



INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

Acção sísmica

Engenharia Sísmica de Pontes

Diploma de Formação Avançada em Engenharia de Estruturas

Luís Guerreiro

Março de 2010

1 Introdução

A caracterização da acção sísmica através de parâmetros como a sua intensidade ou magnitude, sendo importante para a quantificação do fenómeno sísmico, não é suficiente para análise da resposta de estruturas quando sujeitas a este tipo de sollicitação. Quando o objectivo é o estudo da resposta sísmica das estruturas, esta acção deverá ser caracterizada de uma forma que possa ser integrada nas metodologias de análise estrutural que actualmente existem. Deste modo são três as formas possíveis de caracterização a acção sísmica que cumprem o requisito atrás apresentado:

- Representação por série de acelerações (registo real ou gerado artificialmente) (Figura 1);
- Representação através da Função de Densidade Espectral de Potência;
- Representação por Espectro de Resposta.

A representação através duma série de acelerações é a forma mais directa de analisar o comportamento de uma estrutura quando sujeita à acção de determinado sismo. Infelizmente a verificação da segurança duma estrutura não se pode fazer através da análise da resposta para um único sismo, o que torna o processo relativamente moroso no caso de se optar por esta forma de representação da acção sísmica. No entanto se a estrutura a analisar tiver comportamento não linear a utilização de séries de acelerações torna-se praticamente inevitável.

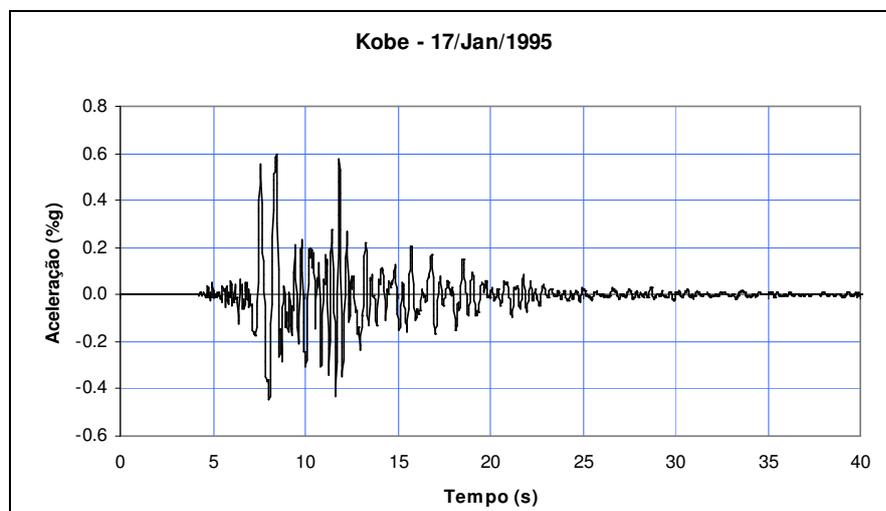


Figura 1 – Sismo de Kobe, 1995, gravado na estação KJMA (Fonte: PEER).

A representação através da Função de Densidade Espectral de Potência (vulgarmente designada por Espectro de Potência) sendo uma forma muito rica de representação da acção sísmica não é facilmente integrável na metodologia de análise existente, estando a sua utilização restringida a modelos com um pequeno número de graus de liberdade. É no entanto ferramenta essencial no processo de geração de séries de acelerações artificiais como será referido mais adiante.

Por fim, a representação através de Espectro de Resposta constitui o exemplo mais divulgado de caracterização da acção sísmica, sendo utilizado na quase totalidade de programas de cálculo automático que permitam realizar análise dinâmica de estruturas em regime linear.

1.1 Série de acelerações

Quando nos referimos a um determinado registo sísmico como sendo o registo de um determinado sismo temos que ter presente que não existe “o” registo sísmico mas sim um conjunto de registos cujas características variam consoante a distância ao epicentro, ou conforme o tipo de terreno onde foi registado. Assim, na presença de um determinado registo sísmico não podemos dizer que este é “o” registo de um determinado evento mas sim “um” registo desse evento sísmico e acrescentar a informação acerca da distância ao epicentro e da geologia do local onde foi registado.

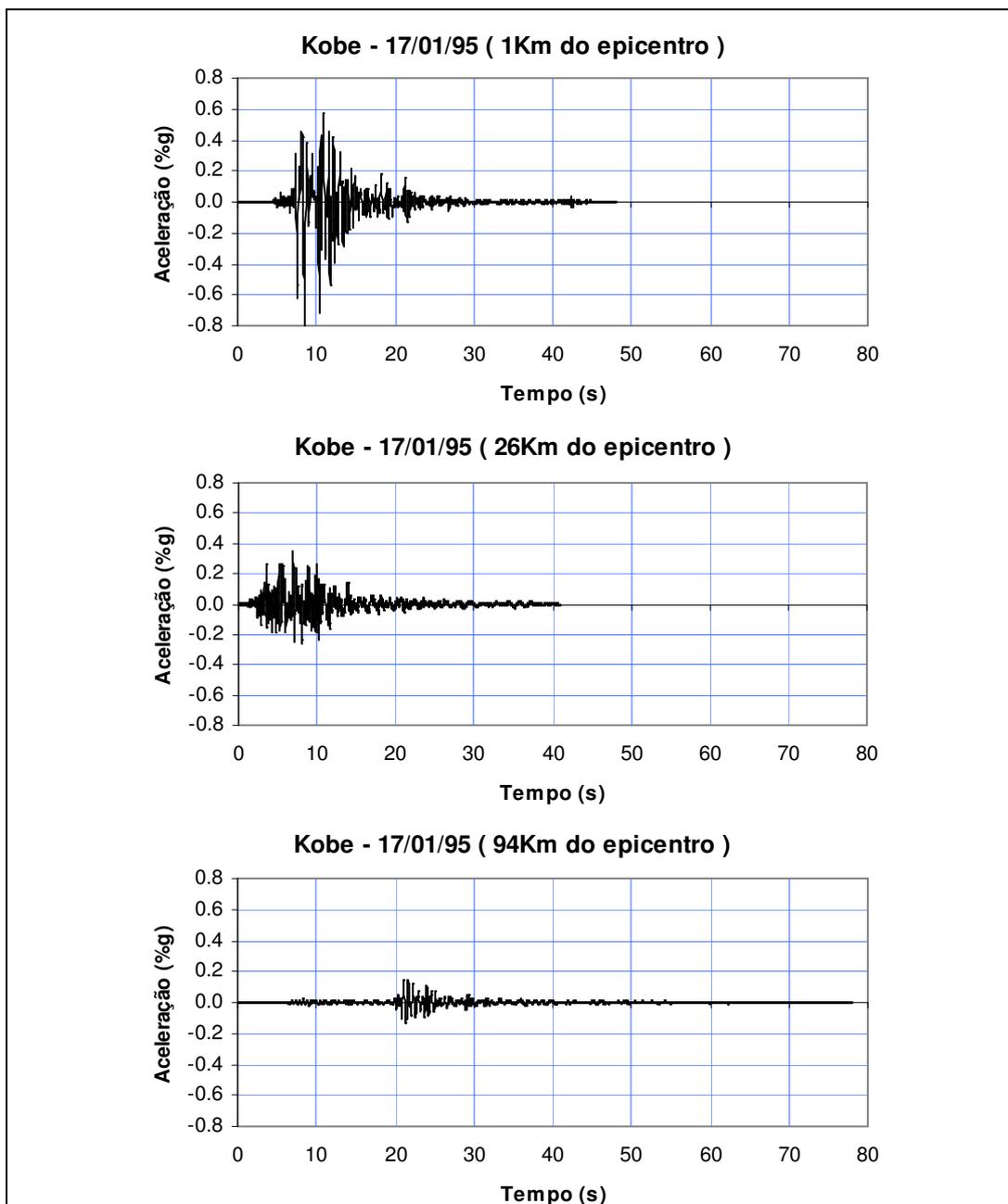


Figura 2 – Sismo de Kobe, 1995, registado a várias distâncias do epicentro (Fonte: PEER).

Na Figura 2 são apresentados três registos para o mesmo evento (Kobe, 1995) onde é bem evidente a influência da distância ao epicentro, traduzindo-se numa diminuição das acelerações e num aumento a duração do evento à medida que a distância aumenta.

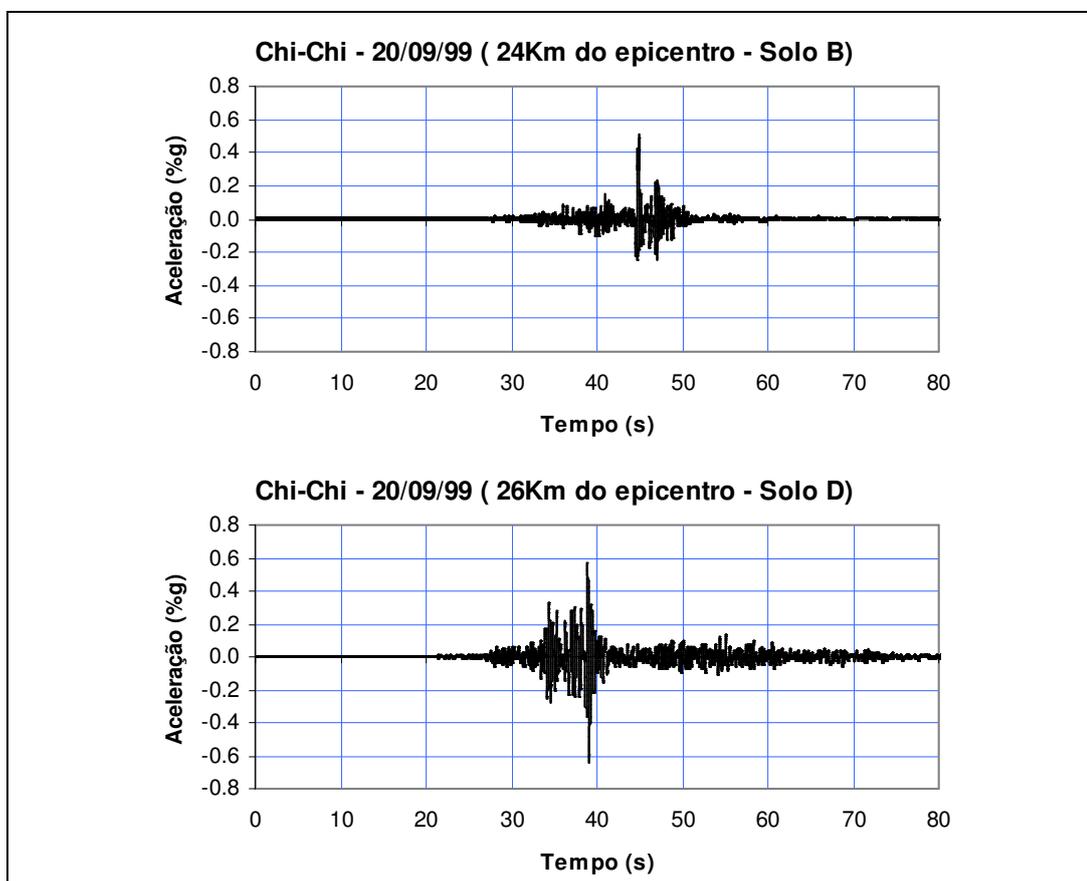


Figura 3 – Sismo de Chi-Chi, Formosa, 1999, registado em dois tipos de solo (Fonte: PEER).

Na Figura 3 estão representados dois registos do mesmo sismo (Chi-Chi, Formosa, 1999), recolhidos sensivelmente à mesma distância do epicentro (cerca de 25 km) mas em solos distintos. O primeiro foi registado num solo do tipo B de acordo com a convenção da USGS (PEER) e que corresponde a um solo com velocidades de propagação das ondas de corte entre 360 e 750 m/s. O segundo registo refere-se a um solo do tipo D, de acordo com mesma convenção e que corresponde a velocidades de propagação das ondas de corte inferiores a 180 m/s. Nesta figura fica bem patente a diferença de amplificação do sinal em função do tipo de solo, sendo de esperar maiores amplificações em solos mais deformáveis.

Em virtude do número de factores que influenciam o registo sísmico num determinado local é fácil de perceber a dificuldade em conseguir arranjar um número significativo de registo sísmicos reais para simulação local da acção sísmica. Para contornar este problema é habitual o recurso a séries de acelerações artificiais, geradas de acordo com as características esperadas para a acção sísmica num determinado local. Na secção 1.3.1 será apresentada uma metodologia para geração de séries de aceleração artificiais.

1.2 Espectro de Resposta

1.2.1 Introdução

A caracterização da acção sísmica através de Espectro de Resposta não é uma representação directa da acção, através de grandezas medidas directamente ou através dos seus registos, mas sim uma representação dos seus efeitos sobre um conjunto de osciladores lineares de um grau de liberdade.

Para que melhor se perceba o conceito de Espectro de Resposta, imagine-se a seguinte situação: um conjunto de osciladores lineares de um grau de liberdade, caracterizados por diferentes valores de frequência própria (ou período próprio), e todos com o mesmo valor de coeficiente de amortecimento, é sujeito a uma determinada acção sísmica. Supondo que estes osciladores estão munidos de equipamento capaz de medir a evolução ao longo do tempo de determinada grandeza representativa da sua resposta (por exemplo, a aceleração absoluta da massa do oscilador), é possível determinar, para cada oscilador, o valor máximo da referida grandeza para a acção sísmica em causa. A representação gráfica do valor máximo da resposta de cada um destes osciladores em função da sua frequência própria (ou do seu período) e do valor do coeficiente de amortecimento, constitui o Espectro de Resposta Linear daquela acção sísmica para a grandeza em análise.

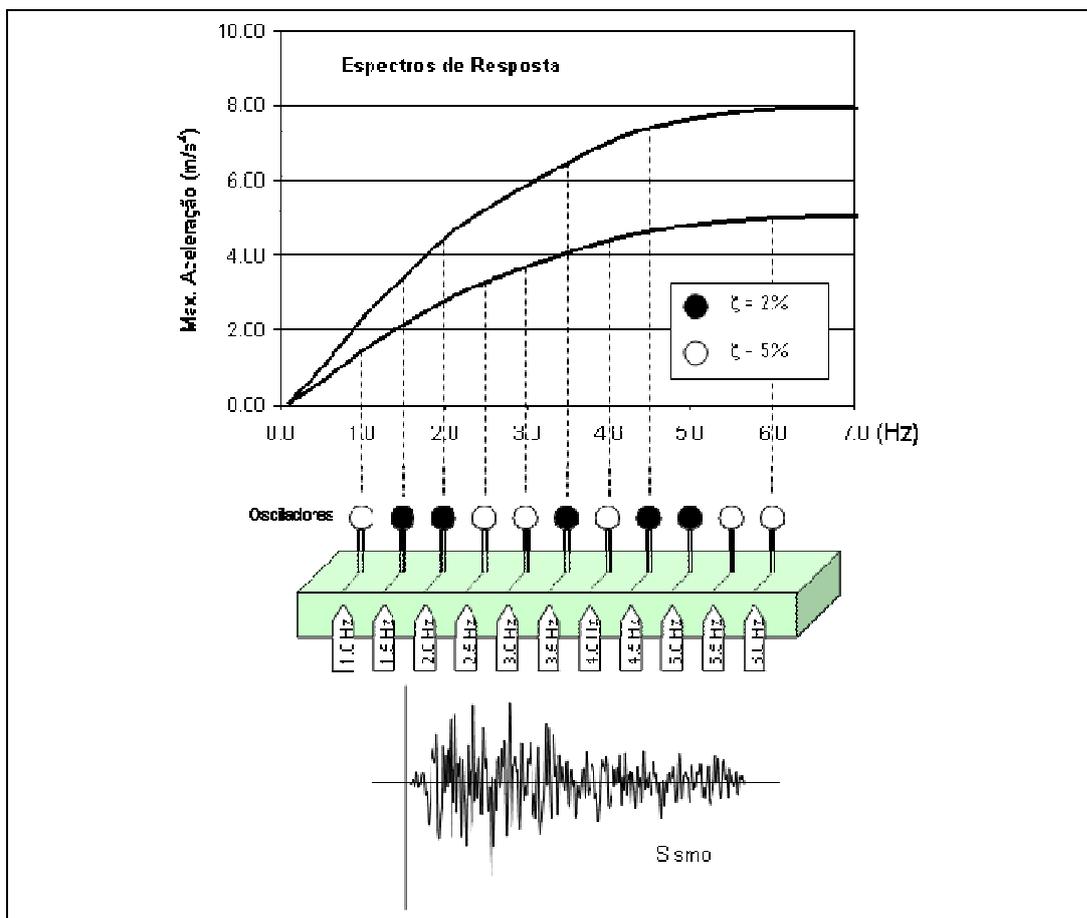


Figura 4 – Conceito de Espectro de Resposta (esquema).

Na figura 4, encontra-se representado um esquema que pretende ilustrar o conceito de espectro de resposta. Neste esquema pode observar-se um conjunto de osciladores lineares de um grau de liberdade, caracterizados pela sua frequência própria (entre 1.0Hz e 6.0Hz) e pelo seu coeficiente de amortecimento ($\zeta = 2\%$ e $\zeta = 5\%$).

Para melhor entender a importância que os espectros de resposta podem ter como forma de caracterização da acção dinâmica, recorde-se que em análise modal, a resposta da estrutura em cada modo de vibração é calculada por comparação com a resposta de um oscilador de um grau de liberdade com frequência própria idêntica à do modo em análise. A resposta do oscilador de um grau de liberdade é retirada directamente do espectro de resposta representativo da acção sísmica que se pretende considerar.

Como a análise modal é, actualmente, a técnica a mais divulgada em termos de análise sísmica de estruturas com comportamento linear, não é de estranhar que a quase totalidade da regulamentação actual caracterize a acção sísmica (ou acções sísmicas) de dimensionamento através dos seus espectros de resposta. Na maioria dos casos os espectros de resposta apresentados na regulamentação referem-se à resposta em termos de aceleração absoluta, mas outros espectros de resposta podem ser considerados, como por exemplo os espectros de resposta de deslocamentos relativos solo-estrutura, ou espectros de resposta de velocidades relativas.

1.2.2 Cálculo do Espectro de Resposta a partir duma série de acelerações

A forma mais directa para a obtenção do espectro de resposta relativo a um determinado registo sísmico envolve o cálculo da resposta dinâmica, ao longo do tempo, dum conjunto de osciladores, retendo-se, para cada um deles, o valor máximo da grandeza que se pretende representar no espectro (deslocamento relativo, aceleração absoluta, etc.).

O cálculo da resposta do conjunto de osciladores pode ser feito através de qualquer um dos vários métodos disponíveis para a análise dinâmica de estruturas lineares, como por exemplo através do Integral de Duhamel.

Para um oscilador com frequência própria p e coeficiente de amortecimento ζ , e para uma acção sísmica definida pela série de acelerações $a_g(\tau)$, é possível calcular a resposta do oscilador ao longo do tempo, em termos de deslocamentos relativos $q(t)$, através da seguinte expressão:

$$q(t) = \frac{1}{mp_d} \int_0^t -ma_g(\tau) \text{sen} [p_d (t - \tau)] \exp[-\zeta p (t - \tau)] d\tau \quad (1)$$

$$\text{em que, } p_d = p \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2)$$

O valor do espectro de resposta $E(p, \zeta)$ será traduzido por:

$$E(p, \zeta) = \max |q(t)| \quad (3)$$

Se o objectivo for calcular o espectro de resposta em termos de velocidade relativa, ou aceleração relativa, a resposta nestas grandezas pode ser obtida pela derivação da resposta em termos do deslocamento relativo $q(t)$:

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt} q(t) \quad \text{e,} \quad \ddot{q}(t) = \frac{d^2}{dt^2} q(t) \quad (4)$$

A resposta em termos de acelerações absolutas pode ser obtida de duas formas distintas: ou somando, em cada instante, o valor da aceleração do solo $a_g(t)$ ao valor da aceleração relativa obtida,

$$\ddot{q}_a(t) = \ddot{q}(t) + a_g(t)$$

ou através da seguinte combinação dos resultados em termos de deslocamentos e velocidades relativas,

$$\ddot{q}_a(t) = -2 \zeta p \dot{q}(t) - p^2 q(t) \quad (5)$$

Esta última expressão obtém-se a partir da equação de equilíbrio dinâmico, escrita para um oscilador de massa unitária, isolando no termo da esquerda somente a parcela relativa à aceleração absoluta, $\ddot{q}_a(t)$.

$$\ddot{q}_a(t) + 2 \zeta p \dot{q}(t) + p^2 q(t) = 0 \quad (6)$$

Tal como foi mostrado atrás é possível calcular o Espectro de Resposta directamente em acelerações absolutas ou em velocidades e deslocamento relativos. Normalmente os espectros são representados em termos de aceleração absoluta. Nestes casos se houver necessidade de calcular os espectros de resposta em velocidades ou deslocamentos é possível utilizar, com algumas restrições, as relações que se apresentam de seguida:

$$E_v \approx p E_d \approx 2\pi f E_d \quad (7)$$

$$E_v \approx \frac{1}{p} E_a \approx \frac{1}{2\pi f} E_a \quad (8)$$

E_d – espectro de resposta de deslocamentos relativos

E_v – espectro de resposta de velocidades relativas

E_a – espectro de resposta de acelerações absolutas

Os espectros de resposta obtidos através das equações atrás apresentadas, a partir de um espectro de resposta calculado directamente a partir de um acelerograma, designam-se por pseudo-espectros. Assim, se calcularmos directamente o espectro de resposta de velocidades relativas, podem-se calcular os pseudo-espectros de deslocamentos relativos e de acelerações absolutas através das relações apresentadas.

Para que na passagem do espectro de resposta original para os pseudo-espectros seja válido o uso das relações (7) e (8) é necessário que o amortecimento seja baixo e que as frequências sejam superiores a um determinado valor, como se mostra de seguida.

Se na equação (1) se considerar que a diferença entre p_d e p é desprezável, o que é válido para valores baixos do coeficiente de amortecimento ($\zeta < 10\%$, ver Figura 5), e se se omitir o sinal negativo que afecta o valor da aceleração do solo (a_g), sem qualquer significado especial neste contexto, a expressão anterior pode ser simplificada:

$$q(t) = \frac{1}{p} \int_0^t a_g(\tau) \text{sen}[p(t - \tau)] \exp[-\zeta p(t - \tau)] d\tau \quad (9)$$

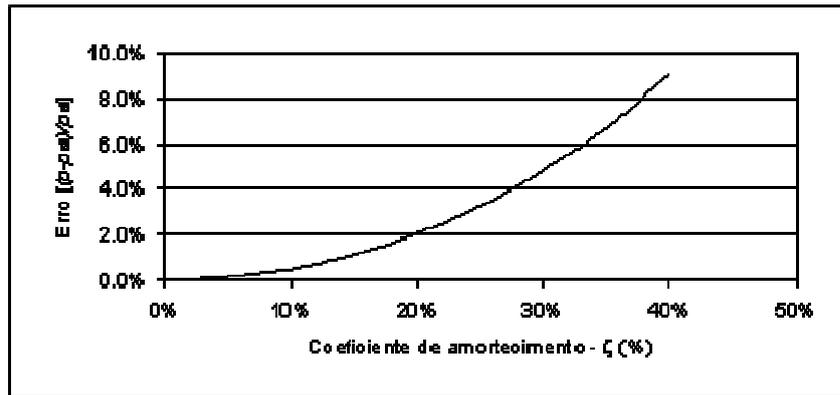


Figura 5 – Erro cometido ao considerar p em vez de p_d na equação do Integral de Duhamel.

Derivando a expressão agora obtida em ordem ao tempo, obtem-se a expressão que traduz a resposta em termos de velocidade relativa:

$$\dot{q}(t) = \int_0^t a_g(\tau) \cos[p(t - \tau)] \exp[-\zeta p(t - \tau)] d\tau - \zeta \int_0^t a_g(\tau) \text{sen}[p(t - \tau)] \exp[-\zeta p(t - \tau)] d\tau \quad (10)$$

A resposta em termos de acelerações absolutas pode ser obtida através da seguinte combinação das expressões que representam a resposta em termos de deslocamentos e velocidades relativas:

$$\ddot{q}_a(t) = -2\zeta p \dot{q}(t) - p^2 q(t) \quad (11)$$

Assim, a resposta em termos de aceleração absoluta pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_a(t) = & p(2\zeta^2 - 1) \int_0^t a_g(\tau) \text{sen}[p(t - \tau)] \exp[-\zeta p(t - \tau)] d\tau - \\ & - 2p\zeta \int_0^t a_g(\tau) \cos[p(t - \tau)] \exp[-\zeta p(t - \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

Se, nas expressões (9), (10) e (11) se considerar o amortecimento nulo ($\zeta = 0$), estas tomam o seguinte aspecto:

$$q(t) = \frac{1}{p} \int_0^t a_g(\tau) \text{sen}[p(t - \tau)] d\tau \quad (13)$$

$$\dot{q}(t) = \int_0^t a_g(\tau) \cos [p (t - \tau)] d\tau \quad (14)$$

$$\ddot{q}_a(t) = -p \int_0^t a_g(\tau) \text{sen} [p (t - \tau)] d\tau \quad (15)$$

Os valores dos espectros de resposta correspondem aos valores máximos de cada uma das expressões anteriores. Assim temos:

$$E_d(0, p) = \left[\frac{1}{p} \int_0^t a_g(\tau) \text{sen} [p (t - \tau)] d\tau \right]_{\max} \quad (16)$$

$$E_v(0, p) = \left[\int_0^t a_g(\tau) \cos [p (t - \tau)] d\tau \right]_{\max} \quad (17)$$

$$E_a(0, p) = \left[p \int_0^t a_g(\tau) \text{sen} [p (t - \tau)] d\tau \right]_{\max} \quad (18)$$

Segundo Clough e Penzien (Clough e Penzien, 1993), Hudson (Hudson, 1956 e 1962) demonstrou que se se substituir a função trigonométrica **cos** pela função **sen** na expressão das velocidades, o resultado obtido de uma forma geral difere muito pouco com excepção para as situações que correspondem a valores de frequência própria (p) muito baixos. Deste modo, fazendo a referida substituição da função trigonométrica, os valores dos vários espectros de resposta podem ser relacionados através das seguintes expressões:

$$E_v = p E_d \quad \text{e,} \quad E_v = \frac{I}{p} E_a$$

Convém realçar que, tal como se mostrou, estas relações só são válidas se o amortecimento for nulo e se a frequência própria não for muito baixa ($f > 0.4\text{Hz}$).

Pode-se pois concluir que esta transformação é possível para valores baixos do coeficiente de amortecimento (inferiores a 10%), e para uma gama de frequências na qual estão incluídas a grande maioria das estruturas.

Na Figura 6 estão representados os espectros de resposta de velocidades relativas para a componente Norte-Sul do sismo de El Centro (1940), e para dois valores do coeficiente de amortecimento: 2% e 20%. As curvas representadas nos gráficos indicam os valores do espectro de resposta em velocidades relativas obtidos de três formas distintas:

- i) Calculado directamente a partir da série de acelerações registada (E_v);
- ii) Calculado a partir do espectro de resposta em deslocamento relativos (pseudo-espectro calculado através da equação (7));
- iii) Calculado a partir do espectro de resposta em acelerações absolutas (pseudo-espectro calculado através da equação (8));

Se as relações entre espectros de resposta atrás referidas fossem exactas, não seria possível distinguir os três espectros representados. O que se verifica no entanto é uma concordância quase perfeita entre os espectros de resposta de deslocamentos relativos e de acelerações absolutas, enquanto o espectro de velocidades diverge dos anteriores. Este resultado vem confirmar aquilo que foi exposto anteriormente, com especial destaque para o facto de, para um valor baixo de amortecimento, a relação estabelecida entre os espectros de resposta de deslocamentos e de acelerações ter um erro desprezável.

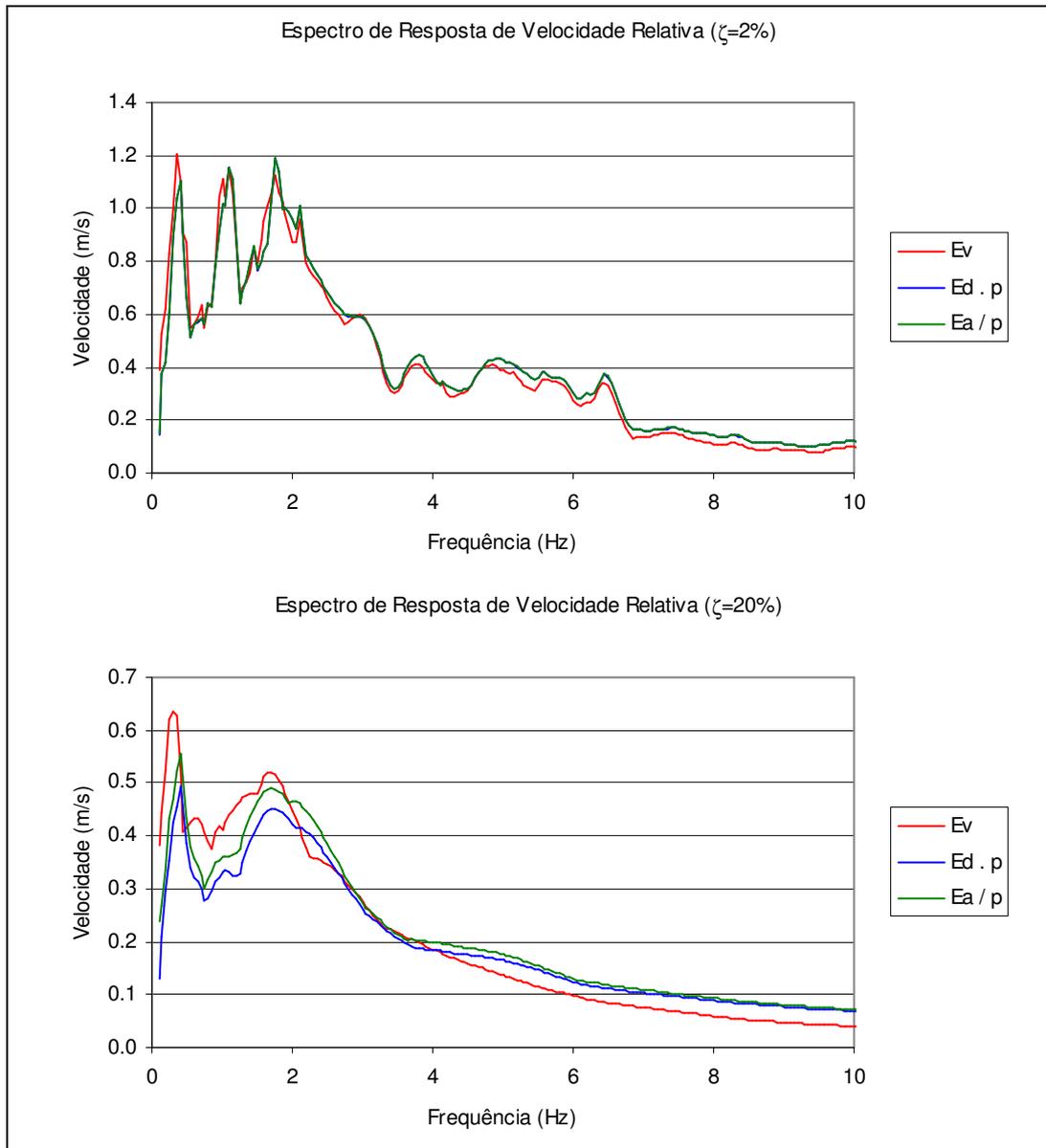


Figura 6 – Espectros de resposta (El Centro, 1940 – $\zeta = 2\%$ e 20%).

1.2.3 Representação do Espectro de Resposta

Tal como já foi referido a representação mais comum do espectro de resposta é em acelerações absolutas. Estes valores tanto podem ser representados em função da frequência (Figura 7a) ou em função do período (Figura 7b).

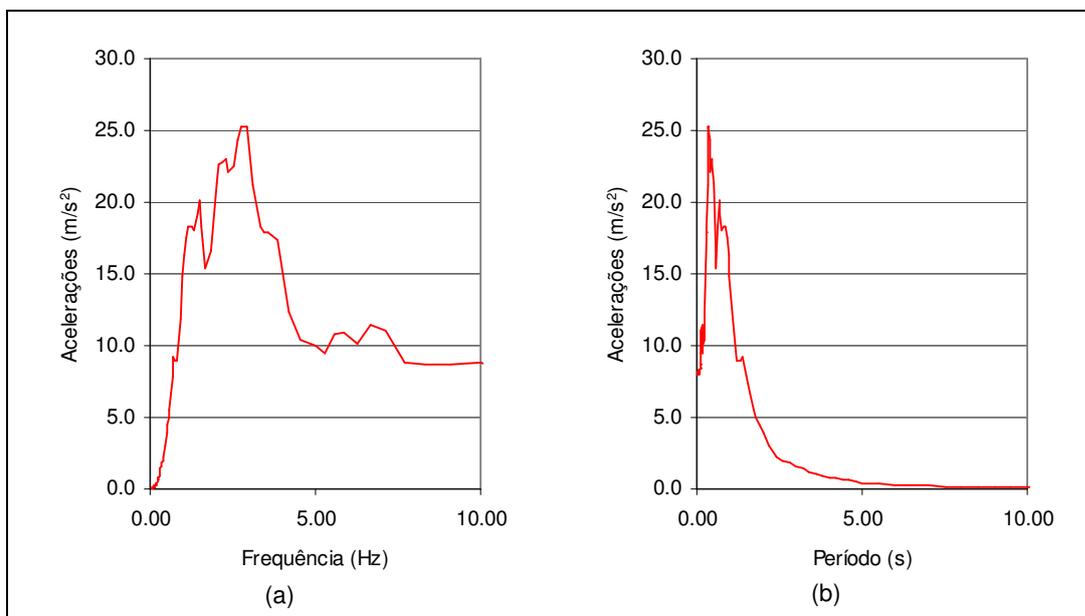


Figura 7 – Espectros de resposta em função da frequência (a) e período (b) (Kobe, 1995).

Por vezes também é necessário representar o espectro de resposta de deslocamentos, sobretudo quando o que está em causa é a avaliação da deformação da estrutura ou os movimentos nos apoios devido à acção sísmica. Na Figura 8 está representado um espectro de resposta de deslocamentos. Como se pode observar este espectro de resposta tem uma forma muito diferente do espectro de resposta em acelerações, tal como seria de esperar. O espectro de resposta de deslocamentos caracteriza-se por ter valores elevados associados às frequências mais baixas (ou períodos mais altos). Não nos podemos esquecer que a grandeza que está em causa é o deslocamento relativo entre a estrutura e o solo, pelo que é compreensível que os valores mais altos esteja associados às estruturas mais deformáveis, ou seja, às estruturas com frequência baixa.

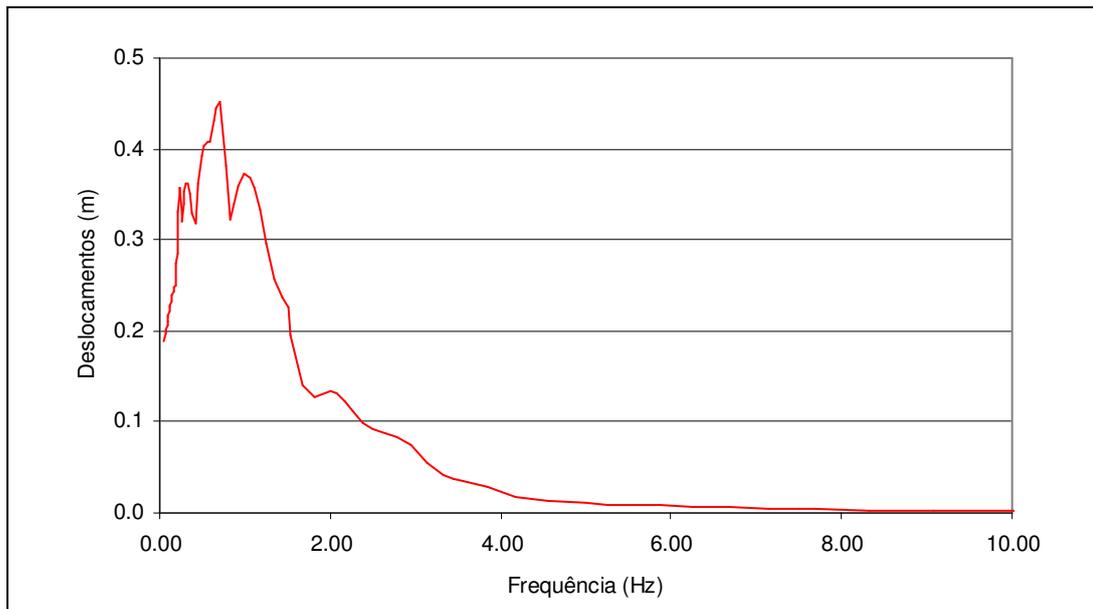


Figura 8 – Espectros de resposta de deslocamentos (Kobe, 1995).

Recentemente surgiu uma nova forma de representar os espectros de resposta em acelerações e em deslocamentos designada por formato ADRS (de *Acceleration and Displacement Response Spectrum*). De acordo com este formato os valores espectrais de resposta em aceleração E_a , são representados em função dos valores espectrais de deslocamento E_d .

Conjugando as equações (7) e (8) é possível escrever os valores de E_a em função de E_d :

$$E_a = p^2 E_d = (2\pi f)^2 E_d = \frac{4\pi^2}{T^2} E_d \quad (19)$$

Neste tipo de representação a cada período T corresponde uma linha recta passando pela origem e com declive $4\pi^2/T^2$. Na Figura 9 está representado um espectro de resposta do sismo de Kobe no formato ADRS. Nele estão indicadas as rectas representativas dos períodos de 0,50, 1,0 e 2,0 segundos. De acordo com esta representação os pontos na intersecção entre a recta representativa do período da estrutura e a função ADRS traduzem a resposta do oscilador em termos de aceleração (valor de E_a lido no eixo vertical) e deslocamento relativo (valor de E_d lido no eixo horizontal).

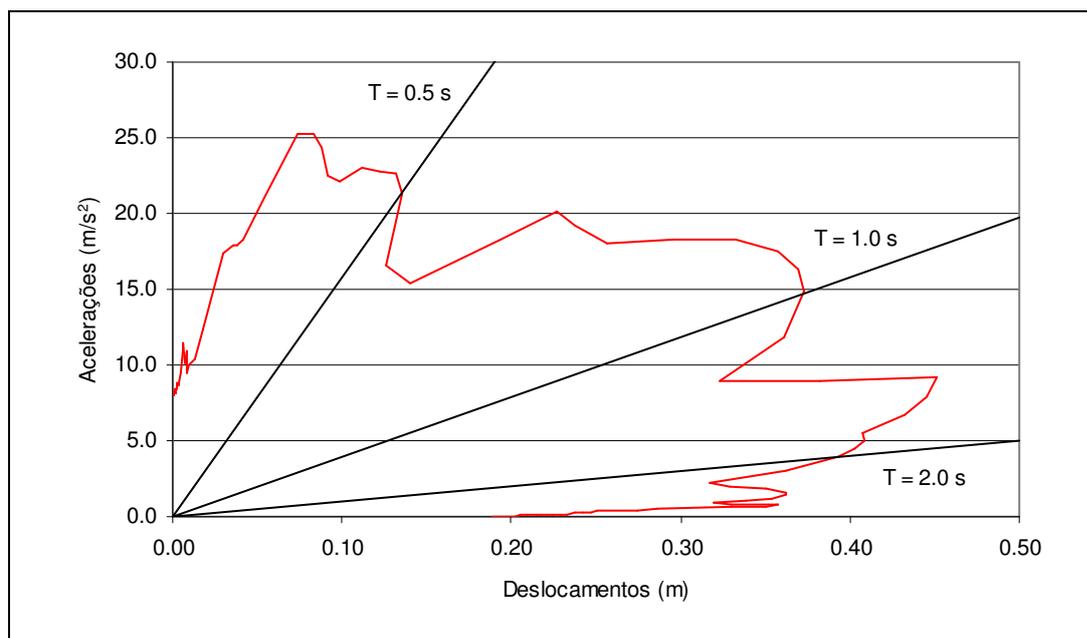


Figura 9 – Espectro ADRS (Kobe, 1995).

1.2.4 Algumas características dos Espectros de Resposta

Existem alguns pormenores que caracterizam os espectros de resposta. Um deles é o facto de os espectros de resposta de acelerações absolutas tenderem para zero quando a frequência própria dos osciladores tende para zero (ou o período tende para infinito). É fácil de compreender a razão porque tal acontece. Se imaginarmos um oscilador extremamente flexível (frequência própria muito baixa), pode ocorrer movimento do solo sem que o oscilador se mova. Esta situação limite só é possível se imaginarmos um oscilador totalmente desprovido de rigidez. Sendo assim, se não há movimento do oscilador, então as acelerações absolutas deste são nulas o que vem confirmar a propriedade do espectro em análise.

Utilizando um raciocínio semelhante, mas no sentido oposto, se considerarmos um oscilador com uma rigidez muito elevada (frequência infinita ou período igual a zero), será de esperar que o movimento do oscilador seja praticamente igual ao movimento do solo, isto é, não há lugar a qualquer amplificação do movimento por parte do oscilador. Desta forma a aceleração máxima registada no oscilador, que não é mais do que o valor espectral associado a esse oscilador, deverá ser igual ao valor máximo de aceleração medido ao nível do solo. Sendo assim, o espectro de resposta de acelerações absolutas deverá tender, para valores muito elevados de frequência, para o valor de pico de aceleração do solo.

Com base em raciocínios semelhantes aos agora apresentados é possível concluir que os espectros de resposta de velocidades ou deslocamentos relativos devem tender para zero para valores elevados de frequência, e que tendem respectivamente para a velocidade máxima do solo e para o deslocamento máximo do solo quando a frequência própria dos osciladores tende para zero. Nestes casos é necessário realçar que os espectros de resposta em causa representam

grandezas que traduzem o movimento relativo entre a estrutura e o solo, movimento este que será nulo no caso de osciladores com grande rigidez (o movimento do oscilador será igual ao movimento do solo), e que será igual, em valor absoluto, ao movimento do solo no caso do oscilador ser quase desprovido de rigidez. Estas características aqui apontadas podem ser observadas no conjunto de espectros de resposta apresentados na Figura 10.

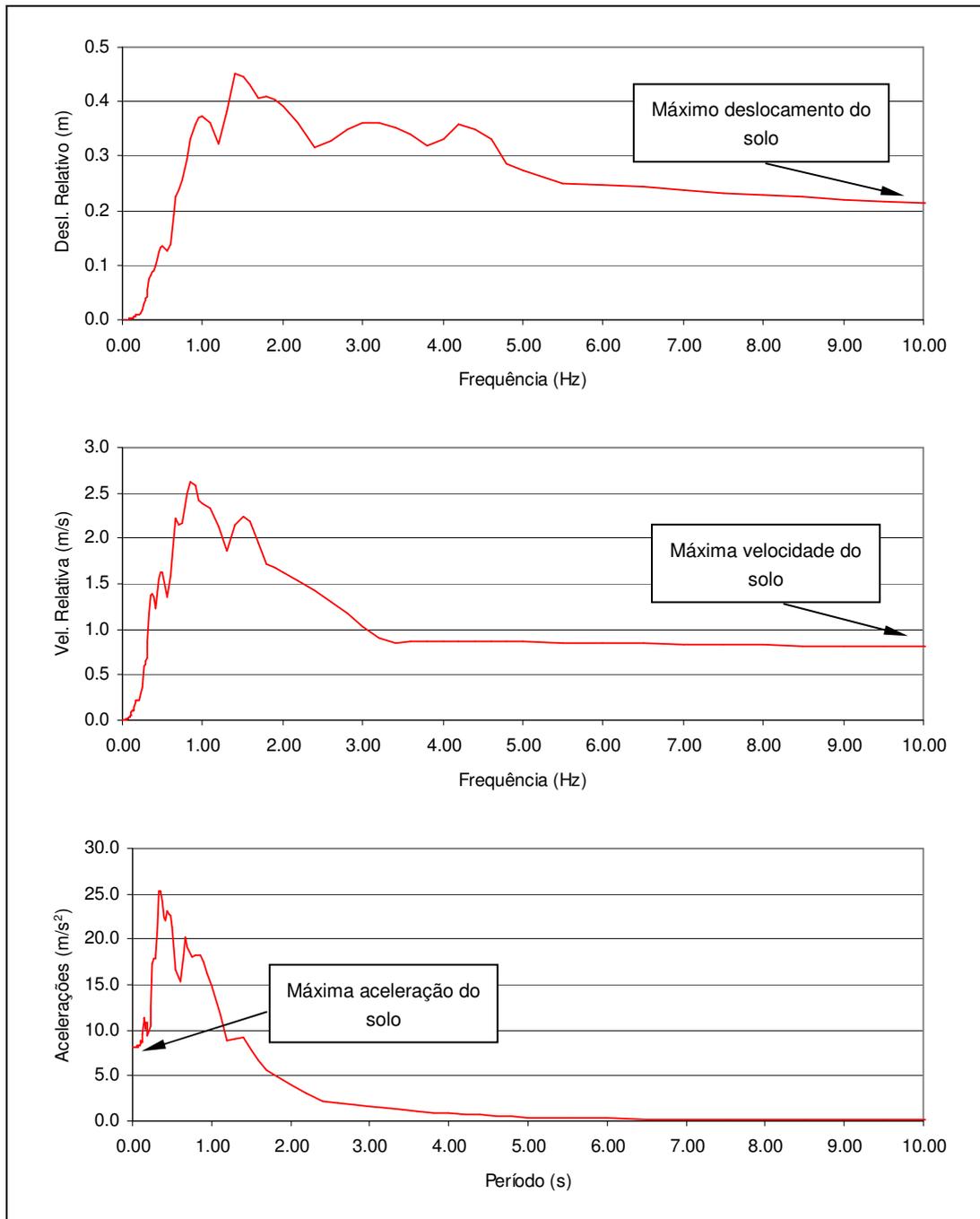


Figura 10 – Espectros de resposta de aceleração absoluta, velocidade e deslocamento relativo.

1.2.5 Espectros de resposta regulamentares

A fórmula mais utilizada pelos regulamentos actuais para definirem a acção sísmica a considerar no dimensionamento e verificação da segurança de estruturas é através da especificação de espectros de resposta. Os espectros de resposta regulamentares são curvas idealizadas, não representando por isso a resposta de osciladores a qualquer acção sísmica específica. O objectivo dos espectros regulamentares de dimensionamento é estabelecer os valores mínimos de resistência que as estruturas de uma dada região devem apresentar de acordo com a sismicidade desse local. Assim, a ordenada do espectro de resposta de dimensionamento indica, em função da frequência própria do oscilador, valor de determinada grandeza (aceleração, deslocamento, etc.) que o oscilador deverá ter capacidade de suportar.

A definição dos espectros de resposta de dimensionamento é obtida a partir de um espectro de resposta elástico afectado do valor do coeficiente de comportamento. O valor do coeficiente de comportamento depende essencialmente da ductilidade da estrutura. Neste capítulo só era feita referência ao espectro de resposta elástico, pois é este o elemento essencial na definição da acção sísmica regulamentar. O espectro de resposta elástico é função da sismicidade do local, das características do terreno de fundação e do coeficiente de amortecimento a considerar na estrutura.

A influência da sismicidade do local faz-se sentir não só nos valores extremos do movimento do solo mas também na forma do espectro. Por exemplo, um sismo que seja gerado próximo do local em estudo, deverá provocar um efeito mais forte em estruturas mais rígidas (menores períodos) do que um sismo gerado num ponto longínquo. Este facto está relacionado com a maior atenuação com a distância na energia associada às componentes de mais baixo período das ondas sísmicas do que às componentes correspondentes aos altos períodos de vibração. Assim, quanto mais afastado for o sismo, menor energia este deverá apresentar nos baixos períodos de vibração. Obviamente estas comparações só podem ser feitas directamente se os sismos tiverem magnitudes comparáveis. Esta observação vem realçar outro parâmetro que também é importante na definição do espectro de resposta de dimensionamento e que é o valor da magnitude esperada para os sismos que influenciam a definição do espectro. Para dois sismos com as mesmas características em termos de proximidade, aquele que tiver maior magnitude deverá conduzir a maiores valores de pico da aceleração do solo. Assim, estes dois sismos deverão conduzir a espectros de resposta com forma semelhante (concentração das maiores amplificações da resposta para a mesma gama de períodos ou de frequências), mas com diferentes valores das ordenadas espectrais.

Na actual nova regulamentação portuguesa (NA, 2009), são previstos dois tipos de acção sísmica de dimensionamento, sendo um deles (Acção tipo 1) representativo de um sismo de grande magnitude com epicentro na região Atlântica (cenário sísmico designado por “afastado”), e o outro (Acção tipo 2) que representa uma acção com características de um sismo de magnitude moderada com epicentro no território Continental (ou no Arquipélago dos Açores) (cenário “próximo”). Na figura 11 pode-se observar as diferenças que advêm das características das duas acções sísmicas regulamentares. Os espectros de resposta elásticos representados na figura

referem-se ao mesmo local (Lisboa), mesmo tipo de terreno de fundação (Solo do Tipo B) e ao mesmo valor do coeficiente de amortecimento ($\zeta = 5\%$). Como foi referido, o sismo “afastado” (Acção tipo 1), embora tenha uma magnitude superior, apresenta valores espectrais inferiores aos do sismo “próximo” (Acção tipo 2) para valores baixos de período.

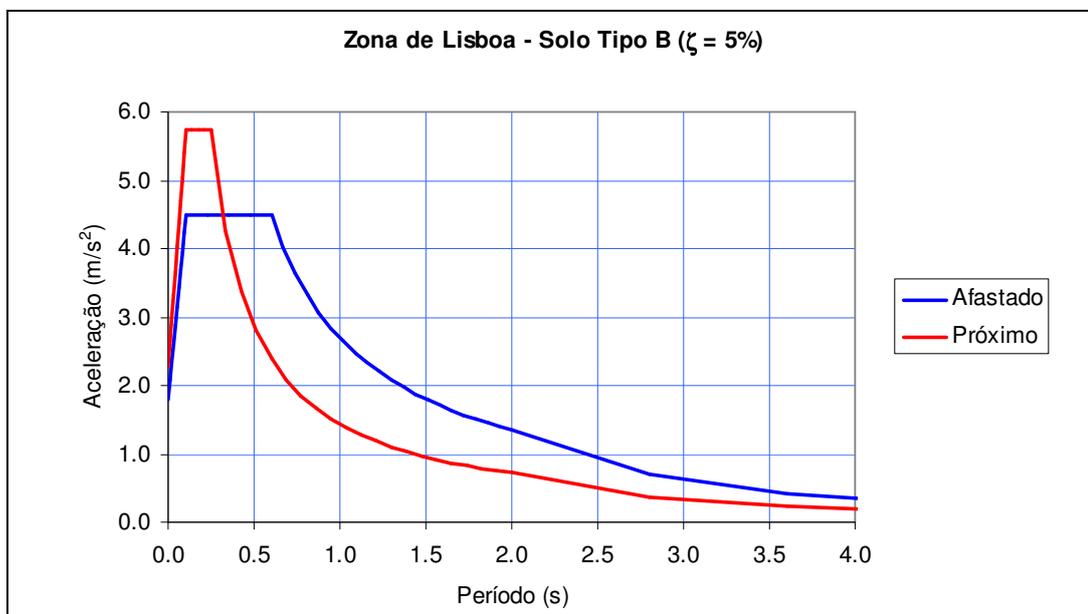


Figura 11 – Espectros de resposta – influência do tipo de acção sísmica (NA, 2009).

Na proposta de regulamentação europeia (Eurocódigo 8, 2004), a definição do espectro de resposta de elástico, é feita em função do valor de pico da aceleração de solo, valor este a definir de acordo com a sismicidade do local, e de um conjunto de valores de período de referência (T_B , T_C e T_D) que permitem “moldar” a forma do espectro. Estes valores de período permitem adaptar o modelo geral do espectro de modo a representar o efeito de diferentes tipos de solo ou de diferentes tipos de acção sísmica. De acordo com o regulamento os espectros de resposta elásticos são definidos pelas seguintes expressões (Eurocódigo 8, 2004):

$$0 \leq T \leq T_B \quad S_e(T) = a_g S \left[1 + \frac{T}{T_B} (\eta^{2,5} - 1) \right] \quad (19)$$

$$T_B \leq T \leq T_C \quad S_e(T) = a_g S \eta^{2,5} \quad (20)$$

$$T_C \leq T \leq T_D \quad S_e(T) = a_g S \eta^{2,5} \frac{T_C}{T} \quad (21)$$

$$T_D \leq T \leq 4s \quad S_e(T) = a_g S \eta^{2,5} \left[\frac{T_C T_D}{T^2} \right] \quad (22)$$

em que:

- $S_e(T)$ – ordenada do espectro de resposta elástico [m/s^2];
- a_g – valor da aceleração do solo para dimensionamento;
- T – período de vibração de um sistema linear com um grau de liberdade;
- η – factor que traduz a influência do amortecimento ($\eta=1$ para $\zeta=5\%$);
- S – factor que traduz a influência do solo;
- T_B, T_C, T_D – valores de períodos de referência;

Os valores dos períodos de referência limitam as zonas do espectro de resposta com determinadas características específicas. Assim, a zona do espectro entre o período T_B e T_C corresponde à zona com valor constante de aceleração espectral. A zona compreendida entre T_C e T_D por sua vez corresponde à zona de velocidade constante e, por fim, para períodos superiores a T_D os deslocamentos espectrais são constantes. Estas características impostas ao espectro de resposta correspondem a um conjunto de propriedades que se verificam, de forma aproximada, na maioria dos espectros de resposta reais. Na figura 12 estão representados três espectros de resposta, um de acelerações, um de velocidades e outro de deslocamentos, todos representativos da mesma acção sísmica. Os espectros de velocidades e deslocamentos foram obtidos a partir do espectro de acelerações usando as expressões (7) e (8). Como se pode observar os espectros de resposta apresentam as zonas de valores constantes atrás referidas.

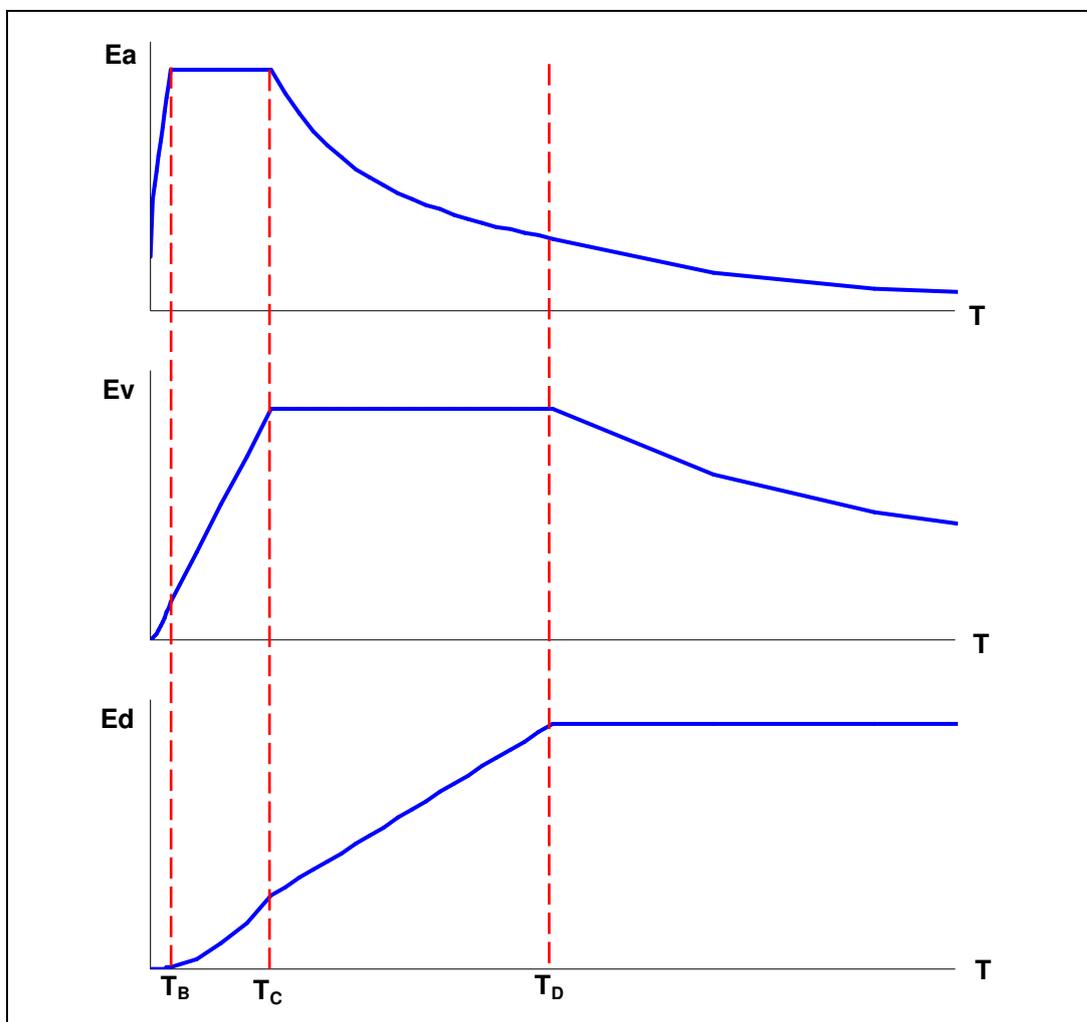


Figura 12 – Espectros de resposta acelerações, velocidades e deslocamentos (NA, 2009).

1.3 Função de Densidade Espectral de Potência.

A utilização de processos estocásticos para construir modelos representativos das acções sísmicas e da correspondente resposta das estruturas apresenta inúmeras vantagens. Em síntese, pode-se afirmar que sendo um processo estocástico um conjunto de funções convenientemente probabilizado, a sua utilização elimina o problema da representatividade das vibrações sísmicas “determinísticas” a utilizar nas análises (Ravara et. al., 1984). Qualquer característica da resposta das estruturas e da definição da acção sísmica pode ser objecto de cálculo ao nível de processos estocásticos. Na análise para verificação da segurança das estruturas tem particular interesse a determinação dos valores máximos da resposta que, no contexto dos processos estocásticos, deve ser identificado com o valor médio do valor máximo da resposta das estruturas a um conjunto de acções sísmicas representativas do processo (realizações de um processo estocástico).

Na análise através de processos estocásticos é habitual considerar que as vibrações sísmicas podem ser representadas por um processo estocástico, estacionário e gaussiano, com a densidade espectral de potência dada pela função $S_x(\omega)$. A Função de Densidade Espectral de Potência, vulgarmente referida como Espectro de Potência, define-se com a Transformada de Fourier da Função de Autocorrelação de um determinado sinal representado no tempo $x(t)$. Mais do que saber a definição é importante perceber o que é que representa o Espectro de Potência e qual a sua utilidade no processo de verificação da segurança de estruturas.

O Espectro de Potência pode ser interpretado como uma medida do conteúdo energético do processo, sendo o produto $S_x(\omega) \cdot \Delta\omega$ uma medida da energia contida numa banda de frequência de largura infinitesimal $\Delta\omega$, centrada na frequência ω . Um resultado importante que resulta da definição de Espectro de Potência é aquele que relaciona o valor esperado do quadrado da variável com o espectro (Sólnes, 1997):

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (23)$$

Outra equação importante na análise da segurança de estruturas é aquela que permite calcular o valor médio do valor máximo da grandeza em estudo, admitindo que esta grandeza pertence ao conjunto que integra o processo estocástico associado ao Espectro de Potência $S_x(\omega)$, e que é dada por (Pereira, 1974):

$$\text{Max } X = \sqrt{2 \lambda_0 \left[\ln \left(\frac{s}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \right) - \ln (\ln 2) \right]} \quad (24)$$

Em que:

s – duração da amostra;

λ_0, λ_2 – momentos espectrais da função de densidade espectral de potência definidos por:

$$\lambda_0 = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (25)$$

$$\lambda_2 = \int_0^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega \quad (26)$$

A noção de Espectro de Potência pode também ser utilizada para definir grandezas relacionadas com a resposta da estrutura. Um dos passos fundamentais da análise estocástica consiste em relacionar o espectro de potência da excitação com o espectro de potência da resposta. É de realçar que quando se refere a resposta da estrutura esta pode ser medida através de uma qualquer variável, seja ela deslocamento ou esforço (pode ser o deslocamento horizontal no tabuleiro, o momento flector no pilar ou a reacção vertical no apoio, por exemplo).

A equação que permite relacionar o espectro de potência da excitação com o espectro de potência da resposta é traduzida por:

$$S_Y(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) S_X(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) \quad (27)$$

Em que:

$H(\omega)$ – Função de transferência entre a variável que define a excitação e a variável escolhida para medir a resposta;

$H(\omega)^*$ - Função conjugada de $H(\omega)$;

$S_Y(\omega)$ – Espectro de Potência da Resposta;

$S_X(\omega)$ – Espectro de Potência da Excitação.

Existe também a possibilidade de relacionar espectros de potência de processos derivados. Um processo derivado pode definir-se como um processo que pode ser descrito através de outro por derivação deste. Um exemplo de um processo derivado é um processo relativo a velocidades ou acelerações que pode ser inferido através do correspondente processo relativo a deslocamentos. É possível demonstrar-se as seguintes relações entre processos derivados (Azevedo, 1996):

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_X(\omega) \quad (28)$$

$$E[\dot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_X(\omega) d\omega \quad (29)$$

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_X(\omega) \quad (30)$$

$$E[\ddot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{x}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_X(\omega) d\omega \quad (31)$$

1.3.1 Geração de acelerogramas artificiais a partir do Espectro de Potência

Admita-se que é possível representar um acelerograma (realização de um processo estocástico) através da sobreposição de séries harmónicas, de acordo com a seguinte expressão:

$$X(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (32)$$

Em que:

A_k – é uma constante real positiva a determinar;

ω_k – é a frequência central da banda de largura $\Delta\omega$ e é calculada através de $\omega_k = (k - 1/2)\Delta\omega$;

ϕ_k – é o ângulo de fase gerado aleatoriamente no intervalo $[0, 2\pi]$.

Demonstra-se que (Sólnes, 1997):

$$E[X^2(t)] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N A_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (33)$$

Com base neste resultado podemos admitir que o processo aleatório (acelerograma) pode ser representado pela sobreposição de um elevado número de componentes harmónicas com amplitudes obtidas a partir da discretização do integral representado em (33). A amplitude de cada harmónica pode ser obtida através da seguinte equação:

$$A_k^2 = 2 S_x(\omega_k) \Delta\omega \quad (34)$$

Assim o processo pode ser representado através de:

$$X(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2 S_x(\omega_k) \Delta\omega} \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (35)$$

Desta forma, para gerar um sinal artificial, estacionário, basta dividir o Espectro de Potência num número elevado de bandas de largura $\Delta\omega$. A cada uma das bandas associa-se um valor do espectro de potência definido através do valor espectral para a frequência central da banda $S_x(\omega_k)$. Com esta informação é possível calcular a amplitude associada à harmónica de frequência ω_k . A série final obtém-se por sobreposição das N harmónicas, associando a cada harmónica um ângulo de fase ϕ_k , gerado aleatoriamente obedecendo a uma distribuição uniforme no intervalo entre 0 e π (ver Figura 13).

Toda a formulação até agora apresentada sugere a representação da frequência em termos de frequência angular [rad/s]. A conversão dos Espectros de Potência duma representação em frequência circular [Hz] para frequência angular (e vice-versa) obedece à seguinte relação:

$$A_k^2 = 2 S_x(\omega_k) \Delta\omega = 2 S_x(\omega_k) 2\pi \Delta f = 2 S'_x(f_k) \Delta f \quad \rightarrow \quad S'_x(f_k) = S_x(\omega_k) 2\pi \quad (36)$$

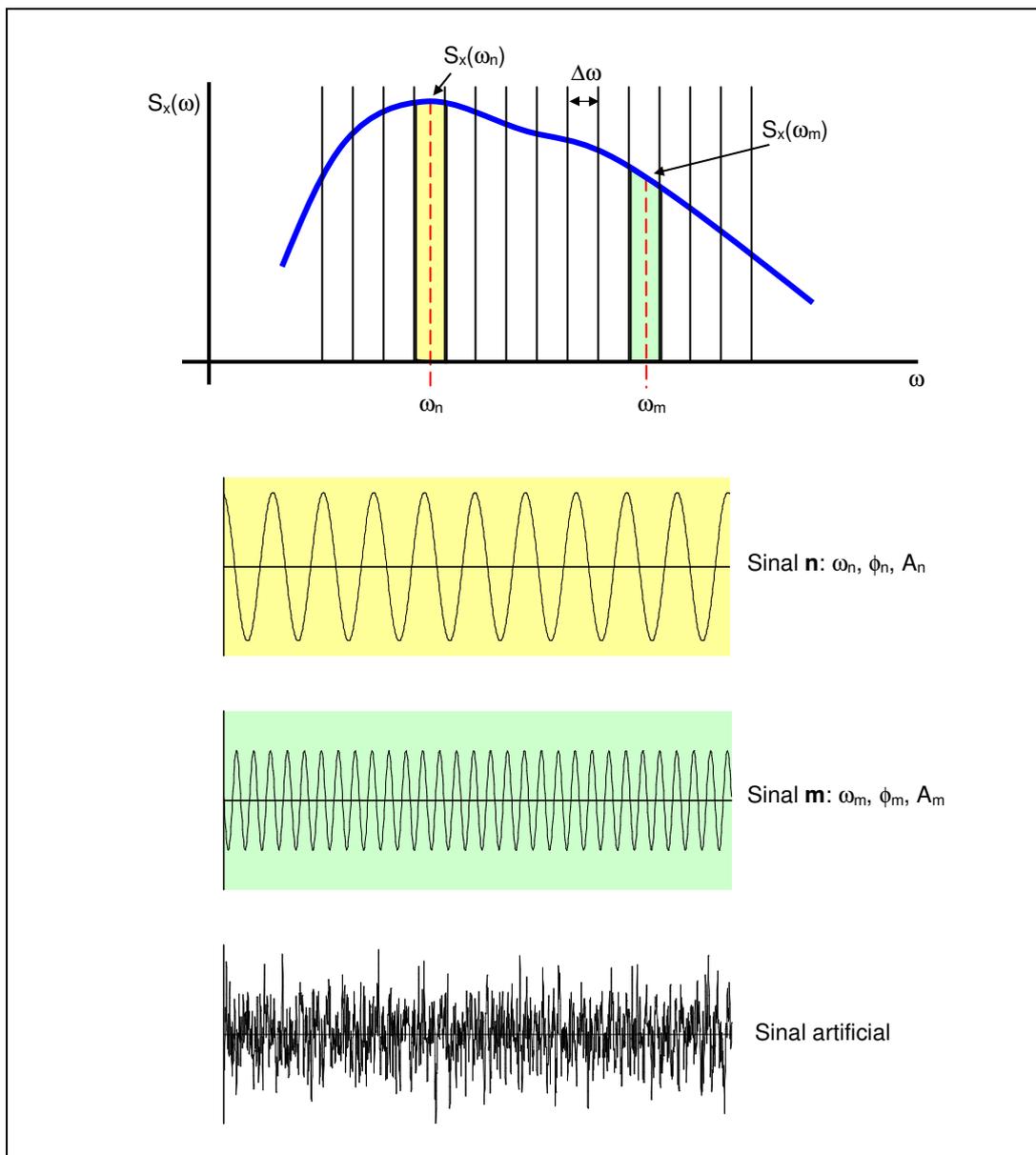


Figura 13 – Geração de acelerogramas artificiais a partir de Espectro de Potência (esquema).

1.3.2 Cálculo do Espectro de Resposta a partir do Espectro de Potência

Tal como foi referido na secção 1.2.1, o espectro de resposta representa a máxima resposta de um oscilador de um grau de liberdade com período e amortecimento determinado, quando sujeito a uma acção sísmica. Se essa acção sísmica se encontra definida através do seu espectro de potência, o cálculo dessa resposta máxima é relativamente fácil e envolve metodologias já apresentadas em secções anteriores.

Como já foi referido é possível calcular o espectro de potência da resposta de um determinado oscilador de um grau de liberdade a partir do espectro de potência da acção, desde que se conheça a função de transferência que mede a resposta pretendida (equação 27). Assim, o cálculo

da resposta máxima pode ser feito aplicando directamente a equação (24), que permite calcular o valor máximo da grandeza representada através de um espectro de potência. Convém realçar que o resultado da equação (24) traduz um só valor do espectro de resposta. Para obter uma representação do espectro de resposta para diversos valores de frequência e amortecimento é necessário repetir a sequência de cálculo indicada para todos os pontos pretendidos.

Assim, a determinação do espectro de resposta a partir de um espectro de potência envolve a seguinte sequência de cálculo:

- 1) Determinação do espectro de potência da resposta através da utilização da função de transferência $H(\omega)$, que relaciona as acelerações na base com as acelerações absolutas da resposta:

$$S_{ri}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_a(\omega) \quad (27)$$

Em que:

$S_{ri}(\omega)$ - espectro de potência da resposta para o oscilador i , de frequência própria ω_{in} ;

$S_a(\omega)$ - espectro de potência da acção;

$H(\omega)$ - função de transferência do oscilador:

$$H(\omega) = \frac{\omega_{in}^2 + i 2 \zeta \omega \omega_{in}}{\omega_{in}^2 - \omega^2 + i 2 \zeta \omega \omega_{in}} \quad (37)$$

ζ - coeficiente de amortecimento;

ω_{in} - frequência própria do oscilador.

- 2) Cálculo do espectro de resposta.

Define-se espectro de resposta $E_R(\omega_n, \zeta)$, como o conjunto dos valores máximos da resposta de osciladores com amortecimento ζ e frequência própria ω_n , quando sujeitos a uma excitação na base. Na prática é habitual identificar, para cada oscilador com frequência própria ω_n e amortecimento ζ , o correspondente valor do espectro de resposta com o valor médio da distribuição de extremos associada ao processo estocástico que define a resposta desse oscilador. Assumindo que a distribuição de extremos corresponde assintoticamente a uma distribuição de Cramer (Pereira, 1974), o valor médio dos extremos pode ser aproximado pela expressão seguinte, expressão esta que corresponde à mediana da distribuição de extremos para uma resposta de duração s :

$$E_R(\omega_n, \zeta) = \sqrt{2 \lambda_0 \left[\ln \left(\frac{s}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \right) - \ln(\ln 2) \right]} \quad (24)$$

1.3.3 Cálculo do Espectro de Potência a partir do Espectro de Resposta

Não existe nenhum processo que permita calcular directamente as funções de densidade espectral de potência, também designadas por espectros de potência, a partir dos espectros de resposta.

Como existem, no entanto, processos que permitem obter os espectros de resposta a partir dos espectros de potência, é possível determinar o espectro de potência pretendido através dum processo iterativo. Este processo consiste na sucessiva correcção de um espectro de potência inicialmente estimado, sendo as correcções baseadas na comparação do espectro de resposta associado ao espectro de potência obtido em cada iteração, com o espectro de resposta representativo da acção sísmica que se pretende reproduzir.

De seguida apresenta-se o processo iterativo utilizado, descrevendo os vários passos que o compõem:

1º passo - Escolha de um espectro de potência inicial $S_{a0}(\omega)$. Esta estimativa inicial do espectro de potência pode ser um espectro uniforme em toda a gama de frequências considerada.

2º passo - Cálculo do correspondente espectro de resposta $E_R(\omega, \zeta)$.

3º passo - Cálculo do quociente entre o espectro de resposta obtido e o espectro de resposta inicialmente definido:

$$R(\omega_{in}) = \frac{E_{R}^{OBJ}(\omega_{in})}{E_R(\omega_{in})} \quad (38)$$

Se a diferença entre o espectro de resposta visado e o espectro de resposta obtido for aceitável, o processo de cálculo do espectro de potência está concluído. Se tal não se verificar, é calculada uma nova estimativa do espectro de potência, multiplicando o espectro de potência anterior pelo quadrado do quociente $R(\omega_{in})$, em cada valor da frequência ω , e repete-se o 2º passo.

2 Referências

- Clough, R. e Penzien, J. – “Dynamic of Structures” – McGraw-Hill, 2ª Edição, 1993.
- Hudson, D. E. – “Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology” – 1ª Conferência Mundial de Eng. Sísmica, Berkeley, 1956.
- Hudson, D. E. – “Some Problems in Application of Spectrum Techniques to Strong Motion Earthquake Analysis” – Bul. Seismological Society of America, Vol. 52, No. 2, Abril 1962.
- AN – Anexo Nacional ao Eurocódigo 8 (EN 1998-1), Junho, 2009.
- Pereira, J., Métodos Probabilísticos em Engenharia Sísmica, Memória nº 442 - Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 1974.
- Sólnes, J. - “Stochastic Processes and Random Vibrations” - John Wiley & Sons, Chichester, 1997.