

HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS

Análise estatística aplicada à hidrologia



O “Engenheiro”
HIDRÁULICO

- ✓ Encherá?
- ✓ Que população pode abastecer e com que garantia?
- ✓ Que área poderá regar?
- ✓ Como interfere com as situações de cheia?

ESTUDOS

DADOS resultantes da observação de
grandezas hidrológicas
SÉRIES HIDROLÓGICAS

SÉRIES HIDROLÓGICAS: Precipitação ou escoamento num dado intervalo de tempo (dia, mês, ano, ...); caudais instantâneos máximos anuais; precipitações diárias máximas anuais; ...

- Assegurar a qualidade das séries hidrológicas utilizadas ➡ consistência (... erros) e homogeneidade (... fatores condicionantes do fenómeno inalterados ... mudança climática).
- Assegurar que as séries são adequadas aos modelos a aplicar ➡ existência (modelos estocásticos) ou não (modelos estatísticos) de persistência.



- **HOMOGENEIDADE:** não existem alterações nos fatores que condicionam o fenómeno (... mudanças climáticas ... quebras de homogeneidade).
- **CONSISTÊNCIA:** não existe alteração no erro sistemático de medição da grandeza.
- **PERSISTÊNCIA:** tendência de valores altos serem seguidos por valores também elevados, o que também se verifica para valores baixos (maior no escoamento e aumenta com a diminuição do intervalo de tempo).
- **ALEATORIEDADE:** ocorrências independentes e exprimindo o resultado de um número extremamente elevado de fatores (precipitação ou escoamento anual, precipitação ou escoamento num dado mês ou dia, valores máximos anuais...)



A precipitação no ano de 1937 em Penedono foi de 453,8 mm

P = 453,8 mm

MUITO??

POUCO??

O valor da precipitação num dado intervalo de tempo contém, por si só, muito pouca informação.

É necessário constituir a amostra das precipitações naquele intervalo de tempo e recolher dessa amostra a informação necessária ao conhecimento do fenómeno.

População
(infinita) constituída
pela precipitação
anual no Penedono

... uma realização

Amostra (finita)
de
precipitações
anuais no
Penedono

Tratamento probabilístico

Tratamento estatístico

Ano	Precipitação anual (mm)		Ano	Precipitação anual (mm)	
	Posto 1	Posto 2		Posto 1	Posto 2
1	718.3	242.2	27	929.7	919.5
2	601.8	238.1	28	682.3	457.7
3	234.2	217.7	29	792.6	1001.4
4	685.3	860.7	30	593.0	1104.7
5	728.8	467.1	31	276.8	340.1
6	712.0	1064.2	32	564.9	1234.6
7	542.8	848.6	33	637.5	465.7
8	544.7	404.0	34	786.9	250.0
9	680.6	617.4	35	700.3	816.6
10	1077.9	584.4	36	612.5	834.6
11	684.4	1192.7	37	1058.3	747.1
12	909.4	591.6	38	959.1	699.5
13	344.8	1283.1	39	1166.6	470.5
14	883.2	500.3	40	522.2	1302.2
15	440.3	1396.8	41	730.8	247.8
16	457.8	116.4	42	808.1	1029.4
17	792.3	898.3	43	566.5	1043.6
18	673.5	952.2	44	961.8	839.1
19	444.8	1169.1	45	612.3	663.3
20	560.2	886.9	46	647.4	528.9
21	638.5	910.5	47	643.7	724.8
22	722.4	22.0	48	991.8	814.1
23	1059.0	867.4	49	804.1	1315.4
24	760.5	894.8	50	651.8	420.6
25	505.7	73.1	51	1112.3	78.0
26	608.8	312.9	52	677.0	821.6

Média (mm)	702	707
Desvio-padrão (mm)	205	364

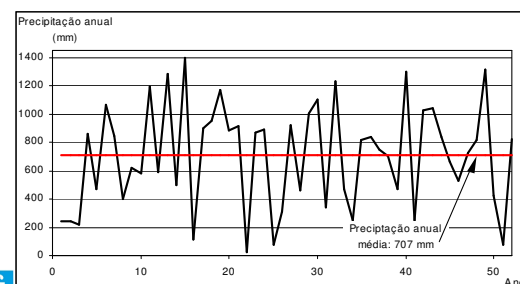
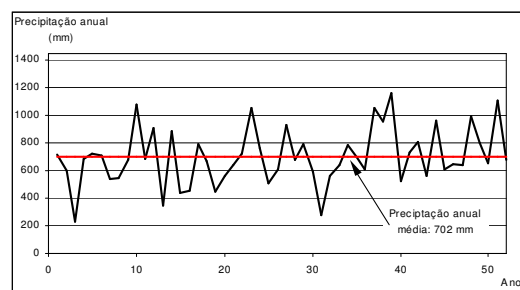
(precipitação anual ... constitui uma VA ... porquê?)

Duas séries de precipitação anual registadas em dois postos udométricos, Posto 1 e Posto 2, em períodos diferentes, ambos com 52 anos.

Caraterização da precipitação anual (bem como a de outras amostras de valores ao longo do tempo da generalidade das grandezas hidrológicas) em cada posto não é alcançada mediante a enumeração exaustiva das ocorrências registadas!!

A média da precipitação anual (**PRECIPITAÇÃO ANUAL MÉDIA**) no Posto 1 foi de 702 mm e no Posto 2 foi de 707 mm → fornece informação percetível sobre a grandeza hidrológica e sustenta alguma expectativa em relação às suas ocorrências futuras: se houver manutenção das condições climáticas (se não ocorrerem quebras de homogeneidade com as que se atribuem às mudanças climáticas), é **expetável** que a grandeza preserve a média nas suas realizações futuras a longo prazo.

... os regimes da precipitações nos Postos 1 e 2 são **PRÓXIMOS!**



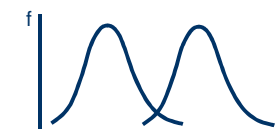
... não é verdade!

Não obstante a proximidade das precipitações anuais médias (702 e 707 mm) a variação da precipitação ao longo dos anos é muito maior no caso do Posto 2.

São necessários outros descritores das amostras para além da média.

Média que carateriza o valor central dos elementos da série, sendo dada pela média aritmética (nas unidades dos dados):

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$



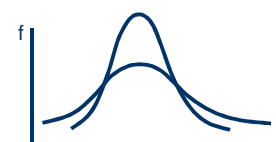
Variância (com correção do viés) que traduz a dispersão dos valores da amostra em torno da média (nas unidades dos dados):

$$s'^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_i - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n - 1}$$

$$s'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

Correção do viés

Correção do viés



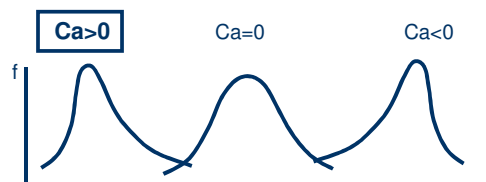
Coefficiente de variação definido pelo quociente entre o desvio-padrão e a média (adimensional ... variabilidade relativa)

$$C_v = \frac{s'}{\bar{p}}$$

Coefficiente de assimetria (com correção do viés) (adimensional)

$$C_a = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^3}{(n-1)(n-2)s'^3}$$

Correção do viés



Número de ordem	Precipitação Anual (mm)	Número de ordem	Precipitação anual (mm)
1	22.0	27	814.1
2	73.1	28	816.6
3	78.0	29	821.6
4	116.4	30	834.6
5	217.7	31	839.1
6	238.1	32	848.6
7	242.2	33	860.7
8	247.8	34	867.4
9	250.0	35	886.9
10	312.9	36	894.8
11	340.1	37	898.3
12	404.0	38	910.5
13	420.6	39	919.5
14	457.7	40	952.2
15	465.7	41	1001.4
16	467.1	42	1029.4
17	470.5	43	1043.6
18	500.3	44	1064.2
19	528.9	45	1104.7
20	584.4	46	1169.1
21	591.6	47	1192.7
22	617.4	48	1234.6
23	663.3	49	1283.1
24	699.5	50	1302.2
25	724.8	51	1315.4
26	747.1	52	1396.8

EXTRAIR da amostra a maior quantidade de informação possível tendo em vista inferir sobre as características da população de onde provém a amostra.

(...precipitações anuais no Posto ordenadas crescentemente ...) **é possível associar probabilidades aos diferentes valores da mostra:**

QUAL A PROBABILIDADE DE OCORREREM PRECIPITAÇÕES MENORES OU IGUAIS A 420,6 mm?.

Número de ordem	Precipitação Anual (mm)	Número de ordem	Precipitação anual (mm)
1	22.0	27	814.1
2	73.1	28	816.6
3	78.0	29	821.6
4	116.4	30	834.6
5	217.7	31	839.1
6	238.1	32	848.6
7	242.2	33	860.7
8	247.8	34	867.4
9	250.0	35	886.9
10	312.9	36	894.8
11	340.1	37	898.3
12	404.0	38	910.5
13	420.6	39	919.5
14	457.7	40	952.2
15	465.7	41	1001.4
16	467.1	42	1029.4
17	470.5	43	1043.6
18	500.3	44	1064.2
19	528.9	45	1104.7
20	584.4	46	1169.1
21	591.6	47	1192.7
22	617.4	48	1234.6
23	663.3	49	1283.1
24	699.5	50	1302.2
25	724.8	51	1315.4
26	747.1	52	1396.8

QUAL A PROBABILIDADE DE OCORREREM PRECIPITAÇÕES MENORES OU IGUAIS A 420,6 mm?.

Número de ordem	Precipitação Anual (mm)	Número de ordem	Precipitação anual (mm)
1	22.0	27	814.1
2	73.1	28	816.6
3	78.0	29	821.6
4	116.4	30	834.6
5	217.7	31	839.1
6	238.1	32	848.6
7	242.2	33	860.7
8	247.8	34	867.4
9	250.0	35	886.9
10	312.9	36	894.8
11	340.1	37	898.3
12	404.0	38	910.5
13	420.6	39	919.5
14	457.7	40	952.2
15	465.7	41	1001.4
16	467.1	42	1029.4
17	470.5	43	1043.6
18	500.3	44	1064.2
19	528.9	45	1104.7
20	584.4	46	1169.1
21	591.6	47	1192.7
22	617.4	48	1234.6
23	663.3	49	1283.1
24	699.5	50	1302.2
25	724.8	51	1315.4
26	747.1	52	1396.8

PROBABILIDADE DE OCORREREM PRECIPITAÇÕES MENORES OU IGUAIS A 420,6 mm?

INTUITIVAMENTE: 13 / 52 = 0,25 ou seja 25,0%

QUAL A PROBABILIDADE DE OCORREREM PRECIPITAÇÕES MENORES OU IGUAIS A 1396,8 mm?

INTUITIVAMENTE:

$i / (n+1) = 52 / 53 = 0,981$ ou seja $\approx 98\%$

**PROBABILIDADE DE OCORREREM
PRECIPITAÇÕES MENORES OU IGUAIS A
420,6 mm?**

$$i / (n+1) = 13 / 53 = 0,245$$

ou seja
24,5%

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{i}{N+1}$$

Fórmula de Weibull para a probabilidade empírica de não-excedência

permite atribuir a cada valor da amostra uma estimativa, baseada nessa amostra, da probabilidade de ocorrerem valores menores ou iguais ao considerado

**(ATENÇÃO: PODEM SER APLICADAS
OUTRAS FÓRMULAS)**

Número de ordem	Precipitação Anual (mm)	Número de ordem	Precipitação anual (mm)
1	22.0	27	814.1
2	73.1	28	816.6
3	78.0	29	821.6
4	116.4	30	834.6
5	217.7	31	839.1
6	238.1	32	848.6
7	242.2	33	860.7
8	247.8	34	867.4
9	250.0	35	886.9
10	312.9	36	894.8
11	340.1	37	898.3
12	404.0	38	910.5
13	420.6	39	919.5
14	457.7	40	952.2
15	465.7	41	1001.4
16	467.1	42	1029.4
17	470.5	43	1043.6
18	500.3	44	1064.2
19	528.9	45	1104.7
20	584.4	46	1169.1
21	591.6	47	1192.7
22	617.4	48	1234.6
23	663.3	49	1283.1
24	699.5	50	1302.2
25	724.8	51	1315.4
26	747.1	52	1396.8

$$F = P(X \leq x) = \frac{i - \omega}{n + 1 - 2\omega}$$

Tabela 8 – Fórmulas para estimação de probabilidades empíricas de não-excedência.

Fórmula	Autor	Valor de ω . Atributos de aplicação
$F = \frac{i}{N+1}$	Weibull	$\omega=0.000$. Probabilidades de excedência não enviesadas para todas as distribuições
$F = \frac{i-0.44}{N+0.12}$	Gringorten	$\omega=0.440$. Usada para quantis das distribuições de Gumbel, GEV e Weibull
$F = \frac{i-0.375}{N+0.25}$	Blom	$\omega=0.375$. Quantis não enviesados para as distribuições Normal e Log-Normal
$F = \frac{i-0.5}{N}$	Hazen	$\omega=0.500$. Usada para quantis da distribuição Pearson III
$F = \frac{i-0.40}{N+0.20}$	Cunnane	$\omega=0.400$. Quantis aproximadamente não enviesados para todas as distribuições

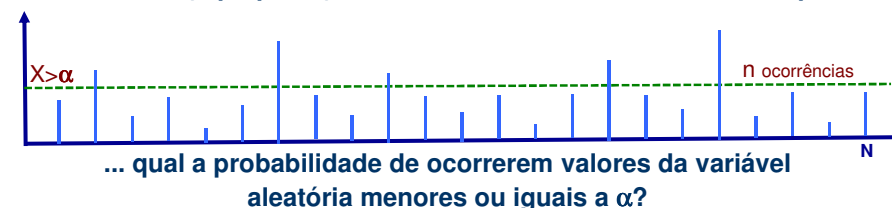
Naghettini, M., Portela, M.M., 2011, *Probabilidades e estatística aplicadas à hidrologia*, IST, Lisboa, pág. 36 (disponível na página da disciplina).

Revisão:

Se num período de **N** anos de observações (**N** grande) se registaram **n** ocorrências (**n** pequeno) da variável aleatória com um valor superior a α



Se num período de **N** anos de observações (**N** grande) se registaram **n** ocorrências (**n** pequeno) da variável aleatória com um valor superior a α



$$F(X \leq \alpha) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N}$$

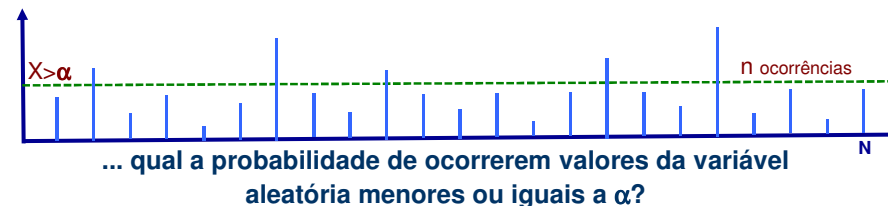
Se num período de N anos de observações (N grande) se registaram n ocorrências (n pequeno) da variável aleatória com um valor superior a α



$$F(X \leq \alpha) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N}$$

Qual o período que, em média, separa ocorrências da variável aleatória superiores ou iguais a α ?

Se num período de N anos de observações (N grande) se registaram n ocorrências (n pequeno) da variável aleatória com um valor superior a α



$$F(X \leq \alpha) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N}$$

Qual o período que, em média, separa ocorrências da variável aleatória superiores ou iguais a α ?

PERÍODO DE RETORNO:

Se num período de N anos de observações (N grande) se registaram n ocorrências (n pequeno) da variável aleatória com um valor superior a α



$$F(X \leq \alpha) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N}$$

Qual o período que, em média, separa ocorrências da variável aleatória superiores ou iguais a α ?

PERÍODO DE RETORNO: $T = \frac{N}{n}$

PERÍODO DE RETORNO

$$T = \frac{N}{n}$$

$$F(X \leq \alpha) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N}$$

$$F = 1 - n/N$$

$$1 - F = n/N$$

$$\frac{1}{F-1} = N/n = T$$

PERÍODO DE RETORNO

$$T = \frac{N}{n}$$

$$F(X \leq \alpha) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N}$$

$$T = \frac{1}{1-F}$$

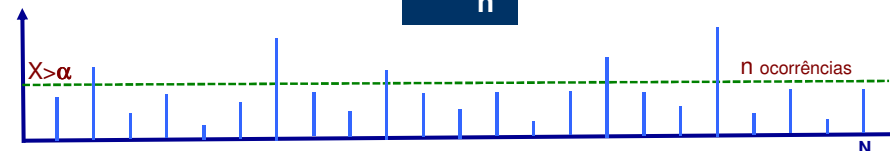
O período de retorno T
em função da probabilidade de não excedência F

$$F = 1 - \frac{1}{T}$$

A probabilidade de não excedência F
em função do período de retorno T

PERÍODO DE RETORNO

$$T = \frac{N}{n}$$



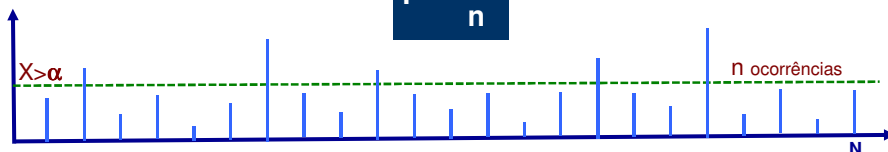
O conceito de período de retorno **NÃO CONTÉM** qualquer
noção de periodicidade

A probabilidade do valor ocorrer em qualquer ano é a
probabilidade de ser excedido, ou seja, é $(1-F) = 1/T$,
de ocorrer em dois anos consecutivos $(1/T)^2$
de ocorrer em três anos consecutivos $(1/T)^3$

...

PERÍODO DE RETORNO

$$T = \frac{N}{n}$$



RISCO HIDROLÓGICO, R: Probabilidade de um
acontecimento com dado período de retorno, T , ser excedido
num período de N anos

- Probabilidade de nunca ser excedido em N anos: $(1-1/T)^N$
- Probabilidade de ser excedido (uma, duas, ... n vezes) em
 N anos: $R = 1 - (1-1/T)^N$

existe sempre risco de excedência!