



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**  
**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**

**UM MODELO DE  
ELEMENTOS FINITOS DE EQUILÍBRIO  
PARA ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL**

Orlando José Barreiros d'Almeida Pereira

(Licenciado)

Dissertação para a obtenção do grau de  
Mestre em Engenharia de Estruturas

**Fevereiro de 1993**

# UM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE EQUILÍBRIO PARA ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL

## Resumo

Nesta dissertação, apresenta-se um modelo de elementos finitos de equilíbrio para a análise de problemas estáticos de elasticidade linear em sólidos tridimensionais.

O modelo implementado discretiza o campo de tensões nos elementos e o campo de deslocamentos nas fronteiras. Em geral, permite obter soluções estaticamente admissíveis.

Conjugando os resultados com os de um dos diversos modelos de elementos finitos de compatibilidade existentes, é possível obter limites para a energia da solução exacta e um majorante do erro em energia.

O sistema governativo associado ao modelo apresentado é um sistema de equações lineares, simétrico, normalmente de grandes dimensões, altamente esparso e com equações linearmente dependentes. Para o resolver, é necessário um programa apropriado.

A apresentação dos resultados é feita em projecção axonométrica, recorrendo a uma biblioteca de rotinas gráficas.

O modelo proposto é utilizado na resolução de vários problemas, utilizando diversas combinações de funções de forma e de geometrias dos elementos, permitindo uma discussão das propriedades das soluções.

# AN EQUILIBRIUM FINITE ELEMENT MODEL FOR THREE-DIMENSIONAL ELASTOSTATICS

## Abstract

An equilibrium finite element model for the analysis of static linear elastic problems in three-dimensional solids is presented.

In this model, both the stress field inside the elements and the displacement field on the boundaries are discretized. Statically admissible solutions can usually be obtained.

Bounds for the energy of the exact solution and an upper bound for the energy error can be obtained by using these results together with those of one of the several existing compatible finite element models.

The governative system associated to the model presented in this work is a symmetric linear equation system, usually of large dimensions, highly sparse and with linearly dependent equations. An appropriate program is needed to solve this system.

The results are presented in axiometric projection, using a graphic library.

The proposed model is used to solve different test problems, with several combinations of shape functions and element geometries. Based on these results, a discussion of the properties of the solutions is made.

## Palavras chave

Elementos finitos de equilíbrio tridimensionais

Elementos finitos de equilíbrio

Elementos finitos tridimensionais

Elasticidade linear

## Keywords

Three-dimensional equilibrium finite elements

Solid equilibrium finite elements

Equilibrium finite elements

Three-dimensional finite elements

Solid finite elements

Linear elasticity

## Agradecimentos

A realização deste trabalho só se tornou possível graças ao apoio de professores, colegas, amigos e familiares.

Ao meu orientador científico, Prof. José Paulo Baptista Moitinho de Almeida, agradeço a sua amizade, os seus ensinamentos, incansável apoio e permanente acompanhamento.

A amizade, a paciência, a ajuda prestada e o interesse manifestado pelo meu trabalho por parte dos meus colegas do IST são também objecto da minha gratidão. Devo referir, em especial, os Profs. Teixeira de Freitas e Pedro Parreira e os Engs. Eduardo Pereira e Luís Castro.

Por fim, devo agradecer à minha família o apoio e incentivo que sempre me deram ao longo de toda a minha vida de estudante.

Este trabalho insere-se na Linha de Investigação nº 5 do Centro de Mecânica e Engenharia Estruturais da Universidade Técnica de Lisboa (CMEST) e foi subsidiado pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT), através do projecto PMCT/C/MPF/638/90.

## Notação

$D$  : Operador diferencial de compatibilidade;  
 $D^*$  : Operador diferencial de equilíbrio;  
 $\mathbf{D}$  : Operador de equilíbrio nas fronteiras;  
 $\hat{\mathbf{e}}_t$  : Deformações térmicas generalizadas;  
 $E$  : Módulo de elasticidade do material;  
 $f$  : Matriz de flexibilidade infinitesimal;  
 $\mathbf{F}$  : Matriz de flexibilidade dos elementos finitos;  
 $\mathbf{f}$  : Vector das forças de massa;  
 $J$  : Área do elemento de superfície;  
 $k_S$  : Matriz de rigidez infinitesimal de um apoio elástico;  
 $\mathbf{K}$  : Matriz de rigidez dos apoios elásticos;  
 $\mathbf{n}$  : Versor da normal à face;  
 $N$  : Normal exterior aos elementos;  
 $\hat{\mathbf{s}}$  : Parâmetros de tensão;  
 $S$  : Matriz das funções de forma de tensão;  
 $S$  : Fronteira do domínio ou dos elementos;  
 $S_u$  : Fronteira cinemática;  
 $S_\sigma$  : Fronteira estática;  
 $\mathbf{t}_S$  : Tracções impostas na fronteira estática;  
 $\bar{\mathbf{t}}$  : Tracções aplicadas nas faces;  
 $\mathbf{u}$  : Deslocamento de um ponto;  
 $\mathbf{u}_S$  : Deslocamentos impostos na fronteira cinemática;  
 $U$  : Energia de deformação;  
 $U^*$  : Energia complementar de deformação;  
 $U_c$  : Energia de deformação de uma solução compatível;  
 $U_e$  : Energia de deformação de uma solução equilibrada;  
 $\mathbf{v}$  : Deslocamentos das fronteiras dos elementos;  
 $\bar{\mathbf{v}}$  : Deslocamentos impostos nas faces;  
 $\hat{\mathbf{v}}$  : Deslocamentos impostos generalizados;  
 $\hat{\mathbf{v}}$  : Parâmetros de deslocamento;  
 $V$  : Matriz das funções de forma de deslocamento nas fronteiras;  
 $V$  : Domínio sólido tridimensional;  
 $W$  : Trabalho das forças aplicadas;

$W^*$  : Trabalho dos deslocamentos impostos;  
 $\varepsilon$  : Vector das deformações;  
 $\varepsilon_t$  : Vector das deformações térmicas generalizadas;  
 $\varphi$  : Tracção numa face entre elementos;  
 $\pi_C$  : Energia potencial complementar;  
 $\pi_P$  : Energia potencial total;  
 $\nu$  : Coeficiente de Poisson do material;  
 $\sigma$  : Vector das tensões;  
 $\sigma_0$  : Solução particular;  
 $\Psi$  : Função de tensão de Morera.

# Índice

## Capítulo 1

<b>Introdução</b>	1
1.1 Objectivos	1
1.2 Metodologia	1
1.3 Descrição dos capítulos seguintes	2

## Capítulo 2

<b>Conceitos básicos da teoria da elasticidade</b>	3
2.1 Introdução	3
2.2 Condições de compatibilidade	4
2.3 Condições de equilíbrio	5
2.4 Condições de fronteira	7
2.5 Relações constitutivas	7
2.6 Princípios energéticos	8
2.6.1 Princípio do Mínimo da Energia Potencial	8
2.6.2 Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar	9
2.6.3 Limites para a energia de deformação	10

## Capítulo 3

<b>Formulações de elementos finitos</b>	11
3.1 Introdução	11
3.2 Elementos finitos compatíveis	11
3.3 Elementos finitos de equilíbrio	12
3.3.1 Introdução	12
3.3.2 Formulação utilizada	13

<b>Capítulo 4</b>	
<b>Modelo de elementos finitos de equilíbrio</b>	19
4.1 Introdução	19
4.2 Definição dos elementos finitos	19
4.3 Cálculo dos integrais	20
4.4 Discretização das variáveis	21
4.4.1 Funções de forma de tensão	21
4.4.2 Funções de forma de deslocamento	26
4.5 Sistema governativo	28
4.6 Definição das faces e arestas	29
4.7 Definição das acções	33
<b>Capítulo 5</b>	
<b>Apresentação dos resultados</b>	35
5.1 Introdução	35
5.2 Representação gráfica dos resultados	36
5.3 Projecção Axonométrica	37
<b>Capítulo 6</b>	
<b>Programas de cálculo automático</b>	38
6.1 Introdução	38
6.2 Pré-processamento	39
6.2.1 Ficheiros de dados	39
6.2.2 Geração das malhas de elementos finitos	39
6.3 Formação do sistema governativo	40
6.3.1 Rotinas básicas	40
6.3.2 Integrações	41
6.3.3 Eficiência computacional	42
6.4 Resolução do sistema governativo	42
6.5 Pós-processamento	43
6.6 Programas de cálculo automático	43
<b>Capítulo 7</b>	
<b>Exemplos de aplicação</b>	45
7.1 Introdução	45
7.2 Consola cúbica carregada na face superior	45

7.3 Consola cúbica sujeita ao seu peso próprio	56
7.4 Consola de secção variável carregada na face superior	60
7.5 Prisma sujeito a uma acção localizada	65
7.6 Esfera oca sujeita a uma sucção interna	68
<b>Capítulo 8</b>	
<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	72
8.1 Conclusões	72
8.2 Desenvolvimentos futuros	73
<b>Referências</b>	74