

1. Introdução

1.1. Enquadramento

Na análise estrutural, o modelo de comportamento mais simples é o elástico linear. Infelizmente, as estruturas reais têm um comportamento tanto mais afastado do elástico linear quanto mais perto estiverem da rotura. Apesar disto, a análise elástica linear é correntemente utilizada em engenharia civil, pois permite, geralmente, obter resultados satisfatórios para o dimensionamento e a verificação da segurança.

Em geral, não é possível obter uma solução analítica exacta para os problemas de elasticidade bidimensional ou tridimensional. Por isso, é necessário dispor de métodos que permitam obter soluções aproximadas para estes problemas. O método dos elementos finitos é correntemente utilizado para este fim.

Para a solução obtida pelo método dos elementos finitos ser útil, num problema de engenharia, o erro que lhe está associado deve ser inferior a uma tolerância pré-definida. As estimativas de erro *a priori* apenas permitem calcular a taxa de convergência assintótica, não permitindo gerar malhas que garantam um erro inferior à tolerância pretendida. Por isso, o erro tem de ser estimado *a posteriori*, utilizando a própria solução aproximada para obter um estimador de erro. Deste modo, só é possível obter uma solução com um erro inferior a uma dada tolerância recorrendo a um método com *feedback*, isto é, melhorando a malha de elementos finitos e estimando o erro, sucessivamente, até este atingir o valor pretendido.

Devido a limitações dos meios de cálculo, não é muitas vezes possível obter a precisão pretendida através de um refinamento uniforme da malha de elementos finitos. Mesmo que tal seja possível, não é económico. Consequentemente, o refinamento deve adaptar-se à solução do problema, a partir de indicadores de erro elementares. Desta forma, utilizando um método adaptativo, obtém-se a precisão requerida com o mínimo custo.

Dado o crescente custo relativo do trabalho humano e a necessidade de recorrer a engenheiros com uma preparação em elementos finitos nem sempre adequada, é cada vez mais importante dispor de programas com uma análise de erro *a posteriori* fiável e, de preferência, auto-adaptativos.

O erro das soluções obtidas utilizando o método dos elementos finitos está associado a diversas causas. Na resolução de problemas estáticos de elasticidade linear bidimensional ou tridimensional, o erro mais importante é aquele que está associado à discretização das funções a aproximar. Por isso, a investigação tem sido orientada para a obtenção de estimativas do erro de discretização.

Este erro pode ser medido de diversas formas. Sendo o método dos elementos finitos baseado na obtenção de uma aproximação global da energia, a forma mais coerente de o medir é através da norma energética global. Por isso, a investigação tem procurado obter estimativas da norma energética global do erro, designadas por estimadores de erro. Estes estimadores de erro são geralmente calculados a partir das contribuições de cada elemento, designadas por indicadores de erro. Estes indicadores de erro são também utilizados, como indicadores de refinamento, para orientar o refinamento adaptativo.

A utilização e a investigação nos domínios do método dos elementos finitos, da estimação de erro e do refinamento adaptativo têm sido orientadas quase exclusivamente para os elementos finitos compatíveis. Em [NOOR e BABUSKA, 1987], [STROUBOULIS e HAQUE, 1992] e [BABUSKA *et al*, 1994b] podem encontrar-se retrospectivas do estado da arte na estimação do erro e/ou refinamento adaptativo em elementos finitos. Em [MACKERLE, 1994] pode-se encontrar uma lista de 312 referências sobre estimação do erro e/ou refinamento adaptativo em elementos finitos, das quais 290 correspondem a teses e artigos publicados em 1992 e 1993.

Nos problemas de dimensionamento e verificação de segurança aos estados limites últimos, é mais útil ter uma solução que garanta o equilíbrio do carregamento do que ter uma solução que garanta uma deformada compatível. Esta solução equilibrada pode ser obtida utilizando elementos finitos de equilíbrio. Além disso, a partir da análise dual de um modelo de elementos finitos de equilíbrio e de um modelo de elementos finitos compatíveis, é possível obter um majorante do erro e indicadores de erro elementares. Apesar disto, devido à pouca divulgação dos elementos finitos de equilíbrio, nem o refinamento adaptativo de malhas duais nem a estimação de erro e o refinamento adaptativo de malhas de elementos finitos de equilíbrio têm recebido atenção dos investigadores. Quanto ao refinamento adaptativo de malhas duais, a única aplicação conhecida do autor foi feita a problemas escalares bidimensionais [ODEN *et al*, 1989]. Tanto quanto é do

conhecimento do autor, não foi publicado nenhum trabalho sobre estimação de erro *a posteriori* e refinamento adaptativo baseados apenas em formulações de elementos finitos de equilíbrio.

1.2. Objectivos

O objectivo desta tese é estudar a utilização de elementos finitos de equilíbrio na estimação de erro *a posteriori* e no refinamento h-adaptativo, em problemas estáticos de elasticidade linear.

Neste contexto, pretende-se implementar uma estratégia de refinamento h-adaptativo baseada na análise dual de um modelo de elementos finitos de equilíbrio e de um modelo de elementos finitos compatíveis. Esta análise permite obter um majorante do erro e indicadores de erro elementares.

Nesta tese, propõem-se também vários métodos que permitem efectuar a estimação do erro e obter indicadores de erro, com base apenas numa solução de elementos finitos de equilíbrio. De entre estes métodos, será desenvolvido aquele que utiliza explicitamente os defeitos de compatibilidade. Nomeadamente, pretende-se estudar a possibilidade de recorrer a malhas duais para determinar os valores de alguns coeficientes que fazem parte da expressão do indicador de erro.

Para estes indicadores de erro, pretende-se igualmente implementar uma estratégia de refinamento h-adaptativo adequada.

Pretende-se desenvolver programas para investigação e não para utilização corrente. Por esta razão, pretende-se privilegiar a flexibilidade, na definição da geometria dos elementos e na escolha das funções de aproximação, por exemplo, em detrimento da eficiência computacional na formação e resolução dos sistemas algébricos.

1.3. Organização

No capítulo 2, caracteriza-se o problema em análise. Definem-se as variáveis envolvidas e as relações entre elas. Introduce-se parte da notação utilizada nos capítulos seguintes.

No capítulo 3, descrevem-se e caracterizam-se as formulações de elementos finitos utilizadas. Embora parte da secção relativa a elementos finitos de equilíbrio corresponda a trabalho desenvolvido na dissertação de mestrado do autor [PEREIRA, 1993], apresentam-se diversos desenvolvimentos posteriores.

O capítulo 4 aborda a existência de erro nas soluções de elementos finitos compatíveis e equilibradas. Resumem-se as propriedades do erro dos elementos finitos compatíveis e dos elementos finitos de equilíbrio. Estudam-se os defeitos de compatibilidade nas soluções de elementos finitos de equilíbrio. Parte significativa deste estudo constitui trabalho original. Estes defeitos de compatibilidade são utilizados para calcular alguns dos indicadores de erro para elementos finitos de equilíbrio sugeridos no capítulo 9, nomeadamente aquele adoptado nesta tese.

No capítulo 5, após uma panorâmica dos vários métodos de melhorar as soluções de elementos finitos já publicados, descreve-se o método utilizado nesta tese.

No capítulo 6, descreve-se como varia a taxa de convergência dos elementos finitos, para os vários métodos de refinamento.

No capítulo 7, descrevem-se alguns métodos de obter estimadores da norma energética global do erro, calculados com base na solução de elementos finitos. Este capítulo é relativamente curto, pois a maior parte dos estimadores de erro são calculados com base em indicadores de erro elementares e estes são descritos nos capítulos 8 e 9. Um dos métodos descritos neste capítulo, baseado numa extrapolação simultânea de dois conjuntos duais de soluções, tanto quanto é do conhecimento do autor, é original.

O capítulo 8 constitui uma retrospectiva dos métodos para obter indicadores da norma energética de erro em cada elemento, com base numa solução de elementos finitos compatíveis.

A principal contribuição original da presente tese encontra-se no capítulo 9, relativo a indicadores de erro para malhas de elementos finitos de equilíbrio. Descreve-se a obtenção de indicadores de erro elementares a partir da análise dual global. Em seguida, sugerem-se vários métodos para obter indicadores de erro, com base apenas numa solução de elementos finitos de equilíbrio, e descreve-se o indicador adoptado.

O capítulo 10 constitui uma retrospectiva dos indicadores de refinamento que não são indicadores de erro.

No capítulo 11, indicam-se as várias parcelas do custo total da obtenção de uma solução de elementos finitos e discute-se o conceito de adaptatividade.

No capítulo 12, abordam-se os procedimentos que, com base nos indicadores de erro, ou nos indicadores de refinamento, associados a uma malha e num método de refinamento, fornecem a malha seguinte. Após uma revisão das estratégias adaptativas já conhecidas, descreve-se a estratégia utilizada, na qual os métodos para detectar as singularidades, com base nas soluções de elementos finitos, são, tanto quanto é do conhecimento do autor, originais.

No capítulo 13, são apresentados e discutidos alguns exemplos de aplicação dos estimadores de erro e estratégias de refinamento desenvolvidos nesta tese. Exemplifica-se o que sucede quando se relaxam as condições de continuidade nos lados dos elementos. Comparam-se os resultados obtidos utilizando diferentes graus dos elementos finitos; compara-se, também, a estratégia de refinamento de malhas duais com a estratégia de refinamento de malhas de elementos finitos de equilíbrio.

No último capítulo, o capítulo 14, fazem-se alguns comentários finais e sugerem-se possíveis desenvolvimentos do trabalho apresentado.

Em anexo, faz-se uma breve referência ao trabalho já publicado sobre refinamento adaptativo de elementos finitos baseados em formulações que não fornecem soluções equilibradas nem compatíveis.

Nos vários exemplos apresentados, os resultados obtidos através de elementos finitos nunca são comparados com resultados obtidos a partir de um modelo físico. O comportamento é arbitrado como sendo fisicamente e geometricamente linear. Por estas razões, não se indicou nenhum sistema de unidades. Contudo, pode-se admitir que os comprimentos estão expressos em metro e as tensões em quilopascal.

2. Conceitos básicos da teoria da elasticidade

2.1. Introdução

Considere-se um domínio Ω , delimitado por uma fronteira Γ e referido a um sistema de eixos cartesiano. Seja Γ_t a parte da fronteira onde é imposta a tensão e Γ_u a parte complementar, onde são impostos os deslocamentos.

Considera-se, ao longo deste trabalho, que o material é isotrópico, que as acções são estáticas e que são válidas as hipóteses da linearidade física e da linearidade geométrica.

A hipótese da linearidade física consiste em assumir para o material um comportamento elástico linear, ou seja, uma relação linear entre tensões e deformações.

Na hipótese da linearidade geométrica, admite-se que as deformações e os deslocamentos são muito pequenos, face à menor dimensão do corpo. Nestas condições, a configuração deformada confunde-se com a configuração inicial.

O problema fundamental da elasticidade consiste em determinar os campos de deslocamentos, de deformações e de tensões em Ω , conhecidas as forças de massa, os deslocamentos na fronteira cinemática Γ_u e a tensão na fronteira estática Γ_t .

Neste capítulo, são definidas as variáveis que surgem na formulação deste problema - deslocamentos, deformações, tensões e forças de massa - e as condições que as relacionam - compatibilidade, equilíbrio e elasticidade. São ainda apresentados os teoremas energéticos que permitem estabelecer a forma como as soluções aproximadas convergem para a solução exacta.

2.2 Condições de compatibilidade

O deslocamento de cada ponto de Ω pode ser representado por um vector, \mathbf{u} . As componentes deste vector representam as projecções do deslocamento segundo as direcções do sistema de eixos cartesiano. Em 3D,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

e, em 2D,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

O estado de deformação em cada ponto é caracterizado por um tensor simétrico de segunda ordem, $\boldsymbol{\varepsilon}$. Em 3D,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

e, em 2D,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Por comodidade, define-se $\gamma_{ij} = 2 \varepsilon_{ij}$ e utiliza-se, em 3D, o vector

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

e, em 2D, o vector

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

As relações entre as deformações e os deslocamentos podem ser escritas matricialmente na forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} \mathbf{u}, \quad (2.7)$$

onde \mathbf{d} é o operador diferencial de compatibilidade, definido, em 3D, por

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e, em 2D, por

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

2.3. Condições de equilíbrio

O campo de forças de massa existente no domínio pode ser representado por um vector, \mathbf{f} . Em 3D,

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

e, em 2D,

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

O estado de tensão em cada ponto pode ser caracterizado por um tensor de segunda ordem, σ . A componente σ_{ij} do tensor das tensões representa a componente, segundo a direcção j , da tensão numa faceta perpendicular à direcção i . Em 3D,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

e, em 2D,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Como foi admitida a hipótese da linearidade geométrica, as equações de equilíbrio são estabelecidas na configuração indeformada da estrutura.

Das equações de equilíbrio de momentos de um elemento infinitesimal, conclui-se que o tensor das tensões é simétrico.

Assim, por comodidade, utiliza-se, em 3D, o vector das tensões

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

e, em 2D, o vector das tensões

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Deste modo, as equações de equilíbrio de forças de um elemento infinitesimal no interior de Ω podem ser escritas matricialmente na forma

$$\mathbf{d}^* \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

onde \mathbf{d}^* é o operador diferencial de equilíbrio, adjunto de \mathbf{d} . Em 3D,

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e, em 2D,

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Na ausência de forças de massa, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, as equações de equilíbrio (2.16) são automaticamente satisfeitas se as tensões forem obtidas a partir das funções geradoras de tensões, do modo descrito, por exemplo, em [LOVE, 1927].

Em 2D, as tensões são obtidas a partir da função geradora de tensões de AIRY [1863]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \Phi(x, y). \quad (2.19)$$

Em 3D, as tensões podem ser obtidas a partir das funções geradoras de tensões de MAXWELL [1868]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{bmatrix} \Phi_1(x, y, z), \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 0 \end{bmatrix} \Phi_2(x, y, z), \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Phi_3(x, y, z) \quad (2.20)$$

ou das funções geradoras de tensões de MORERA [1892]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x^2} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x \partial y} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x \partial z} \end{bmatrix} \Psi_1(x, y, z), \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 0 \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x \partial y} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial y^2} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial y \partial z} \end{bmatrix} \Psi_2(x, y, z), \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial x \partial z} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial y \partial z} \\ 1 \frac{\partial^2}{2 \partial z^2} \end{bmatrix} \Psi_3(x, y, z). \quad (2.21)$$

2.4. Condições de fronteira

A fronteira Γ do domínio Ω considera-se dividida em duas partes. Na fronteira cinemática, Γ_u , impõem-se os valores dos deslocamentos,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma. \quad (2.22)$$

Na fronteira estática, Γ_t , impõe-se a tensão,

$$\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_\Gamma. \quad (2.23)$$

\mathbf{N} é uma matriz onde se reúnem as componentes do versor da normal exterior à fronteira Γ_t associadas ao operador \mathbf{d}^* . Em 3D,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

e, em 2D:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

2.5. Relações constitutivas

As relações constitutivas estabelecem a lei que relaciona os campos de tensões e de deformações. Podem ser apresentadas em termos de flexibilidade ou em termos de rigidez.

Em termos de flexibilidade,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta. \quad (2.26)$$

Nesta definição, $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ denota as deformações térmicas generalizadas. A matriz \mathbf{f} , para um material isotrópico com módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν , é dada por:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

em 3D;

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

em estados planos de tensão e

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) & 0 \\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

em estados planos de deformação.

Em termos de rigidez,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta. \quad (2.30)$$

Nesta definição, \mathbf{k} é uma matriz simétrica, positiva definida e designada por matriz de rigidez. A matriz de rigidez é inversa da matriz de flexibilidade, ou seja:

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

em 3D;

$$\mathbf{k} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

em estados planos de tensão e

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

em estados planos de deformação.

2.6. Equações de Navier

Com base em (2.7) e (2.30), é possível escrever as equações de equilíbrio (2.16) em termos dos deslocamentos, obtendo as equações de Navier,

$$\mathbf{d}^* \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u} - \mathbf{d}^* \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.34)$$

A partir de (2.7), (2.30) e (2.23), é também possível escrever as condições de fronteira estáticas em termos dos deslocamentos,

$$\mathbf{N} \mathbf{k} \mathbf{d} \mathbf{u} - \mathbf{N} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta = \mathbf{t}_r. \quad (2.35)$$

Este processo de eliminação permite reduzir o número de incógnitas e de equações do problema.

2.7. Equações de St Venant e de Beltrami-Michell

É também possível formular o problema em termos de tensões, recorrendo às equações de St Venant.

As extensões obtidas a partir de um campo de deslocamentos cuja terceira derivada é contínua obedecem necessariamente às equações de compatibilidade de St Venant. Para um domínio simplesmente conexo, estas condições são também suficientes para ser possível obter um campo de deslocamentos contínuo, por integração de um campo de extensões cuja segunda derivada é contínua.

Em 3D, existem 81 equações:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (2.36)$$

Contudo, estas equações ou são nulas ou são iguais a uma das seis seguintes:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} = 0; \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} = 0; \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} = 0; \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0; \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = 0; \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0. \quad (2.42)$$

Em 2D, a equação de compatibilidade é

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.43)$$

Utilizando as relações constitutivas (2.26), é possível escrever as equações de compatibilidade em termos de tensões, obtendo as equações de Beltrami-Michell. É também possível escrever as condições de fronteira cinemáticas em termos de tensões. Este processo de eliminação permite reduzir o número de incógnitas e de equações do problema.

2.8. Princípios energéticos

2.8.1. Introdução

Os princípios energéticos desempenham um papel importante na formulação e resolução de problemas na área da Mecânica dos Sólidos. São particularmente importantes na definição das condições de existência e unicidade das soluções e na determinação da forma como as soluções aproximadas convergem para a solução exacta.

Os princípios energéticos que de seguida se enunciam são aqueles que assumem uma maior importância no contexto deste trabalho. Diversas generalizações destes princípios podem ser encontradas no texto de WASHIZU [1975].

2.8.2. Princípio do Mínimo da Energia Potencial

O Princípio do Mínimo da Energia Potencial estabelece que, de entre todos os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis, aquele que corresponde à solução exacta minimiza a energia potencial total do sistema,

$$\pi_p = U - W. \quad (2.44)$$

Nesta expressão, U é a energia de deformação,

$$U = \int_{\Omega} \int_0^{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^T d\varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T (\varepsilon - \varepsilon_{\theta}) d\Omega, \quad (2.45)$$

e W é o trabalho desenvolvido pelas forças aplicadas,

$$W = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_t^T \mathbf{u} d\Gamma. \quad (2.46)$$

Uma solução é cinematicamente admissível, ou compatível, quando satisfaz localmente as equações de compatibilidade (2.7) e verifica as condições de fronteira cinemáticas (2.22).

O mínimo da energia potencial é obtido para um campo cinematicamente admissível \mathbf{u} tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{u})(\varepsilon(\mathbf{u}_v) - \varepsilon_{\theta}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u}_v d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_t^T \mathbf{u}_v d\Gamma, \quad (2.47)$$

para todos os deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis \mathbf{u}_v . Esta expressão corresponde ao Princípio dos Trabalhos Virtuais.

2.8.3. Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar

O Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar estabelece que, de entre todos os campos de tensões estaticamente admissíveis, aquele que corresponde à solução exacta minimiza a energia potencial complementar do sistema,

$$\pi_c = U^* - W^*. \quad (2.48)$$

Nesta expressão, U^* é a energia complementar de deformação,

$$U^* = \int_{\Omega} \int_0^{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\sigma} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T (\varepsilon + \varepsilon_{\theta}) d\Omega, \quad (2.49)$$

e W é o trabalho associado aos deslocamentos impostos,

$$W^* = \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}^T \mathbf{u}_{\Gamma} d\Gamma. \quad (2.50)$$

Uma solução é estaticamente admissível, ou equilibrada, quando satisfaz localmente as equações de equilíbrio (2.16) e verifica as condições de fronteira estáticas (2.23).

Para qualquer solução,

$$\pi_p + \pi_c = 0. \quad (2.51)$$

Portanto, para qualquer campo de deslocamentos compatível, \mathbf{u}_c , e qualquer campo de tensões equilibrado, $\boldsymbol{\sigma}_e$,

$$- \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_e) \leq - \pi_c(\mathbf{u}) = \pi_p(\mathbf{u}) \leq \pi_p(\mathbf{u}_c). \quad (2.52)$$

3. Formulações de elementos finitos

3.1. Introdução

O conceito em que se fundamenta o método dos elementos finitos é o da aproximação do domínio em análise através de um número finito de subdomínios de formas simples e dimensões arbitrárias, os elementos finitos, no interior dos quais se assumem funções simples para aproximar algumas das variáveis em estudo. A solução aproximada consiste numa combinação linear destas funções. Os pesos desta combinação são calculados através da resolução de um sistema de equações algébricas que equivale a uma aproximação das equações do problema.

A grande liberdade na discretização do domínio e das funções faz com que o método dos elementos finitos possa ser utilizado para resolver praticamente qualquer problema susceptível de ser representado matematicamente por equações às derivadas parciais, com quaisquer condições de fronteira [ZIENKIEWICZ, 1988].

Um dado tipo de problemas pode ser abordado de diversas maneiras, o que leva a que se obtenham várias formulações.

A maioria das formulações de elementos finitos para problemas de elasticidade são obtidas discretizando, nos elementos, um ou vários dos campos definidos no capítulo 2: deslocamentos, extensões e tensões. Os campos não discretizados podem ser obtidos a partir dos outros através das relações (2.7) e (2.26) ou (2.30). É também possível discretizar, independentemente das funções discretizadas nos elementos, a tensão ou os deslocamentos nos lados (a palavra lado designa um lado de um elemento em 2D ou uma face de um elemento em 3D). As funções de aproximação utilizadas podem satisfazer, *a priori*, algumas das equações do problema. A solução de elementos finitos é obtida de modo a que as condições não satisfeitas *a priori* sejam aproximadas o melhor possível, de acordo com os critérios da formulação utilizada. As equações do sistema algébrico são

obtidas a partir das referidas condições, através do método dos resíduos pesados ou de princípios variacionais. Várias formulações de elementos finitos deste tipo podem ser encontradas em [PIAN e TONG, 1969], [ALMEIDA, 1989] e [ALMEIDA e FREITAS, 1992].

Neste trabalho, são apenas considerados elementos finitos compatíveis e elementos finitos de equilíbrio. Os elementos finitos compatíveis são baseados em formulações que fornecem soluções que satisfazem localmente as equações de compatibilidade (2.7) e verificam as condições de fronteira cinemáticas (2.22). Em 3.2.1, descreve-se a formulação clássica de elementos finitos compatíveis, sendo a formulação utilizada neste trabalho descrita em 3.2.2. Os elementos de equilíbrio são baseados em formulações que permitem obter soluções que satisfazem localmente as equações de equilíbrio (2.16) e verificam as condições de fronteira estáticas (2.23). A formulação de elementos finitos de equilíbrio utilizada neste trabalho é descrita na secção 3.3.

Embora possam ser utilizados diversos tipos de funções de aproximação, neste trabalho são apenas consideradas funções polinomiais, aquelas que são correntemente mais utilizadas.

A utilização e a investigação nos domínios da estimação de erro e do refinamento adaptativo têm sido orientadas quase exclusivamente para os elementos finitos compatíveis. No anexo, faz-se uma breve referência ao trabalho já publicado sobre refinamento adaptativo de elementos finitos baseados em formulações que não fornecem soluções equilibradas nem compatíveis.

3.2. Elementos finitos compatíveis

3.2.1. Formulação clássica

Na formulação clássica de elementos finitos de deslocamento [TURNER *et al*, 1956] [ZIENKIEWICZ, 1988], é apenas discretizado o campo de deslocamentos. A discretização é feita de modo a satisfazer, *a priori*, a admissibilidade cinemática. O campo de deslocamentos é definido, a partir dos valores dos deslocamentos num certo número de pontos do domínio, os nós, através de funções de interpolação no domínio:

$$\mathbf{u}_{i,c} = \boldsymbol{\phi} \hat{\mathbf{u}}_i, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}_c = \boldsymbol{\Phi} \hat{\mathbf{u}}. \quad (3.2)$$

Estas funções de interpolação no domínio são obtidas a partir de funções de interpolação elementares. Associada a cada nó no interior ou na fronteira de cada elemento, existe uma função de interpolação. Esta função é contínua, tem valor unitário no nó respectivo e nulo nos restantes. As componentes do campo de deslocamentos são aproximadas, em cada elemento, através destas funções. Deste modo, o campo de deslocamentos em cada elemento fica univocamente definido a partir dos valores nodais:

$$\mathbf{u}_{i,c,(e)} = \boldsymbol{\psi}_{(e)} \hat{\mathbf{u}}_{i,(e)}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}_{c,(e)} = \boldsymbol{\Psi}_{(e)} \hat{\mathbf{u}}_{(e)}. \quad (3.4)$$

As funções de interpolação no domínio coincidem, em cada elemento, com as funções de interpolação elementares:

$$\phi = \psi_{(e)}, \forall \mathbf{x} \in \Omega_{(e)}. \quad (3.5)$$

As condições de fronteira cinemáticas são satisfeitas impondo os valores dos deslocamentos dos nós na fronteira cinemática.

O campo de deslocamentos será contínuo desde que, em cada lado entre dois elementos, as funções de interpolação de ambos os elementos associadas a cada nó assumam valores iguais em todos os pontos desse lado. Para as funções de interpolação polinomiais clássicas, esta condição é satisfeita se todos os elementos tiverem igual número de nós em cada lado e cada nó pertencer a todos os elementos que lhe são adjacentes.

A geometria de cada elemento é normalmente definida a partir das coordenadas dos nós, utilizando funções de forma polinomiais do mesmo tipo das utilizadas para os deslocamentos, todas referidas a um elemento mestre cúbico ou tetraédrico em 3D e quadrado ou triangular em 2D. Se as funções de forma forem exactamente as mesmas, diz-se que o elemento é isoparamétrico.

O sistema algébrico é obtido por aplicação dos princípios energéticos referidos em 2.8.1 ou aproximando as equações de Navier (2.34) através do método dos resíduos pesados.

Após algumas manipulações, obtém-se

$$\left(\int_{\Omega} (\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi})^T \mathbf{k}(\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi}) d\Omega \right) \hat{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} (\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi})^T \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{t}_T d\Gamma, \quad (3.6)$$

que pode ser escrita na forma compacta:

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (3.7)$$

A matriz de rigidez global, \mathbf{K} , pode ser obtida adicionando os termos das várias matrizes elementares,

$$\mathbf{K}_{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} (\mathbf{d}\Psi_{(e)})^T \mathbf{k}(\mathbf{d}\Psi_{(e)}) d\Omega, \quad (3.8)$$

correspondentes a cada um dos deslocamentos nodais.

O vector de forças nodais equivalentes, \mathbf{F} , pode ser obtido adicionando os termos dos vários vectores elementares,

$$\mathbf{F}_{(e)} = \int_{\Omega_{(e)}} (\mathbf{d}\Psi_{(e)})^T \mathbf{k} \varepsilon_{\theta} d\Omega + \int_{\Omega_{(e)}} \Psi_{(e)}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{t,(e)}} \Psi_{(e)}^T \mathbf{t}_{\Gamma} d\Gamma, \quad (3.9)$$

correspondentes a cada um dos deslocamentos nodais.

3.2.2. Formulação utilizada

3.2.2.1. Introdução

Neste trabalho, utiliza-se uma formulação de elementos finitos compatíveis dual da formulação de elementos finitos de equilíbrio utilizada, que será descrita em 3.3.2. Esta escolha facilita o refinamento das malhas, pois garante que o método de refinamento é igualmente adequado para ambos os casos. Além disso, facilita a programação em geral e o cálculo dos indicadores de erro duais em particular, pois a maior parte das subrotinas são comuns.

Nesta formulação de elementos finitos compatíveis [ALMEIDA, 1989] [ALMEIDA e FREITAS, 1992], a discretização do campo de deslocamentos não satisfaz, *a priori*, a admissibilidade cinemática nos lados dos elementos. Esta será imposta através de resíduos pesados. Assim, é necessário discretizar, também, o fluxo de tensão nos lados dos elementos.

3.2.2.2. Descrição da formulação

O campo de deslocamentos no interior de um elemento $\Omega_{(i)}$ é discretizado da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}_{c,(i)} = \mathbf{U}_{(i)} \hat{\mathbf{u}}_{(i)}. \quad (3.10)$$

$\mathbf{U}_{(i)}$ é a matriz das funções de aproximação dos deslocamentos e $\hat{\mathbf{u}}_{(i)}$ é o vector dos parâmetros de deslocamento (pesos das funções de aproximação de deslocamento).

As funções de aproximação dos deslocamentos são contínuas no interior dos elementos.

Para impor a compatibilidade entre elementos, é definida uma nova variável, o deslocamento relativo num lado,

$$\mathbf{r}_{(i)} = \sum_i \mathbf{M}_{(i),(i)} \mathbf{u}_{(i)}, \quad (3.11)$$

em que o somatório em i é extensivo aos elementos finitos adjacentes ao lado $\Gamma_{(i)}$.

Para um lado $\Gamma_{(i)}$ e para cada elemento $\Omega_{(i)}$ adjacente a ele, a matriz de rotação $\mathbf{M}_{(i),(i)}$ é dada por

$$\mathbf{M}_{(i),(i)} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

em 2D, e

$$\mathbf{M}_{(i),(i)} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \mathbf{t}_{1x} & \mathbf{t}_{1y} & \mathbf{t}_{1z} \\ \mathbf{t}_{2x} & \mathbf{t}_{2y} & \mathbf{t}_{2z} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

em 3D. Os vectores \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 são tais que

$$\mathbf{M}_{(i),(i)}^T \mathbf{M}_{(i),(i)} = \mathbf{I} \quad (3.14)$$

e que

$$\sum_i \mathbf{M}_{(i),(i)} = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

em que o somatório em i é extensivo aos elementos $\Omega_{(i)}$ adjacentes ao lado $\Gamma_{(i)}$.

Note-se que é também possível utilizar, para um dos elementos adjacentes ao lado, $\mathbf{M}_{(i),(i)} = \mathbf{I}$ e, para o outro, $\mathbf{M}_{(i),(e)} = -\mathbf{I}$. Nesta alternativa, os deslocamentos relativos são componentes segundo as direcções dos eixos globais e não componentes normais e tangenciais aos lados. Apesar de implicar uma escolha de sinal arbitrária, esta alternativa é mais simples de utilizar em 3D.

Há compatibilidade de deslocamentos, num lado entre elementos ou pertencente à fronteira cinemática se, nesse lado:

$$\mathbf{r}_{(i)} = \bar{\mathbf{r}}_{(i)}, \quad (3.16)$$

na qual $\bar{\mathbf{r}}_{(i)}$ é igual a $\mathbf{M}_{(i),(i)} \mathbf{u}_\Gamma$ se $\Gamma_{(i)} \subset \Gamma_u$ e nulo se $\Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma_u$.

Se em todos os lados entre elementos ou pertencentes à fronteira cinemática se verificar (3.16), a solução obtida será cinematicamente admissível.

O fluxo de tensão num lado $\Gamma_{(i)}$ dum elemento é discretizado do seguinte modo:

$$\mathbf{g}_{c,(i)} = \mathbf{G}_{(i)} \hat{\mathbf{g}}_{(i)} + \mathbf{M}_{(i),(i)} \bar{\mathbf{t}}_{(i)}. \quad (3.17)$$

$\mathbf{G}_{(i)}$ é a matriz das funções de aproximação do fluxo de tensão e $\hat{\mathbf{g}}_{(i)}$ é o vector dos parâmetros de fluxo de tensão (pesos das funções de aproximação de fluxo de tensão). Se $\Gamma_{(i)} \subset \Gamma_t$, $\mathbf{g}_{c,(i)} = \mathbf{M}_{(i),(i)} \bar{\mathbf{t}}_{(i)} = \mathbf{M}_{(i),(i)} \mathbf{t}_\Gamma$. Se $\Gamma_{(i)} \not\subset \Gamma_t$, $\bar{\mathbf{t}}_{(i)} = \mathbf{0}$. Se o lado pertencer a uma fronteira mista, as funções contidas em $\mathbf{G}_{(i)}$ não incluem fluxos na direcção segundo a qual se impõe a tensão.

Em cada lado $\Gamma_{(i)}$, as funções de aproximação do fluxo de tensão são utilizadas para impor a condição de compatibilidade (3.16) na forma de resíduos pesados

$$\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{G}_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)} d\Gamma = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{G}_{(i)}^T \bar{\mathbf{r}}_{(i)} d\Gamma. \quad (3.18)$$

Note-se que, se num lado pertencente à fronteira do domínio, as funções contidas em $\mathbf{G}_{(i)}$ não incluírem fluxos numa dada direcção, a equação (3.18) não imporá o valor dos deslocamentos nessa direcção.

Introduzindo as expressões (3.10) e (3.11) em (3.18), obtém-se

$$\sum_i \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{G}_{(i)}^T \mathbf{M}_{(i),(i)} \mathbf{U}_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{G}_{(i)}^T \bar{\mathbf{r}}_{(i)} d\Gamma, \quad (3.19)$$

que pode ser escrita na forma compacta

$$\sum_i \mathbf{C}_{(i),(i)} \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = \hat{\mathbf{r}}_{(i)}. \quad (3.20)$$

Em cada elemento $\Omega_{(i)}$, as funções de aproximação de deslocamento são utilizadas para impor a equação de equilíbrio (2.16) na forma de resíduos pesados

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{d}^* \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{f} d\Omega = \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

Integrando por partes a primeira parcela, obtém-se

$$- \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\mathbf{U}_{(i)})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(i)}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{f} d\Omega = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

em que o somatório em j é extensivo a todos os lados do elemento $\Omega_{(i)}$.

Utilizando as expressões (2.30), (2.7) e (3.10) e ainda, dado que $\mathbf{N}_{(i),(i)} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M}_{(i),(i)}^T \mathbf{g}_{(i)}$ em $\Gamma_{(i)}$, (3.17) e (3.14), obtém-se

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\mathbf{U}_{(i)})^T \mathbf{k} (\mathbf{d}\mathbf{U}_{(i)}) d\Omega \right) \hat{\mathbf{u}}_{(i)} + \sum_j \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{M}_{(i),(i)}^T \mathbf{G}_{(i)} d\Gamma \right) \hat{\mathbf{g}}_{(i)} = \\ & = - \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}\mathbf{U}_{(i)})^T \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta d\Omega - \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{U}_{(i)}^T \bar{\mathbf{t}}_{(i)} d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.23)$$

que pode ser escrita na forma compacta

$$-\mathbf{K}_{(i)} \hat{\mathbf{u}}_{(i)} + \sum_j \mathbf{C}_{(i),(i)}^T \hat{\mathbf{g}}_{(i)} = -\hat{\mathbf{f}}_{(i)} - \hat{\mathbf{s}}_{\theta,(i)} - \sum_j \hat{\mathbf{t}}_{(i),(i)}. \quad (3.24)$$

O sistema algébrico global é obtido reunindo as equações de equilíbrio (3.24) de todos os elementos finitos $\Omega_{(i)}$ e as equações de compatibilidade (3.20) de todos os lados em que $\mathbf{G}_{(i)} \neq \mathbf{0}$. Como é usual nas formulações de elementos finitos, os cálculos correspondentes a (3.24) e (3.20) podem ser efectuados elemento a

elemento e, dentro destes, lado a lado; o somatório é efectuado implicitamente ao formar o sistema global.

Agrupando os vectores elementares $\hat{\mathbf{u}}_{(i)}$ num vector global $\hat{\mathbf{u}}$, agrupando os vectores dos lados $\hat{\mathbf{g}}_{(i)}$ num vector global $\hat{\mathbf{g}}$ e fazendo o mesmo para os restantes vectores e matrizes nas equações (3.24) e (3.20), o sistema algébrico pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{g}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{s}}_\theta - \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{r}} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Este sistema algébrico pode também ser obtido por aplicação do Princípio do Mínimo da Energia Potencial, impondo a compatibilidade nos lados através do método dos multiplicadores de Lagrange. Os multiplicadores identificam-se com os fluxos de tensão nos lados.

3.2.2.3. Definição das funções de aproximação e da geometria dos elementos

Neste trabalho, as funções de aproximação dos deslocamentos nos elementos, utilizadas em (3.10), são polinomiais. Para haver invariância em relação ao sistema de eixos, utilizam-se sempre conjuntos de polinómios completos. Em 2D, utilizam-se os monómios $x^i y^j$, com $i + j \leq p$; o número total de funções de aproximação dos deslocamentos de grau p é, portanto, $(p+1)(p+2)$. Em 3D, utilizam-se os monómios $x^i y^j z^k$, com $i + j + k \leq p$; o número total de funções de aproximação dos deslocamentos de grau p é, portanto, $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{2}$.

Por conveniência, utiliza-se, em cada elemento, um referencial local. Este referencial é paralelo ao referencial global e a sua origem é o centro geométrico do elemento.

Tal como para as funções de aproximação dos deslocamentos, utilizam-se conjuntos de polinómios completos para as funções de aproximação do fluxo de tensão nos lados, utilizadas em (3.17). Em 2D, utilizam-se os monómios r^i , com $i \leq p$; o número total de funções de aproximação do fluxo de tensão de grau p é, portanto, $2(p+1)$. Em 3D, utilizam-se os monómios $s^i t^j$, com $i + j \leq p$; o número total de funções de aproximação do fluxo de tensão de grau p é, portanto, $\frac{3(p+1)(p+2)}{2}$.

As coordenadas r e (s,t) são coordenadas locais definidas em cada lado.

Em 2D, o domínio é discretizado em elementos finitos poligonais. Como não existe qualquer relação entre as funções de aproximação e a geometria do elemento, formalmente os elementos podem ter um número de lados qualquer. Pela mesma razão, os lados podem ser rectos ou curvos.

Em 3D, o domínio é discretizado em elementos finitos poliédricos. Como não existe qualquer relação entre as funções de aproximação e a geometria do elemento, os elementos podem ter um número de faces qualquer. As faces são poligonais, planas ou curvas, podendo formalmente ter um número de lados qualquer.

3.2.2.4. Características da solução

A discretização do campo de deslocamentos definida por (3.10) garante, *a priori*, que o campo de deslocamentos vai ser contínuo no interior dos elementos. Portanto, se existir continuidade de deslocamentos nos lados, a solução será compatível.

Para funções de aproximação polinomiais, a compatibilidade de deslocamentos num lado, condição (3.16), é imposta localmente por (3.18) se, em $\mathbf{G}_{(i)}$, forem utilizados conjuntos de polinómios completos de grau maior ou igual ao grau, nas coordenadas locais dos lados, dos deslocamentos devidos a $\mathbf{U}_{(i)}$ e \mathbf{u}_T . Para lados com uma representação paramétrica linear, o grau destes deslocamentos é igual nas coordenadas locais e nas coordenadas globais. Consequentemente, a condição anterior é satisfeita se, em $\mathbf{G}_{(i)}$, forem utilizados conjuntos de polinómios completos de grau não inferior ao grau dos deslocamentos devidos a $\mathbf{U}_{(i)}$ e \mathbf{u}_T . Se o grau das funções de aproximação do fluxo de tensão for inferior ao das funções de aproximação de deslocamento, não existirá, em geral, continuidade local nos lados: a equação (3.16) só será respeitada em termos médios. Funções de aproximação do fluxo de tensão de grau superior ao das funções de aproximação de deslocamento só contribuirão para aumentar o número de dependências no sistema algébrico global (3.25), não devendo, por isso, ser utilizadas.

Ao contrário do que acontece na formulação tradicional de elementos finitos compatíveis, o sistema algébrico global (3.25) pode ser indeterminado e até, para elementos com um número elevado de lados e deslocamentos impostos não nulos, impossível. Contudo, a solução obtida para o campo de deslocamentos, se existir, é única. A indeterminação afecta apenas os fluxos de tensão nos lados.

Em 2D, embora se possam utilizar elementos com qualquer número de lados, rectos ou curvos, e quaisquer conjuntos de funções de aproximação, a

combinação mais adequada para minimizar o número de dependências consiste em utilizar elementos triangulares com lados rectos, funções de aproximação dos deslocamentos completas e funções de aproximação do fluxo de tensão completas, do mesmo grau. Neste caso, a solução obtida é exactamente a mesma que para os elementos finitos de deslocamento clássicos correspondentes. No entanto, podem existir algumas dependências; em cada vértice interior, por exemplo, existe uma equação dependente para cada direcção, devido à transitividade da continuidade entre os deslocamentos dos elementos a ele adjacentes.

Em 3D, embora se possam utilizar elementos com qualquer número de faces, faces com qualquer número de arestas, planas ou curvas, e quaisquer conjuntos de funções de aproximação, a combinação mais adequada para minimizar o número de dependências consiste em utilizar elementos tetraédricos com faces planas, funções de aproximação dos deslocamentos completas e funções de aproximação do fluxo de tensão completas, do mesmo grau. Neste caso, a solução obtida é exactamente a mesma que para os elementos finitos de deslocamento clássicos correspondentes.

Só devem ser utilizados lados curvos para discretizar fronteiras curvas. Nestas, a pequena perda de compatibilidade local devida à utilização de lados curvos e funções do mesmo grau parece ser preferível às alternativas: utilizar lados não curvos pode envolver um grande erro de discretização do domínio; aumentar o grau das funções de aproximação dos deslocamentos leva à ocorrência de dependências no sistema global.

3.3. Elementos finitos de equilíbrio

3.3.1. Introdução

Os modelos de elementos finitos de equilíbrio podem ser obtidos discretizando o campo de tensões ou as funções geradoras de tensões de Maxwell ou de Morera, em 3D, e de Airy, em 2D.

Quando é discretizado o campo de tensões, esta discretização é feita de modo a satisfazer, *a priori*, o equilíbrio no interior dos elementos. O equilíbrio de tensão nos lados é imposto através de resíduos pesados. Assim, é necessário discretizar, também, os deslocamentos nos lados dos elementos. A discretização dos deslocamentos é feita de modo a satisfazer, *a priori*, apenas as condições de fronteira cinemáticas, não existindo continuidade de deslocamentos entre os lados. A compatibilidade é imposta, de forma aproximada, através de resíduos pesados ou da minimização da energia complementar total. As variáveis do sistema

algébrico global são os pesos das funções de aproximação das tensões nos elementos e os pesos das funções de aproximação dos deslocamentos nos lados dos elementos [ALMEIDA, 1989]. No entanto, é possível condensar o sistema, a nível elementar, nos pesos das funções de aproximação dos deslocamentos nos lados dos elementos [VEUBEKE, 1964] [VEUBEKE, 1965], ficando estes como únicas variáveis do sistema algébrico global.

Quando são discretizadas as funções geradoras de tensões, as variáveis do problema são os valores nodais destas funções e, eventualmente, das suas primeiras derivadas [VEUBEKE e ZIENKIEWICZ, 1967] [RYBICKI, 1971] [ROBINSON, 1973]. A discretização é feita de modo a satisfazer, *a priori*, a admissibilidade estática.

3.3.2. Formulação utilizada

3.3.2.1. Introdução

Nesta formulação de elementos finitos de equilíbrio [ALMEIDA, 1989] [ALMEIDA e FREITAS, 1991], discretiza-se directamente o campo de tensões. Embora parte desta secção corresponda a trabalho desenvolvido na dissertação de mestrado do autor [PEREIRA, 1993], apresentam-se diversos desenvolvimentos posteriores, alguns dos quais foram publicados pelo autor durante a elaboração da presente tese [PEREIRA e ALMEIDA, 1995a] [ALMEIDA e PEREIRA, 1996].

3.3.2.2. Descrição da formulação

O campo de tensões no interior de um elemento $\Omega_{(i)}$ é discretizado da seguinte maneira:

$$\sigma_{e,(i)} = \mathbf{S}_{(i)} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} + \sigma_{0,(i)}. \quad (3.26)$$

$\mathbf{S}_{(i)}$ é a matriz das funções de aproximação de tensões, $\hat{\mathbf{s}}_{(i)}$ é o vector dos parâmetros de tensões (pesos das funções de aproximação de tensões) e $\sigma_{0,(i)}$ é uma solução particular.

As equações de equilíbrio (2.16) são automaticamente satisfeitas no interior dos elementos porque as funções de aproximação de tensões são escolhidas de forma a serem auto-equilibradas,

$$\mathbf{d}^* \mathbf{S}_{(j)} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

e a solução particular é tal que

$$\mathbf{d}^* \boldsymbol{\sigma}_{0,(j)} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Os deslocamentos num lado $\Gamma_{(j)}$ dum elemento são discretizados do seguinte modo:

$$\mathbf{v}_{e,(j)} = \mathbf{V}_{(j)} \hat{\mathbf{v}}_{(j)} + \bar{\mathbf{v}}_{(j)}. \quad (3.29)$$

$\mathbf{V}_{(j)}$ é a matriz das funções de aproximação de deslocamento e $\hat{\mathbf{v}}_{(j)}$ é o vector dos parâmetros de deslocamento (pesos das funções de aproximação de deslocamento). Se $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma_u$, $\mathbf{v}_{e,(j)} = \bar{\mathbf{v}}_{(j)} = \mathbf{u}_\Gamma$. Se $\Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma_u$, $\bar{\mathbf{v}}_{(j)} = \mathbf{0}$. Se o lado pertencer a uma fronteira mista, as funções contidas em $\mathbf{V}_{(j)}$ não incluem deslocamentos na direcção segundo a qual estes são impostos.

Para impor o equilíbrio entre elementos, é definida uma nova variável, a tensão num lado,

$$\boldsymbol{\varphi}_{(j)} = \sum_i \mathbf{N}_{(j),(i)} \boldsymbol{\sigma}_{(i)}, \quad (3.30)$$

em que o somatório em i é extensivo aos elementos finitos adjacentes ao lado $\Gamma_{(j)}$.

Há equilíbrio de tensão, ou co-difusividade, num lado entre elementos ou pertencente à fronteira estática se, nesse lado,

$$\boldsymbol{\varphi}_{(j)} = \bar{\mathbf{t}}_{(j)}, \quad (3.31)$$

na qual $\bar{\mathbf{t}}_{(j)}$, designada por tensão aplicada no lado, é igual a \mathbf{t}_Γ se $\Gamma_{(j)} \subset \Gamma_t$ e nula se $\Gamma_{(j)} \not\subset \Gamma_t$.

Note-se que esta condição não implica continuidade do campo de tensões nesse lado. Contudo, as possíveis descontinuidades não afectam o equilíbrio de um elemento de volume infinitesimal que seja intersectado pelo lado.

Se se utilizarem funções de aproximação de tensões que verifiquem a condição (3.27) e uma solução particular $\boldsymbol{\sigma}_{0,(j)}$ que verifique (3.28) e se, em todos os lados entre elementos ou pertencentes à fronteira estática, se verificar (3.31), a solução obtida será estaticamente admissível.

Em cada lado $\Gamma_{(i)}$, as funções de aproximação de deslocamento são utilizadas para impor a condição de equilíbrio (3.31) na forma de resíduos pesados

$$\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \boldsymbol{\varphi}_{(i)} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \bar{\mathbf{t}}_{(i)} \, d\Gamma. \quad (3.32)$$

Note-se que, se num lado pertencente à fronteira do domínio, as funções contidas em $\mathbf{V}_{(i)}$ não permitirem deslocamentos numa dada direcção, a equação (3.32) não imporá o valor da tensão nessa direcção.

Introduzindo as expressões (3.26) e (3.30) em (3.32), obtém-se

$$\sum_i \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(i)} \mathbf{S}_{(i)} \, d\Gamma \right) \hat{\mathbf{s}}_{(i)} = \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \bar{\mathbf{t}}_{(i)} \, d\Gamma - \sum_i \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{V}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(i)} \boldsymbol{\sigma}_{0,(i)} \, d\Gamma \right), \quad (3.33)$$

que pode ser escrita na forma compacta

$$\sum_i \mathbf{D}_{(i),(i)} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} = \hat{\mathbf{t}}_{(i)} - \sum_i \hat{\mathbf{t}}_{0,(i),(i)}. \quad (3.34)$$

Em cada elemento $\Omega_{(i)}$, as funções de aproximação de tensões são utilizadas para impor a condição de compatibilidade (2.7) na forma de resíduos pesados

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{d} \mathbf{u} \, d\Omega. \quad (3.35)$$

Integrando por partes o segundo termo, obtém-se

$$\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = - \int_{\Omega_{(i)}} (\mathbf{d}^* \mathbf{S}_{(i)})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(j)}^T \mathbf{u} \, d\Gamma, \quad (3.36)$$

em que o somatório em j é extensivo a todas os lados do elemento $\Omega_{(i)}$.

Atendendo a (3.27), o integral em $\Omega_{(i)}$ no segundo termo é nulo. Utilizando as expressões (2.23) e (3.26) e ainda, dado que \mathbf{u} é aproximado por $\mathbf{v}_{e,(i)}$ em $\Gamma_{(i)}$, (3.29), obtém-se

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{f} \mathbf{S}_{(i)} \, d\Omega \right) \hat{\mathbf{s}}_{(i)} + \sum_j \left(\int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(j)}^T \mathbf{V}_{(j)} \, d\Gamma \right) \hat{\mathbf{v}}_{(j)} = \\ & = \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}_{0,(i)} \, d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \, d\Omega - \sum_j \int_{\Gamma_{(i)}} \mathbf{S}_{(i)}^T \mathbf{N}_{(i),(j)}^T \bar{\mathbf{v}}_{(j)} \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.37)$$

que pode ser escrita na forma compacta

$$-\mathbf{F}_{(i)} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} + \sum_j \mathbf{D}_{(j),(i)}^T \hat{\mathbf{v}}_{(j)} = \hat{\mathbf{e}}_{0,(i)} + \hat{\mathbf{e}}_{\theta,(i)} - \sum_j \hat{\mathbf{v}}_{(j),(i)}. \quad (3.38)$$

O sistema algébrico global é obtido reunindo as equações de compatibilidade (3.38) de todos os elementos finitos $\Omega_{(i)}$ e as equações de equilíbrio (3.34) de todos os lados em que $\mathbf{V}_{(i)} \neq \mathbf{0}$. Como é usual nas formulações de elementos finitos, os cálculos correspondentes a (3.38) e (3.34) podem ser efectuados elemento a elemento e, dentro destes, lado a lado; o somatório é efectuado implicitamente ao formar o sistema global.

Agrupando os vectores elementares $\hat{\mathbf{s}}_{(i)}$ num vector global $\hat{\mathbf{s}}$, agrupando os vectores dos lados $\hat{\mathbf{v}}_{(i)}$ num vector global $\hat{\mathbf{v}}$ e fazendo o mesmo para os restantes vectores e matrizes nas equações (3.38) e (3.34), o sistema algébrico pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 - \hat{\mathbf{e}}_\theta - \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{t}}_0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Este sistema algébrico pode também ser obtido por aplicação do Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar, impondo o equilíbrio nos lados através de método dos multiplicadores de Lagrange. Os multiplicadores são os deslocamentos nos lados.

3.3.2.3. Condensação do sistema algébrico

É possível formar um sistema análogo ao (3.39) para um elemento $\Omega_{(i)}$ isolado:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{(i)} & \mathbf{D}_{(i)}^T \\ \mathbf{D}_{(i)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_{(i)} \\ \hat{\mathbf{v}}_{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{0,(i)} - \hat{\mathbf{e}}_{\theta,(i)} \\ \hat{\mathbf{t}}_{(i)} - \hat{\mathbf{t}}_{0,(i)} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Como a matriz $\mathbf{F}_{(i)}$ é sempre definida, pode-se eliminar $\hat{\mathbf{s}}_{(i)}$ no segundo bloco de (3.40), obtendo uma matriz de rigidez elementar,

$$\mathbf{K}_{(i)} = \mathbf{D}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \mathbf{D}_{(i)}^T, \quad (3.41)$$

e um vector de forças elementares,

$$\mathbf{F}_{(i)} = \hat{\mathbf{t}}_{(i)} - \hat{\mathbf{t}}_{0,(i)} + \mathbf{D}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{0,(i)} - \mathbf{D}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{\theta,(i)}, \quad (3.42)$$

semelhantes aos utilizados na formulação clássica de elementos finitos compatíveis, embora associados aos deslocamentos dos lados.

Através dum processo igual ao utilizado nessa formulação, obtém-se o sistema algébrico global

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{F}. \quad (3.43)$$

Uma vez resolvido o sistema, as tensões em cada elemento $\Omega_{(i)}$ são obtidas a partir de (3.26), com

$$\hat{\mathbf{s}}_{(i)} = \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \mathbf{D}_{(i)}^T \hat{\mathbf{v}}_{(i)} - \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{0,(i)} + \mathbf{F}_{(i)}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{\theta,(i)}. \quad (3.44)$$

Este processo, utilizado por VEUBEKE [1964], tem a vantagem de fornecer um sistema algébrico global de menor dimensão e com uma estrutura semelhante à do fornecido pela formulação tradicional de elementos finitos compatíveis.

3.3.2.4. Definição das funções de aproximação e da geometria dos elementos

Neste trabalho, as funções de aproximação de tensões nos elementos, utilizadas em (3.26), são polinomiais. Para haver invariância em relação ao sistema de eixos, utilizam-se sempre conjuntos de polinómios completos [SPILKER *et al*, 1981].

Para criar o conjunto de funções polinomiais obedecendo a (3.27), recorreu-se às funções geradoras de tensões, descritas em 2.3.

Em 2D, utilizou-se o seguinte procedimento para criar o conjunto de funções de aproximação de tensões, auto-equilibradas, de grau p :

1. Gerar os $\frac{(p+1)(p+6)}{2}$ monómios $x^i y^j$, com $2 \leq i + j \leq p + 2$;
2. Usando cada um destes monómios, em (2.19), como uma função geradora de tensões de Airy, obter as $\frac{(p+1)(p+6)}{2}$ funções de aproximação de tensões.

Para $p = 3$, obteve-se a seguinte matriz $\mathbf{S}_{(i)}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & y & 0 & 0 & x^2 & 2xy \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x & -y & 0 & 0 & -x^2 \end{array} \right] \quad (3.45)$$

$$\left. \begin{array}{ccc|cccccc} x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 0 & x^3 & 3x^2y & 3xy^2 & y^3 \\ y^2 & 0 & 0 & x^3 & 3x^2y & 3xy^2 & y^3 & 0 & 0 \\ -2xy & -y^2 & 0 & 0 & -x^3 & -3xy^2 & -3x^2y & -y^3 & 0 \end{array} \right] .$$

Em 3D, utilizou-se o seguinte procedimento para criar o conjunto de funções de aproximação de tensões, auto-equilibradas, de grau p:

1. Gerar os $\frac{(p+3)(p+4)(p+5)}{6}$ monómios $x^i y^j z^k$, com $i + j + k \leq p + 2$;
2. Usando estes monómios, em (2.20) ou em (2.21), como cada uma das funções geradoras de tensões de Maxwell ou de Morera, respectivamente, obter $\frac{(p+3)(p+4)(p+5)}{2}$ funções de aproximação de tensões;
3. Seleccionar um conjunto de $\frac{(p+1)(p+2)(p+6)}{2}$ funções de aproximação de tensões linearmente independentes.

O número de funções de aproximação de tensões, auto-equilibradas, de grau p é obtido subtraindo, ao número de funções de aproximação de tensões obtido a partir da pirâmide de Pascal de grau p, o número de equações de equilíbrio obtido a partir da pirâmide de Pascal de grau p-1:

$$6 \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 3 \frac{p(p+1)(p+2)}{6} = \frac{(p+1)(p+2)(p+6)}{2}. \quad (3.46)$$

Para um mesmo conjunto de monómios, as duas funções geradoras de tensões dão origem ao mesmo espaço de funções de aproximação de tensões, embora definam bases diferentes. Neste trabalho, utilizaram-se as funções de Morera. Para $p = 3$, obteve-se a matriz $\mathbf{S}_{(i)}$ que se apresenta de seguida, transposta:

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
<hr/>					
0	0	0	0	0	x
0	0	0	0	-x	y
0	0	x	0	0	0
0	0	0	-x	0	z
0	x	0	0	0	0
0	0	0	0	y	0
0	0	y	0	0	0
2x	0	0	-y	-z	0
0	2y	0	-x	0	-z
0	0	2z	0	-x	-y
0	0	0	z	0	0
0	z	0	0	0	0
y	0	0	0	0	0
0	0	0	-y	z	0
z	0	0	0	0	0
<hr/>					
0	0	0	-2xz	0	z ²
0	0	0	-2yz	z ²	0
0	0	0	x ²	0	-2xz
0	0	0	y ²	-2yz	0
0	0	0	z ²	0	0
0	0	0	0	-2xy	y ²
0	0	0	0	x ²	-2xy
0	0	0	0	y ²	0
0	0	0	0	0	x ²

0	0	4xz	0	$-x^2$	$-2xy$
0	0	4yz	0	$-2xy$	$-y^2$
0	0	x^2	0	0	0
0	0	y^2	0	0	0
0	0	xy	0	0	0
0	0	z^2	xy	$-xz$	$-yz$
0	4xy	0	$-x^2$	0	$-2xz$
0	4yz	0	$-2xz$	0	$-z^2$
0	x^2	0	0	0	0
0	z^2	0	0	0	0
0	xz	0	0	0	0
0	y^2	0	$-xy$	xz	$-yz$
4xy	0	0	$-y^2$	$-2yz$	0
4xz	0	0	$-2yz$	$-z^2$	0
y^2	0	0	0	0	0
z^2	0	0	0	0	0
yz	0	0	0	0	0
x^2	0	0	$-xy$	$-xz$	yz
<hr/>					
0	0	0	0	0	x^3
0	0	0	0	$-3xy^2$	y^3
x^3	0	0	$-3x^2y/2$	$-3x^2z/2$	3xyz
$2x^2y$	0	0	$-xy^2$	$-2xyz$	y^2z
$3xy^2$	0	0	$-y^3/2$	$-3y^2z/2$	0
y^3	0	0	0	0	0
$2x^2z$	0	0	$-2xyz$	$-xz^2$	yz^2
$4xyz$	0	0	$-y^2z$	$-yz^2$	0
y^2z	0	0	0	0	0
0	0	0	$-3xz^2$	0	z^3
$3xz^2$	0	0	$-3yz^2/2$	$-z^3/2$	0
yz^2	0	0	0	0	0

(3.47)

z^3	0	0	0	0	0
0	0	0	0	x^3	$-3x^2y$
0	0	0	0	x^2y	$-xy^2$
0	0	0	0	y^3	0
0	x^3	0	0	0	0
0	$3x^2y$	0	$-x^3/2$	0	$-3x^2z/2$
0	$2xy^2$	0	$-x^2y$	x^2z	$-2xyz$
0	y^3	0	$-3xy^2/2$	$3xyz$	$-3y^2z/2$
0	$6x^2z$	0	0	0	0
0	$4xyz$	0	$-x^2z$	0	$-xz^2$
0	$2y^2z$	0	$-2xyz$	xz^2	$-yz^2$
0	xz^2	0	0	0	0
0	$3yz^2$	0	$-3xz^2/2$	0	$-z^3/2$
0	0	0	$-3yz^2$	z^3	0
0	z^3	0	0	0	0
0	0	x^3	0	0	0
0	0	x^2y	0	0	0
0	0	xy^2	0	0	0
0	0	y^3	0	0	0
0	0	$3x^2z$	0	$-x^3/2$	$-3x^2y/2$
0	0	$4xyz$	0	$-x^2y$	$-xy^2$
0	0	$3y^2z$	0	$-3xy^2/2$	$-y^3/2$
0	0	0	x^3	0	$-3x^2z$
0	0	$2xz^2$	x^2y	$-x^2z$	$-2xyz$
0	0	$2yz^2$	xy^2	$-2xyz$	$-y^2z$
0	0	0	y^3	$-3y^2z$	0
0	0	0	x^2z	0	$-xz^2$
0	0	z^3	$3xyz$	$-3xz^2/2$	$-3yz^2/2$
0	0	0	y^2z	$-yz^2$	0
0	0	0	z^3	0	0

A solução particular a utilizar em (3.26) pode ser obtida fazendo, por exemplo, as seguintes primitivações:

$$\sigma_{0,(i)} = \begin{bmatrix} -P_x(f_x) \\ -P_y(f_y) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

em 2D e

$$\sigma_{0,(i)} = \begin{bmatrix} -P_x(f_x) \\ -P_y(f_y) \\ -P_z(f_z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

em 3D.

Por conveniência, utiliza-se, em cada elemento, um referencial local. Este referencial é paralelo ao referencial global e a sua origem é o centro geométrico do elemento.

Tal como para as funções de aproximação de tensões, utilizam-se conjuntos de polinómios completos para funções de aproximação de deslocamento nos lados, utilizadas em (3.29). Em 2D, utilizam-se os monómios r^i , com $i \leq p$; o número total de funções de aproximação de deslocamento de grau p é, portanto, $2(p+1)$. Em 3D, utilizam-se os monómios st^{ij} , com $i + j \leq p$; o número total de funções de aproximação de deslocamento de grau p é, portanto, $\frac{3(p+1)(p+2)}{2}$. As coordenadas r e (s,t) são coordenadas locais definidas em cada lado.

Tal como para a formulação de elementos compatíveis, em 2D, o domínio é discretizado em elementos finitos poligonais. Como não existe qualquer relação entre as funções de aproximação e a geometria do elemento, formalmente os elementos podem ter um número de lados qualquer. Pela mesma razão, os lados podem ser rectos ou curvos.

De modo semelhante, em 3D, o domínio é discretizado em elementos finitos poliédricos. Como não existe qualquer relação entre as funções de aproximação e a geometria do elemento, os elementos podem ter um número de faces qualquer. As faces são poligonais, planas ou curvas, podendo formalmente ter um número de lados qualquer.

3.3.2.5. Características da solução

A discretização do campo de tensões definida por (3.26) garante, *a priori*, que a solução vai satisfazer as equações de equilíbrio (2.16) no interior dos

elementos. Portanto, se existir equilíbrio local de tensão nos lados, a solução será equilibrada.

Para funções de aproximação polinomiais, o equilíbrio local de tensão num lado, condição (3.31), é imposto localmente por (3.32) se, em $V_{(i)}$, forem utilizados conjuntos de polinómios completos de grau não inferior ao grau, (i) , nas coordenadas locais dos lados, da tensão devida a $S_{(i)}$, $\sigma_{0,(i)}$ e t_{Γ} . Para lados com uma representação paramétrica linear, o grau desta tensão é igual nas coordenadas locais e nas coordenadas globais. Consequentemente, a condição anterior é satisfeita se, em $V_{(i)}$, forem utilizados conjuntos de polinómios completos de grau maior ou igual ao grau da tensão devida a $S_{(i)}$, $\sigma_{0,(i)}$ e t_{Γ} . Se o grau das funções de aproximação de deslocamento for inferior ao das funções de aproximação de tensões, não existirá, em geral, equilíbrio local nos lados: a equação (3.31) só será respeitada em termos médios. Funções de aproximação de deslocamento de grau superior ao das funções de aproximação de tensões só contribuirão para aumentar o número de dependências no sistema algébrico global (3.39), não devendo, por isso, ser utilizadas.

Só devem ser utilizados lados curvos para discretizar fronteiras curvas. Nestas, a pequena perda de equilíbrio local devida à utilização de lados curvos e funções do mesmo grau parece ser preferível às alternativas: utilizar lados não curvos pode envolver um grande erro de discretização do domínio; aumentar o grau das funções de aproximação dos deslocamentos leva à ocorrência de modos espúrios.

A equação (3.37) só impõe a compatibilidade em termos médios. Se forem utilizadas funções de aproximação de tensões constantes ou lineares, as extensões, calculadas a partir das tensões em cada elemento, correspondem a um campo de deslocamentos contínuo em cada elemento mas, normalmente, descontínuo de elemento para elemento. Se forem utilizadas funções de aproximação de tensões de grau superior, não será possível, em geral, obter um campo de deslocamentos, em cada elemento, para o qual as extensões sejam iguais às calculadas a partir das tensões.

Ao contrário do que acontece na formulação tradicional de elementos finitos compatíveis, o sistema algébrico global (3.39) pode ser impossível ou indeterminado. Contudo, a solução obtida para o campo de tensões, se existir, é única. A indeterminação afecta apenas os deslocamentos nos lados, através dos chamados modos espúrios ou *spurious kinematic modes*.

Em 2D, embora se possam utilizar elementos com qualquer número de lados, rectos ou curvos, e quaisquer conjuntos de funções de aproximação, a combinação mais adequada para obter soluções localmente equilibradas com um

mínimo de modos espúrios consiste em utilizar elementos triangulares com lados rectos, funções de aproximação de tensões completas e funções de aproximação de deslocamento completas, do mesmo grau.

Para um elemento triangular isolado, o número de modos espúrios é igual a: 0, para $p = 0$; 2, para $p = 1$; 3, para $p \geq 2$ [VEUBEKE, 1980] [MAUNDER e ALMEIDA, 1996b]. Estes modos espúrios são devidos à existência de campos de tensão nos lados, de grau p , que satisfazem as equações de equilíbrio global do elemento finito, mas que não respeitam as condições de equilíbrio de momentos de um elemento infinitesimal localizado num vértice do elemento finito.

Embora o elemento triangular de grau zero não possua modos espúrios, juntar, numa malha, elementos deste tipo gera, geralmente, vários modos espúrios. Em muitos casos, não é possível obter uma solução para o sistema algébrico global. Este fenómeno é devido ao facto de este elemento só ter dois deslocamentos em cada lado, pelo que bloquear os deslocamentos de um lado não é suficiente para impedir os deslocamentos de corpo rígido de um elemento. Deste modo, alguns elementos da malha, ou alguns conjuntos de elementos, podem ter deslocamentos de corpo rígido, sem que nenhum elemento se deforme.

Pelo contrário, juntar, numa malha, elementos triangulares de grau igual ou superior a um elimina a maior parte dos modos espúrios. A experiência mostra que é quase sempre possível obter uma solução.

Igualmente, em 3D, embora se possam utilizar elementos com qualquer número de faces, faces com qualquer número de arestas, planas ou curvas, e quaisquer conjuntos de funções de aproximação, a combinação mais adequada para obter soluções localmente equilibradas com um mínimo de modos espúrios consiste em utilizar elementos tetraédricos com faces planas, funções de aproximação de tensões completas e funções de aproximação de deslocamento completas, do mesmo grau.

Para um elemento tetraédrico isolado, o número de modos espúrios é igual a 0, para $p = 0$ e 9, para $p = 1$. Conjectura-se que o número de modos espúrios seja igual a $6(p+1)$, para $p \geq 2$, o que foi já confirmado para $p \leq 4$. Estes modos espúrios são devidos à existência de campos de tensão nas faces, de grau p , que satisfazem as equações de equilíbrio global do elemento finito, mas que não respeitam uma das condições de equilíbrio de momentos dos elementos infinitesimais localizados ao longo duma aresta do elemento finito. Em cada aresta, este desequilíbrio de momentos é um polinómio de grau p , o que leva à conjectura referida.

Embora o elemento tetraédrico de grau zero não possua modos espúrios, juntar elementos deste tipo numa malha gera, geralmente, vários modos espúrios.

Em muitos casos, não é possível obter uma solução para o sistema algébrico global. Este fenómeno é devido ao facto de este elemento só ter três deslocamentos em cada face, pelo que bloquear os deslocamentos de uma face não é suficiente para impedir os deslocamentos de corpo rígido de um elemento. Deste modo, alguns elementos da malha, ou alguns conjuntos de elementos, podem ter deslocamentos de corpo rígido, sem que nenhum elemento se deforme.

Pelo contrário, juntar elementos tetraédricos de grau igual ou superior a um numa malha elimina a maior parte dos modos espúrios. A experiência mostra que é quase sempre possível obter uma solução.

3.3.2.6. Eliminação dos modos espúrios

Uma maneira de garantir a existência de solução para o sistema algébrico global (3.39) consiste em utilizar superelementos. Todos eles são constituídos por elementos com funções de aproximação de tensões completas e funções de aproximação de deslocamento completas, do mesmo grau.

Em 2D, têm sido utilizados os superelementos triangular e quadrilátero.

O superelemento triangular [SANDER, 1971] é constituído por três triângulos, convergindo num vértice comum. As funções de aproximação devem ser de grau não inferior a um. Este superelemento garante também que a solução é única. A existência e unicidade da solução não é afectada se os lados exteriores forem curvos.

O superelemento quadrilátero [SANDER, 1971] é constituído por quatro triângulos, convergindo num vértice comum. Estes triângulos são obtidos por divisão do quadrilátero pelas diagonais. As funções de aproximação podem ser de qualquer grau. Este superelemento tem um modo espúrio interno, que não é excitável pelo carregamento. Se o vértice interior não estiver localizado no cruzamento das diagonais, duas situações podem ocorrer: para elementos de grau zero ou um, o modo espúrio é excitável pelo carregamento; para elementos de grau superior a um, não existe nenhum modo espúrio, mas a estatia interior diminui uma unidade [MAUNDER e ALMEIDA, 1996a].

Em 3D, podem utilizar-se os superelementos tetraédrico e hexaédrico.

O superelemento tetraédrico [LADEVÈZE *et al*, 1986] é constituído por quatro tetraedros, convergindo num vértice comum. As funções de aproximação devem ser de grau não inferior a um. Este superelemento garante também que a solução é única. A existência e unicidade da solução não é afectada se as faces exteriores forem curvas.

O superelemento hexaédrico é constituído por vinte e quatro tetraedros convergindo num vértice comum, conforme representado na figura 3.1. Este vértice deve estar localizado no cruzamento das diagonais do hexaedro. No cruzamento das diagonais de cada face do hexaedro existe também um vértice, comum a quatro tetraedros. Este superelemento tem vários modos espúrios, alguns dos quais afectam as faces do superelemento, pelo que não é tão útil como o seu análogo bidimensional.

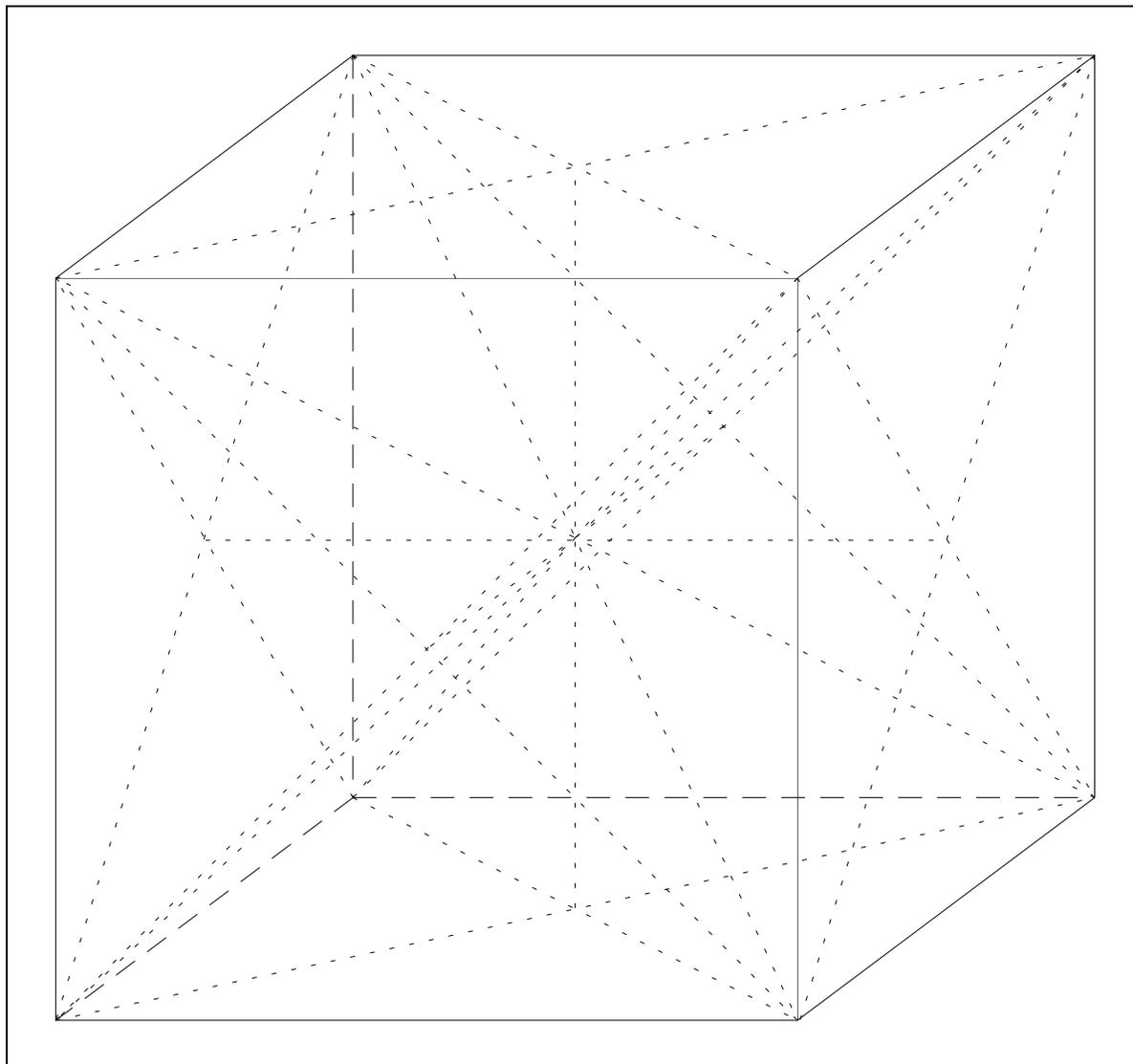


Figura 3.1 - Superelemento de equilíbrio hexaédrico.

No caso de o sistema algébrico global ser obtido como descrito em 3.3.2.3, a partir das matrizes de rigidez dos elementos, pode ser formada uma matriz de rigidez do superelemento. Os deslocamentos dos lados interiores do superelemento podem ser condensados estaticamente, reduzindo as variáveis do sistema algébrico global aos deslocamentos dos lados exteriores.

3.3.2.7. Exemplo ilustrativo

Como exemplo ilustrativo, considere-se a consola cúbica, sujeita a uma pressão uniforme aplicada na sua face superior, representada na figura 3.2.

A peça é discretizada através de um superelemento hexaédrico com funções de aproximação de grau zero. Neste caso particular, teria sido possível obter uma solução, mesmo sem ter colocado o vértice interior no cruzamento das diagonais do superelemento e o vértice interior de cada face no cruzamento das diagonais da face. No entanto, se a consola tivesse secção variável, por exemplo, já não teria sido possível obter uma solução, com um superelemento de grau zero, sem colocar os vértices nas referidas posições.

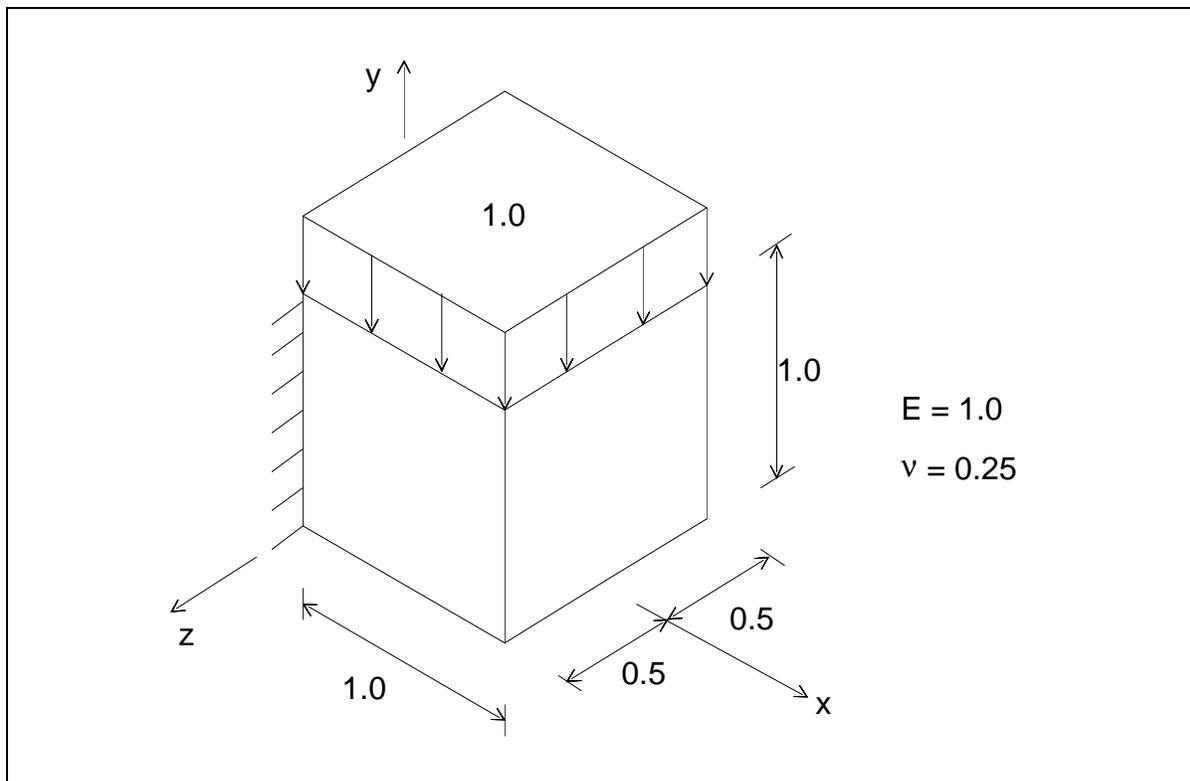


Figura 3.2 - Consola cúbica.

Na figura 3.3, representam-se as componentes do campo de tensões obtido com esta discretização. A solução, apesar de grosseira, é equilibrada em todos os pontos, o que não acontece com a solução obtida com vinte e quatro elementos compatíveis de grau um, representada na figura 3.4.