

# Capítulo 8

## Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 8.1 Conclusões

Neste trabalho, implementou-se um modelo de elementos finitos de equilíbrio para a análise de problemas estáticos de elasticidade linear em sólidos tridimensionais.

O modelo implementado discretiza directamente o campo de tensões e permite, em geral, obter soluções estaticamente admissíveis. Neste modelo, a grande flexibilidade na definição dos elementos finitos e das suas faces permite discretizar facilmente sólidos com quaisquer características geométricas.

Conjugando os resultados com os de um dos diversos modelos de elementos finitos de compatibilidade existentes, é possível obter limites para a energia da solução exacta e um majorante do erro em energia.

Não surgiram grandes dificuldades na adaptação, para problemas tridimensionais, da formulação e das rotinas apresentadas por Almeida [2, 3, 4], para estados planos. Contudo, a análise de problemas tridimensionais envolve matrizes substancialmente maiores e um número de operações muito maior, necessitando de meios de cálculo automático bastante potentes. Portanto, parece preferível, para a maior parte da investigação sobre malhas duais de elementos finitos, trabalhar em problemas bidimensionais.

O principal inconveniente desta formulação é a existência de equações linearmente dependentes no sistema governativo, o que obriga à utilização de um programa de resolução que aceite sistemas com dependências. Os valores arbitrados para as dependências podem ter uma contribuição muito desfavorável para as incompatibilidades existentes na deformada calculada através deste modelo de elementos finitos.

Além disso, nem sempre é possível, para uma dada discretização, obter uma solução equilibrada, ao contrário do que acontece com os elementos finitos

de compatibilidade, para os quais é sempre possível obter uma solução cinematicamente admissível.

Estes inconvenientes podem ser minorados utilizando elementos tetraédricos e funções de forma do grau mais elevado que, na prática, seja possível.

## **8.2 Desenvolvimentos futuros**

O desenvolvimento do trabalho aqui apresentado pode ser feito tanto ao nível da formulação como ao nível da eficiência do cálculo automático.

A nível da formulação, o mais útil seria o desenvolvimento de um método para retirar as equações linearmente dependentes antes da resolução do sistema ou, se possível, formar directamente um sistema sem dependências. Alternativamente, poder-se-ia escolher, de entre as múltiplas soluções para os deslocamentos, aquela que apresente menos incompatibilidades.

A nível da eficiência do cálculo automático, poderiam ser elaboradas rotinas mais eficientes para a formação do sistema governativo, pré-programando as funções de forma, as suas derivadas e algumas das suas primitivas e, ainda, recorrendo à integração numérica. Poderia haver também vantagem em ter um conjunto de tipos de elementos pré-definidos.

# Referências

- [1] ABAQUS, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. (1989).
- [2] J. P. B. M. Almeida, 'Modelos de elementos finitos para a análise elastoplástica', Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa (1989).
- [3] J. P. B. M. Almeida, J. A. T. Freitas, 'An alternative approach to the formulation of hybrid equilibrium finite elements', *Comp. Struct.*, **40**, 1043-1047 (1991).
- [4] J. P. B. M. Almeida, J. A. T. Freitas, 'Continuity conditions for finite element analysis of solids', *Int. j. numer. methods eng.*, **33**, 845-853 (1992).
- [5] J. P. B. M. Almeida, 'Janela: uma interface gráfica destinada a aplicações de mecânica computacional', versão preliminar, IST (1992).
- [6] J. C. Cavendish, D. A. Field, W. H. Frey, 'An approach to automatic three-dimensional finite element mesh generation', *Int. j. numer. methods eng.*, **21**, 329-347 (1985).
- [7] A. M. A. Fonseca, 'Plastic analysis and synthesis of plates and shells by mathematical programming', Tese de doutorado, Univ. de Londres (1980).
- [8] B. W. Kernighan, D. M. Ritchie, *The C programming language*, Prentice-Hall, New Jersey (1978).
- [9] G. Lamé, 'Leçons sur la Théorie . . . de l'Élasticité', Paris (1852).
- [10] A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge (1892).
- [11] J. C. Maxwell, 'On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress', *Proc. London Math. Soc.*, **1**, 58-60 (1868).
- [12] G. Morera, 'Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo', *Rend. Acc. Naz. Lincei (Ser. 5)*, t. **1**, (1892).
- [13] Nguyen-Van-Phai, 'Automatic mesh generation with tetrahedron elements', *Int. j. numer. methods eng.*, **18**, 273-289 (1982).
- [14] R. Perucchio, A. R. Ingraffea, J. F. Abel, 'Interactive computer graphic preprocessing for three-dimensional finite element analysis', *Int. j. numer. methods eng.*, **18**, 909-926 (1982).

- [15] S. Pissanetzky, *Sparse matrix technology*, Academic Press, Londres (1984).
- [16] J. Robinson, 'Basis for isoparametric stress elements', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **2**, 43-63 (1973).
- [17] E. F. Rybicki, 'Approximate three-dimensional solutions for symmetric laminates under inplane loading', *Journal of Composite Materials*, **5**, 354-360 (1971).
- [18] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Kogakusha (1970).
- [19] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp, 'Stiffness and deflection analysis of complex structures', *Journal of Aeronautical Sciences*, **23**, 805-823 (1956).
- [20] B. M. F. de Veubeke, 'Upper and lower bounds in matrix structural analysis', *AGARDograf*, **72**, 165-201 (1964).
- [21] B. M. F. de Veubeke, 'Displacement and equilibrium models in the finite element method', em *Stress Analysis*, (Ed. O. C. Zienkiewicz), 145-197, John Wiley, London (1965).
- [22] K. Washizu, *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, Oxford (1975).
- [23] M. A. Yerry, M. S. Shephard, 'Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique', *Int. j. numer. methods eng.*, **20**, 1965-1990 (1984).
- [24] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The finite element method*, McGraw-Hill, London (1989).