



**TÉCNICO**  
LISBOA

**DECivil**

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS I**

**INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE CROSS**

Orlando J. B. A. Pereira

17 de Dezembro de 2019



## **1. Introdução**

O método iterativo introduzido por Hardy Cross (Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments, American Society of Civil Engineers Transactions, Vol 96, Paper no 1793, pp 1-156, 1932) pode ser aplicado na análise elástica linear de estruturas reticuladas sem translações independentes, igualmente designadas por estruturas contínuas de nós fixos.

Na análise elástica linear de estruturas com rotações e translações independentes, também designadas por estruturas com nós deslocáveis, o Método de Cross pode ser utilizado para determinar as soluções complementar e particular numa generalização do Método dos Deslocamentos, em que as incógnitas na equação resolvente são apenas as translações independentes, designada por Método de Cross com fases deslocáveis.

No âmbito desta disciplina, será apenas considerado o Método de Cross sem fases deslocáveis.

Como curiosidade, aproveitam-se os conceitos de distribuição e transmissão de momentos para apresentar um método directo de distribuição de momentos, leccionado nos anos 80, na disciplina de Métodos Aproximados em Engenharia de Estruturas, da Licenciatura em Engenharia Civil.

## 2. Relação entre a solução iterativa da equação do Método dos Deslocamentos e o Método de Cross

Considere-se a viga contínua, com módulo de elasticidade e secção transversal uniformes, representada na Figura 2.1.

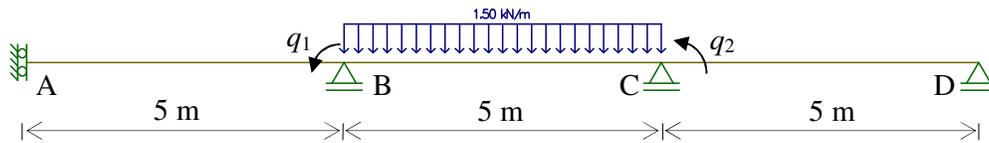


Figura 2.1 - Exemplo

Para os deslocamentos independentes indicados na mesma figura, a equação do Método dos Deslocamentos é:

$$\mathbf{Kq} + \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q} \Leftrightarrow EI \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,125 \\ -3,125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow EI \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,125 \\ 3,125 \end{bmatrix}.$$

Utilizando um método directo para resolver o sistema de equações, obtém-se a solução exacta para os deslocamentos independentes:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -4,53629 \\ 3,52823 \end{bmatrix} \text{ (rad)}.$$

A deformada e o diagrama de momento flector correspondentes a esta solução estão representados na Figura 2.2.

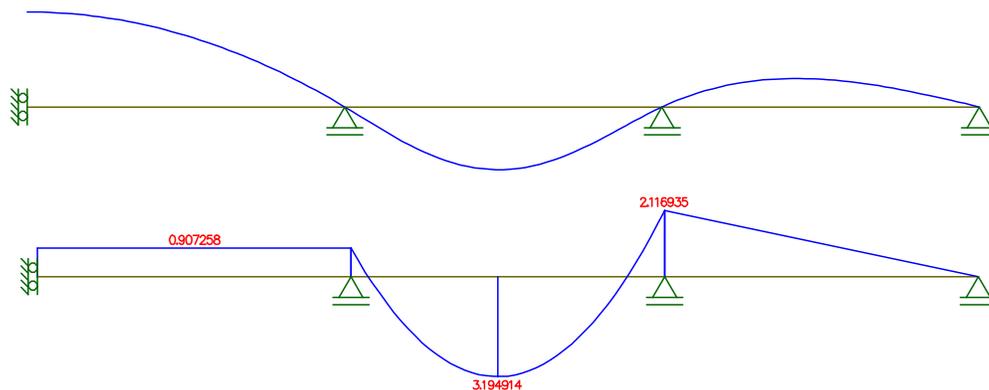


Figura 2.2 – Solução exacta

Em vez dum método directo, poderia ter-se utilizado um método iterativo para obter uma solução aproximada para o sistema de equações. No Método de Gauss-Seidel, leccionado na disciplina de Matemática Computacional, a nova aproximação para a incógnita  $q_i$  é calculada utilizando, na resolução da equação  $i$  do sistema, a mais recente aproximação para cada uma das outras incógnitas. Utilizando este método, as primeiras aproximações são as indicadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1

	aproximação								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$EI q_1$	0	-3,125	-3,125	-4,375	-4,375	-4,51786	-4,51786	-4,53418	-4,53418
$EI q_2$	0	0	3,125	3,125	3,48214	3,48214	3,52296	3,52296	3,52762

A aproximação 0, representada na Figura 2.3, é igual à solução particular do Método dos Deslocamentos, isto é, a solução que se obtém impondo valores nulos para os deslocamentos independentes, pelo que, para a estrutura e carregamento da Figura 2.1, não existe equilíbrio de momentos nos nós B e C.

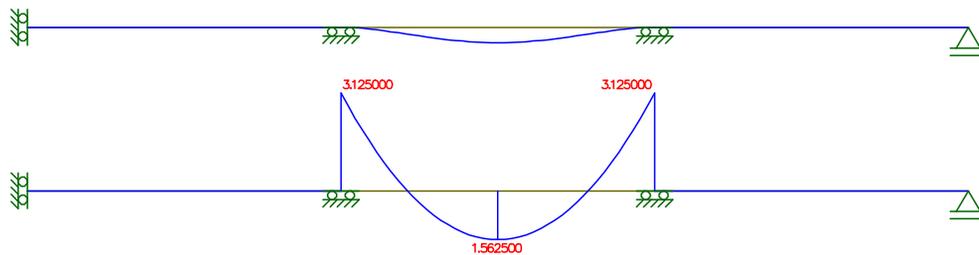


Figura 2.3 – Aproximação 0

Enquanto a solução exacta, representada na Figura 2.2, é a que se obtém, a partir da aproximação 0, libertando simultaneamente todos os deslocamentos independentes, o que é equivalente a impor simultaneamente o equilíbrio de momentos nos nós B e C, a aproximação 1, representada na Figura 2.4, obtém-se da aproximação 0 libertando apenas  $q_1$ , o que impõe apenas o equilíbrio de momentos no nó B.

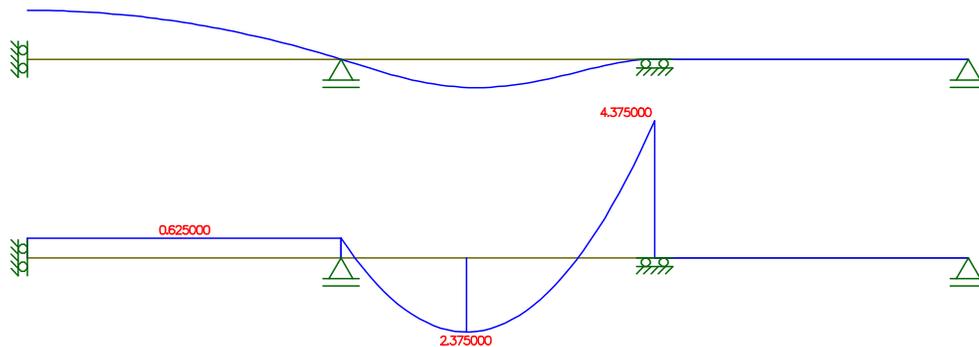


Figura 2.4 – Aproximação 1

A aproximação 2, representada na Figura 2.5, obtém-se impondo que  $q_1$  se mantém igual ao da aproximação 1 e libertando apenas  $q_2$ . Dado que foi utilizado o programa Ftool (<http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool>), a imposição de uma rotação não nula é simbolizada pelo quadrado representado na figura. O desequilíbrio de momentos no nó C deixa de existir mas, no nó B, surge um novo desequilíbrio.

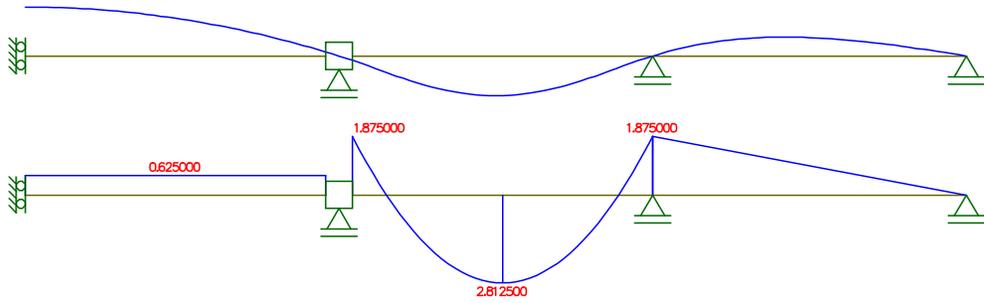


Figura 2.5 – Aproximação 2

A aproximação 3, representada na Figura 2.6, obtém-se impondo que  $q_2$  se mantém igual ao da aproximação 2 e libertando apenas  $q_1$ .

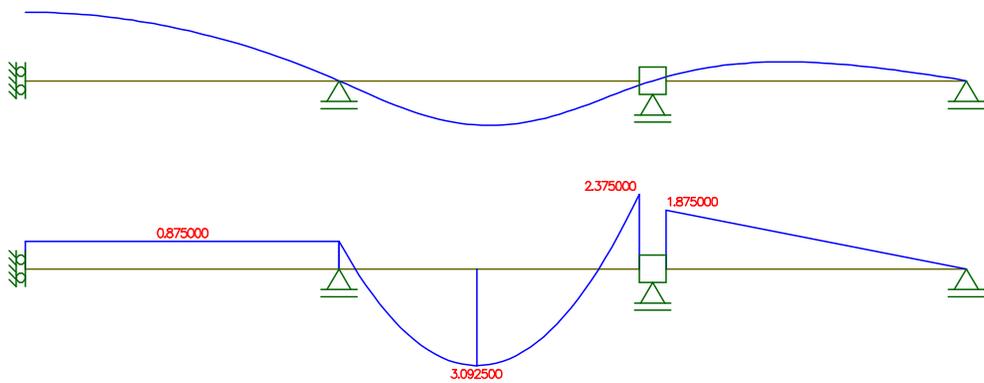


Figura 2.6 – Aproximação 3

Observando os diagramas de momento flector nas Figuras 2.3 a 2.6, verifica-se que os novos desequilíbrios vão diminuindo, pelo que, intuitivamente, a solução irá convergir para a solução exacta.

Observem-se agora as evoluções do diagrama de momento flector, da aproximação 0 para a 1, na Figura 2.7, e da aproximação 2 para a 3, na figura 2.8.

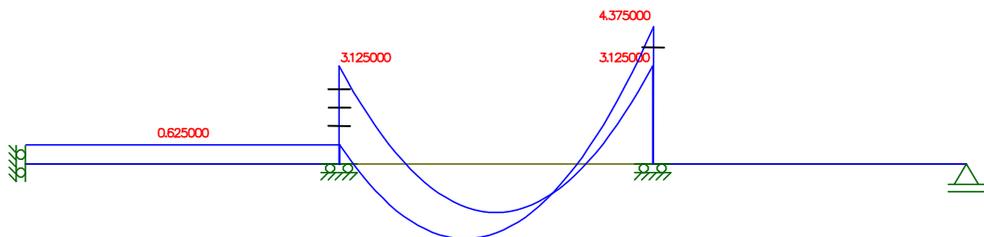


Figura 2.7 – Aproximações 0 e 1

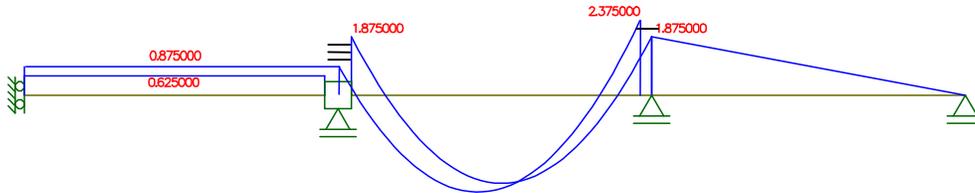


Figura 2.8 – Aproximações 2 e 3

Verifica-se que, ao libertar o nó B, os desequilíbrios são absorvidos, por cada uma das barras, sempre na mesma proporção, determinada pela rigidez à rotação de cada uma delas, quando  $q_1 = 1$  e  $q_2 = 0$ , como representado na Figura 2.9, na qual os momentos foram obtidos a partir das tabelas do Método dos Deslocamentos.

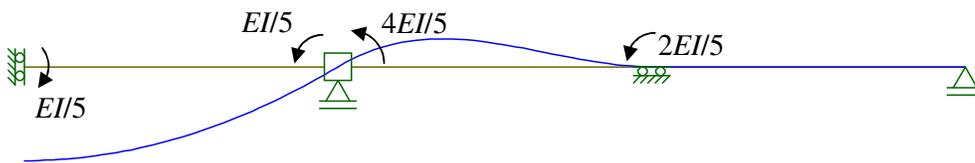


Figura 2.9 – Deformada correspondente a  $q_1 = 1$  e  $q_2 = 0$

Neste caso:

$$\frac{1}{5} = \frac{\frac{EI}{5}}{\frac{EI}{5} + \frac{4EI}{5}},$$

para a barra AB, e

$$\frac{4}{5} = \frac{\frac{4EI}{5}}{\frac{EI}{5} + \frac{4EI}{5}},$$

para a barra BC.

Verifica-se, também, que o novo desequilíbrio que surge no nó C é sempre metade da parcela do desequilíbrio eliminada pela barra BC ao libertar o nó B, o que corresponde à proporção entre momentos na barra BC:

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{2EI}{L}}{\frac{4EI}{L}}.$$

Sendo estas proporções constantes, então as sucessivas correcções de desequilíbrio podem ser calculadas a partir dos desequilíbrios, sem calcular explicitamente as rotações independentes nem os momentos flectores em cada iteração, utilizando o método designado por Método de Cross.

O momento flector e, se necessário, as rotações independentes poderão ser calculados após a última iteração.

### 3. Método de Cross

No Método de Cross, o sinal do momento numa secção extrema duma barra não depende da orientação da barra, utilizando-se habitualmente o sentido anti-horário como positivo para os momentos em todas as secções e para as rotações em todos os nós.

Considere-se um nó sem translações independentes, ou com estas impostas, ao qual estão ligadas barras cuja outra extremidade não tem deslocamentos independentes que não estejam impostos, como exemplificado na Figura 3.1.

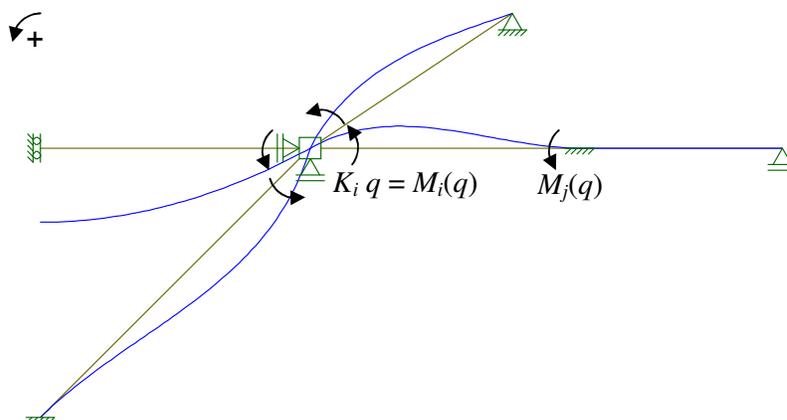


Figura 3.1

Admitindo que o comportamento é elástico linear, o momento no nó, associado a uma rotação desse nó,  $q$ , pode ser calculado adicionando a contribuição de cada barra, obtida duma tabela do Método dos Deslocamentos:

$$\sum_n (K_n q).$$

A relação entre o momento numa secção  $i$  junto ao nó e o momento no nó não depende do valor da rotação:

$$\frac{K_i q}{\sum_n (K_n q)} = \frac{K_i}{\sum_n K_n} = r_i,$$

designando-se  $r_i$  por factor de rotação da secção.

A mesma tabela permite determinar o momento na secção na outra extremidade da barra. A relação entre esses dois momentos também não depende do valor da rotação:

$$\frac{M_j(q)}{M_i(q)} = t_{ij},$$

designando-se  $t_{ij}$  por factor de transmissão da secção  $i$  para a secção  $j$ .

O momento inicial, ou momento de encastramento perfeito, em cada secção  $i$ ,  $M_{0i}$ , é igual ao momento nessa secção quando se impõem valores nulos para todas as rotações independentes, ou seja, é igual ao momento nessa secção na solução particular do Método dos Deslocamentos, sendo determinado utilizando as mesmas tabelas que seriam utilizadas para essa solução. Quando, no carregamento, existir um momento aplicado directamente segundo uma rotação independente, adiciona-se a esse nó um desequilíbrio inicial de sinal oposto ao do momento aplicado.

O Método de Cross pode ser aplicado executando os seguintes passos:

1. Numeração das secções e identificação das rotações independentes;

2. Para cada rotação independente, cálculo de:

- factor de rotação de cada secção  $i$

$$r_i = \frac{K_i}{\sum_n K_n}, \text{ sendo } K_n \text{ a rigidez à rotação na secção } n;$$

- factor de transmissão para a secção na outra extremidade de cada barra

$$t_{ij} = \frac{M_j}{M_i};$$

3. Cálculo dos momentos de encastramento perfeito e desequilíbrios devidos a momentos aplicados segundo rotações independentes;

4. No nó mais desequilibrado, aplicação de uma correcção igual e de sinal contrário, distribuição da correcção pelas secções e transmissão das correcções distribuídas;

5. Repetição do passo anterior até os momentos desequilibrados serem desprezáveis face aos iniciais;

6. Cálculo do momento flector final em cada secção, adicionando o momento de encastramento, os momentos distribuídos e os transmitidos;

7. Se necessário, cálculo de cada rotação independente, dividindo a soma dos momentos distribuídos numa das secções pela respectiva rigidez à rotação.

Para o exemplo da Figura 2.1, a numeração das secções é a indicada na Figura 3.2.



Figura 3.2 – Numeração das secções

Já se observou que, para  $q_1 = 1$ :  $r_2 = 0,2$ ;  $r_3 = 0,8$  e  $t_{34} = 0,5$ . Tem-se, ainda,  $t_{21} = \frac{-EI}{EI} = -1$ .

Para a rotação  $q_2 = 1$ :

$$r_4 = \frac{K_4}{K_4 + K_5} = \frac{\frac{4EI}{5}}{\frac{4EI}{5} + \frac{3EI}{5}} = 0,571429; \quad r_5 = \frac{\frac{3EI}{5}}{\frac{4EI}{5} + \frac{3EI}{5}} = 0,428571; \quad t_{43} = \frac{\frac{2EI}{L}}{\frac{4EI}{L}} = 0,5; \quad t_{56} = 0.$$

Os momentos de encastramento são obtidos das tabelas utilizadas para a solução particular do Método dos Deslocamentos:

$$M_{03} = \frac{1,5 \cdot 5^2}{12} = 3,125; M_{04} = -\frac{1,5 \cdot 5^2}{12} = -3,125.$$

A execução dos passos 3 a 6 é habitualmente esquematizada da forma ilustrada na Figura 3.3, utilizando um traço horizontal simples para simbolizar o equilíbrio de cada nó e um duplo para indicar a adição dos momentos em cada secção.

	← -1	0,2	0,8	← 0,5 →	0,571429	0,428571	0 →
			3,125		-3,125		
0,625		-0,625	-2,5		-1,25		
			1,25		2,5	1,875	
0,25		-0,25	-1		-0,5		
			0,142857		0,285714	0,214286	
0,028571		-0,028571	-0,114286		-0,057143		
			0,016327		0,032653	0,024490	
0,003265		-0,003265	-0,013061		-0,006531		
			0,001866		0,003732	0,002799	
0,906837		-0,906837	0,908703		-2,116574	2,116574	0

Figura 3.3

Começou-se por equilibrar o nó B ( $3,125 - 0,625 - 2,5 = 0$ ) e equilibrou-se cada nó o mesmo número de vezes que na Tabela 2.1, ficando o nó C em equilíbrio ( $-2,116574 + 2,116574 = 0$ ) e o nó B com um desequilíbrio  $-0,906837 + 0,908703 = 0,001866$  kNm.

Finalmente, a rotação  $q_1$  pode ser calculada ou através de

$$q_1 = \frac{-0,625 - 0,25 - 0,028571 - 0,003265}{\frac{EI}{5}} = \frac{-4,53418}{EI},$$

ou de

$$q_1 = \frac{-2,5 - 1 - 0,114286 - 0,013061}{\frac{4EI}{5}} = \frac{-4,53418}{EI},$$

e  $q_2$  pode ser calculada ou através de

$$q_2 = \frac{2,5 + 0,285714 + 0,032653 + 0,003732}{\frac{4EI}{5}} = \frac{3,52762}{EI},$$

ou de

$$q_2 = \frac{1,875 + 0,214286 + 0,024490 + 0,002799}{\frac{3EI}{5}} = \frac{3,52762}{EI},$$

obtendo-se os mesmos valores da aproximação 8 na Tabela 2.1.

Note-se que, nas aplicações práticas, o Método de Cross é utilizado para obter soluções aproximadas, sem recorrer a meios mais sofisticados do que uma calculadora, pelo que não vale a pena utilizar, nos factores de rotação e cálculos intermédios, muito mais algoritmos significativos do que aqueles que se pretendem para a solução aproximada.

#### 4. Método directo de distribuição de momentos

Se, no exemplo da Figura 3.3, o número de iterações tender para infinito, obter-se-á a solução exacta, o que é representado simbolicamente na Figura 4.1.

	$\leftarrow -1$	0,2	0,8	$\leftarrow 0,5 \rightarrow$	0,571429	0,428571	$0 \rightarrow$
$\sum_{i=1}^{\infty} T_{1i}$	$\sum_{i=1}^{\infty} D_{2i}$	$3,125$		$\sum_{i=1}^{\infty} T_{4i}$			
		$\sum_{i=1}^{\infty} T_{3i}$		$\sum_{i=1}^{\infty} D_{4i}$	$\sum_{i=1}^{\infty} D_{5i}$		
$M_1$	$M_2$	$M_3$		$M_4$	$M_5$		$0$

Figura 4.1

Arbitre-se agora

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} D_{2i} + \sum_{i=1}^{\infty} D_{3i} .$$

Então:

$$\sum_{i=1}^{\infty} D_{2i} = 0,2 x ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} D_{3i} = 0,8 x ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} T_{4i} = 0,5 \sum_{i=1}^{\infty} D_{3i} = 0,4 x .$$

Além disso:

$$M_2 = \sum_{i=1}^{\infty} D_{2i} = 0,2 x .$$

Sendo a solução exacta, então:

$$M_2 + M_3 = 0 \Leftrightarrow M_3 = -M_2 = -0,2 x .$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_{3i} = -3,125 - \sum_{i=1}^{\infty} D_{3i} - M_3 = -3,125 - x ;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} D_{4i} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} T_{3i}}{0,5} = -6,25 - 2 x .$$

Então:

$$\sum_{i=1}^{\infty} D_{5i} = \sum_{i=1}^{\infty} D_{4i} \frac{0,428571}{0,571429} = -4,68749 - 1,5 x .$$

Finalmente:

$$M_4 = -3,125 + \sum_{i=1}^{\infty} T_{4i} + \sum_{i=1}^{\infty} D_{4i} = -9,375 - 1,6 x ;$$

$$M_5 = \sum_{i=1}^{\infty} D_{5i} = -4,68749 - 1,5 x .$$

A execução dos passos anteriores pode ser esquematizada da forma ilustrada na Figura 4.2.

	0,2	0,8		0,571429	0,428571	
$-0,2 x$	$\leftarrow -1$	$0,2 x$	$3,125$	$0,5 \rightarrow$	$-3,125$	
		$0,8 x$	$0,8 x$		$0,4 x$	
		$-3,125 - x$	$-3,125 - x$	$\leftarrow 0,5$	$-6,25 - 2 x$	$-4,68749 - 1,5 x$
$-0,2 x$	$0,2 x$	$-0,2 x$		$-9,375 - 1,6 x$	$-4,68749 - 1,5 x$	$0$

Figura 4.2

Sendo a solução exacta, então:

$$M_4 + M_5 = 0 \Rightarrow x = -4,53629,$$

o que permite calcular os momentos exactos em todas as secções.

Para estruturas onde não existam nós onde convirjam mais de dois elementos nos quais se verifique transmissão para o nó, este método conduz à resolução de uma única equação.

A generalização deste método para estruturas que não obedecem a esta condição conduz a um sistema de equações.