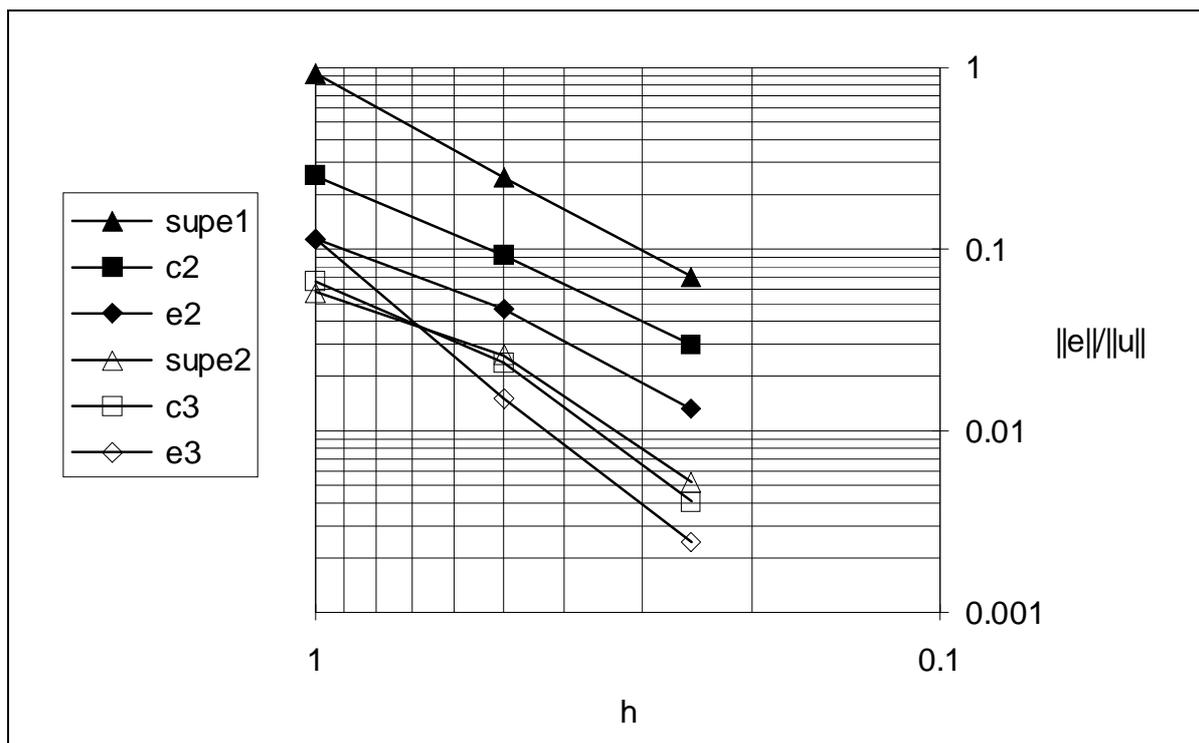


Figura 6.4 - Variação do erro relativo com a dimensão da malha.

Nesta figura, observa-se o aumento da taxa de convergência com o grau dos elementos. Verifica-se também, que, embora os valores do erro sejam diferentes, as taxas de convergência do superelemento de equilíbrio de grau $p-1$, do elemento de deslocamento de grau p e do elemento de equilíbrio de grau p são quase iguais.

Estes resultados parecem, portanto, confirmar que, para uma sequência de malhas de superelementos de equilíbrio, constituídos por triângulos com tensões de grau um, na ausência de singularidades [JOHNSON e MERCIER, 1978],

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2}. \quad (6.12)$$

6.3.2. Versão p

Nos problemas em que σ é singular e as singularidades estão em vértices de elementos, a experiência parece indicar que a taxa de convergência assintótica da versão p é dupla da taxa de convergência assintótica da versão h com malhas uniformes [MAUNDER *et al*, 1996].

7. Estimadores de erro *a posteriori*

7.1. Introdução

Pelas mesmas razões que foram apontadas em 6.1, a investigação sobre estimativas de erro *a posteriori* tem sido também orientada para a obtenção de estimativas da norma energética do erro. Portanto, neste capítulo, consideram-se apenas métodos de obter estimadores da norma energética do erro, calculados com base numa ou mais soluções de elementos finitos.

A qualidade de um estimador do erro ε é geralmente definida a partir do índice de eficácia [KELLY *et al*, 1983]

$$\theta = \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{e}\|_{\varepsilon}}. \quad (7.1)$$

De modo geral, a qualidade de um estimador de erro melhora quando a malha é refinada. Um estimador é assintoticamente exacto se $\theta \rightarrow 1$ quando $h \rightarrow 0$ ou $p \rightarrow \infty$, sendo h o diâmetro dos elementos da malha e p o grau dos elementos. Em aplicações práticas, pode considerar-se aceitável que $1/2 \leq \theta \leq 2$ [BABUSKA e RHEINBOLT, 1979]. Geralmente, prefere-se que $\theta \geq 1$, ou seja, que o estimador seja um majorante.

7.2. Extrapolação de Richardson

A extrapolação de RICHARDSON [1910] permite obter um estimador de π_p e, a partir deste, um estimador da norma energética do erro.

Este método pode ser utilizado sempre que se possa admitir que a convergência é monotónica e do tipo

$$\pi_{P,n} - \pi_P = k N^\beta, \quad (7.2)$$

em que N é o número de graus de liberdade da malha n e $\beta > 0$.

Então,

$$\frac{\pi_{P,n} - \pi_P}{\pi_{P,n-1} - \pi_P} = \left(\frac{\pi_{P,n-1} - \pi_P}{\pi_{P,n-2} - \pi_P} \right)^{\frac{\log(N_{n-1}) - \log(N_n)}{\log(N_{n-2}) - \log(N_{n-1})}}. \quad (7.3)$$

Desde que se disponha dos resultados de três malhas diferentes, é possível obter um estimador de π_P resolvendo numericamente a equação (7.3).

Quando se refinam modelos compatíveis ou equilibrados, desde que a malha refinada contenha a anterior, a convergência da energia potencial total é sempre monotônica. Regra geral, o comportamento assintótico é do tipo (7.2).

7.3. Análise dual global

Considerem-se uma solução \mathbf{u}_c , obtida a partir de um modelo de elementos finitos compatíveis, com um erro \mathbf{e}_c , e uma solução σ_e , obtida a partir de um modelo de elementos finitos de equilíbrio, com um erro \mathbf{e}_e .

Se ε_θ e \mathbf{u}_T forem nulos [VEUBEKE, 1964] [VEUBEKE, 1965] [SANDER, 1971]:

$$U(\mathbf{e}_c) + U(\mathbf{e}_e) = U(\sigma_e) - U(\mathbf{u}_c), \quad (7.4)$$

$$U(\mathbf{u}_c) \leq U(\mathbf{u}) \leq U(\sigma_e). \quad (7.5)$$

Se \mathbf{t}_T e \mathbf{f} forem nulas:

$$U(\mathbf{e}_c) + U(\mathbf{e}_e) = U(\mathbf{u}_c) - U(\sigma_e), \quad (7.6)$$

$$U(\sigma_e) \leq U(\mathbf{u}) \leq U(\mathbf{u}_c). \quad (7.7)$$

Para qualquer campo de deslocamentos compatível, \mathbf{u}_c , e qualquer campo de tensões equilibrado, σ_e , mesmo que não sejam soluções de elementos finitos, e

quaisquer condições de fronteira [DEBONGNIE, 1983] [ODEN *et al*, 1989] [DEBONGNIE *et al*, 1995]:

$$U(\mathbf{e}_e) + U(\mathbf{e}_c) = \pi_p(\mathbf{u}_c) + \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e), \quad (7.8)$$

$$- \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e) \leq - \pi_c(\mathbf{u}) = \pi_p(\mathbf{u}) \leq \pi_p(\mathbf{u}_c). \quad (7.9)$$

Para qualquer um dos campos,

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \varepsilon = \left(2(\pi_p(\mathbf{u}_c) + \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e))\right)^{1/2}. \quad (7.10)$$

Portanto, a análise dual permite sempre obter um majorante do erro de qualquer uma das soluções.

7.4. Estimadores obtidos a partir de indicadores de erro elementares calculados *a posteriori*

A partir de um indicador do erro em cada elemento [BABUSKA e RHEINBOLT, 1978a],

$$\varepsilon_{(i)} \approx \|\mathbf{e}\|_{E,(i)}, \quad (7.11)$$

calculado com base na solução de elementos finitos, é possível obter um estimador do erro global

$$\varepsilon = \left(\sum_{i=1}^{NE} \varepsilon_{(i)}^2\right)^{1/2}. \quad (7.12)$$

A maior parte dos estimadores do erro global são calculados deste modo. Os indicadores de erro elementares são obtidos, a partir da solução de elementos finitos, através de um dos vários processos que serão descritos nos capítulos 8 e 9.

7.5. Extrapolação dual

O método que se vai descrever permite obter um estimador de π_p e, a partir deste, de um estimador da norma energética do erro.

Se se dispuser de dois conjuntos de soluções $\pi_{p,i}$ e $\pi_{p,j}$, obtidos através de elementos finitos de equilíbrio e compatíveis, é possível obter uma estimativa do

valor exacto de π_p através de um método de extrapolação semelhante ao de Richardson.

Se se admitir que a convergência dos n valores $\pi_{p,i}$ é monotónica e do tipo

$$\pi_p - \pi_{p,i} = \alpha N_i^\beta, \quad (7.13)$$

então,

$$\log(\pi_p - \pi_{p,i}) = a + b \log(N_i). \quad (7.14)$$

Para um valor de π_p arbitrado e $n \geq 3$, a e b podem ser obtidos por regressão linear.

Se se admitir que a convergência dos m valores $\pi_{p,j}$ é monotónica e do tipo:

$$\pi_{p,j} - \pi_p = \gamma N_j^\delta, \quad (7.15)$$

então,

$$\log(\pi_{p,j} - \pi_p) = c + d \log(N_j). \quad (7.16)$$

Para um π_p arbitrado e $m \geq 3$, c e d podem ser obtidos por regressão linear.

Quando se refinam modelos compatíveis ou equilibrados, desde que a malha refinada contenha a anterior, a convergência da energia potencial total é sempre monotónica.

O valor de π_p pode ser estimado como sendo aquele que minimiza

$$\sum_{i=1}^n \left(\log(\pi_p - \pi_{p,i}) - a - b \log(N_i) \right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(\log(\pi_{p,j} - \pi_p) - c - d \log(N_j) \right)^2. \quad (7.17)$$

Note-se que, para $n = 3$ e $m = 0$, bem como para $n = 0$ e $m = 3$, este valor de π_p é exactamente igual ao obtido pela extrapolação de Richardson.

Na prática, os valores de a , b , c e d não têm de ser determinados explicitamente, pois, devido às propriedades da regressão linear, (7.17) é igual a

$$\begin{aligned}
& \left[n \left(\sum_{i=1}^n (\log(N_i))^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n (\log(\pi_P - \pi_{P,i}))^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n \log(N_i) \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n (\log(\pi_P - \pi_{P,i}))^2 \right) \right. \\
& \quad - \left(\sum_{i=1}^n (\log(N_i))^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \log(\pi_P - \pi_{P,i}) \right)^2 - n \left(\sum_{i=1}^n \log(\pi_P - \pi_{P,i}) \log(N_i) \right)^2 \\
& \quad \left. + 2 \left(\sum_{i=1}^n \log(\pi_P - \pi_{P,i}) \log(N_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n \log(N_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n \log(\pi_P - \pi_{P,i}) \right) \right] / \\
& \quad \left/ \left[n \left(\sum_{i=1}^n (\log(N_i))^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \log(N_i) \right)^2 \right] + \right. \tag{7.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[m \left(\sum_{j=1}^m (\log(N_j))^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m (\log(\pi_{P,j} - \pi_P))^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^m \log(N_j) \right)^2 \left(\sum_{j=1}^m (\log(\pi_{P,j} - \pi_P))^2 \right) \right. \\
& \quad - \left(\sum_{j=1}^m (\log(N_j))^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m \log(\pi_{P,j} - \pi_P) \right)^2 - m \left(\sum_{j=1}^m \log(\pi_{P,j} - \pi_P) \log(N_j) \right)^2 \\
& \quad \left. + 2 \left(\sum_{j=1}^m \log(\pi_{P,j} - \pi_P) \log(N_j) \right) \left(\sum_{j=1}^m \log(N_j) \right) \left(\sum_{j=1}^m \log(\pi_{P,j} - \pi_P) \right) \right] / \\
& \quad \left/ \left[m \left(\sum_{j=1}^m (\log(N_j))^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m \log(N_j) \right)^2 \right]. \right.
\end{aligned}$$

Nas aplicações efectuadas, utiliza-se sempre $n = m = 3$.