

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objectivos

O objectivo deste trabalho é a implementação de um modelo de elementos finitos de equilíbrio para a análise de problemas estáticos de elasticidade linear em sólidos tridimensionais.

Um modelo de elementos finitos de equilíbrio discretiza directamente o campo de tensões ou as funções geradoras de tensão e permite obter soluções equilibradas.

Conjugando os resultados com os de um dos diversos modelos de elementos finitos de compatibilidade existentes, será possível obter limites para a energia da solução exacta [20,21]. Consequentemente, será possível obter um majorante do erro em energia.

1.2 Metodologia

No presente trabalho, optou-se por discretizar directamente o campo de tensões, tomando como base uma das formulações apresentadas por Almeida [2,3,4] para estados planos, designada por Estática Pura.

A implementação do modelo foi efectuada com base nas rotinas desenvolvidas pelo mesmo autor, para polinómios de duas variáveis. Nestas rotinas, todas as operações são efectuadas explicitamente, não havendo necessidade de programar simultaneamente as funções de forma e as suas derivadas ou de recorrer a integrações numéricas.

Dada a grande dimensão e a esparsidade do sistema governativo, é utilizado um programa apropriado para o seu armazenamento e resolução, baseado num algoritmo apresentado por Pissanetzky [15]. Além disso, o

programa foi adaptado para aceitar sistemas com equações dependentes, tais como os obtidos por esta formulação.

A apresentação dos resultados é feita em projecção axonométrica, recorrendo a uma biblioteca de rotinas gráficas desenvolvida por Almeida [5].

1.3 Descrição dos capítulos seguintes

No capítulo 2, caracteriza-se o problema em análise: definem-se as variáveis envolvidas e as relações entre elas.

No capítulo 3, redefine-se o problema em análise, dividindo o domínio em elementos finitos. Referem-se algumas formulações de elementos finitos e descreve-se a formulação de elementos finitos de equilíbrio utilizada.

O modo como foi implementado o modelo de elementos finitos é pormenorizado no capítulo 4. Descrevem-se, nomeadamente, a forma de definir os elementos, a discretização das variáveis e a estrutura do sistema governativo.

O capítulo 5 trata da apresentação gráfica dos resultados.

No capítulo 6, é feita uma breve descrição dos programas de cálculo automático utilizados.

Diversos exemplos de aplicação da formulação desenvolvida são apresentados no capítulo 7, sendo os resultados analisados comparativamente.

Por fim, no capítulo 8, fazem-se alguns comentários finais e sugerem-se possíveis desenvolvimentos da formulação apresentada.

Capítulo 2

Conceitos básicos da teoria da elasticidade

2.1 Introdução

Considere-se um domínio sólido tridimensional V , delimitado por uma fronteira S e referido a um sistema de eixos cartesianos. Seja S_σ a parte da fronteira onde são impostos os valores das tracções e S_u a parte da fronteira onde são impostos os valores dos deslocamentos.

O problema fundamental da elasticidade consiste em determinar os campos de deslocamentos, de deformações e de tensões em V , conhecidas as forças de massa, os deslocamentos na fronteira cinemática S_u e as tracções na fronteira estática S_σ .

Neste capítulo, são definidas as variáveis que surgem na formulação deste problema - deslocamentos, deformações, tensões e forças de massa - e as condições que as relacionam - compatibilidade, equilíbrio e elasticidade. São ainda apresentados os teoremas energéticos que permitem estabelecer a forma como as soluções aproximadas convergem para a solução exacta.

Considera-se, ao longo deste trabalho, que o material é isotrópico e que são válidas as hipóteses da linearidade física e da linearidade geométrica.

A hipótese da linearidade física consiste em assumir para o material um comportamento elástico linear, ou seja, uma relação linear entre tensões e deformações.

Na hipótese da linearidade geométrica, admite-se que as deformações são muito pequenas, face à menor dimensão do corpo. Assim, a configuração deformada confunde-se com a configuração inicial.

2.2 Condições de compatibilidade

O deslocamento de cada ponto de V pode ser representado por um vector \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

As componentes deste vector representam as projecções do deslocamento segundo as direcções do sistema de eixos cartesiano.

O estado de deformação em cada ponto é caracterizado por um tensor simétrico de segunda ordem ε :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Por comodidade, define-se $\gamma_{ij} = 2 \varepsilon_{ij}$ e utiliza-se o vector:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

As relações deformações-deslocamentos podem ser escritas matricialmente na forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = D \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

D é o operador diferencial de compatibilidade, definido por:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

2.3 Condições de equilíbrio

O campo de forças de massa existente no domínio pode ser representado por um vector \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

O estado de tensão em cada ponto pode ser caracterizado por um tensor de segunda ordem σ :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

A componente σ_{ij} do tensor das tensões representa a tensão aplicada segundo a direcção i , numa faceta perpendicular à direcção j .

Como foi admitida a hipótese da linearidade geométrica, as equações de equilíbrio são estabelecidas na configuração indeformada da estrutura.

Das equações de equilíbrio de momentos de um elemento infinitesimal, conclui-se que o tensor das tensões é simétrico.

Assim, por comodidade, utiliza-se o vector:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Deste modo, as equações de equilíbrio de forças podem ser escritas matricialmente na forma:

$$D^* \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

D^* é o operador diferencial de equilíbrio, adjunto de D :

$$D^* = D^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Na ausência de forças de massa, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, as equações de equilíbrio (2.9) são automaticamente satisfeitas se as tensões forem definidas a partir das funções de tensão de Maxwell [11] ou das de Morera [12]. Neste último caso [10]:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y \partial z}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z \partial x}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial y},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right), \\
\sigma_{xz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right), \\
\sigma_{xy} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

2.4 Condições de fronteira

A fronteira S do domínio V considera-se dividida em duas partes. Na fronteira cinemática, S_u , impõem-se os valores dos deslocamentos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S. \tag{2.12}$$

Na fronteira estática, S_σ , impõem-se os valores das tracções:

$$N \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_S. \tag{2.13}$$

N é uma matriz onde se reúnem as componentes do versor da normal exterior à fronteira S_σ associadas ao operador D^* :

$$N = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

2.5 Relações constitutivas

As relações constitutivas estabelecem a lei que relaciona os campos de tensão e de deformação. Podem ser apresentadas em termos de flexibilidade ou em termos de rigidez.

Em termos de flexibilidade:

$$\varepsilon = f \sigma + \varepsilon_t. \quad (2.15)$$

Nesta definição ε_t denota as deformações térmicas generalizadas e f é uma matriz simétrica e positiva definida, a matriz de flexibilidade, dada por:

$$f = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

O módulo de elasticidade do material é representado por E e o coeficiente de Poisson por ν .

2.6 Princípios energéticos

Os princípios energéticos desempenham um papel importante na formulação e resolução de problemas na área da Mecânica dos Sólidos. São particularmente importantes na definição das condições de existência e unicidade das soluções e na determinação da forma como as soluções aproximadas convergem para a solução exacta.

Os princípios energéticos que de seguida se enunciam são aqueles que assumem uma maior importância no contexto deste trabalho. Diversas generalizações destes princípios podem ser encontradas no texto de Washizu [22].

2.6.1 Princípio do Mínimo da Energia Potencial

O Princípio do Mínimo da Energia Potencial estabelece que, de entre todos os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis, aquele que corresponde à solução exacta minimiza a energia potencial total do sistema, π_p :

$$\pi_p = U - W. \quad (2.16)$$

Nesta expressão, U é a energia de deformação:

$$U = \int_V \int_0^\varepsilon \boldsymbol{\sigma}^T d\varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\varepsilon - \varepsilon_t) dV \quad (2.17)$$

e W é o trabalho desenvolvido pelas forças aplicadas:

$$W = \int_V \mathbf{f}^T \mathbf{u} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{t}_s^T \mathbf{u} dS_\sigma. \quad (2.18)$$

Uma solução é cinematicamente admissível, ou compatível, quando satisfaz localmente as equações de compatibilidade (2.4) e verifica as condições de fronteira cinemáticas (2.12).

As soluções aproximadas, cinematicamente admissíveis, poderão considerar-se tanto mais exactas, em termos globais, quanto menor for a correspondente energia potencial.

2.6.2 Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar

O Princípio do Mínimo da Energia Potencial Complementar estabelece que, de entre todos os campos de tensão estaticamente admissíveis, aquele que corresponde à solução exacta minimiza a energia potencial complementar do sistema, π_C :

$$\pi_C = U^* - W^*. \quad (2.19)$$

Nesta expressão, U^* é a energia complementar de deformação:

$$U^* = \int_V \int_0^\sigma \boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\varepsilon + \varepsilon_t) dV \quad (2.20)$$

e W^* é o trabalho associado aos deslocamentos impostos:

$$W^* = \int_{S_u} \mathbf{t}^T \mathbf{u}_s dS_u. \quad (2.21)$$

Uma solução é estaticamente admissível, ou equilibrada, quando satisfaz localmente as equações de equilíbrio (2.9) e verifica as condições de fronteira estáticas (2.13).

As soluções aproximadas, estaticamente admissíveis, poderão considerar-se tanto mais exactas, em termos globais, quanto menor for a correspondente energia potencial complementar.

2.6.3 Limites para a energia de deformação

Se ε_t e W^* forem nulos:

$$U = -\pi_p = \pi_c. \quad (2.22)$$

Assim, os modelos aproximados que conduzem a soluções compatíveis aproximarão U por valores inferiores e os que conduzem a soluções equilibradas aproximarão U por valores superiores.

Se W for nulo:

$$U = \pi_p = -\pi_c. \quad (2.23)$$

Portanto, os modelos aproximados compatíveis aproximarão U por valores superiores e os equilibrados por valores inferiores.

Qualquer situação pode ser decomposta numa parcela com W nulo e noutra com ε_t e W^* nulos.

Se, por exemplo, ε_t e W^* forem nulos, os modelos compatíveis aproximarão U por valores inferiores, U_c , e os equilibrados por valores superiores, U_e . O erro de qualquer um destes modelos, medido em energia, nunca será superior a $U_e - U_c$. O erro relativo nunca será superior a $(U_e - U_c)/U_c$.

Capítulo 3

Formulações de elementos finitos

3.1 Introdução

Na generalidade dos casos, não é possível obter uma solução analítica exacta para o problema fundamental da elasticidade. Recorrendo a um modelo de elementos finitos, poder-se-á obter uma solução aproximada.

O conceito em que se fundamenta o método dos elementos finitos é o da aproximação do domínio em análise através de um número finito de subdomínios de formas simples e dimensões arbitrárias - os elementos finitos - no interior dos quais se assumem funções simples para aproximar as variáveis em estudo. A solução aproximada consiste numa combinação linear destas funções. Os pesos desta combinação passam a ser as variáveis do problema.

A grande liberdade na discretização do domínio faz com que o método dos elementos finitos possa ser utilizado para resolver praticamente qualquer problema susceptível de ser representado matematicamente por equações às derivadas parciais, com quaisquer condições de fronteira [24, 7].

Em seguida, será apresentada a formulação clássica, compatível, do método dos elementos finitos e será descrita a formulação de elementos finitos de equilíbrio utilizada neste trabalho.

3.2 Elementos finitos compatíveis

Na formulação clássica, as variáveis do problema são os valores dos deslocamentos num certo número de pontos do domínio, os nós.

Em cada elemento, associada a cada nó no seu interior ou na sua fronteira, existe uma função de forma, ou de interpolação. Esta função é contínua, tem valor unitário no nó respectivo e nulo nos restantes. As

componentes do campo de deslocamentos são aproximadas, em cada elemento, através destas funções. Deste modo, o campo de deslocamentos em cada elemento fica univocamente definido a partir dos valores nodais.

As condições de fronteira cinemáticas são impostas arbitrando os valores dos deslocamentos dos nós na fronteira cinemática.

A solução obtida será cinematicamente admissível desde que, em cada fronteira entre dois elementos, as funções de forma associadas a cada nó assumam valores iguais em todos os pontos dessa fronteira. Para as funções de forma clássicas, esta condição é facilmente imposta, com um mínimo de cuidado na discretização do domínio.

A geometria de cada elemento é normalmente definida a partir das coordenadas dos nós, utilizando funções de forma do mesmo tipo das utilizadas para os deslocamentos, todas referidas a um elemento mestre cúbico ou tetraédrico. Se as funções de forma forem exactamente as mesmas, diz-se que o elemento é isoparamétrico. Este tipo de modelo é extremamente simples de formular e de aplicar.

O sistema governativo é um sistema de equações de equilíbrio de forças nodais, análogo ao do método dos deslocamentos. Estas forças nodais correspondem ao trabalho das tensões internas e forças e tracções externas, para deslocamentos correspondentes a um deslocamento nodal unitário e os restantes nulos. O seu equilíbrio não implica a admissibilidade estática. Em geral, a solução obtida não irá satisfazer localmente nem as equações de equilíbrio (2.9) no interior dos elementos nem o equilíbrio de tracções (2.13) na fronteira estática e nas fronteiras entre elementos.

Os elementos finitos compatíveis surgiram em 1956 [19], têm diversas aplicações em problemas tridimensionais e correspondem ao grosso da utilização e da investigação no domínio dos elementos finitos.

3.3 Elementos finitos de equilíbrio

3.3.1 Introdução

Os modelos de elementos finitos de equilíbrio podem ser obtidos discretizando o campo de tensões ou as funções geradoras de tensão.

Quando é discretizado o campo de tensões, as variáveis do problema são os pesos das funções de forma das tensões nos elementos. Surgem, também, como variáveis, os pesos das funções de forma dos deslocamentos nas fronteiras entre elementos e na fronteira estática. Este tipo de elementos finitos surgiu em 1964 [20, 21], aplicado a problemas de elasticidade plana. Não se conhecem aplicações de elementos deste tipo a problemas de elasticidade tridimensional, além da aqui descrita.

Quando são discretizadas as funções geradoras de tensão, as variáveis do problema são os valores nodais das funções de tensão e, eventualmente, das suas primeiras derivadas. Desde 1971, existem algumas aplicações de elementos deste tipo a problemas de elasticidade tridimensional [17, 16].

Os elementos finitos de equilíbrio correspondem a uma pequena parcela da investigação e da utilização do método dos elementos finitos.

3.3.2 Formulação utilizada

Nesta formulação de elementos finitos de equilíbrio, discretiza-se directamente o campo de tensões.

O campo de tensões no interior de um elemento é discretizado da seguinte maneira:

$$\sigma = S \hat{s} + \sigma_0. \quad (3.1)$$

S é a matriz das funções de forma de tensão, \hat{s} é o vector dos parâmetros de tensão - pesos das funções de forma de tensão - e σ_0 é uma solução particular. As matrizes S podem não ser iguais para todos os elementos.

As equações de equilíbrio (2.9) são automaticamente satisfeitas no interior dos elementos porque as funções de forma de tensão são escolhidas de forma a que:

$$D^* S = 0 \quad (3.2)$$

e a solução particular é tal que:

$$D^* \sigma_0 + f = 0. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é satisfeita fazendo, por exemplo:

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} -P_x(f_x) \\ -P_y(f_y) \\ -P_z(f_z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Os deslocamentos nas faces entre elementos e nas faces pertencentes à fronteira estática, \mathbf{v} , são discretizados do seguinte modo:

$$\mathbf{v} = V \hat{\mathbf{v}}. \quad (3.5)$$

V é a matriz das funções de forma de deslocamento e $\hat{\mathbf{v}}$ é o vector dos parâmetros de deslocamento - pesos das funções de forma de deslocamento. As matrizes V podem não ser iguais em todas as faces entre elementos.

Nas faces pertencentes à fronteira cinemática:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{u}_s. \quad (3.6)$$

As equações (3.5) e (3.6) podem ser escritas na forma geral:

$$\mathbf{v} = V \hat{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}. \quad (3.7)$$

Nas faces pertencentes à fronteira do domínio, as funções de forma de deslocamento obedecerão às condições de fronteira cinemáticas.

Para impor o equilíbrio entre elementos, é definida uma nova variável, a tracção numa face, φ :

$$\varphi = \sum_i N_i \sigma_i, \quad (3.8)$$

em que o somatório em i é extensivo a todos os elementos finitos adjacentes à face.

Há equilíbrio de tracções numa face entre elementos se, nessa face:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Note-se que esta condição não implica continuidade do campo de tensões nessa face. Contudo, estas descontinuidades não afectam o equilíbrio de um elemento de volume infinitesimal que seja intersectado pela face.

As condições de fronteira estáticas são respeitadas numa face se, nessa face:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{t}_S. \quad (3.10)$$

Se, numa face, as condições de fronteira corresponderem a um apoio elástico:

$$\boldsymbol{\varphi} = -k_S \mathbf{v}. \quad (3.11)$$

As equações (3.9), (3.10) e (3.11) podem ser escritas na forma geral:

$$\boldsymbol{\varphi} = \bar{\mathbf{t}} - k_S \mathbf{v}, \quad (3.12)$$

na qual $\bar{\mathbf{t}}$, designada por tracção aplicada na face, é igual a \mathbf{t}_S na fronteira estática e nula nas restantes faces.

Se se utilizarem funções de forma de tensão que verifiquem a condição (3.2) e um $\boldsymbol{\sigma}_0$ que verifique (3.3) e se em todas as faces entre elementos ou pertencentes à fronteira estática se verificar (3.12), a solução obtida será estaticamente admissível.

Nesta formulação, as funções de forma de deslocamento, em cada face j , são utilizadas para impor a condição (3.12), nessa face j , na forma de resíduos pesados:

$$\int_{S_j} V_j^T \boldsymbol{\varphi} dS = \int_{S_j} V_j^T (\bar{\mathbf{t}} - k_S \mathbf{v}) dS. \quad (3.13)$$

Note-se que se, numa face pertencente à fronteira, as funções contidas em V não permitirem deslocamentos numa dada direcção - condição de fronteira cinemática - a equação (3.13) não imporá o valor da tracção nessa direcção - condição de fronteira estática.

Utilizando as expressões (3.8), (3.1) e (3.7) e considerando que $k_s \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\int_{S_j} V_j^T N_{ij} S_i dS \right) \hat{\mathbf{s}}_i + \left(\int_{S_j} V_j^T k_s V_j dS \right) \hat{\mathbf{v}}_j = \\ = \int_{S_j} V_j^T \bar{\mathbf{t}} dS - \sum_i \left(\int_{S_j} V_j^T N_{ij} \sigma_{oi} dS \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Na equação (3.14), o índice i refere-se ao elemento finito i ; omite-se o índice j , nesta equação e na (3.13), sempre que não se considera essencial.

A equação (3.14) pode ser escrita na forma compacta:

$$\sum_i \mathbf{D}_{ij} \hat{\mathbf{s}}_i + \mathbf{K}_j \hat{\mathbf{v}}_j = \hat{\mathbf{t}}_j - \sum_i \hat{\mathbf{t}}_{oj}. \quad (3.15)$$

Admita-se agora que a discretização efectuada é suficiente para que exista pelo menos uma solução estaticamente admissível. Então, a equação (3.15), com uma combinação adequada de funções de forma e de peso, permite garantir a admissibilidade estática.

De entre as soluções estaticamente admissíveis que a discretização permite, procurar-se-á aquela que verifica, da forma mais aproximada possível, a equação de compatibilidade (2.4). Nesta formulação, as funções de forma de tensão, em cada elemento i , são utilizadas para impor (2.4), nesse elemento i , na forma de resíduos pesados:

$$\int_{V_i} S_i^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{V_i} S_i^T \mathbf{D} \mathbf{u} dV. \quad (3.16)$$

Integrando por partes o segundo termo, obtém-se:

$$\int_{V_i} \mathbf{S}_i^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = - \int_{V_i} (\mathbf{D}^* \mathbf{S}_i)^T \mathbf{u} dV + \sum_j \int_{S_j} \mathbf{S}_i^T \mathbf{N}_j^T \mathbf{u} dS, \quad (3.17)$$

em que o somatório em j é extensivo a todas as faces do elemento i .

Atendendo a (3.2), o integral de volume no segundo termo é nulo. Utilizando as expressões (2.15) e (3.1) e, dado que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ em S_j , (3.7), obtém-se:

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{V_i} \mathbf{S}_i^T f \mathbf{S}_i dV \right) \hat{\mathbf{s}}_i + \sum_j \left(\int_{S_j} \mathbf{S}_i^T \mathbf{N}_j^T V_j dS \right) \hat{\mathbf{v}}_j = \\ & = \int_{V_i} \mathbf{S}_i^T f \boldsymbol{\sigma}_{oi} dV + \int_{V_i} \mathbf{S}_i^T \boldsymbol{\varepsilon}_t dV - \sum_j \int_{S_j} \mathbf{S}_i^T \mathbf{N}_j^T \bar{\mathbf{v}}_j dS. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nas equações (3.17) e (3.18), o índice j refere-se à face j ; omite-se o índice i , nestas equações e na (3.16), sempre que não se considera essencial.

A equação (3.18) pode ser escrita na forma compacta:

$$-\mathbf{F}_i \hat{\mathbf{s}}_i + \sum_j \mathbf{D}_{ij}^T \hat{\mathbf{v}}_j = \hat{\mathbf{e}}_{oi} + \hat{\mathbf{e}}_{ti} - \sum_j \hat{\mathbf{v}}_{ij}. \quad (3.19)$$

Em geral, esta equação não será suficiente para garantir a continuidade dos deslocamentos das faces entre si.

Como é usual nas formulações de elementos finitos, os cálculos correspondentes a (3.19) e (3.15) podem ser efectuados elemento a elemento e, dentro destes, face a face; o somatório é efectuado implicitamente através do espalhamento dos respectivos coeficientes no sistema global.

O sistema governativo é constituído por equações como a (3.19), para todos os elementos finitos e equações como a (3.15), para todas as faces em que $V \neq 0$. É um sistema de equações lineares, simétrico; as variáveis são os parâmetros de tensão e os parâmetros de deslocamento. Agrupando os vectores elementares $\hat{\mathbf{s}}_i$ num vector global $\hat{\mathbf{s}}$, agrupando os vectores das faces $\hat{\mathbf{v}}_j$ num vector global $\hat{\mathbf{v}}$ e fazendo o mesmo para os restantes vectores e matrizes nas equações (3.19) e (3.15), o sistema governativo pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 - \hat{\mathbf{e}}_t - \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{t}}_0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Capítulo 4

Modelo de elementos finitos de equilíbrio

4.1 Introdução

Neste capítulo, descreve-se o modelo de elementos finitos, baseado na formulação descrita em 3.3.2, que foi implementado.

Descrever-se-á a forma de definir os elementos e as faces, o tipo de funções de forma utilizadas, o modo como foram obtidas e o modo como foram efectuados os cálculos. Analisar-se-á, também, a estrutura do sistema governativo.

Na implementação efectuada, considerou-se que $\bar{\nu}$, k_S e ϵ_t eram nulos.

4.2 Definição dos elementos finitos

Os elementos finitos são definidos pelas suas faces. O utilizador pode empregar elementos com um número de faces qualquer.

Na definição de cada face, está-lhe associada uma normal em cada ponto. Portanto, ao utilizar uma dada face na definição um elemento, é necessário indicar se essa normal é exterior ao elemento, ou não. Isso é feito indicando um número de face positivo, se a normal for exterior, ou negativo, no caso contrário.

Além disto, o utilizador tem apenas de indicar as funções de forma para o campo de tensões no elemento e, dado que se admite que os elementos são homogéneos e isótropos, o valor de E e o de ν .

4.3 Cálculo dos integrais

Como se pode observar nas equações (3.14) e (3.18), é necessário calcular integrais de volume nos elementos e integrais de superfície nas faces.

Como os elementos são definidos a partir das faces, é cómodo transformar os integrais de volume em integrais de superfície nas faces, recorrendo ao Teorema da Divergência:

$$\int_V F \, dV = \int_S P_x(F) \, n_x \, dS. \quad (4.1)$$

Considere-se que a porção de superfície que constitui a face j é representada parametricamente por:

$$\begin{bmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

em que os parâmetros (s,t) estão definidos no domínio $D_j \subset \mathfrak{R}^2$, de tal modo que a componente segundo x do versor da normal exterior ao elemento seja:

$$n_x = \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{1}{J}, \quad (4.3)$$

em que $J \, ds \, dt = dS$.

Assim, para um elemento i :

$$\int_{V_i} F \, dV = \sum_j \iint_{D_j} P_x(F) \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds \, dt, \quad (4.4)$$

em que o somatório em j é extensivo a todas as faces do elemento i . Se a normal associada a uma face não for exterior ao elemento, basta utilizar $-n_x$, em vez de n_x , para essa face.

O mesmo pode ser feito para os integrais de superfície nas faces recorrendo, desta vez, ao Teorema de Green:

$$\int_S H dS = \iint_D H J ds dt = \iint_D G ds dt = \int_{\Gamma} P_s(G) \frac{dt}{dr} dr, \quad (4.5)$$

em que Γ é a imagem, em D , da fronteira de S .

Considere-se que cada face está limitada por arestas e que a imagem, em D_j , da aresta k é representada parametricamente por:

$$\begin{bmatrix} s(r) \\ t(r) \end{bmatrix}, r \in [0,1]. \quad (4.6)$$

Então, para uma face j :

$$\iint_{D_j} G ds dt = \sum_k \int_0^1 P_s(G) \frac{dt}{dr} dr, \quad (4.7)$$

em que o somatório em k é extensivo a todas as arestas da face j .

Assim, todos os integrais se reduzem a somatórios de integrais numa variável.

4.4 Discretização das variáveis

No modelo implementado, para todas as variáveis que é necessário discretizar, são utilizadas funções de forma polinomiais. As acções consideradas são também descritas através de funções polinomiais.

4.4.1 Funções de forma de tensão

O campo de tensões no interior de um elemento é discretizado da maneira indicada em (3.1). A matriz de funções de forma de tensão, S , obedece à equação (3.2).

Portanto, S é uma matriz de polinómios do tipo:

$$\left[\begin{array}{ccc} \sigma_{xx1}(x,y,z) & \sigma_{xx2}(x,y,z) & \sigma_{xxn}(x,y,z) \\ \sigma_{yy1}(x,y,z) & \sigma_{yy2}(x,y,z) & \sigma_{yyn}(x,y,z) \\ \sigma_{zz1}(x,y,z) & \sigma_{zz2}(x,y,z) & \sigma_{zzn}(x,y,z) \\ \sigma_{xy1}(x,y,z) & \sigma_{xy2}(x,y,z) & \dots\dots\dots \sigma_{xyn}(x,y,z) \\ \sigma_{xz1}(x,y,z) & \sigma_{xz2}(x,y,z) & \sigma_{xzn}(x,y,z) \\ \sigma_{yz1}(x,y,z) & \sigma_{yz2}(x,y,z) & \sigma_{yzn}(x,y,z) \end{array} \right], \quad (4.8)$$

em que a função de forma de tensão em cada coluna obedece à equação (3.2).

A partir duma construção análoga ao triângulo de Pascal, mas para três variáveis, é possível obter todos os monómios do tipo $x^i y^j z^k$, com $i+j+k = n+2$. Utilizando, sucessivamente, cada um desses monómios para a função de Morera Ψ_1 , na expressão (2.11) e fazendo depois o mesmo para Ψ_2 e Ψ_3 , obtém-se um dado conjunto de funções. Esse conjunto contém todas as funções de forma de tensão polinomiais em que o monómio de grau mais elevado é do tipo $x^i y^j z^k$, com $i+j+k = n$. O número de funções dependentes não é muito elevado e não é complicado obter, a partir desse conjunto, um conjunto de funções linearmente independentes.

Para $n = 0, 1, 2$ e 3 obtêm-se, respectivamente, 6, 15, 27 e 42 funções linearmente independentes. Os conjuntos correspondentes a $n = 0, n \leq 1, n \leq 2$ e $n \leq 3$ serão denominados, respectivamente, $S_{000}^6, S_{111}^{21}, S_{222}^{48}$ e S_{333}^{90} . O primeiro conjunto é de funções constantes, o segundo de funções lineares, o terceiro de funções quadráticas e o último de funções cúbicas. Cada um destes conjuntos contém os anteriores. Considerou-se que o grau das funções de forma em S_{333}^{90} seria suficiente para a generalidade das aplicações e que aumentar o grau das funções levaria a um número excessivo de parâmetros por elemento.

Em seguida, apresenta-se a matriz S correspondente a S_{333}^{90} , transposta.

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	x
0	0	0	0	-x	y
0	0	x	0	0	0
0	0	0	-x	0	z
0	x	0	0	0	0
0	0	0	0	y	0
0	0	y	0	0	0
2x	0	0	-y	-z	0
0	2y	0	-x	0	-z
0	0	2z	0	-x	-y
0	0	0	z	0	0
0	z	0	0	0	0
y	0	0	0	0	0
0	0	0	-y	z	0
z	0	0	0	0	0
0	0	0	-2xz	0	z ²
0	0	0	-2yz	z ²	0
0	0	0	x ²	0	-2xz
0	0	0	y ²	-2yz	0
0	0	0	z ²	0	0
0	0	0	0	-2xy	y ²
0	0	0	0	x ²	-2xy
0	0	0	0	y ²	0
0	0	0	0	0	x ²

0	0	4xz	0	$-x^2$	$-2xy$
0	0	4yz	0	$-2xy$	$-y^2$
0	0	x^2	0	0	0
0	0	y^2	0	0	0
0	0	xy	0	0	0
0	0	z^2	xy	$-xz$	$-yz$
0	4xy	0	$-x^2$	0	$-2xz$
0	4yz	0	$-2xz$	0	$-z^2$
0	x^2	0	0	0	0
0	z^2	0	0	0	0
0	xz	0	0	0	0
0	y^2	0	$-xy$	xz	$-yz$
4xy	0	0	$-y^2$	$-2yz$	0
4xz	0	0	$-2yz$	$-z^2$	0
y^2	0	0	0	0	0
z^2	0	0	0	0	0
yz	0	0	0	0	0
x^2	0	0	$-xy$	$-xz$	yz
0	0	0	0	0	x^3
0	0	0	0	$-3xy^2$	y^3
x^3	0	0	$-3x^2y/2$	$-3x^2z/2$	3xyz
$2x^2y$	0	0	$-xy^2$	$-2xyz$	y^2z
$3xy^2$	0	0	$-y^3/2$	$-3y^2z/2$	0
y^3	0	0	0	0	0
$2x^2z$	0	0	$-2xyz$	$-xz^2$	yz^2
4xyz	0	0	$-y^2z$	$-yz^2$	0
y^2z	0	0	0	0	0
0	0	0	$-3xz^2$	0	z^3
$3xz^2$	0	0	$-3yz^2/2$	$-z^3/2$	0
yz^2	0	0	0	0	0

z^3	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	x^3	$-3x^2y$	
0	0	0	0	x^2y	$-xy^2$	
0	0	0	0	y^3	0	
0	x^3	0	0	0	0	
0	$3x^2y$	0	$-x^3/2$	0	$-3x^2z/2$	
0	$2xy^2$	0	$-x^2y$	x^2z	$-2xyz$	
0	y^3	0	$-3xy^2/2$	$3xyz$	$-3y^2z/2$	
0	$6x^2z$	0	0	0	0	
0	$4xyz$	0	$-x^2z$	0	$-xz^2$	
0	$2y^2z$	0	$-2xyz$	xz^2	$-yz^2$	
0	xz^2	0	0	0	0	
0	$3yz^2$	0	$-3xz^2/2$	0	$-z^3/2$	
0	0	0	$-3yz^2$	z^3	0	
0	z^3	0	0	0	0	
0	0	x^3	0	0	0	
0	0	x^2y	0	0	0	
0	0	xy^2	0	0	0	
0	0	y^3	0	0	0	
0	0	$3x^2z$	0	$-x^3/2$	$-3x^2y/2$	
0	0	$4xyz$	0	$-x^2y$	$-xy^2$	
0	0	$3y^2z$	0	$-3xy^2/2$	$-y^3/2$	
0	0	0	x^3	0	$-3x^2z$	
0	0	$2xz^2$	x^2y	$-x^2z$	$-2xyz$	
0	0	$2yz^2$	xy^2	$-2xyz$	$-y^2z$	
0	0	0	y^3	$-3y^2z$	0	
0	0	0	x^2z	0	$-xz^2$	
0	0	z^3	$3xyz$	$-3xz^2/2$	$-3yz^2/2$	
0	0	0	y^2z	$-yz^2$	0	
0	0	0	z^3	0	0	

(4.9)

4.4.2 Funções de forma de deslocamento

Os deslocamentos nas faces são discretizados da maneira indicada em (3.7). A matriz de funções de forma de deslocamento, V , é uma matriz de polinómios do tipo:

$$\begin{bmatrix} v_{x1}(s,t) & v_{x2}(s,t) & \dots & v_{xn}(s,t) \\ v_{y1}(s,t) & v_{y2}(s,t) & \dots & v_{yn}(s,t) \\ v_{z1}(s,t) & v_{z2}(s,t) & \dots & v_{zn}(s,t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

No caso de a face pertencer à fronteira do domínio, a função de forma de deslocamento em cada coluna terá de obedecer às condições de fronteira cinemáticas que aí existam, o que poderá introduzir dependências entre v_x , v_y e v_z ou obrigar a que uma destas componentes seja nula.

Numa face em que não exista qualquer condição de fronteira cinemática, v_x , v_y e v_z são independentes. Basta portanto utilizar, sucessivamente para v_x , v_y e v_z , os termos do triângulo de Pascal até um certo grau. Para este tipo de faces os conjuntos de funções até ao grau 0, 1, 2 e 3 serão designados, respectivamente, por v_{00}^3 , v_{11}^9 , v_{22}^{18} e v_{33}^{30} . O primeiro conjunto é de funções constantes, o segundo de funções lineares, o terceiro de funções quadráticas e o último de funções cúbicas. Cada um destes conjuntos contém os anteriores. Em seguida, apresenta-se a matriz V correspondente a v_{33}^{30} , transposta.

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 s & 0 & 0 \\
 0 & s & 0 \\
 0 & 0 & s \\
 t & 0 & 0 \\
 0 & t & 0 \\
 0 & 0 & t \\
 s^2 & 0 & 0 \\
 0 & s^2 & 0 \\
 0 & 0 & s^2 \\
 st & 0 & 0 \\
 0 & st & 0 \\
 0 & 0 & st \\
 t^2 & 0 & 0 \\
 0 & t^2 & 0 \\
 0 & 0 & t^2 \\
 s^3 & 0 & 0 \\
 0 & s^3 & 0 \\
 0 & 0 & s^3 \\
 s^2t & 0 & 0 \\
 0 & s^2t & 0 \\
 0 & 0 & s^2t \\
 st^2 & 0 & 0 \\
 0 & st^2 & 0 \\
 0 & 0 & st^2 \\
 t^3 & 0 & 0 \\
 0 & t^3 & 0 \\
 0 & 0 & t^3
 \end{bmatrix}$$

(4.11)

4.5 Sistema governativo

Agrupando os vectores elementares $\hat{\mathbf{s}}_i$ num vector global $\hat{\mathbf{s}}$, agrupando os vectores das faces $\hat{\mathbf{v}}_j$ num vector global $\hat{\mathbf{v}}$ e fazendo o mesmo para os restantes vectores e matrizes nas equações (3.19) e (3.15), o sistema governativo pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 - \hat{\mathbf{e}}_t - \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{t}}_0 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

O sistema é simétrico e, se $\mathbf{K} = 0$, semidefinido negativo.

A submatriz \mathbf{F} é diagonal por blocos, correspondentes aos elementos finitos. A matriz \mathbf{K} é diagonal por blocos, correspondentes às faces em que existam apoios elásticos. A submatriz \mathbf{D} é esparsa por blocos, correspondentes às faces de cada elemento. Portanto, para um número de elementos finitos não muito pequeno, o sistema governativo será altamente esparsa.

No sistema, as primeiras equações, tantas quantos os parâmetros de tensão, são equações de compatibilidade. As últimas equações, tantas quantos os parâmetros de deslocamento, são equações de equilíbrio.

Na implementação efectuada, $\mathbf{K} = 0$, $\hat{\mathbf{e}}_t = \mathbf{0}$ e $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Portanto, o sistema governativo reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \\ \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{t}}_0 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Se o número de parâmetros de deslocamento for inferior ao número de parâmetros de tensão, o sistema poderá ter solução e, no caso de ela existir, poderão existir equações linearmente dependentes no sistema. Se o número de parâmetros de deslocamento for superior ao número de parâmetros de tensão, o sistema poderá ter solução mas, no caso de ela existir, terão de existir dependências no sistema.

Para conjuntos de funções de forma completos, tais como os indicados em 4.4, se as funções de forma de deslocamento forem do mesmo grau que as funções de forma de tensão e de grau igual ou superior ao de $\bar{\mathbf{t}}$ e de σ_0 , a solução, se existir, será equilibrada. Se o grau das funções de forma de

deslocamento for inferior ao das de tensão e se existir solução, não existirá, em geral, equilíbrio nas faces: a equação (3.12) não será respeitada em todos os pontos. Funções de forma de deslocamento de grau superior ao das de tensão só contribuirão para aumentar o número de dependências no sistema, não devendo, por isso, ser utilizadas. Dado que as funções de forma não serão necessariamente as mesmas em todos os elementos e faces, estas considerações devem ser aplicadas a cada face e aos elementos a ela adjacentes.

Para um determinado problema e uma dada discretização, pode não ser possível obter uma solução equilibrada. Isto acontecerá se, algures na malha, o número de equações de equilíbrio independentes for superior ao número de parâmetros de tensão disponíveis. Para minimizar a ocorrência de situações destas, devem ser utilizados elementos com o menor número possível de faces: tetraedros, no caso de faces planas. Quando, com uma dada discretização, não for possível obter uma solução equilibrada, pode-se aumentar o número de elementos finitos ou o grau das funções de forma. Se isto não for praticável, será necessário relaxar as condições de equilíbrio nas faces, até se obter uma solução, ainda que localmente não equilibrada.

4.6 Definição das faces e arestas

Para ter, na definição das faces, a mesma liberdade que na definição dos elementos e dado que os integrais de superfície serão calculados através de (4.7), pareceria ideal definir as faces pelas suas arestas. No entanto, essa definição dependeria do número de arestas. Além disso, a normal à superfície em pontos numa aresta dependeria das outras arestas.

A melhor solução parece ser ter um conjunto de tipos de faces pré-definidos. O tipo de face será identificado pelo número de nós que a definem. As coordenadas dos pontos da face serão obtidas a partir dos valores nodais e de funções de interpolação, pré-definidas, cujo domínio é o dos parâmetros (s,t) .

Na implementação efectuada, definiram-se quatro tipos de faces.

Para a face de três nós, representada na figura 4.1, a função de interpolação, para qualquer das coordenadas x , y ou z , representada aqui genericamente por X , é:

$$X(s,t) = X_1 + (X_2 - X_1) s + (X_3 - X_1) t. \quad (4.14)$$

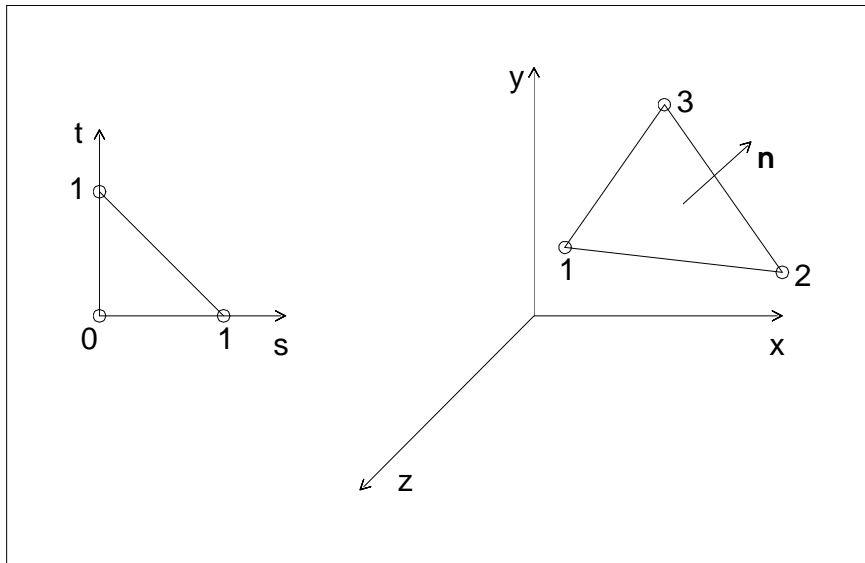


Figura 4.1

Para a face de quatro nós, representada na figura 4.2, a função de interpolação é:

$$X(s,t) = X_1 + (X_2 - X_1) s + (X_4 - X_1) t + (X_1 - X_2 + X_3 - X_4) st. \quad (4.15)$$

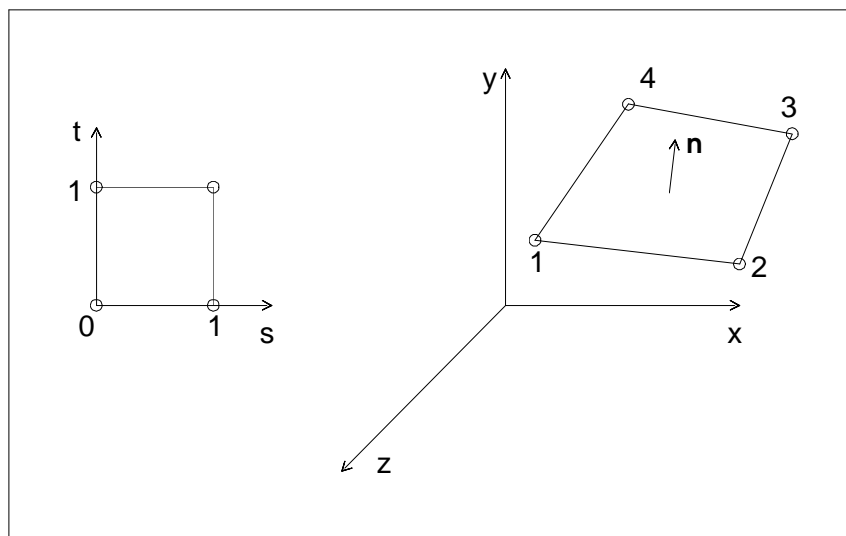


Figura 4.2

Para a face de seis nós, representada na figura 4.3, a função de interpolação é:

$$\begin{aligned}
 X(s,t) = & X_1 + (-3 X_1 + 4 X_2 - X_3) s + (-3 X_1 - X_5 + 4 X_6) t + \\
 & + 4 (X_1 - X_2 + X_4 - X_6) s t + \\
 & + 2 (X_1 - 2 X_2 + X_3) s^2 + 2 (X_1 - 2 X_6 + X_5) t^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

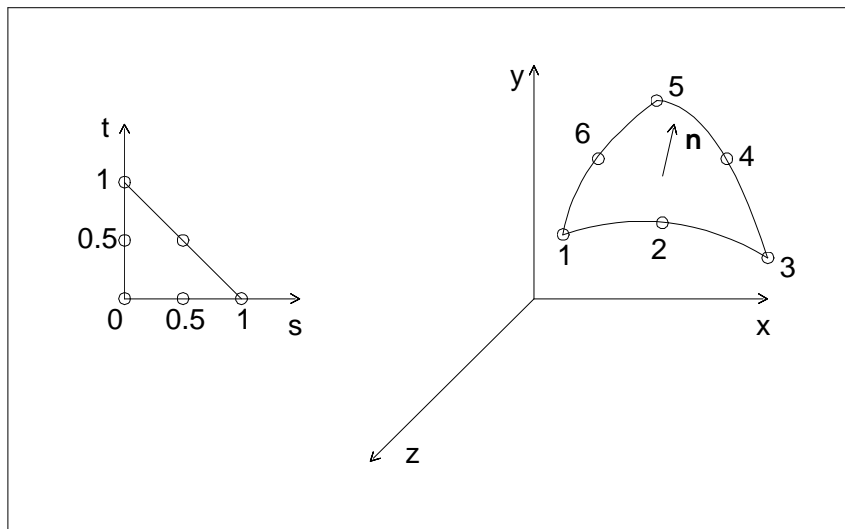


Figura 4.3

Para a face de oito nós, representada na figura 4.4, a função de interpolação é:

$$\begin{aligned}
 X(s,t) = & X_1 + (-3 X_1 + 4 X_2 - X_3) s + (-3 X_1 - X_7 + 4 X_8) t + \\
 & + (5 X_1 - 4 X_2 - X_3 + 4 X_4 - 3 X_5 + 4 X_6 - X_7 - 4 X_8) s t + \\
 & + 2 (X_1 - 2 X_2 + X_3) s^2 + 2 (X_1 + X_7 - 2 X_8) t^2 \\
 & + 2 (-X_1 + 2 X_2 - X_3 + X_5 - 2 X_6 + X_7) s^2 t + \\
 & + 2 (-X_1 + X_3 - 2 X_4 + X_5 - X_7 + 2 X_8) s t^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

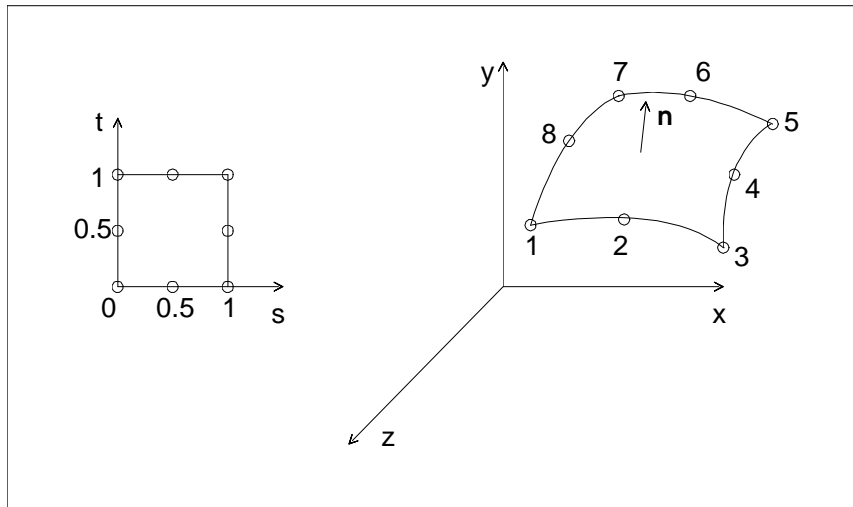


Figura 4.4

A escolha do tipo de face a utilizar é feita apenas com base em critérios geométricos: só é necessário utilizar seis ou oito nós se a geometria da face não puder ser descrita adequadamente com três ou quatro.

Para qualquer uma destas faces, $dS = J ds dt$, em que:

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}, \quad (4.18)$$

e o versor da normal à face é:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Viu-se que, através de (4.4) e (4.7), todos os integrais se reduzem a somatórios de integrais ao longo das arestas.

Para os elementos triangulares de 3 e 6 nós, as expressões a utilizar em (4.6), para descrever as arestas, são:

$$\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-r \\ r \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1-r \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Para os elementos rectangulares de 4 e 8 nós, as expressões a utilizar em (4.6) são:

$$\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-r \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1-r \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Para qualquer destas faces, todas as parcelas do somatório em (4.7) serão nulas, excepto a da segunda aresta. Portanto, todos os integrais ficarão reduzidos a integrais ao longo de uma única aresta por face.

4.7 Definição das acções

Na implementação efectuada, as acções consideradas foram apenas tracções nas faces e forças de massa nos elementos. Para ambos os tipos de acções admitem-se apenas expressões polinomiais.

Para facilitar a introdução de dados e os cálculos, as tracções nas faces são consideradas como a soma de uma tracção com uma pressão, funções das coordenadas globais:

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} t_x(x,y,z) \\ t_y(x,y,z) \\ t_z(x,y,z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} t_n(x,y,z). \quad (4.22)$$

As componentes do versor da normal à face, em cada ponto desta, são calculadas pelo programa. O utilizador só tem de fornecer as expressões de t_x , t_y , t_z e t_n , para as faces em que não sejam todas nulas.

As forças de massa em cada elemento finito serão indicadas como um vector de polinómios:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Capítulo 5

Apresentação dos resultados

5.1 Introdução

Atendendo a que se discretiza directamente o campo de tensões no interior dos elementos finitos, é extremamente fácil fazer uma rotina que calcule os valores das componentes do tensor das tensões, dados o número do elemento e as coordenadas do ponto. Uma vez que se discretizam, também, os deslocamentos nas faces, é igualmente fácil fazer uma rotina que calcule as componentes do vector dos deslocamentos, dados o número da face e os valores dos parâmetros (s,t). É, também, muito fácil fazer uma rotina que calcule a energia de deformação de cada elemento a qual, para o modelo descrito anteriormente, será calculada através de:

$$U = \int_V \sigma^T f \sigma dV. \quad (5.1)$$

No entanto, para a interpretação dos resultados ser fácil é necessário apresentar os resultados graficamente, de uma forma adaptada à natureza tridimensional do problema.

Optou-se por apresentar os resultados em projecção axonométrica, pois é um modo de representação bastante flexível e de implementação não muito complicada.

Recorreu-se a uma biblioteca de rotinas gráficas desenvolvida por Almeida [5], que inclui rotinas para desenhar a projecção axonométrica de faces.

Em seguida descreve-se, de uma forma mais pormenorizada, o tipo de desenhos efectuados e, de uma forma sucinta, o modo como as rotinas da biblioteca efectuem o desenho da projecção axonométrica das faces.

5.2 Representação gráfica dos resultados

Os resultados obtidos através do modelo de elementos finitos serão representados através de projecções axonométricas do objecto analisado.

Considerou-se que deveria existir a possibilidade de efectuar cortes nos objectos. Indicando um ou mais planos de corte, é possível observar o interior do modelo.

As funções de forma utilizadas não são de grau muito elevado. Consequentemente, o número de elementos finitos não será, geralmente, muito pequeno. Por estas razões, a visualização dos resultados nas faces dos elementos parece ser suficiente. Assim, os cortes serão efectuados removendo alguns elementos finitos e mostrando as faces dos que estavam no interior do modelo, não havendo necessidade de observar o interior dos elementos.

Considerou-se que seria conveniente poder observar, em simultâneo, as seis componentes do tensor das tensões e, separadamente, a deformada.

O valor da tensão em cada ponto será representado pela cor nesse ponto. Para escolher a escala de cores, pode-se estimar o valor máximo e mínimo de cada componente de σ a partir dos valores nos vértices, a meio das arestas e no centro de massa dos elementos.

O modo como o utilizador pretende observar o objecto será indicado através das coordenadas do ponto de vista, considerando que o observador olha do ponto de vista para a origem dos eixos coordenados.

Além do ponto de vista, basta fornecer às rotinas gráficas as faces que, após os cortes, são exteriores ao objecto. Quando se pretende a representação do campo de tensões, indicam-se as coordenadas dos pontos da face, na configuração indeformada, a expressão das tensões e a escala de cores. Quando se pretende a deformada, indicam-se as coordenadas dos pontos da face, na configuração deformada, após ter escalado convenientemente os deslocamentos.

5.3 Projecção Axonométrica

A projecção axonométrica é efectuada por rotinas de uma biblioteca [5]. Faz-se aqui uma breve descrição do modo de funcionamento dessas rotinas.

O modo como o utilizador pretende observar o objecto é indicado através das coordenadas do ponto de vista. Admite-se que o observador olha do ponto de vista para a origem dos eixos coordenados, conforme indicado na figura 5.1.

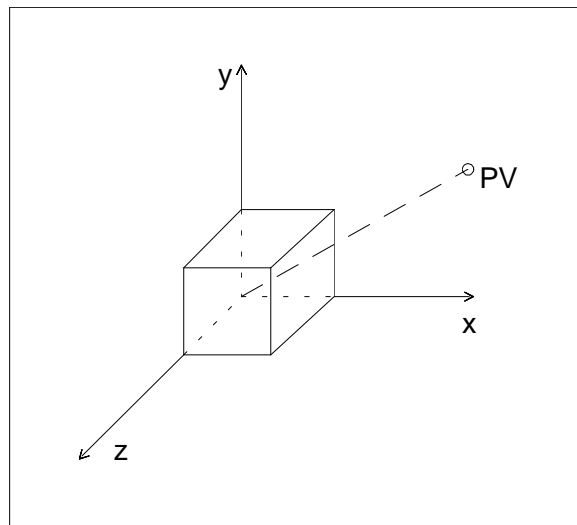


Figura 5.1

Para efectuar a projecção axonométrica, bastará rodar o objecto em torno do eixos y e x, de modo a que o ponto de vista fique sobre o eixo z e, de seguida, projectar ortogonalmente o objecto sobre o plano xy. Esta última projecção consiste apenas em tomar as coordenadas x e y dos pontos do objecto rodado.

As faces curvas serão divididas pelo programa em subfaces triangulares planas. Trabalhando apenas com faces e subfaces planas, aquelas que, após as rotações, não tiverem $n_z > 0$ não serão visíveis. As restantes serão ordenadas pelo programa e desenhadas de acordo com essa ordem, de modo a cobrir as partes invisíveis com partes visíveis.

Para efeitos da representação das tensões, as faces serão divididas em parcelas de cor constante.

Capítulo 6

Programas de cálculo automático

6.1 Introdução

Neste capítulo, descrevem-se os programas de cálculo automático elaborados para testar o modelo de elementos finitos apresentado no capítulo 4.

Os programas foram elaborados para testar o comportamento de uma nova formulação. Portanto, a principal preocupação foi a flexibilidade na alteração e na evolução dos programas. Assim, as funções de forma e as acções não estão pré-programadas, mas são fornecidas ao programa através de ficheiros contendo polinómios ou matrizes de polinómios. As derivadas dessas funções não são fornecidas e as integrações não são realizadas numericamente; existe um conjunto de rotinas para realizar todas essas operações com polinómios ou matrizes de polinómios genéricos.

Os programas elaborados e as rotinas utilizadas foram escritos na linguagem de programação C [8]. Esta linguagem foi escolhida devido à facilidade de trabalhar com variáveis estruturadas e com dimensionamento dinâmico de variáveis, recorrendo a apontadores.

Os procedimentos a efectuar na análise de um problema através de elementos finitos são usualmente divididos em pré-processamento, processamento e pós-processamento. Por sua vez, o processamento consiste na formação do sistema governativo e na sua resolução. A descrição que é efectuada de seguida segue esta divisão.

6.2 Pré-processamento

6.2.1 Ficheiros de dados

O pré-processamento consiste na geração de dados e na sua leitura pelo programa que vai formar o sistema governativo.

A definição da estrutura e das acções é feita em dois ficheiros.

No ficheiro base estão incluídas as seguintes informações:

- Nome do ficheiro com a definição dos nós;
- Número de faces;
- Para cada face: número de nós, lista de nós, nome do ficheiro com as funções de forma de deslocamento;
- Número de elementos;
- Código indicando a existência de semelhanças entre os elementos: 2 se as funções de forma de tensão são as mesmas, 1 se os elementos são todos iguais, 0 nas restantes situações;
- Para cada elemento: módulo de elasticidade (E), coeficiente de Poisson (ν), nome do ficheiro com as funções de forma de tensão, nome do ficheiro com as forças de massa, número de faces, lista das faces (com valores negativos para as faces cuja normal aponta para o interior dos elementos);
- Para cada face carregada: número da face, nome do ficheiro com as tracções, nome do ficheiro com a pressão;
- Para terminar: 0 0 0.

O ficheiro com a definição dos nós deve incluir as seguintes informações:

- Número de nós e número de coordenadas dos nós (este sempre igual a 3);
- Para cada nó: coordenadas x, y e z.

6.2.2 Geração das malhas de elementos finitos

A parte mais importante do pré-processamento é a geração dos dados necessários para descrever a malha de elementos finitos utilizada para modelar a estrutura em análise.

As malhas de elementos finitos para problemas envolvendo sólidos tridimensionais são as mais complicadas de gerar. Com efeito, ao refinar a

malha, o número de elementos finitos cresce muito rapidamente e a complexidade topológica da malha torna-se muito grande, a menos que o objecto a modelar e os elementos finitos tenham geometrias muito simples. Devido à presença de faces e arestas interiores ao objecto, é difícil obter uma representação gráfica da malha que seja fácil de visualizar. Portanto, para a utilização prática de programas de elementos finitos sólidos tridimensionais, é necessário dispôr de bons programas de geração de malhas. Diversos autores têm feito contribuições neste domínio [6, 13, 14, 23].

Neste trabalho, a importância dada à geração de malhas foi bastante reduzida. Nos testes efectuados em que a geometria era complexa o número de elementos finitos não era elevado, o que possibilitou a geração manual dos dados, recorrendo a uma folha de cálculo, se necessário. Foram elaborados alguns programas para gerar malhas com um número elevado de elementos, mas apenas para casos particulares.

Foi elaborado um programa para a geração dos dados correspondentes a malhas hexaédricas de elementos hexaédricos com faces de quatro nós. Dado que as faces não pertencentes a um elemento não são processadas e que as que não têm parâmetros de deslocamento não levam à existência de equações no sistema governativo, este programa é suficiente para, com um pequeno trabalho adicional, gerar malhas correspondentes a objectos que possam ser divididos em alguns subdomínios hexaédricos.

6.3 Formação do sistema governativo

6.3.1 Rotinas básicas

Considera-se que todas as funções envolvidas nos cálculos para a formação do sistema governativo são polinomiais. Na maior parte dos casos, estarão agrupadas em matrizes de polinómios com um dado número de variáveis. Assim, e com base nas rotinas desenvolvidas por Almeida [2], para duas variáveis, programou-se um conjunto de rotinas para efectuar explicitamente os cálculos envolvidos, que se lista a seguir.

Para polinómios de uma, duas ou três variáveis e para matrizes de polinómios de uma, duas ou três variáveis:

- Adição;

- Subtracção;
- Multiplicação por uma constante, por uma matriz, por um polinómio ou por uma matriz de polinómios;
- Cálculo da derivada numa variável;
- Cálculo da primitiva numa variável.
- Cálculo do valor num ponto;
- Cálculo da norma de um polinómio ($\sum_i |a_i|$).

E ainda:

- Multiplicação da transposta de uma matriz ou de uma matriz de polinómios por uma matriz ou uma matriz de polinómios;
- Passagem de um polinómio ou de uma matriz de polinómios de três variáveis para duas variáveis, dado $x(s,t)$, $y(s,t)$ e $z(s,t)$;
- Passagem de um polinómio ou de uma matriz de polinómios de duas variáveis para uma variável, dado $s(r)$ e $t(r)$;
- Cálculo do integral entre 0 e 1 de um polinómio a uma variável.

6.3.2 Integrações

Considerou-se que todas as funções envolvidas nos cálculos eram polinomiais. Contudo, em alguns dos integrais de superfície, surge a função J , definida por (4.18), ou o vector \mathbf{n} , definido por (4.19), que não são polinomiais.

Apesar de J e \mathbf{n} não serem polinomiais, em quase todos os integrais de superfície que é necessário calcular surge o produto de J por uma componente de \mathbf{n} . O resultado desse produto tem uma expressão polinomial, que pode ser obtida directamente.

Os casos em que J está isolado são originados apenas por tracções aplicadas em faces - primeira parcela de (4.22) em (3.13). Para contornar o problema podem-se utilizar as funções de interpolação definidas para cada face para obter uma aproximação polinomial de J . Só é introduzida uma aproximação se J não for constante. Se a face for de três nós ou de quatro nós com os lados paralelos, J é constante. Nos restantes casos, o erro da aproximação não parece significativo.

6.3.3 Eficiência computacional

A filosofia de programação seguida torna o desenvolvimento e a alteração dos programas bastante fácil, mas conduz a programas pouco eficientes.

O número de operações envolvidas na formação do sistema governativo é muito elevado. Em problemas envolvendo sólidos tridimensionais, isto é agravado pelo facto de o número de funções de forma ser bastante grande, o que leva a que as matrizes de polinómios necessárias para calcular F_i ocupem um espaço muito elevado na memória do computador, podendo levá-lo a utilizar a memória virtual, com a conseqüente perda de velocidade de processamento.

Para diminuir as necessidades de memória e o número de operações, aproveitou-se a simetria das matrizes envolvidas nos cálculos.

Se as funções de forma de tensão forem as mesmas em todos os elementos, $P_x(S^T f S)$ será igual para todos os elementos finitos e, portanto, só será calculado uma vez.

Apesar destes procedimentos, verifica-se que quando o sistema governativo não for de grande dimensão, a formação do sistema demorará mais tempo do que a sua resolução.

Se os elementos finitos forem todos iguais e se se utilizar, para as funções de forma de tensão em cada elemento, um referencial com origem no centro de massa do elemento, as matrizes F_i serão todas iguais. A translação da origem do referencial não introduz grandes complicações e o cálculo da posição do centro de massa é muito simples. Portanto, para as funções em S e em σ_0 , o programa utilizará o referencial local. Assim, no caso de os elementos finitos serem todos iguais, F_i só será calculada para um elemento.

6.4 Resolução do sistema governativo

O sistema governativo (4.12) é um sistema de equações lineares simétrico, normalmente de grandes dimensões, altamente esparso e com equações linearmente dependentes.

Para o resolver, utiliza-se um programa apropriado para o seu armazenamento e resolução, baseado num algoritmo apresentado por Pissanetzky [15] e adaptado para aceitar sistemas com equações dependentes.

O programa arbitra um valor nulo para as variáveis indeterminadas devidas às dependências. Estas variáveis são sempre parâmetros de deslocamento, mas um determinado parâmetro de deslocamento poderá ser considerado indeterminado ou não conforme a posição das equações no sistema.

Devido aos erros numéricos na formação do sistema e na sua resolução, nem sempre é fácil decidir se uma equação é dependente ou não. Para diminuir esta dificuldade, a matriz do sistema governativo é escalada, de modo que os elementos na diagonal principal de \mathbf{F} tenham valor unitário e que o maior valor em cada linha de \mathbf{D} seja também unitário. Isto é feito através de dois programas: um que escala o sistema e outro que corrige a solução calculada.

6.5 Pós-processamento

São utilizados programas diferentes para calcular a energia de deformação associada à solução, para representar as componentes do tensor das tensões e para traçar a deformada.

Existem programas diferentes para efectuar os desenhos, conforme se assuma que as faces são planas ou curvas, dado que o volume de cálculos envolvido é muito diferente num caso e noutro.

6.6 Programas de cálculo automático

Para analisar um problema através dos programas desenvolvidos neste trabalho, tendo elaborado os ficheiros de dados necessários, é necessário executar sequencialmente os seguintes programas:

- forma - calcula e grava num ficheiro o sistema governativo;
- escala - escala a matriz do sistema, de acordo com o indicado em 6.4;
- solve - resolve o sistema governativo e grava em ficheiro a solução;
- desesc - recupera a solução do sistema não escalado;
- mostra_e - calcula a energia de deformação de cada elemento finito;

- mostra_t1 ou mostra_t2 - desenha as componentes de tensão, admitindo que as faces são planas ou não;
- mostra_d - desenha a deformada.

Ao executar cada um destes programas deve-se indicar o nome do ficheiro de dados base.

Capítulo 7

Exemplos de aplicação

7.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados e discutidos alguns exemplos de aplicação do modelo de elementos finitos desenvolvido neste trabalho.

Para começar, analisa-se uma consola cúbica sujeita a uma pressão uniforme aplicada na sua face superior. Foram testadas, para várias malhas, diversas combinações de funções de forma de tensão e de deslocamento, de modo a analisar o efeito da relação entre os graus respectivos sobre a convergência das soluções. Os valores obtidos para a energia de deformação nos diversos testes foram comparados entre si e com um valor obtido a partir de uma solução cinematicamente admissível.

Em seguida, analisou-se a mesma consola, mas sujeita a uma força de massa uniforme, correspondente ao seu peso próprio.

No terceiro exemplo, analisou-se uma consola de secção variável, sujeita a uma pressão uniforme aplicada na sua face superior.

A seguir, analisou-se um prisma sujeito a uma pressão uniforme em parte das suas faces superior e inferior.

Finalmente, analisou-se uma esfera oca sujeita a uma sucção no seu interior. A solução analítica exacta deste problema é conhecida, o que permite a comparação com a solução aproximada.

7.2 Consola cúbica carregada na face superior

Neste exemplo, analisa-se uma consola cúbica sujeita a uma pressão uniforme aplicada na sua face superior. Atendendo à simetria, discretiza-se apenas a metade indicada na figura 7.1.

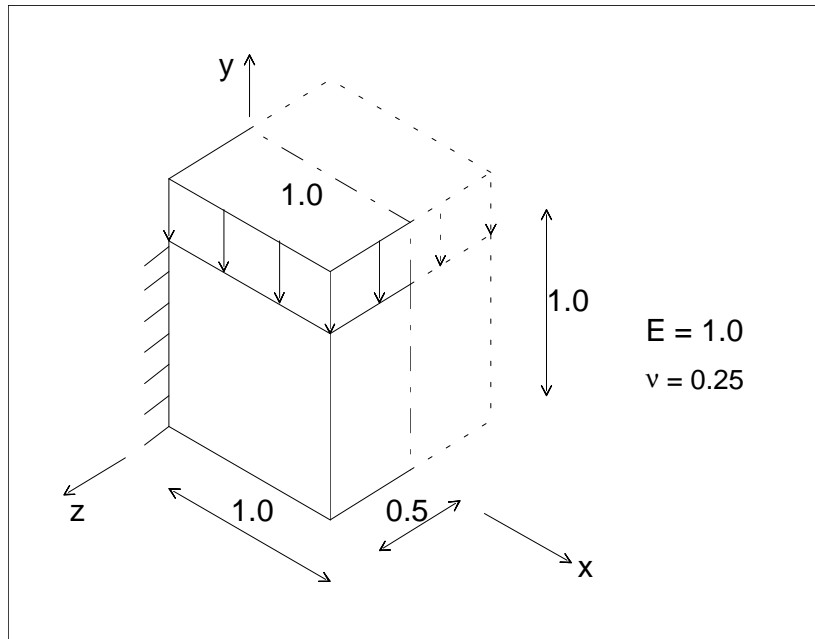


Figura 7.1

São utilizadas a malha com um elemento e as malhas regulares com 4, 32, 108 e 256 elementos cúbicos representadas na figura 7.2 e a malha com 20 elementos tetraédricos representada na figura 7.3.

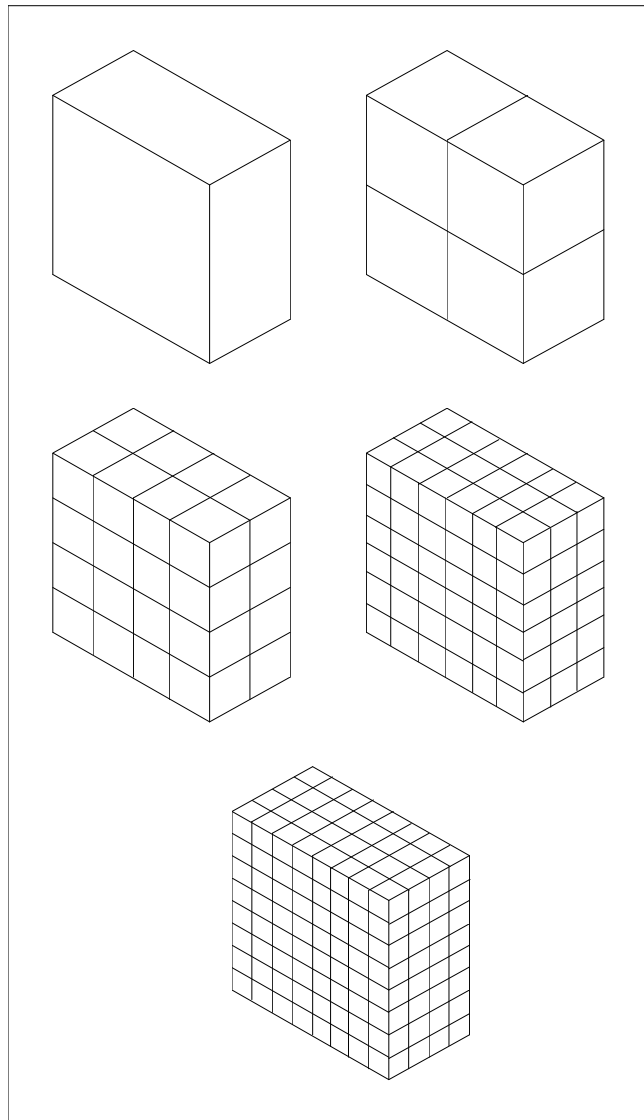


Figura 7.2

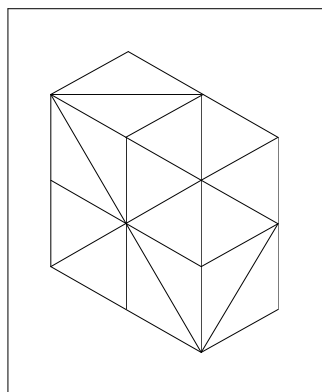


Figura 7.3

Na tabela 7.1 lista-se, para as malhas de elementos cúbicos, a energia associada às várias combinações testadas. Na tabela 7.2 faz-se o mesmo para a malha de elementos tetraédricos.

nº de elementos	S	v	nº de parâmetros de tensão	nº de parâmetros de deslocamento	nº total de parâmetros	U	
1	S_{333}^{90}	v_{33}^{30}	90	140	230	0.517789	
4	S_{111}^{21}	v_{00}^3	84	50	134	0.604167	
	S_{222}^{48}	v_{22}^{18}	192	300	492	0.601389	
	S_{333}^{90}	v_{33}^{30}	360	500	860	0.501930	
32	S_{111}^{21}	v_{00}^3	672	344	1016	0.515485	
		v_{00}^3	1536	344	1880	0.121343	
			v_{11}^9	1536	1032	2568	0.514170
	S_{222}^{48}	v_{22}^{18}	1536	2064	3600	0.516904	
		v_{00}^3	2880	344	3224	0.119290	
			v_{11}^9	2880	1032	3912	0.472851
			v_{22}^{18}	2880	2064	4944	0.484473
	S_{333}^{90}	v_{33}^{30}	2880	3440	6320	0.484859	
		v_{00}^3	2268	1098	3366	0.496670	
			v_{22}^{18}	5184	6588	11772	0.497532
v_{33}^{30}			9720	10980	20700	0.480631	
108	S_{111}^{21}	v_{00}^3	2268	1098	3366	0.496670	
	S_{222}^{48}	v_{22}^{18}	5184	6588	11772	0.497532	
	S_{333}^{90}	v_{33}^{30}	9720	10980	20700	0.480631	
256	S_{111}^{21}	v_{00}^3	5376	2519	7895	0.489101	

Tabela 7.1 - Energia associada às soluções - elementos cúbicos.

nº de elementos	S	v	nº de parâmetros de tensão	nº de parâmetros de deslocamento	nº total de parâmetros	U
20	S_{111}^{21}	v_{11}^9	420	444	864	0.527618
	S_{222}^{48}	v_{22}^{18}	960	888	1848	0.490253
	S_{333}^{90}	v_{11}^9	1800	444	2244	0.434856
		v_{33}^{30}	1800	1480	3280	0.482436

Tabela 7.2 - Energia associada às soluções - elementos tetraédricos.

Utilizando funções de forma de tensão constantes, não é possível obter uma solução para este problema com nenhuma das malhas consideradas.

Utilizando funções de tensão e de deslocamento lineares, não é possível obter uma solução com nenhuma das malhas de elementos cúbicos consideradas, mas é possível obter uma solução, equilibrada, com a malha de elementos tetraédricos.

Com um elemento apenas, só é possível obter uma solução equilibrada com funções do terceiro grau.

De todos os casos apresentados nas tabelas 7.1 e 7.2, só aqueles em que o grau das funções de forma de deslocamento é igual ao das funções de forma de tensão é que correspondem a soluções estaticamente admissíveis. De entre estas, nas obtidas com malhas de elementos cúbicos, o número de parâmetros de deslocamento, igual ao número de equações de equilíbrio, é sempre superior ao número de parâmetros de tensão. Para existir solução, é necessário que o número de equações linearmente dependentes seja maior ou igual à diferença entre o número de parâmetros de deslocamento e o número de parâmetros de tensão.

A razão entre o número de parâmetros de tensão e o número de parâmetros de deslocamento é tanto mais favorável quanto maior for o número de elementos ou o grau das funções de forma. Para a malha de elementos tetraédricos, a partir do primeiro grau, o número de equações de equilíbrio é inferior ao número de parâmetros de tensão. Portanto, é natural que seja mais

fácil obter uma solução equilibrada com elementos tetraédricos. Além disso, o número de dependências é, proporcionalmente, menor.

A partir dos valores das tabelas 7.1 e 7.2 correspondentes a soluções estaticamente admissíveis, traçaram-se os gráficos das figuras 7.4 e 7.5.

Na figura 7.4, mostra-se a variação da energia de deformação com o número de elementos, para elementos cúbicos e para dois conjuntos de funções de forma.

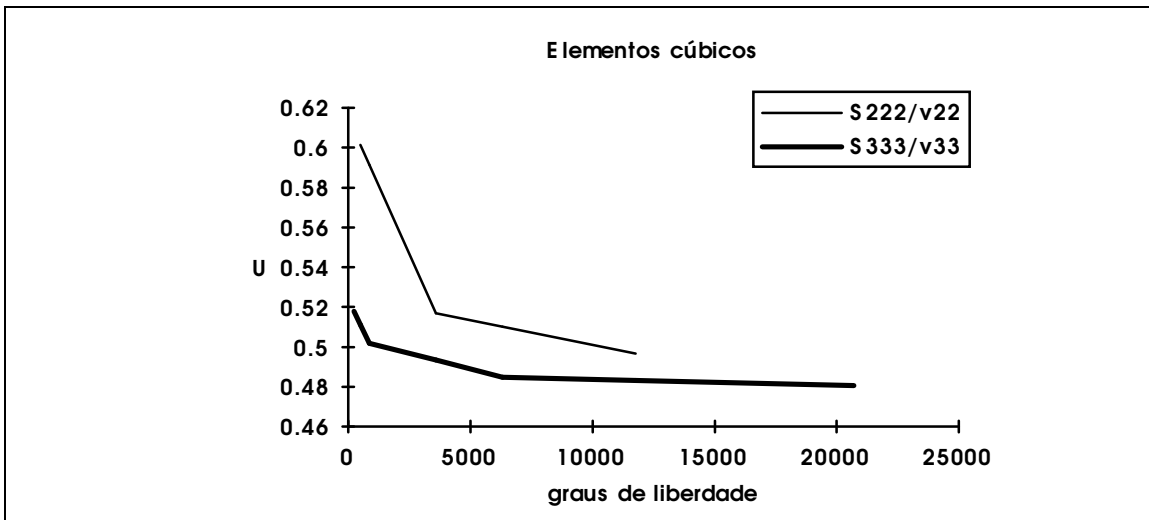


Figura 7.4 - Variação da energia com o número de elementos

Pode-se verificar que é vantajoso, do ponto de vista da convergência, utilizar funções de forma de grau elevado.

Na figura 7.5, mostra-se a variação da energia de deformação com o grau das funções de forma, para diversas malhas.

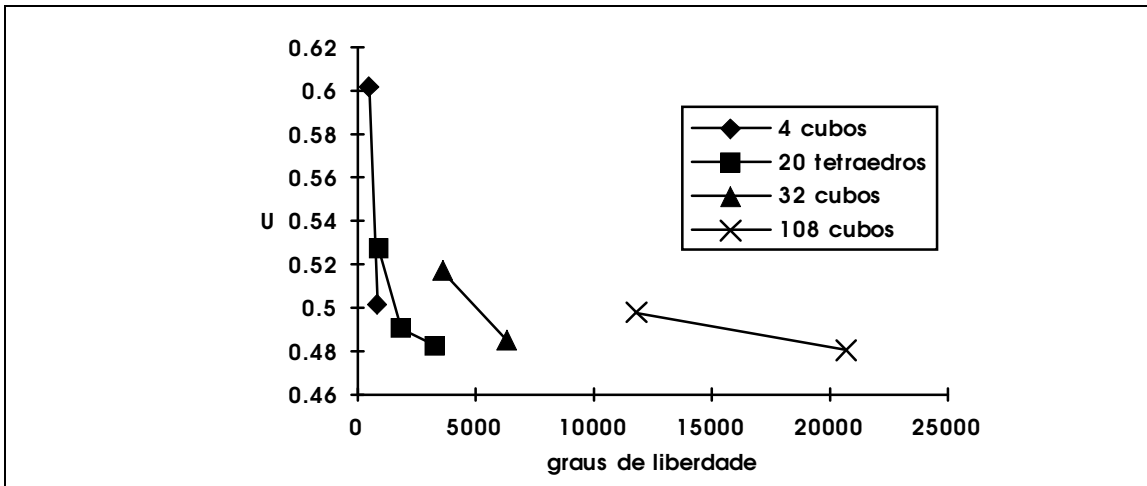


Figura 7.5 - Variação da energia com o grau das funções de forma

Pode-se verificar que, do ponto de vista da convergência em energia, a utilização de elemento tetraédricos é bastante vantajosa.

Utilizando o programa ABAQUS [1], obteve-se uma solução cinematicamente admissível para este problema, correspondente a uma malha uniforme com 256 elementos hexaédricos de 20 nós, num total de 4347 graus de liberdade. Esta solução fornece um minorante para o valor da energia de deformação: 0.472. Com base neste valor, é possível obter um majorante do erro, em energia, associado a cada uma das soluções estaticamente admissíveis obtidas anteriormente. Nas figuras 7.6 e 7.7, apresentam-se os gráficos do majorante do erro correspondentes aos valores apresentados nas figuras 7.4 e 7.5, utilizando uma escala bilogarítmica.

Na figura 7.6, mostra-se a variação do majorante do erro em energia com o número de elementos, para elementos cúbicos e para dois conjuntos de funções de forma.

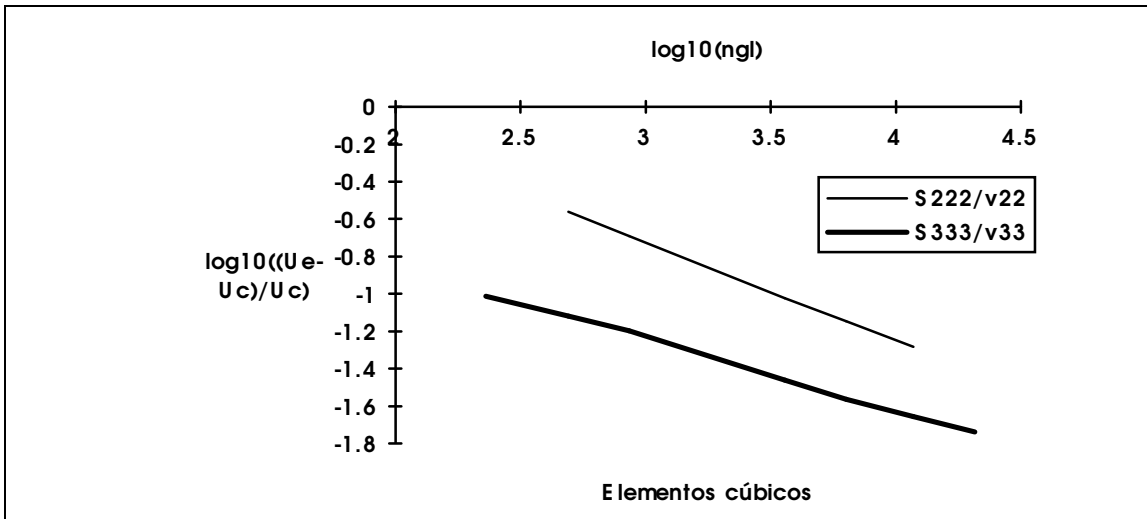


Figura 7.6 - Variação do erro com o número de elementos

Na figura 7.7, mostra-se a variação do erro em energia de deformação com o grau das funções de forma, para diversas malhas.

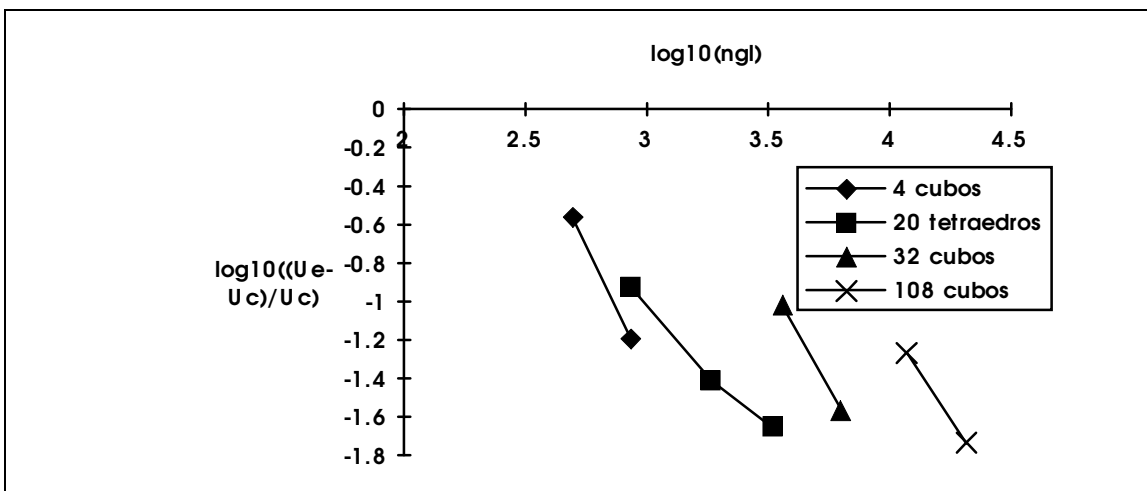


Figura 7.7 - Variação do erro com o grau das funções de forma

Na figura 7.8, apresentam-se as componentes do campo de tensões, para a malha com 32 elementos cúbicos e funções de forma cúbicas, enquanto na figura 7.9 se apresenta a correspondente deformada. Em ambos os casos, utilizou-se um plano de corte, de modo a observar o interior da malha.

Na figura 7.10, apresentam-se as componentes do campo de tensões, para a malha com 20 elementos tetraédricos e funções de forma quadráticas. Na figura 7.11, apresenta-se a deformada correspondente.