

# Análise de Vigas em Fundação Elástica

Luís Manuel Santos Castro

## 1 Introdução

Nestes apontamentos é efectuada uma breve descrição das principais metodologias utilizadas na resolução de problemas de vigas em fundação elástica. Este tipo de problemas ocorre com alguma frequência em Engenharia Civil; basta recordar por exemplo as vigas de fundação ou o caso dos carris dos caminhos de ferro.

As grandezas envolvidas na caracterização do comportamento destes elementos estruturais - deslocamentos, deformações e esforços - são em tudo semelhantes às que estamos habituados a lidar no caso dos elementos de viga de pórticos planos.

No entanto, na equação diferencial que rege o comportamento deste tipo de estruturas surge um termo adicional que está associado à reacção vertical exercida pela fundação sobre a viga.

Esta alteração que à primeira vista parece pouco significativa, vai implicar uma alteração substancial no modo de funcionamento deste tipo de estruturas. Como se verá numa primeira fase, a resolução analítica deste tipo de problemas é bem mais complicada e pesada que a que usualmente se aplica na solução de problemas correntes de vigas, mesmo que se considerem condições de apoio e carregamento bem simples.

Numa primeira secção, é descrita a forma através da qual se pode determinar a solução analítica exacta. Rapidamente se concluirá que esta forma de efectuar os cálculos é muito trabalhosa e por vezes bem difícil de um ponto de vista de tratamento matemático das equações.

Tendo em conta a dificuldade associada à obtenção de uma solução exacta, têm vindo a ser desenvolvidas ao longo do tempo “ferramentas” numéricas que permitem a obtenção de soluções aproximadas. Estas técnicas são conceptualmente bem mais simples e embora apenas permitam a obtenção de uma aproximação, essa aproximação pode ser tão boa quanto se quiser e a partir de um certo limite confunde-se em termos práticos com a própria solução exacta do problema.

Neste documento são apresentados os métodos de cálculo aproximado mais utilizados na resolução de problemas de vigas em fundação elástica; são eles a Análise de Fourier, o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos.

Chama-se desde já a atenção para o facto de nestes apontamentos não se efectuar uma apresentação exhaustiva de qualquer uma dessas três técnicas. Indica-se apenas a forma como podem ser aplicadas na resolução de problemas de vigas em fundação elástica. O estudo completo dessas técnicas não dispensará uma leitura dos livros de texto que se listam nas referências bibliográficas.

## 2 Definição do problema

Considere-se a viga em fundação elástica representada na figura 1. Neste tipo de situação, é usual admitir a hipótese de Winckler, segundo a qual a reacção exercida pelo solo sobre a estrutura é directamente proporcional ao deslocamento transversal da viga,  $w(x)$ . A essa constante de proporcionalidade pode chamar-se rigidez da fundação e é denotada aqui pelo parâmetro  $k$ .

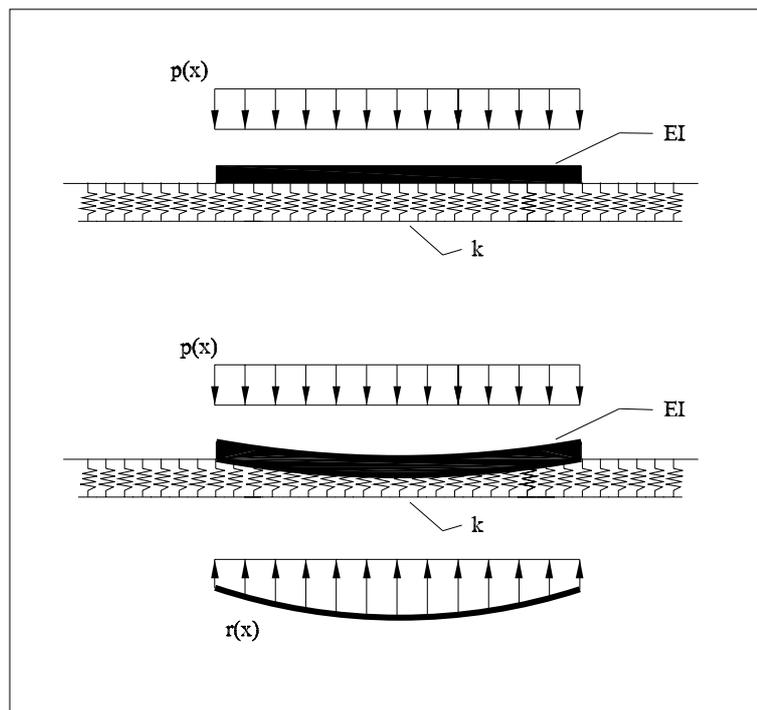


Figura 1: *Viga em fundação elástica*

O valor da reacção do solo é então dada por

$$r(x) = k w(x)$$

Se nas extremidades da viga se puder considerar que o campo de deslocamentos transversais se anula, obtém-se uma viga simplesmente apoiada, tal como se encontra representado na figura 2.

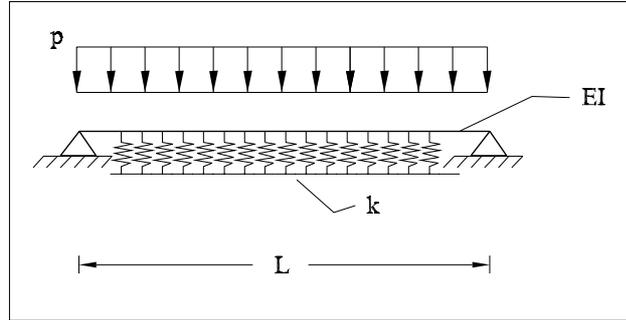


Figura 2: Viga simplesmente apoiada

A equação diferencial que rege o comportamento da viga em fundação elástica pode ser escrita na forma:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k w(x) = p(x) \quad (1)$$

As condições de fronteira a considerar (duas em cada extremidade da viga) encontram-se listadas no quadro 1

Nó encastrado	Nó simplesmente apoiado	Nó livre
$w = \bar{w}$	$w = \bar{w}$	$-EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} = \bar{v}$
$-\frac{dw(x)}{dx} = \bar{\theta}$	$-EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \bar{m}$	$-EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \bar{m}$

Tabela 1: Condições de fronteira para vigas

Uma vez determinado o campo de deslocamentos transversais (através da resolução analítica da equação diferencial ou através da aplicação de um qualquer método de análise aproximado) é possível obter de forma sequencial todas as grandezas envolvidas na caracterização do comportamento da estrutura em análise. Desta forma, o campo de rotações pode ser calculado a partir da igualdade:

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} \quad (2)$$

As condições de compatibilidade no domínio permitem a determinação do campo de curvaturas,  $\chi(x)$

$$\chi(x) = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3)$$

Por fim, as relações de elasticidade e as condições de equilíbrio no domínio conduzem

à determinação dos campos de momentos flectores e esforços transversos.

$$M(x) = EI \chi(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (4)$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \quad (5)$$

### 3 Solução Analítica

Pretende-se analisar a viga simplesmente apoiada representada na figura 2. De um ponto de vista matemático, pode dizer-se que se pretende resolver a equação diferencial de quarta ordem:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + k w(x) = p(x) \quad (6)$$

sujeita às condições de fronteira:

$$w(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad M(0) = 0, \quad M(L) = 0 \quad (7)$$

Estas condições de fronteira podem ser escritas em função do valor do campo de deslocamentos transversais e das suas derivadas calculadas nas extremidades do domínio em análise, tal como se encontra indicado no quadro 1. Desta forma, é possível escrever:

$$w(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad d^2 w/dx^2(0) = 0, \quad d^2 w/dx^2(L) = 0 \quad (8)$$

Para resolver a equação diferencial (6), pode utilizar-se o procedimento geral que assume que a solução pode ser decomposta na soma de duas parcelas, a primeira referente à solução da equação diferencial homogénea,  $w_h(x)$ , e a segunda associada a uma qualquer solução particular da equação dada,  $w_p(x)$ . Tem-se, desta forma

$$w(x) = w_h(x) + w_p(x) \quad (9)$$

Se se considerar que a carga aplicada é uniformemente distribuída, a solução particular pretendida pode ser escrita na forma:

$$w_p(x) = \frac{p}{k} \quad (10)$$

A equação homogénea é escrita no formato:

$$EI \frac{d^4 w_h(x)}{dx^4} + k w_h(x) = 0 \quad (11)$$

As soluções desta equação têm o formato geral:

$$w(x) = e^{\lambda x} \quad (12)$$

Calculando as sucessivas derivadas desta “função de teste” obtém-se:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \frac{d^3 w(x)}{dx^3} = \lambda^3 e^{\lambda x}, \quad \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \lambda^4 e^{\lambda x}, \quad (13)$$

Substituindo as igualdades anteriores na equação (6) obtém-se a chamada *equação característica* da equação diferencial:

$$\lambda^4 e^{\lambda x} + \frac{k}{EI} e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^4 + \frac{k}{EI} = 0 \quad (14)$$

As raízes desta equação correspondem aos seguintes pares de complexos conjugados

$$\lambda = \beta \pm i\beta, \quad \lambda = -\beta \pm i\beta \quad (15)$$

onde o parâmetro  $\beta$  é dado por:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (16)$$

A solução da equação homogénea pode ser então escrita na forma geral:

$$w_h(x) = e^{\beta x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) + e^{-\beta x} (C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)) \quad (17)$$

O campo de deslocamentos transversais na viga pode ser obtido somando as soluções (17) e (26). Tem-se

$$w(x) = \frac{p}{k} + e^{\beta x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) + e^{-\beta x} (C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)) \quad (18)$$

onde as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são determinadas tendo em conta as condições de fronteira expressas nas equações (8). Para impor estas condições de fronteira, é necessário ter em conta que

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2\beta^2 \left( (-D + B e^{2\beta x}) \cos(\beta x) + (C - A e^{2\beta x}) \sin(\beta x) \right)}{e^{\beta x}} \quad (19)$$

Resolvendo o sistema de quatro equações não-lineares, é possível obter a seguinte definição para essas constantes:

$$A = - \left( \frac{p (1 + e^{\beta L} \cos(\beta L))}{k (1 + e^{2\beta L} + 2 e^{\beta L} \cos(\beta L))} \right) \quad (20)$$

$$B = - \left( \frac{e^{\beta L} p \sin(\beta L)}{k + e^{2\beta L} k + 2 e^{\beta L} k \cos(\beta L)} \right) \quad (21)$$

$$C = - \left( \frac{e^{\beta L} p (e^{\beta L} + \cos(\beta L))}{k (1 + e^{2\beta L} + 2 e^{\beta L} \cos(\beta L))} \right) \quad (22)$$

$$D = - \left( \frac{e^{\beta L} p \sin(\beta L)}{k + e^{2\beta L} k + 2 e^{\beta L} k \cos(\beta L)} \right) \quad (23)$$

Substituindo estas igualdades na equação (18) obtém-se por fim a definição do campo de deslocamentos transversais numa viga simplesmente apoiada em fundação elástica.

$$w(x) = \frac{p (\cos(\beta L) + \cosh(\beta L) - \cos(\beta x) \cosh(\beta (L - x)) - \cos(\beta (L - x)) \cosh(\beta x))}{k (\cos(\beta L) + \cosh(\beta L))} \quad (24)$$

A utilização da definição (4) permite determinar o campo de momentos flectores nessa mesma viga.

$$M(x) = EI \frac{2\beta^2 p (\sin(\beta x) \sinh(\beta (L - x)) + \sin(\beta (L - x)) \sinh(\beta x))}{k (\cos(\beta L) + \cosh(\beta L))} \quad (25)$$

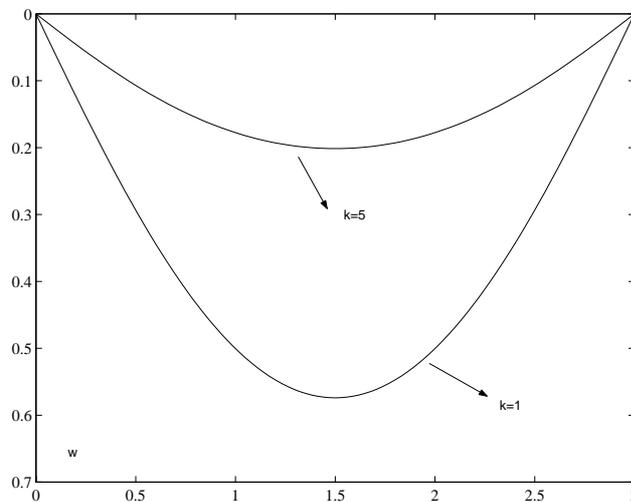


Figura 3: Campo de deslocamentos ( $k = 1$  e  $k = 5$ )

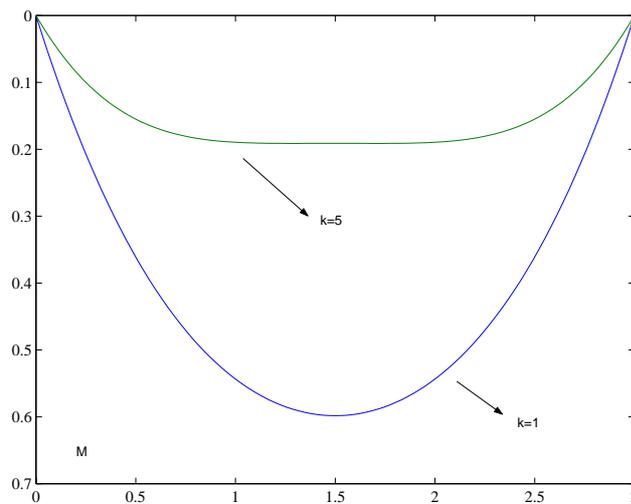


Figura 4: Diagrama de momentos flectores ( $k = 1$  e  $k = 5$ )

Interessante agora é verificar qual é o andamento desses campos de deslocamentos e desses campos de momentos flectores. Será que o comportamento de uma viga em

fundação elástica se aproxima do comportamento de uma viga simplesmente apoiada? E qual é a importância da relação entre a rigidez de flexão da viga,  $EI$  e a rigidez do solo de fundação,  $k$ ?

Para responder a esta pergunta, considere-se a viga representada na figura 2 e onde se considera que  $p = 1$ ,  $L = 3m$ , e  $EI = 1$ . Na figura 3 representa-se o campo de deslocamentos transversais que se obtém quando se considera a rigidez da fundação igual a  $k = 1$  e  $k = 5$ , respectivamente.

À primeira vista, parece que a solução é muito semelhante à que se obteria numa viga simplesmente apoiada. No entanto, se se tiver em conta a informação contida na figura 4, onde se representa o diagrama de momentos flectores para cada um daqueles casos, verifica-se que à medida que o valor de  $k$  aumenta, o comportamento da estrutura se vai afastando cada vez mais da solução habitual em vigas simplesmente apoiadas. Isto deve-se à importância crescente que a reacção do solo vai desempenhando no comportamento do elemento estrutural à medida que se incrementa o valor da rigidez  $k$ .

Este efeito é cada vez mais visível à medida que se aumenta o valor da rigidez do solo de fundação, tal como se encontra ilustrado nas figuras 5 e 6, onde se representam os campos de deslocamentos e os diagramas de momentos flectores quando se assume que  $k = 20, 40, 100$  e  $200$ .

É bem visível que o diagrama de momentos flectores se “afasta” cada vez mais do habitual, surgindo mesmo para valores de  $k$  suficientemente grandes, momentos negativos na secção de meio-vão da viga, situação completamente inesperada à partida.

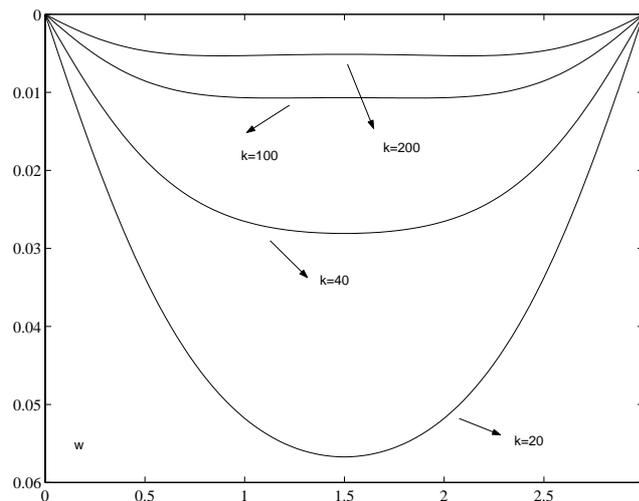


Figura 5: *Campo de deslocamentos ( $k \geq 20$ )*

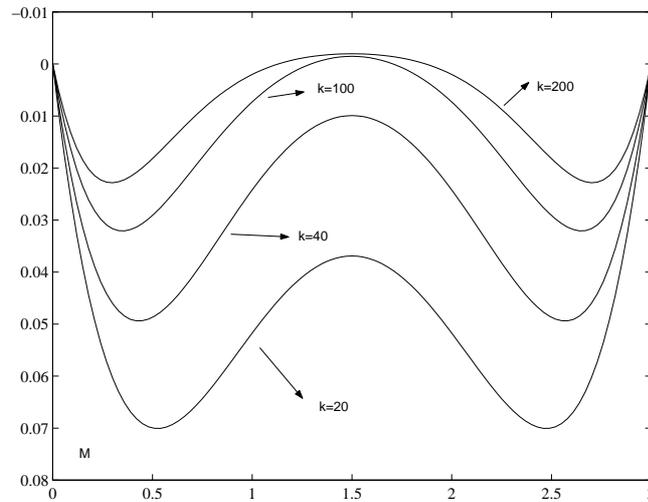


Figura 6: Diagrama de momentos flectores ( $k \geq 20$ )

## 4 Solução com Séries de Fourier

Como se pode verificar na secção anterior, mesmo para casos de carga bastante simples é difícil e trabalhoso conseguir determinar a solução analítica para o problema da viga em fundação elástica.

Haverá algum tipo de carga que permita a obtenção de uma solução analítica mais simples para o caso da viga simplesmente apoiada em fundação elástica?

Felizmente, a resposta é afirmativa. Como se demonstra de seguida, sempre que o carregamento for sinusoidal, é possível a determinação de uma solução analítica bem mais “simpática” do que a que foi trabalhada no ponto anterior.

### 4.1 Carregamentos sinusoidais

Considere-se que a carga aplicada na viga simplesmente apoiada tem o seguinte aspecto:

$$p(x) = p_0 \sin\left(\frac{m \pi x}{L}\right) \quad (26)$$

Qual deverá ser o aspecto da solução exacta? De um ponto de vista simplista, poder-se-à afirmar que o que procuramos é uma função que derivada quatro vezes, somada com ela própria permita recuperar o carregamento sinusoidal. Recordando que a quarta derivada da função “seno” é também uma função sinusoidal e que este é precisamente o carregamento aplicado, poderemos “suspeitar” que a solução pretendida será da forma:

$$w(x) = m_0 \sin\left(\frac{m \pi x}{L}\right) \quad (27)$$

onde a constante  $m_0$  deverá ser determinada por forma a que a equação diferencial (1) no domínio venha verificada. Derivando sucessivas vezes a solução (27) obtém-se:

$$\frac{dw(x)}{dx} = m_0 \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (28)$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -m_0 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (29)$$

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = -m_0 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^3 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (30)$$

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = m_0 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (31)$$

Substituindo estas derivadas na equação diferencial que se encontra a ser resolvida obtém-se:

$$EI m_0 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + k m_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = p_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (32)$$

Da equação (32) resulta que a constante  $m_0$  deverá tomar o seguinte valor:

$$m_0 \left( EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + k \right) = p_0 \quad (33)$$

ou, ainda;

$$m_0 = \frac{p_0}{EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + k} \quad (34)$$

Conclui-se desta forma que quando o carregamento tem a expressão indicada em (26), o campo de deslocamentos transversais com a equação

$$w(x) = \frac{p_0}{EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (35)$$

satisfaz a equação diferencial (6). O campo de momentos flectores associado a esta solução pode ser determinado de imediato tendo em conta a equação (4).

$$M(x) = EI \frac{p_0 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}{EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (36)$$

Por sua vez, tendo em conta a definição (5), o campo de esforços transversos poderá ser dado pela igualdade:

$$V(x) = EI \frac{p_0 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^3}{EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (37)$$

A questão que se coloca é a seguinte: será que a solução determinada corresponde de facto à solução exacta para o problema formulado? É que, recorde-se, para que uma dada função possa considerar-se como solução da equação diferencial, não só tem que satisfazer a condição no domínio (condição já verificada), como tem de satisfazer todas as condições de fronteira do problema, que neste caso foram identificadas pelas igualdades (8).

No entanto, não é difícil verificar que, tendo em atenção as definições (35) e (36), todas as condições de fronteira se encontram satisfeitas, uma vez que

$$\sin\left(\frac{m\pi 0}{L}\right) = \sin\left(\frac{m\pi L}{L}\right) = 0$$

Conclui-se então que as expressões obtidas para  $w(x)$ ,  $M(x)$  e  $V(x)$  correspondem de facto à solução exacta sempre que o carregamento é da forma (26).

## 4.2 Introdução à Análise de Fourier

Infelizmente, a quase totalidade dos carregamentos que nos interessam considerar em aplicações correntes em Engenharia não são constituídos por cargas sinusoidais. Como se poderão então aproveitar os resultados obtidos no parágrafo anterior para a resolução de problemas onde o carregamento é perfeitamente geral?

Para este efeito é essencial tirar partido da Análise de Fourier. De uma forma bastante simplificada, pode dizer-se que qualquer função “suficientemente regular” pode ser representada como uma combinação linear de funções trigonométricas (senos e cosenos).

Desta forma é possível exprimir as cargas distribuídas aplicadas na estrutura como combinações lineares de cargas sinusoidais. Para a acção de cada uma destas actuando em separado é possível determinar a solução exacta para a viga em fundação elástica. Finalmente, a solução pretendida é composta pela combinação linear das soluções individuais obtidas. Voltaremos a este aspecto na secção seguinte.

Considere-se a função periódica  $f(x)$  definida no intervalo  $[-L, L]$ . Esta função pode ser representada “em Série de Fourier” de acordo com:

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

onde os coeficientes da combinação linear acima definida são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (38)$$

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (39)$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (40)$$

Se a função  $f(x)$  é simétrica em relação à origem (isto é,  $f(x) = f(-x)$ ), a expansão anterior pode ser escrita de uma forma simplificada. Tem-se nestas circunstâncias,

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

onde os coeficientes da combinação linear são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad (41)$$

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (42)$$

Se a função  $f(x)$  for antissimétrica (o que quer dizer que  $f(x) = -f(-x)$ ), a expansão em Série de Fourier toma o seguinte aspecto:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

onde os coeficientes da combinação linear são dados por:

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

### 4.3 Definição de soluções aproximadas

Considere-se agora que  $p(x)$  corresponde ao carregamento que está aplicado ao longo da viga simplesmente apoiada,  $x \in [0, L]$ . Para conseguir exprimir este carregamento como uma combinação linear de funções sinusoidais, considera-se que  $p(x)$  admite uma “extensão antissimétrica” no intervalo  $[-L, L]$ . Desta forma, a carga pode ser definida através do somatório de infinitos termos

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (43)$$

onde os coeficientes da combinação linear são dados pelo integral

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (44)$$

Tendo em conta os resultados obtidos expressos nas igualdades (35) e (36), é também possível exprimir a resposta da estrutura como uma combinação linear de infinitos termos, a qual pode ser apresentada na forma:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (45)$$

$$M(x) = \sum_{m=1}^{\infty} EI \frac{b_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}{EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (46)$$

Os campos de deslocamentos transversais e momentos flectores apresentados nas igualdades (45) e (46) só corresponderão à solução exacta se se considerar um número infinito de termos envolvidos no cálculo do somatório.

No entanto, apenas é calculado em problemas práticos um número finito de termos desses somatórios. Desta forma, obtém-se apenas uma solução aproximada para o problema em causa.

A questão que logo se coloca relaciona-se com o número de termos que se torna necessário considerar para se poder obter uma boa solução aproximada. Para responder a esta questão apresentam-se os seguintes dois exemplos de aplicação.

#### 4.4 Carga uniformemente distribuída

Considere-se de novo a viga simplesmente apoiada representada na figura 2. Os coeficientes  $b_m$  da expansão da carga  $p(x) = p$  podem ser calculados através da igualdade:

$$b_m = \frac{2p}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (47)$$

$$b_m = \frac{4p}{m\pi} \quad (m = 1, 3, 5, 7, \dots) \quad (48)$$

Desta forma, o campo de deslocamentos transversais aproximado pode ser escrito na forma

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4p}{m\pi} \frac{1}{EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (49)$$

O campo de momentos flectores pode ser escrito na forma:

$$M(x) = \sum_{m=1}^{\infty} EI \frac{4p}{m\pi} \frac{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}{EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (50)$$

Se por absurdo se considerasse apenas um termo nas expansões acima indicadas, obter-se-iam as seguintes aproximações para o carregamento, para o campo de deslocamentos transversais e para o campo de momentos flectores.

$$p(x) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \quad (51)$$

$$w(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{EI \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \quad (52)$$

$$M(x) = EI \frac{4}{\pi} \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{EI \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \quad (53)$$

Estes campos encontram-se representados nas figuras 7, 8 e 9, respectivamente, para o caso em que se considera  $k = 1$ ,  $EI = 1$  e  $L = 3$ . Da análise da figura 7 ressalta que a aproximação conseguida para a carga aplicada considerando apenas um termo na expansão (43) é bastante grosseira.

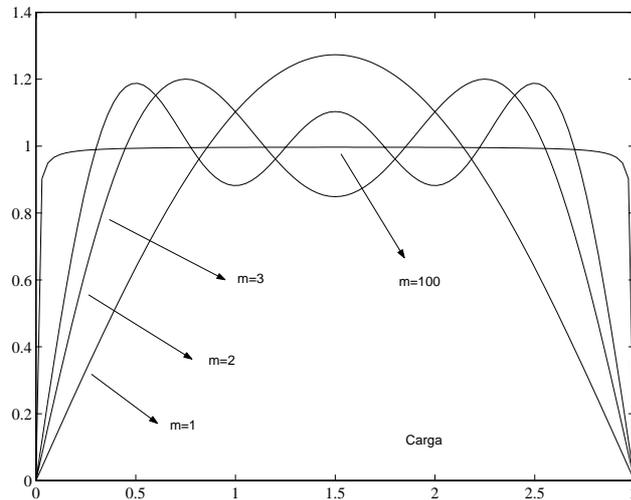


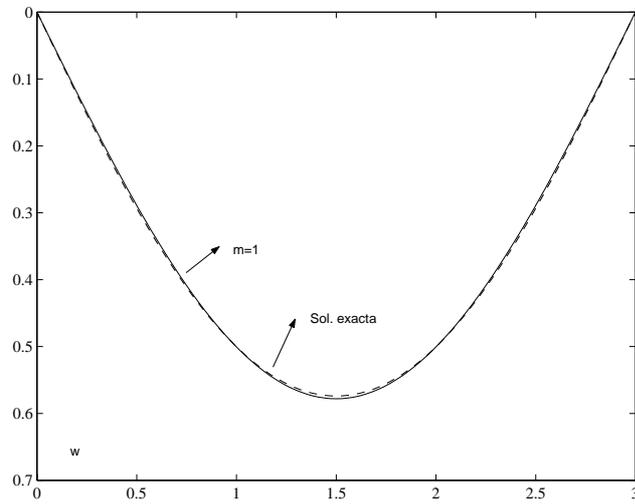
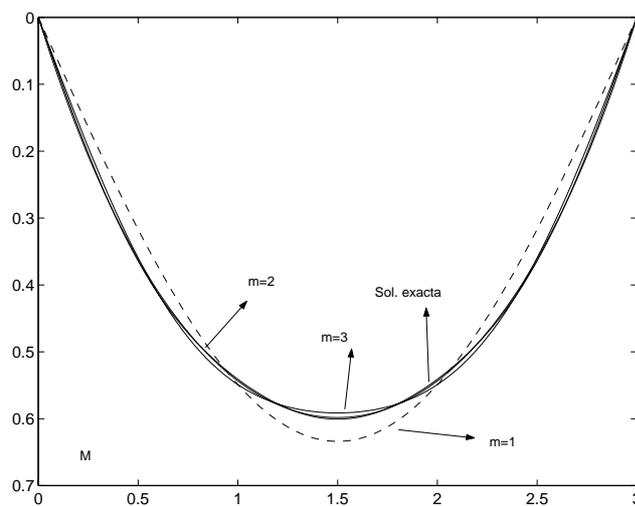
Figura 7: Aproximação da carga aplicada

No entanto, e de forma surpreendente, verifica-se que mesmo considerando apenas um termo, a aproximação (52) para o campo de deslocamento permite recuperar quase a solução exacta e o campo de momentos definido em (53) aproxima-se bastante do andamento exacto representado na figura 9.

A análise das figuras 8 e 9 permite concluir que com apenas três termos na série, os campos aproximados dados por

$$w(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{EI \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \quad (54)$$

$$+ \frac{4}{3\pi} \frac{1}{EI \left(\frac{3\pi}{3}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{3\pi x}{3}\right) \quad (55)$$

Figura 8: *Campo de deslocamentos ( $k = 1$ )*Figura 9: *Diagrama de momentos flectores ( $k = 1$ )*

$$+ \frac{4}{5\pi} \frac{1}{EI \left(\frac{5\pi}{3}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{5\pi x}{3}\right) \quad (56)$$

$$+ \dots \quad (57)$$

$$M(x) = \frac{4}{\pi} \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{EI \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \quad (58)$$

$$+ \frac{4}{3\pi} \frac{\left(\frac{3\pi}{3}\right)^2}{EI \left(\frac{3\pi}{3}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{3\pi x}{3}\right) \quad (59)$$

$$+ \frac{4}{5\pi} \frac{\left(\frac{5\pi}{3}\right)^2}{EI \left(\frac{5\pi}{3}\right)^4 + k} \sin\left(\frac{5\pi x}{3}\right) \quad (60)$$

$$+ \dots \quad (61)$$

correspondem praticamente à solução exacta.

No entanto, a aproximação obtida para a carga envolvendo apenas os três primeiros termos da série

$$p(x) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \quad (62)$$

$$+ \frac{4}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi x}{3}\right) \quad (63)$$

$$+ \frac{4}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi x}{3}\right) \quad (64)$$

$$+ \dots \quad (65)$$

é ainda bastante pouco satisfatória.

Este é um dos aspectos mais importantes das soluções aproximadas baseadas na utilização das séries de Fourier na resolução aproximada de equações diferenciais. Regra geral, uma boa solução pode ser obtida com o cálculo de um número significativamente baixo de termos nas expansões em série, mesmo que a representação do carregamento exija um número de termos bastante superior. Da análise da figura 7 verifica-se que mesmo com a consideração de cem termos na expansão em série, a representação do carregamento ainda é bastante deficiente.

Na secção referente à resolução analítica do problema, já se tinha verificado que à medida que se aumenta o valor da rigidez  $k$ , a solução vai-se afastando cada vez mais

da solução habitual em vigas simplesmente apoiadas e que os diagramas de esforços adquirem um “formato” cada vez mais estranho.

Desta forma será de prever que à medida que o valor de  $k$  aumenta será necessário aumentar o número de termos considerado na expansão em série para garantir que a solução aproximada se aproxime o desejado da solução exacta. Este aspecto encontra-se ilustrado nas figuras 10 e 11, onde se representa o campo de deslocamentos e de momentos flectores para o caso em que se considera  $k = 200$ . Contudo é ainda visível que um pequeno número de termos é suficiente para se poder obter uma muita boa solução aproximada.

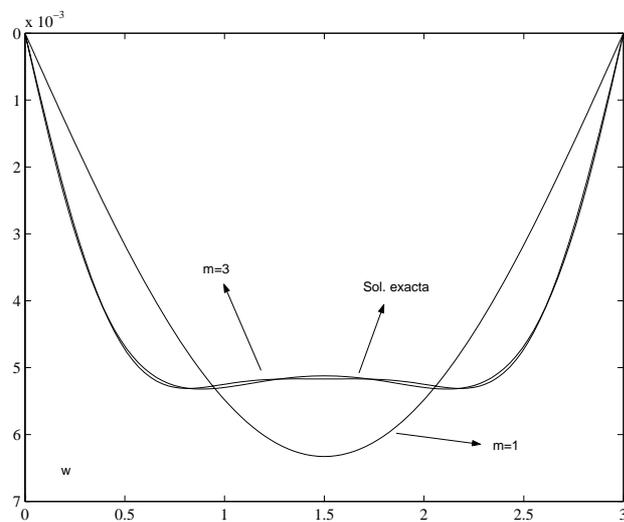


Figura 10: *Campo de deslocamentos* ( $k = 200$ )

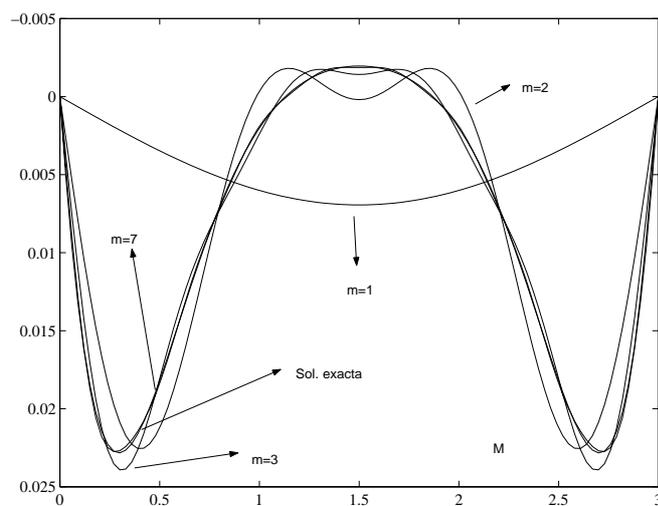


Figura 11: *Diagrama de momentos flectores* ( $k = 200$ )

## 4.5 Carga triangular

Até este instante apenas têm sido considerados nas análises carregamentos constituídos por cargas uniformemente distribuídas. No entanto, a metodologia desenvolvida permite a consideração de outro tipo de cargas.

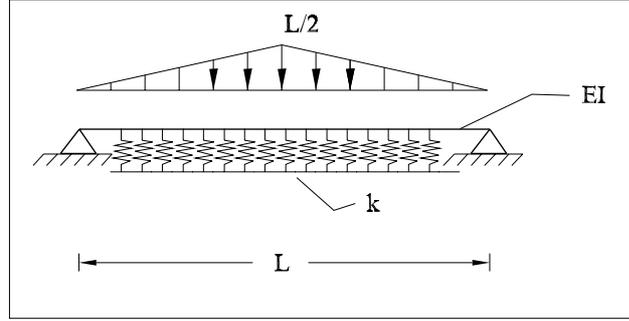


Figura 12: *Viga simplesmente apoiada com carga triangular*

Considere-se então a viga simplesmente apoiada representada na figura 12, a qual se encontra sujeita à acção de uma carga triangular definida pela equação:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < L/2 \\ L - x & L/2 < x < L \end{cases} \quad (66)$$

A expansão em série do carregamento permite obter

$$b_m = \begin{cases} 0 & m \text{ par} \\ \frac{4L}{n^2 \pi^2} & m = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{4L}{n^2 \pi^2} & m = 3, 7, 11, \dots \end{cases} \quad (67)$$

Desta forma, o campo de deslocamentos transversais poderá ser definido por

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4L(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2 \pi^2} \frac{1}{EI \left( \frac{(2m-1)\pi}{L} \right)^4 + k} \sin \left( \frac{(2m-1)\pi x}{L} \right) \quad (68)$$

e o campo de momentos flectores é definido pela igualdade

$$M(x) = \sum_{m=1}^{\infty} EI \frac{4L(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2 \pi^2} \frac{\left( \frac{(2m-1)\pi}{L} \right)^2}{EI \left( \frac{(2m-1)\pi}{L} \right)^4 + k} \sin \left( \frac{(2m-1)\pi x}{L} \right) \quad (69)$$

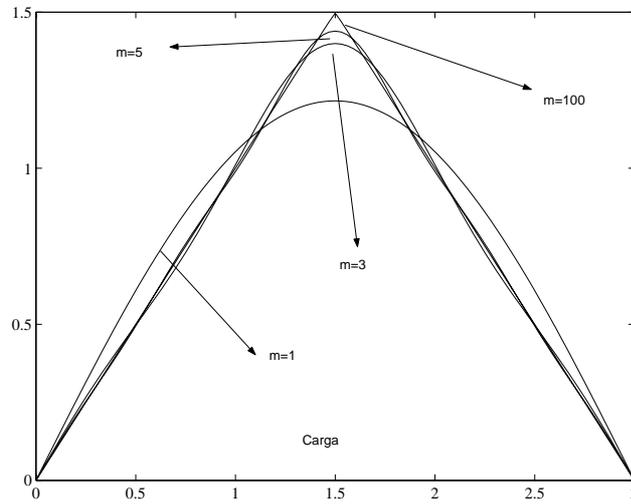


Figura 13: Aproximação da carga aplicada

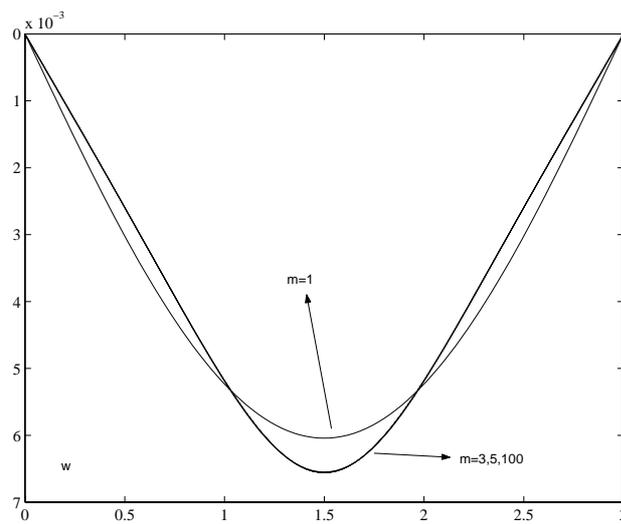


Figura 14: Campo de deslocamentos ( $k = 200$ )

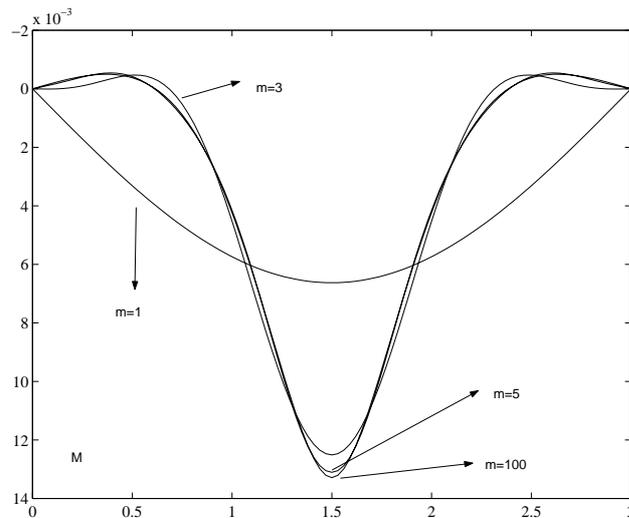


Figura 15: *Diagrama de momentos flectores* ( $k = 200$ )

As figuras 14 e 15 representam os deslocamentos transversais e os momentos que se obtêm considerando diferentes termos nas séries que definem a solução aproximada. É bem visível de novo que mesmo um pequeno número de termos permite a obtenção de uma solução de muito boa qualidade.

Na figura 13 apresenta-se a aproximação conseguida para o carregamento aplicado à viga. É à primeira vista surpreendente que para modelar de forma conveniente esta carga triangular sejam necessários menos termos na série em relação ao que tinha sido observado no caso da carga uniformemente distribuída. Este facto pode ser facilmente explicado se se tiver em consideração que a carga triangular se anula para  $x = 0$  e para  $x = 3$ , tal como acontece com as funções sinusoidais utilizadas na expansão. Esta função “encaixa” então com mais facilidade na base de funções que é utilizada no cálculo e é por consequência representada de forma mais “natural” que a carga uniformemente distribuída.

## 5 Método das Diferenças Finitas

### 5.1 Introdução ao método das diferenças finitas

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é uma das técnicas mais utilizadas na resolução de sistemas de equações diferenciais ou se se preferir, na resolução aproximada de problemas na área da Engenharia de Estruturas.

Historicamente desempenhou um papel muito importante na resolução aproximada de problemas para os quais não existem soluções analíticas exactas ou então a sua determinação é bem complicada. Hoje em dia foram de certa forma superados em popularidade e eficácia pelo Método dos Elementos Finitos, mas não deixam de constituir

uma técnica bastante elegante pela simplicidade de conceitos na qual se baseia.

No método das diferenças finitas, as derivadas que aparecem na definição da equação diferencial e na definição das condições de fronteira são substituídas (ou melhor, aproximadas) por diferenças envolvendo o valor que a função incógnita toma num conjunto de pontos igualmente espaçados aos quais se dá usualmente o nome de nós da discretização.

Considere-se o “troço” de malha de diferenças finitas (conjunto de nós) representado na figura 16.

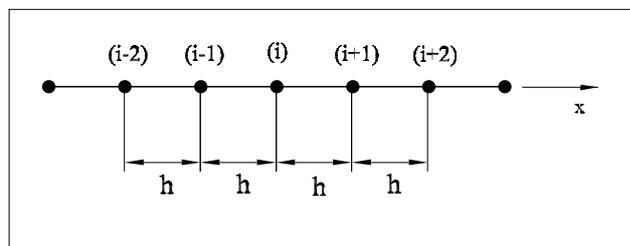


Figura 16: Malha de diferenças finitas

Considere-se por simplicidade que a função incógnita da equação diferencial corresponde ao campo de deslocamentos transversais. As derivadas de  $w(x)$  no nó  $i$  podem ser escritas na forma:

$$w'(i) = \frac{dw(i)}{dx} = \frac{1}{2h} (w_{i+1} - w_{i-1}) \quad (70)$$

$$w''(i) = \frac{d^2 w(i)}{dx^2} = \frac{1}{h^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \quad (71)$$

$$w'''(i) = \frac{d^3 w(i)}{dx^3} = \frac{1}{2h^3} (w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}) \quad (72)$$

$$w^{IV}(i) = \frac{d^4 w(i)}{dx^4} = \frac{1}{h^4} (w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) \quad (73)$$

## 5.2 Análise da viga simplesmente apoiada

### 5.2.1 Carga permanente

Para ilustrar a aplicação do método das diferenças finitas na resolução de problemas de vigas em fundação elástica, considere-se a estrutura representada na figura 17 onde se considera que  $L = 3$  e  $EI = 1$ .

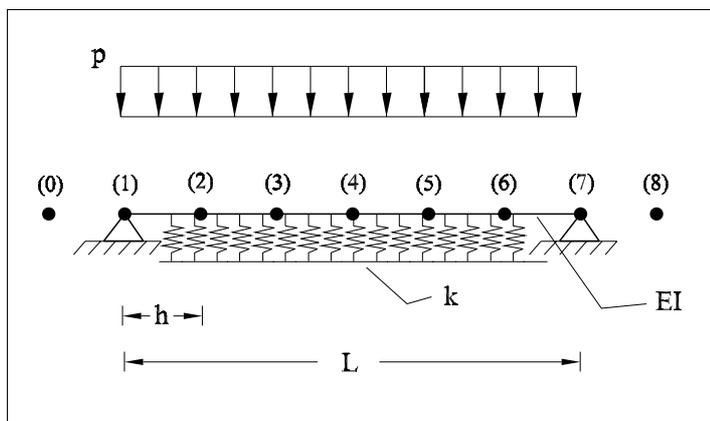


Figura 17: *Análise da viga simplesmente apoiada*

Na figura 17 já se encontra representada a malha a utilizar na resolução do problema. Esta malha é constituída por um conjunto de pontos pertencentes ao domínio da estrutura em estudo e que se devem encontrar igualmente espaçados. Considerou-se neste caso que  $h = 0.5$ , onde  $h$  representa a distância entre nós consecutivos da malha. Estes nós encontram-se numerados de 1 até 7.

De forma algo surpreendente, também se incluíram na malha os pontos 0 e 8, pontos esses que não pertencem ao domínio da estrutura. No entanto, a sua utilização é essencial para a imposição das condições de fronteira. Estas correspondem neste caso às condições indicadas em (8). Como a sua imposição passa pela consideração de derivadas do campo de deslocamentos nas extremidades da barra, o método das diferenças finitas requer que se conheçam os valores dos deslocamentos nos pontos “à frente” e “atrás” desses pontos para que aquelas derivadas possam ser calculadas.

A aplicação do MDF inicia-se pelo tratamento das condições de fronteira. Tendo em conta (8) e a aproximação das derivadas definidas em (70-73), é possível escrever:

$$w_{(x=0)} = 0 \Rightarrow w_1 = 0 \quad (74)$$

$$M_{(x=0)} = 0 \Rightarrow w''_{(x=0)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_2 - 2w_1 + w_0) = 0 \Rightarrow w_0 = -w_2 \quad (75)$$

$$w_{(x=L)} = 0 \Rightarrow w_7 = 0 \quad (76)$$

$$M_{(x=L)} = 0 \Rightarrow w''_{(x=L)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_8 - 2w_7 + w_6) = 0 \Rightarrow w_8 = -w_6 \quad (77)$$

O tratamento das quatro condições de fronteira permite sempre exprimir os deslocamentos dos nós “exteriores” ao domínio em função dos deslocamentos dos nós pertencentes ao domínio da estrutura. Neste caso, tem-se que  $w_0 = -w_2$  e  $w_8 = -w_6$ .

Uma vez tratadas as condições de fronteira, é agora necessário “escrever” a equação diferencial para cada um dos nós interiores da discretização que apresentam desloca-

mentos transversais não nulos. Estão neste caso os nós 2,3,4,5 e 6. Tendo em conta a equação diferencial (6) e a aproximação discutida para as derivadas do campo de deslocamentos transversais pode escrever-se:

$$\frac{EI}{h^4} (w_4 - 4w_3 + 6w_2 - 4w_1 + w_0) + kw_2 = p_2 \quad (78)$$

$$\frac{EI}{h^4} (w_5 - 4w_4 + 6w_3 - 4w_2 + w_1) + kw_3 = p_3 \quad (79)$$

$$\frac{EI}{h^4} (w_6 - 4w_5 + 6w_4 - 4w_3 + w_2) + kw_4 = p_4 \quad (80)$$

$$\frac{EI}{h^4} (w_7 - 4w_6 + 6w_5 - 4w_4 + w_3) + kw_5 = p_5 \quad (81)$$

$$\frac{EI}{h^4} (w_8 - 4w_7 + 6w_6 - 4w_5 + w_4) + kw_6 = p_6 \quad (82)$$

Substituindo nas igualdades anteriores a informação resultante do tratamento das condições de fronteira a qual pode ser expressa nas equações (74), (75), (76) e (77), obtém-se

$$\frac{EI}{h^4} (w_4 - 4w_3 + 5w_2) + kw_2 = p_2 \quad (83)$$

$$\frac{EI}{h^4} (w_5 - 4w_4 + 6w_3 - 4w_2) + kw_3 = p_3 \quad (84)$$

$$\frac{EI}{h^4} (w_6 - 4w_5 + 6w_4 - 4w_3 + w_2) + kw_4 = p_4 \quad (85)$$

$$\frac{EI}{h^4} (-4w_6 + 6w_5 - 4w_4 + w_3) + kw_5 = p_5 \quad (86)$$

$$\frac{EI}{h^4} (5w_6 - 2w_5 + w_4) + kw_6 = p_6 \quad (87)$$

Estas equações podem ser escritas no formato matricial

$$\frac{EI}{h^4} \begin{bmatrix} 5 + \frac{kh^4}{EI} & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 + \frac{kh^4}{EI} & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 + \frac{kh^4}{EI} & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 + \frac{kh^4}{EI} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 + \frac{kh^4}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} \quad (88)$$

A resolução deste sistema de equações lineares permite determinar o valor da aproximação do campo de deslocamentos em cada um dos nós interiores da malha de diferenças finitas considerada. A aplicação das igualdades (74), (75), (76) e (77) permite ainda determinar a aproximação nas extremidades da viga e nos nós “exteriores”.

O campo de momentos flectores pode ser determinado considerando a igualdade (4). Transformando as derivadas envolvidas nesta equação em diferenças finitas, é possível determinar o valor para a aproximação do campo de momentos flectores em cada um dos nós interiores da viga utilizando-se para o efeito o conjunto de equações:

$$M_1 = -\frac{EI}{h^2} (w_2 - 2w_1 + w_0) = \frac{EI}{h^2} (w_2 - w_2) = 0 \quad (89)$$

$$M_2 = -\frac{EI}{h^2} (w_3 - 2w_2 + w_1) = \frac{EI}{h^2} (w_3 - 2w_2) \quad (90)$$

$$M_3 = -\frac{EI}{h^2} (w_4 - 2w_3 + w_2) \quad (91)$$

$$M_4 = -\frac{EI}{h^2} (w_5 - 2w_4 + w_3) \quad (92)$$

$$M_5 = -\frac{EI}{h^2} (w_6 - 2w_5 + w_4) \quad (93)$$

$$M_6 = -\frac{EI}{h^2} (w_7 - 2w_6 + w_5) \frac{EI}{h^2} (-2w_6 + w_5) \quad (94)$$

$$M_7 = -\frac{EI}{h^2} (w_8 - 2w_7 + w_6) = \frac{EI}{h^2} (-w_6 + w_6) = 0 \quad (95)$$

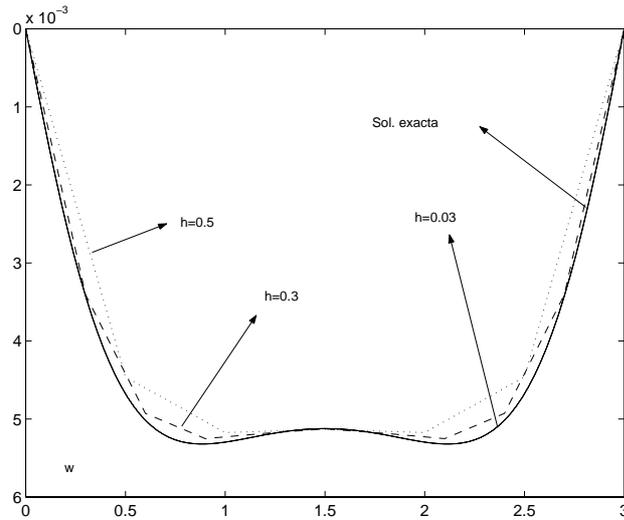


Figura 18: *Campo de deslocamentos* ( $k = 200$ )

Na figura 18 representa-se a solução obtida para o campo de deslocamentos transversais quando se considera  $h = 0.5$  e  $k = 200$ . Esta solução aproximada pode ser melhorada se

se considerarem malhas com um maior número de nós, o que corresponde a diminuir-se o espaçamento  $h$  entre nós consecutivos. Na mesma figura 18 apresentam-se as soluções obtidas com  $h = 0.3$  e com  $h = 0.03$ . Neste último caso a solução aproximada “recupera” a solução exacta.

Na figura 19 apresenta-se, para o mesmo conjunto de discretizações, os diagramas de momentos flectores,  $M(x)$ .

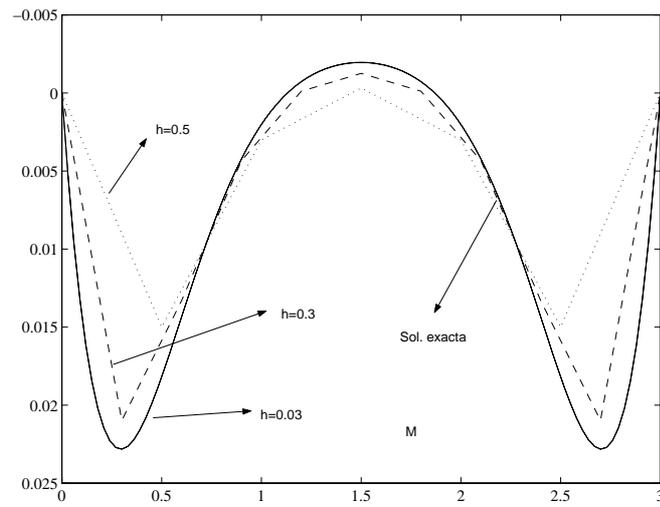


Figura 19: Diagrama de momentos flectores ( $k = 200$ )

### 5.2.2 Carga triangular

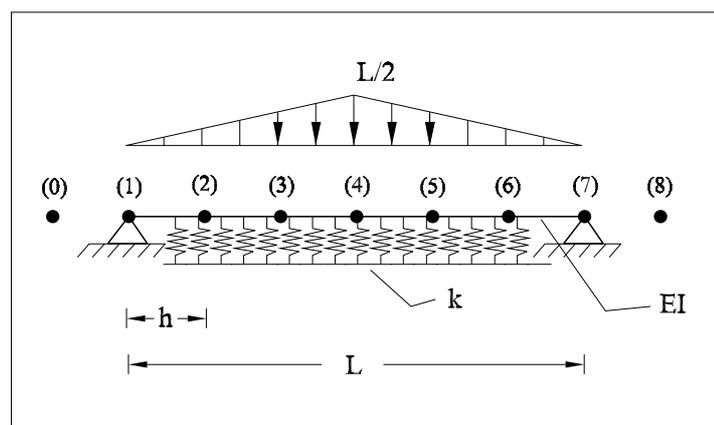


Figura 20: Análise da viga com carga triangular

Vamos agora ver como se podem considerar nas análises por diferenças finitas carregamentos diferentes. Considere-se de novo a carga triangular definida pela equação (66) e representada na figura 20.

Tendo sido alterado apenas o carregamento (a malha escolhida é a mesma), a única alteração a introduzir no sistema de equações (88) diz respeito ao termo independente, o qual passará a ser dado por (considerando o comprimento da viga igual a  $3m$ ):

$$\begin{bmatrix} L/6 \\ L/3 \\ L/2 \\ L/3 \\ L/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (96)$$

A resolução do sistema de equações permite obter os seguintes deslocamentos transversais nos nós interiores da discretização

$$w = \begin{bmatrix} 0.0026 \\ 0.0052 \\ 0.0070 \\ 0.0052 \\ 0.0026 \end{bmatrix} \quad (97)$$

Na figura 21 encontra-se representada a solução obtida para o campo de deslocamentos transversais e a sua comparação com a solução exacta para o problema. Verifica-se que mesmo com esta discretização *grosseira* se obtém uma aproximação bastante razoável para o campo de deslocamentos. No mesmo gráfico também se apresenta a solução obtida com uma malha de diferenças finitas onde se considera um espaçamento dado por  $h = 0.1m$ . Tal como seria de esperar à partida, esta solução já não se distingue da solução exacta.

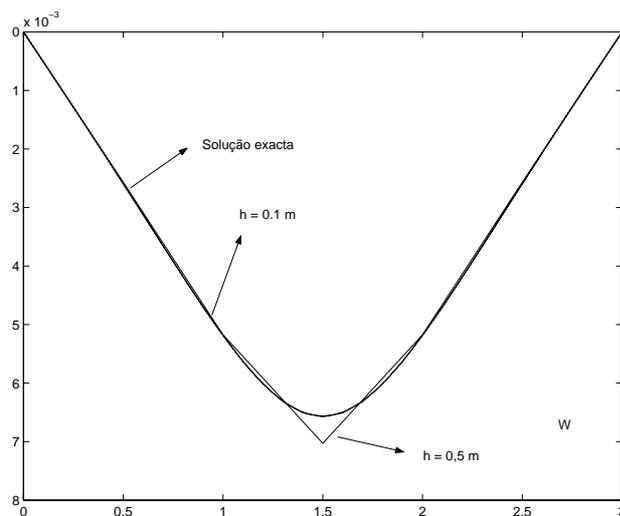


Figura 21: *Campo de deslocamentos transversais na viga simplesmente apoiada; carga triangular aplicada*

Já no que diz respeito ao campo de momentos flectores, é visível que a solução obtida com a malha com  $h = 0.5m$  ainda não reproduz de forma satisfatória a solução exacta.

Este facto é bem visível na análise da figura 22, onde se compara a solução exacta com as soluções aproximadas obtidas a partir da utilização daquelas duas discretizações de diferenças finitas.

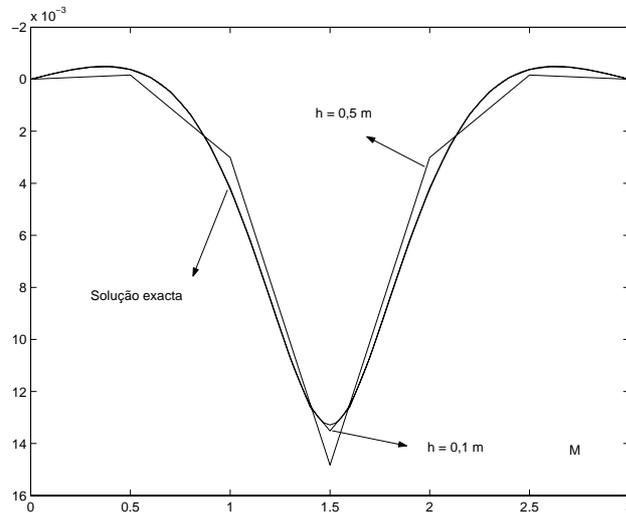


Figura 22: Campo de momentos flectores na viga simplesmente apoiada; carga triangular aplicada

### 5.2.3 Cargas concentradas

Suponha-se agora que o carregamento é constituído apenas por uma carga concentrada de valor  $P$  aplicada na secção de meio-vão da viga, tal como se encontra representado na figura 23.

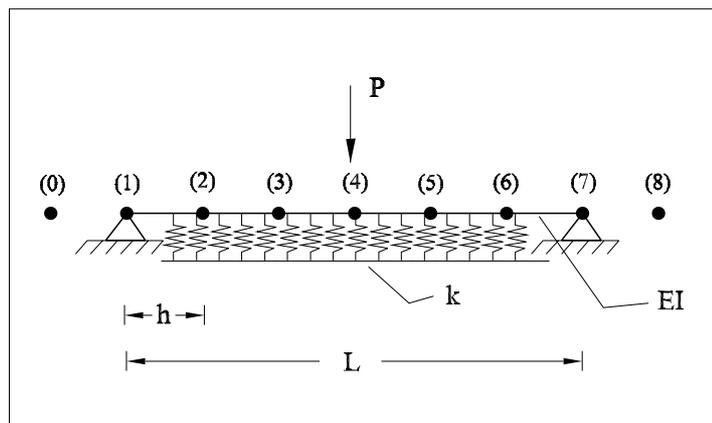


Figura 23: Análise da viga simplesmente apoiada

Tendo em conta que se trata de uma modificação no carregamento, a única alteração a introduzir no sistema de equações (88) é de novo circunscrita ao vector dos termos independentes.

No entanto, a consideração de cargas concentradas no âmbito do MDF requer a aplicação de um pequeno “truque”. Como na equação de campo (6) apenas se contabilizam as cargas distribuídas, é necessário numa primeira etapa “transformar” a carga concentrada dada numa carga distribuída no troço de barra que vai desde a secção entre os nós 3 e 4 até à secção que se encontra a meio dos nós 4 e 5.

Desta forma, considera-se que nesta zona se encontra aplicada uma carga distribuída com valor dado por

$$p_4 = P/h$$

Por consequência, o vector dos termos independentes poderá ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P/h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Considere-se como exemplo a viga simplesmente apoiada com  $L = 3m$  e onde se considera a aplicação de um carga vertical concentrada a meio-vão com um valor  $P = 10kN$ . A discretização adoptada considera nós interiores com um espaçamento dado por  $h = 0.5m$ . Tendo em conta (98), o vector dos termos independentes será dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10/0.5 = 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (99)$$

Resolvendo o sistema de equações, obtêm-se os seguintes valores para os deslocamentos nodais:

$$w = \begin{bmatrix} -0.0008 \\ 0.0150 \\ 0.0742 \\ 0.0150 \\ -0.0008 \end{bmatrix} \quad (100)$$

Na figura 24 apresenta-se a solução que esta discretização permite obter para o campo de deslocamentos transversais. São também apresentadas as soluções referentes à utilização de malhas com espaçamentos entre nós dados por  $h = 0.25m$ ,  $h = 0.1m$  e  $h = 0.05m$ . É visível que mesmo as malhas com menos graus de liberdade já permitem obter uma solução bastante razoável. No entanto, é visível que junto ao ponto de aplicação da carga só a partir da consideração da malha com  $h = 0.1m$  se começa a conseguir modelar de forma conveniente o campo de deslocamentos nessa vizinhança.

A necessidade de se refinar a malha de diferenças finitas ainda é mais notória se se observarem os diagramas apresentados na figura 25 onde, para cada uma das discretizações anteriores, se apresenta a solução aproximada obtida para o campo de momentos

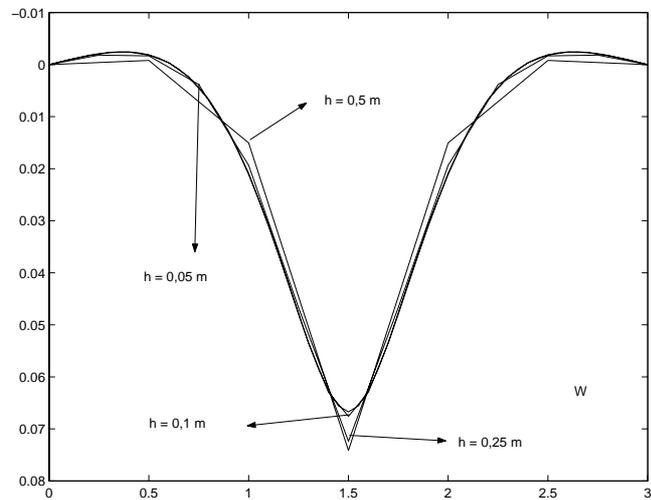


Figura 24: *Campo de deslocamentos transversais na viga simplesmente apoiada; força concentrada aplicada a meio-vão*

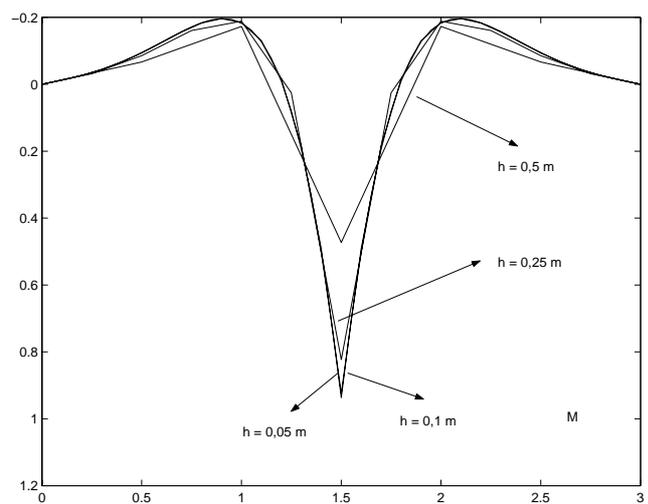


Figura 25: *Campo de momentos flectores na viga simplesmente apoiada; força concentrada aplicada a meio-vão*

flectores. É bem visível neste caso que a discretização mais grosseira conduz a uma má aproximação para este campo de esforços.

#### 5.2.4 Momentos concentrados

Considere-se por fim que na secção de meio-vão existe um momento concentrado de valor  $M$ . A consideração deste momento aplicado num nó interior da malha passa pela sua transformação num binário equivalente, tal como se encontra representado na figura 26.

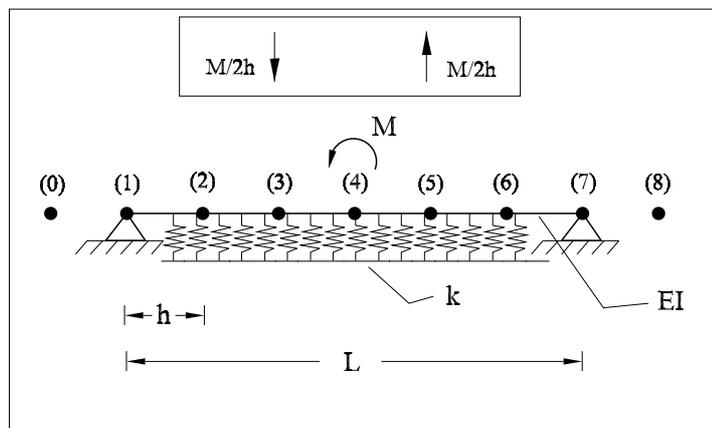


Figura 26: *Análise da viga simplesmente apoiada*

Uma vez determinadas as forças concentradas que constituem o binário equivalente ao momento aplicado, pode aplicar-se um raciocínio em tudo semelhante ao desenvolvido no parágrafo anterior para se poder determinar o vector dos termos independentes.

Tem-se desta forma que tal vector é dado por

$$\begin{bmatrix} 0 \\ M/2h^2 \\ 0 \\ -M/2h^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (101)$$

Considere-se de novo o exemplo da viga simplesmente apoiada com  $L = 3m$  e aplique-se agora um momento concentrado a meio-vão com um valor  $M = 10kNm$ . A discretização adoptada considera nós interiores com um espaçamento dado por  $h = 0.5m$ . Tendo em conta (101), o vector dos termos independentes será dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10/0.5 \\ 0 \\ -10/0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

A resolução do sistema de equações permite obter os seguintes valores para os deslocamentos nodais:

$$w = \begin{bmatrix} 0.0172 \\ 0.0754 \\ 0.0000 \\ -0.0754 \\ -0.0172 \end{bmatrix} \quad (103)$$

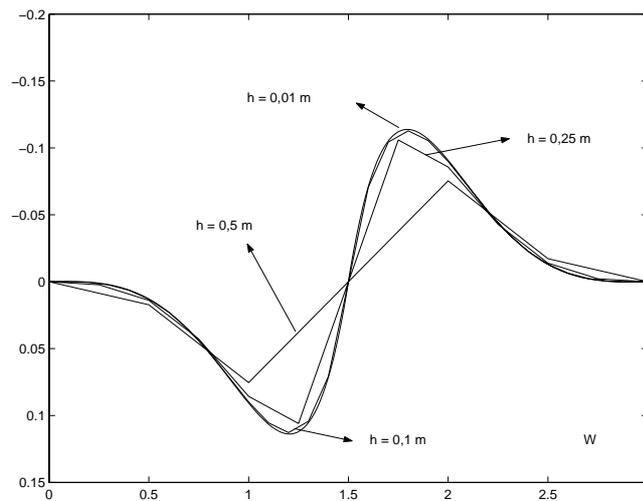


Figura 27: Campo de deslocamentos transversais na viga simplesmente apoiada; momento concentrado aplicado a meio-vão

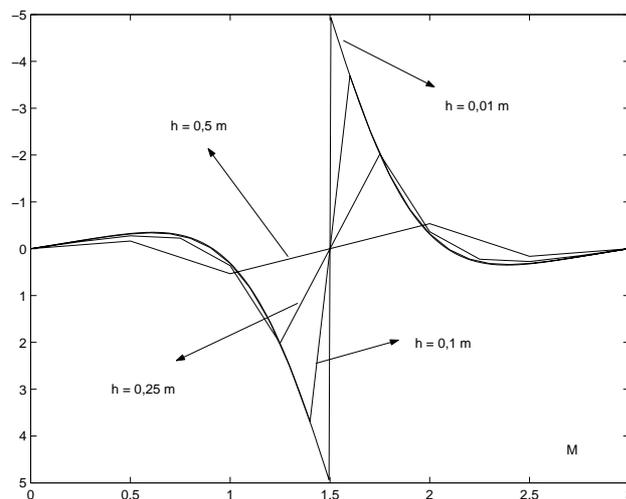


Figura 28: Campo de momentos flectores na viga simplesmente apoiada; momento concentrado aplicado a meio-vão

O campo de deslocamentos transversais obtido com esta discretização encontra-se representado na figura 27. A análise dos diagramas representados nessa figura demonstra que, para este carregamento, a consideração de um espaçamento de  $h = 0.5 \text{ m}$  não

permite determinar uma boa solução. Torna-se então essencial utilizar malhas mais refinadas.

Esta necessidade ainda é mais marcante se se tiverem em conta os diagramas de momentos flectores representados na figura 28. A análise destes gráficos permite ainda verificar que para se modelar de forma conveniente a descontinuidade existente no diagrama de momentos flectores a meio-vão se torna necessário utilizar uma discretização com um espaçamento muito pequeno.

### 5.3 Consideração de outras condições de apoio

Nos exemplos até agora analisados, apenas se consideraram vigas simplesmente apoiadas. Uma das vantagens associadas à utilização do método das diferenças finitas relaciona-se directamente com a facilidade com que podem ser consideradas outras condições de apoio.

Nesta secção discute-se a forma através da qual se podem considerar nós encastrados ou extremidades livres na resolução de problemas de vigas em fundação elástica. Também se discute o procedimento que permite ter em conta o efeito da imposição de assentamentos de apoio.

Para facilitar a apresentação, a discussão terá por base a malha representada na figura 16 e apenas se considerará o nó da extremidade final da viga.

#### 5.3.1 Definição de nós encastrados

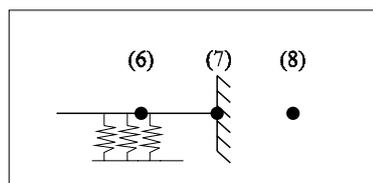


Figura 29: *Consideração de nós encastrados*

Considere-se que o nó final da barra se encontra encastrado, tal como se encontra representado na figura 29. Tal como indicado no quadro 1, as condições de fronteira correspondentes impõem que se anule nessa extremidade o campo de deslocamentos transversais e o campo de rotações,  $w(x)$  e  $\theta(x)$ , respectivamente.

Pode então escrever-se:

$$w_{(x=L)} = 0 \Rightarrow w_7 = 0 \quad (104)$$

$$\theta_{(x=L)} = 0 \Rightarrow w'_{(x=L)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2h} (w_8 - w_6) = 0 \Rightarrow w_8 = w_6 \quad (105)$$

Vamos agora considerar a existência de assentamentos de apoio no nó encastrado. O assentamento vertical será denotado por  $\Delta_w$ , enquanto que o assentamento por rotação será representado por  $\Delta_\theta$ . As condições de fronteira no nó encastrado podem ser reescritas na forma

$$w_{(x=L)} = \Delta_w \Rightarrow w_7 = \Delta_w \quad (106)$$

$$\theta_{(x=L)} = \Delta_\theta \Rightarrow -\frac{1}{2h}(w_8 - w_6) = \Delta_\theta \Rightarrow w_8 = w_6 - 2h\Delta_\theta \quad (107)$$

### 5.3.2 Definição de nós livres

Considere-se agora que o nó final da viga se encontra perfeitamente livre, tal como se encontra representado na figura 30.

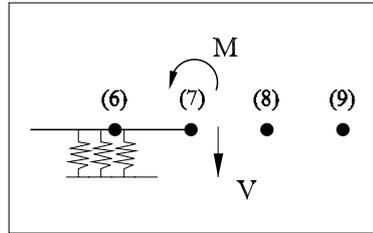


Figura 30: *Consideração de nós livres*

De acordo com a informação listada no quadro 1, as condições de fronteira neste caso podem ser escritas na forma:

$$-EI \frac{d^2 w}{dx^2}(x = L) = M \quad (108)$$

$$-EI \frac{d^3 w}{dx^3}(x = L) = V \quad (109)$$

O tratamento destas condições de fronteira vai implicar uma alteração na malha de diferenças finitas utilizada até aqui. De facto, como no nó 7 se especifica o valor de uma terceira derivada do campo de deslocamentos transversais, e de acordo com a igualdade definida em (72), é necessário conhecer o valor de  $w$  em dois pontos à direita desse nó. Desta forma, surge a necessidade de se considerar um outro nó exterior ao domínio, que neste caso corresponde ao nó 9.

Por outro lado, passa a ser necessário escrever a equação no domínio referente ao que se passa no nó 7, uma vez que o valor de  $w_7$  passa a ser desconhecido. Desta forma, o sistema governativo passa a ter 6 equações e 6 incógnitas.

Tal como acontece em todos os casos anteriormente discutidos, o tratamento das condições de fronteira vai permitir escrever o valor do deslocamento dos nós exteriores ( $w_8$  e  $w_9$ ) em função dos deslocamentos de nós interiores.

Com efeito, verifica-se que

$$-\frac{EI}{h^2} (w_8 - 2w_7 + w_6) = M \quad (110)$$

$$\Rightarrow w_8 = 2w_7 - w_6 - \frac{M h^2}{EI} \quad (111)$$

$$-\frac{EI}{2h^3} (w_9 - 2w_8 + 2w_6 - w_5) = V \quad (112)$$

$$\Rightarrow w_9 = 4w_7 - 4w_6 + w_5 - \frac{2M h^2}{EI} - \frac{2V h^3}{EI} \quad (113)$$

### 5.3.3 Definição de nós simplesmente apoiados

Por fim, generalize-se o tratamento de nós simplesmente apoiados por forma a ter em conta a possibilidade de se considerarem assentamentos verticais de apoio,  $\Delta_w$  e momentos aplicados na extremidade, tal como se encontra representado na figura 31.

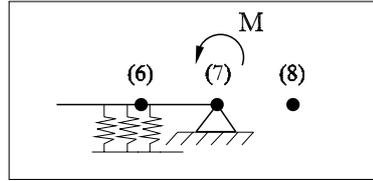


Figura 31: Consideração de nós simplesmente apoiados

O tratamento destas condições de fronteira permite escrever

$$w_{(x=L)} = \Delta_w \Rightarrow w_7 = \Delta_w \quad (114)$$

$$-\frac{EI}{h^2} (w_8 - 2w_7 + w_6) = M \Rightarrow w_8 = -w_6 + 2\Delta_w - \frac{M h^2}{EI} \quad (115)$$

Por fim, considere-se que existe uma mola de rotação na extremidade final da barra que se encontra simplesmente apoiada, tal como se encontra representado na figura 32.

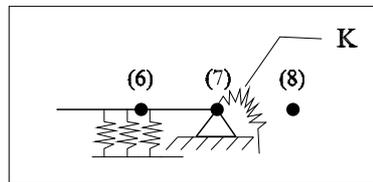


Figura 32: Consideração de nós simplesmente apoiados com mola de rotação

As condições de apoio podem ser escritas na forma

$$w_7 = 0 \quad (116)$$

$$-\frac{EI}{h^2} (w_8 - 2w_7 + w_6) = -K \frac{1}{2h} (w_8 - w_6) \quad (117)$$

onde se assume que não existem assentamentos de apoio e onde  $K$  denota a rigidez da mola de rotação.

A segunda das condições de fronteira corresponde a impor que

$$M(x = L) = K \theta(x) \Rightarrow -EI \frac{d^2 w}{dx^2}(x = L) = -K \frac{dw}{dx}(x = L)$$

Desenvolvendo as igualdades anteriores é possível escrever:

$$w_7 = 0 \quad (118)$$

$$-\frac{EI}{h^2} (w_8 - 2w_7 + w_6) = -K \frac{1}{2h} (w_8 - w_6) \quad (119)$$

$$\Rightarrow w_8 = w_6 \left( \frac{EI + Kh/2}{Kh/2 - EI} \right) \quad (120)$$

## 6 Método dos Elementos Finitos

### 6.1 Considerações iniciais

Nesta secção é aplicado o Método dos Elementos Finitos (*MEF*) na resolução dos problemas de vigas em fundação elástica. O *MEF* é hoje em dia a técnica numérica mais popular para a resolução de problemas de Mecânica Estrutural. Muito dessa popularidade e utilização generalizada se deve à sua simplicidade, robustez e elegância conceptual. O *MEF* é uma técnica numérica bastante versátil e fácil de adaptar a diferentes tipos de elementos estruturais e variados regimes de comportamento. Permite modelar com simplicidade estruturas com geometria, condições de apoio e carregamentos perfeitamente gerais.

No entanto, a utilização do *MEF* está associada à obtenção de soluções aproximadas onde não vêm verificadas de forma local as condições de equilíbrio, tanto no domínio, quanto na fronteira. Pode desta forma dizer-se que o *MEF* conduz a soluções que estão *contra a segurança*. Desta forma, a utilização desta ferramenta deve ser efectuada sempre com bastante cuidado e deve ser sempre efectuada uma cuidada análise crítica dos resultados obtidos.

Está completamente fora do âmbito deste texto efectuar uma apresentação detalhada e formalmente muito rigorosa do Método dos Elementos Finitos. No entanto, com base na análise de um exemplo simples será apresentado o método, destacando-se acima de tudo o significado físico de cada um dos cálculos e tarefas efectuados.

Esta apresentação não dispensa contudo a consulta de livros de texto onde esta matéria é apresentada de forma mais completa e geral. Existem disponíveis excelentes livros

para a inicialização ao estudo do *MEF*, dos quais são exemplo os que se apresentam nas referências [2, 3, 4, 5].

Para ilustrar a aplicação do método dos elementos finitos é de novo analisada a viga simplesmente apoiada sujeita à acção de uma carga uniformemente distribuída. São comparadas as soluções obtidas com diferentes discretizações. É efectuado também um estudo comparativo entre as soluções obtidas com o método dos elementos finitos e as soluções resultantes da aplicação do método das diferenças finitas.

Por fim, é ilustrada a aplicação do *MEF* na análise da viga sujeita à acção de uma carga concentrada e de um momento concentrado, aplicados a meio-vão.

## 6.2 Etapas do método dos elementos finitos

A análise da viga simplesmente apoiada sujeita à acção de uma carga uniformemente distribuída vai permitir a apresentação do Método dos Elementos Finitos. A aplicação desta técnica numérica pode ser decomposta num certo número de etapas que serão apresentadas de uma forma simples, sendo no entanto ressaltados os principais aspectos referentes ao significado físico de cada uma das operações efectuadas.

Considere-se para este efeito a estrutura e o carregamento indicados na figura 2 e assumase que  $EI = 1$ ,  $k = 200$ ,  $L = 3\text{ m}$  e  $p = 1\text{ kN/m}$ .

### Passo 1 - Discretização da estrutura

A aplicação do Método dos Elementos Finitos requer que a estrutura seja *discretizada*. Quer isto dizer que se deve dividir a estrutura em análise num conjunto de elementos de geometria simples e nos quais se vai definir à partida uma aproximação para o campo de deslocamentos transversais.

O elemento finito que se considera neste tipo de problema é o elemento de viga que se encontra representado na figura 33.

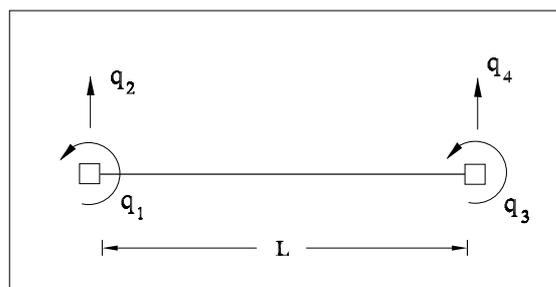


Figura 33: *Elemento finito de viga*

Para efectuar a análise da viga simplesmente apoiada, considera-se a discretização indicada na figura 34, onde a estrutura se encontra sub-dividida em dois elementos finitos.

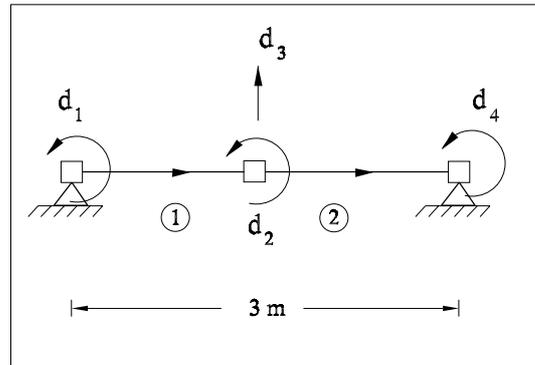


Figura 34: Discretização da viga com dois elementos finitos

## Passo 2 - Identificação dos deslocamentos independentes

De uma forma simplista, pode dizer-se que os deslocamentos independentes da estrutura correspondem aos deslocamentos nodais que se têm de impedir por forma a que todos os nós da malha considerada fiquem encastrados.

Na malha considerada é necessário impedir as rotações em todos o nós da malha e o deslocamento transversal no nó existente na secção de meio-vão. Existem assim quatro deslocamentos independentes, tal como se encontra representado na figura 34. Refira-se desde já que são estes deslocamentos que constituem as incógnitas do problema. Se forem conhecidos os seus valores, a solução aproximada pretendida, tanto para os campos cinemáticos quanto para os campos estáticos resulta de forma imediata.

É também importante nesta fase definir a relação existente entre os deslocamentos independentes definidos para a estrutura,  $d_i$ , e os graus de liberdade elementares,  $q_k$ , definidos para cada um dos elementos considerados na malha.

Da análise das figuras 34 e 33, é possível estabelecer as *tabelas de incidências* seguintes, as quais permitem efectuar essa relação.

Elemento	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$
1	$d_1$	—	$d_2$	$d_3$
2	$d_2$	$d_3$	$d_4$	—

Tabela 2: Tabelas de incidências para cada um dos elementos da malha

É importante salientar que esta *construção* permite verificar *a priori* todas as condições de compatibilidade do problema. De facto, ao garantir que  $q_2^{(1)} = q_4^{(2)} = 0$ , assegura-se a verificação das condições de apoio nos nós de extremidade. Por outro lado, quando se garante que  $q_3^{(1)} = q_1^{(2)} = d_2$  e  $q_4^{(1)} = q_2^{(2)} = d_3$  vêm garantidas de imediato as condições de continuidade do campo de rotações e do campo de deslocamentos transversais, respectivamente, na fronteira inter-elementar.

### Passo 3 - Definição da aproximação em cada um dos elementos da malha

Em cada um dos elementos da malha de elementos finitos é definida uma aproximação para o campo de deslocamentos transversais. Essa aproximação envolve um conjunto de funções pré-definidas e o valor dos deslocamentos nodais elementares,  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$ .

É então possível escrever, de forma perfeitamente geral

$$w(x) = \psi_1(x) \times q_1 + \psi_2(x) \times q_2 + \psi_3(x) \times q_3 + \psi_4(x) \times q_4 \quad (121)$$

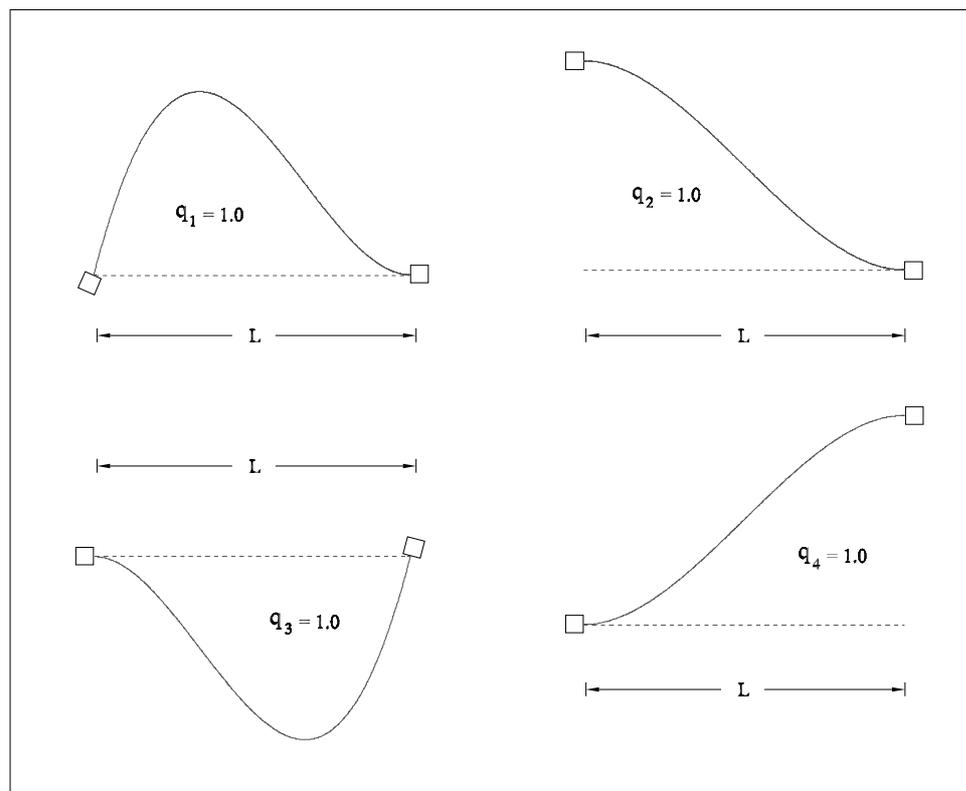


Figura 35: *Funções de aproximação no elemento de viga*

As *funções de aproximação* utilizadas em (121) são dadas pelas igualdades

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{L^2} (L^2 x - 2Lx^2 + x^3) \quad (122)$$

$$\psi_2(x) = -\frac{1}{L^3} (L^3 - 3Lx^2 + 2x^3) \quad (123)$$

$$\psi_3(x) = -\frac{1}{L^2} (-Lx^2 + x^3) \quad (124)$$

$$\psi_4(x) = -\frac{1}{L^3} (3Lx^2 - 2x^3) \quad (125)$$

onde  $L$  é igual ao comprimento do elemento considerado.

Na figura 35 encontram-se representadas cada uma destas funções. É importante referir que estas funções têm um significado físico imediato. Desta forma, a função  $\psi_j(x)$  corresponde ao campo de deslocamentos transversais que surge no elemento de viga quando se impõe  $q_j = 1$  e se garante que todos os restantes deslocamentos independentes são nulos,  $q_k = 0$  com  $k \neq j$  (na ausência de quaisquer cargas de vão e de fundação elástica).

Esta definição para o campo de deslocamentos transversais no elemento de viga apenas permite determinar a solução exacta quando não estão aplicadas quaisquer cargas de vão e quando não se considera a existência da fundação elástica. No entanto, é importante desde já referir que no caso dos elementos de viga é possível redefinir a aproximação dada por forma a ser possível recuperar a solução exacta para o problema, mesmo considerando os efeitos acima citados. Essa alteração para o caso das cargas de vão é bastante simples [6]. Já no caso de existir fundação elástica, se se pretender determinar a solução exacta o tratamento é bem mais complexo e pesado [4], de tal forma que geralmente não é utilizado.

Como parêntesis refira-se que a possibilidade de se definir uma aproximação que conduza à obtenção da solução exacta pela aplicação do *MEF* se encontra limitada ao caso das estruturas unidimensionais. Para problemas planos (placas e lajes) ou ainda para problemas tridimensionais, só em situações muito excepcionais se conseguirá recuperar a solução exacta [5].

A aproximação (121) pode ser apresentada matricialmente na forma:

$$w(x) = \mathbf{\Psi} \times \mathbf{q} = \left[ \psi_1(x) \mid \psi_2(x) \mid \psi_3(x) \mid \psi_4(x) \right] \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (126)$$

Mais uma vez fica claro que para se conseguir a definição da aproximação em cada elemento, é apenas necessário conhecer o valor dos deslocamentos nodais elementares,  $q_i$ . O valor desses deslocamentos é determinado assim que se conseguir determinar o valor dos deslocamentos independentes da estrutura. Para o exemplo em estudo e tendo em atenção as incidências definidas na tabela 2, é possível escrever, para cada um dos dois elementos da malha considerada:

$$w(x)^{(1)} = \psi_1(x) \times q_1^{(1)} + \psi_2(x) \times q_2^{(1)} + \psi_3(x) \times q_3^{(1)} + \psi_4(x) \times q_4^{(1)} \quad (127)$$

$$= \psi_1(x) \times d_1 + \psi_3(x) \times d_2 + \psi_4(x) \times d_3 \quad (128)$$

$$w(x)^{(2)} = \psi_1(x) \times q_1^{(2)} + \psi_2(x) \times q_2^{(2)} + \psi_3(x) \times q_3^{(2)} + \psi_4(x) \times q_4^{(2)} \quad (129)$$

$$= \psi_1(x) \times d_2 + \psi_2(x) \times d_3 + \psi_3(x) \times d_4 \quad (130)$$

Tendo em conta que os dois elementos considerados na malha apresentada na figura 34 têm exactamente as mesmas dimensões,  $L = 1.5 m$ , as funções de aproximação são idênticas para ambos e são dadas por:

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{2.25} (2.25x - 3x^2 + x^3) \quad (131)$$

$$\psi_2(x) = -\frac{1}{3.375} (3.375 - 4.5x^2 + 2x^3) \quad (132)$$

$$\psi_3(x) = -\frac{1}{2.25} (-1.5x^2 + x^3) \quad (133)$$

$$\psi_4(x) = -\frac{1}{3.375} (4.5x^2 - 2x^3) \quad (134)$$

Uma vez definida a aproximação para o campo de deslocamentos transversais,  $w$ , a aplicação das condições de compatibilidade permite determinar a aproximação para o campo de curvaturas. Desta forma, atendendo à definição (121) obtém-se:

$$\chi(x) = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (135)$$

$$\chi(x) = -\frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} \times q_1 - \frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} \times q_2 - \frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} \times q_3 - \frac{d^2 \psi_4(x)}{dx^2} \times q_4 \quad (136)$$

As derivadas das funções de aproximação envolvidas na definição das curvaturas são dadas pelas igualdades:

$$-\frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} = \frac{-4L + 6x}{L^2} \quad (137)$$

$$-\frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} = \frac{-6(L - 2x)}{L^3} \quad (138)$$

$$-\frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} = \frac{-2(L - 3x)}{L^2} \quad (139)$$

$$-\frac{d^2 \psi_4(x)}{dx^2} = \frac{6(L - 2x)}{L^3} \quad (140)$$

A aproximação para o campo de curvaturas pode ser escrita matricialmente na forma:

$$\chi(x) = \mathbf{B} \times \mathbf{q} = \left[ -\frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} \mid -\frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} \mid -\frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} \mid -\frac{d^2 \psi_4(x)}{dx^2} \right] \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (141)$$

Cada uma das colunas da matriz  $\mathbf{B}$  tem um significado físico bem preciso. Assim, a coluna  $j$  da matriz  $\mathbf{B}$  contém o campo de curvaturas que surge na viga quando se impõe  $q_j = 1$  e se garante que todos os restantes deslocamentos independentes são nulos,  $q_k = 0$  com  $k \neq j$  (de novo, na ausência de quaisquer cargas de vão e de fundação elástica).

Para cada um dos elementos da malha utilizada na resolução deste problema, ter-se-á então:

$$\chi(x)^{(1)} = -\frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} \times d_1 - \frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} \times d_2 - \frac{d^2 \psi_4(x)}{dx^2} \times d_3 \quad (142)$$

$$= \frac{-4L + 6x}{L^2} \times d_1 + \frac{-2(L - 3x)}{L^2} \times d_2 + \frac{6(L - 2x)}{L^3} \times d_3 \quad (143)$$

$$\chi(x)^{(2)} = -\frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} \times d_2 - \frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} \times d_3 - \frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} \times d_4 \quad (144)$$

$$= \frac{-4L + 6x}{L^2} \times d_2 + \frac{-6(L - 2x)}{L^3} \times d_3 + \frac{-2(L - 3x)}{L^2} \times d_4 \quad (145)$$

Finalmente, a aproximação para o campo de momentos flectores pode ser obtida através da consideração das relações de elasticidade. Tendo em conta que

$$M(x) = EI \chi(x),$$

tal aproximação pode ser escrita na forma matricial:

$$M(x) = \mathbf{DB} \times \mathbf{q} = \quad (146)$$

$$EI \left[ -\frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} \mid -\frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} \mid -\frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} \mid -\frac{d^2 \psi_4(x)}{dx^2} \right] \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (147)$$

Na equação anterior a matriz  $\mathbf{D}$  é constituída pela rigidez à flexão do elemento de viga. De uma forma mais geral, pode dizer-se que a matriz  $\mathbf{D}$  contém as propriedades geométricas e mecânicas do elemento finito que permitem caracterizar o comportamento elástico linear do material estrutural e relacionar os campos de esforços com os campos de deformações.

A aproximação para o campo de esforços nos dois elementos da discretização em análise é dada então por

$$M(x)^{(1)} = -EI \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} \times d_1 - EI \frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} \times d_2 - EI \frac{d^2 \psi_4(x)}{dx^2} d_3 \quad (148)$$

$$= EI \frac{-4L + 6x}{L^2} \times d_1 + EI \frac{-2(L - 3x)}{L^2} \times d_2 + EI \frac{6(L - 2x)}{L^3} \times d_3 \quad (149)$$

$$M(x)^{(2)} = -EI \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} \times d_2 - EI \frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} \times d_3 - EI \frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} \times d_4 \quad (150)$$

$$= EI \frac{-4L + 6x}{L^2} \times d_2 + EI \frac{-6(L - 2x)}{L^3} \times d_3 + EI \frac{-2(L - 3x)}{L^2} \times d_4 \quad (151)$$

Uma vez definidas as aproximações ao nível elementar, a *tarefa* do MEF consiste em conseguir determinar os valores dos deslocamentos independentes,  $d_i$ . Para este efeito, é necessário obter uma equação de equilíbrio global, a qual é determinada através da *reunião* das equações de equilíbrio que se podem estabelecer para cada um dos elementos da discretização considerada.

#### Passo 4 - Definição das equações elementares

As equações elementares permitem relacionar os quatro deslocamentos nodais elementares,  $q_i$ , com as correspondentes forças nodais,  $Q_i$  (ver figura 36).

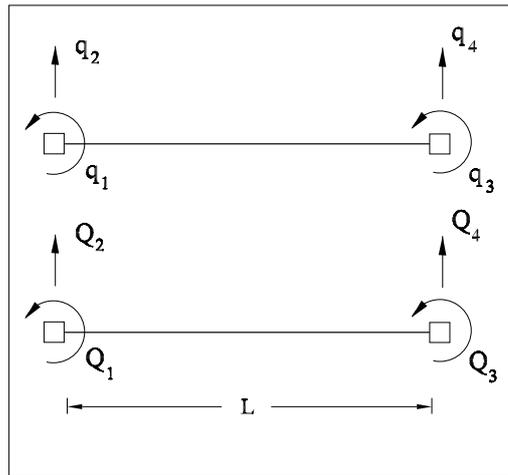


Figura 36: Deslocamentos e forças nodais elementares

A equação de equilíbrio elementar pode ser escrita na forma matricial

$$\mathbf{k}^{(e)} \times \mathbf{q} = \mathbf{Q}^{(e)} \quad (152)$$

Nesta equação surge a matriz de rigidez elementar,  $\mathbf{k}^{(e)}$ , e o vector de forças nodais equivalentes,  $\mathbf{Q}^{(e)}$ . A matriz de rigidez elementar depende das características geométricas e mecânicas do elemento finito considerado. O vector das forças nodais equivalentes é definido tendo em conta as cargas aplicadas no domínio do elemento.

Estes operadores têm também um significado bem preciso. Na coluna  $j$  da matriz  $\mathbf{k}^{(e)}$  encontram-se listadas as forças nodais equivalentes que *surgem* quando se impõe  $q_j = 1$  e se garante que todos os restantes deslocamentos nodais elementares são nulos,  $q_k = 0$  com  $k \neq j$ .

A matriz de rigidez elementar tem quatro linhas e quatro colunas. A identificação do significado físico de cada um dos seus elementos pode ser encontrada na figura 37.

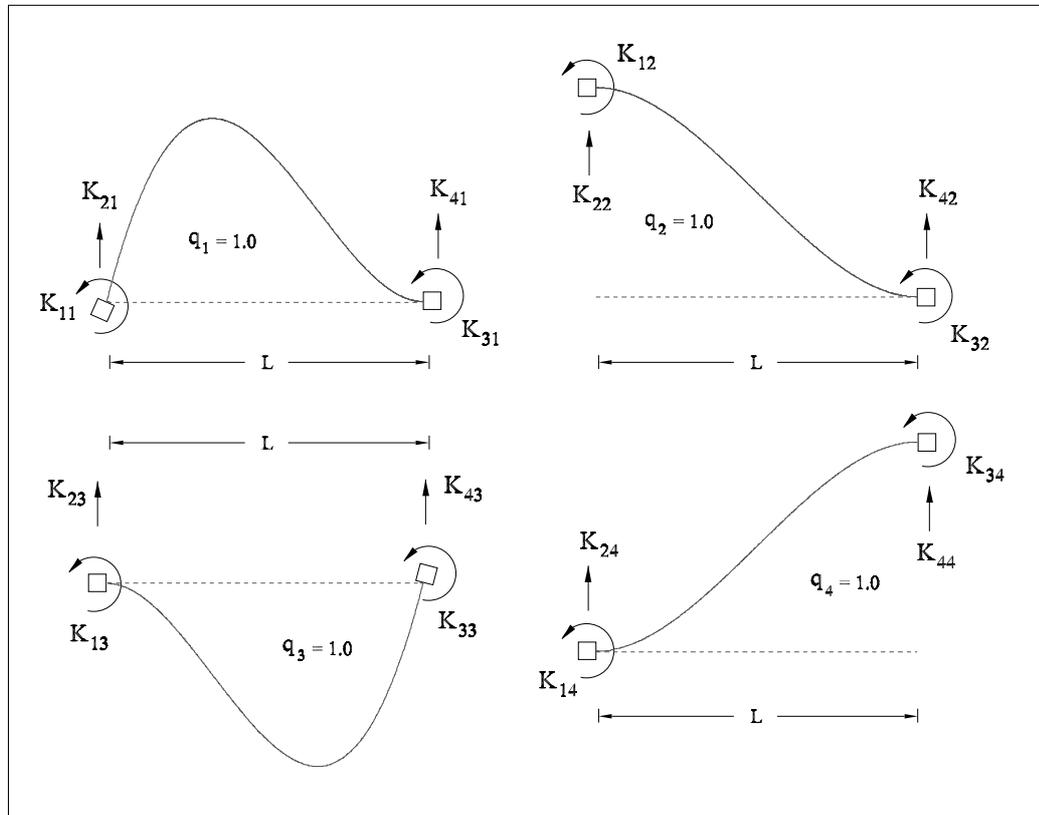


Figura 37: Significado físico dos elementos da matriz de rigidez elementar

O vector  $\mathbf{Q}$  lista as forças nodais que realizam, para qualquer uma das deformadas possíveis definidas pela aproximação (121), o mesmo trabalho que as cargas de vão aplicadas directamente no elemento. O significado físico dos elementos deste vector (que tem quatro elementos) encontram-se representado na figura 38.

Quando não existe fundação elástica, é possível demonstrar [2, 5, 1] que a matriz  $\mathbf{k}^{(e)}$

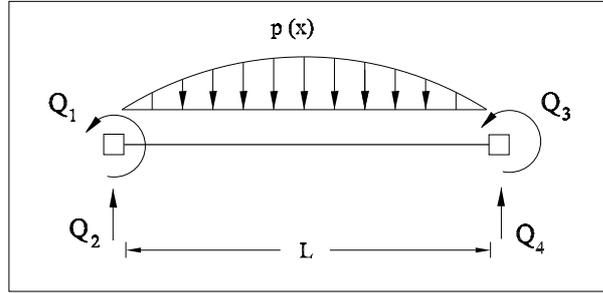


Figura 38: *Significado físico das forças nodais equivalentes elementares*

é dada pela seguinte igualdade:

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dx = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} \\ \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} \end{bmatrix} \quad (153)$$

Se existir uma fundação elástica de rigidez  $k_m$ , é necessário adicionar a parcela correspondente à matriz de rigidez do elemento. Pode então escrever-se [4]:

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_0^L \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dx + \int_0^L \mathbf{\Psi}^t k_m \mathbf{\Psi} dx \quad (154)$$

o que permite obter

$$\mathbf{k}^{(e)} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} \\ \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} \end{bmatrix} + k_m \begin{bmatrix} \frac{L^3}{105} & \frac{11 L^2}{210} & -\frac{L^3}{140} & \frac{13 L^2}{420} \\ \frac{11 L^2}{210} & \frac{13 L}{35} & -\frac{13 L^2}{420} & \frac{9 L}{70} \\ -\frac{L^3}{140} & -\frac{13 L^2}{420} & \frac{L^3}{105} & -\frac{11 L^2}{210} \\ \frac{13 L^2}{420} & \frac{9 L}{70} & -\frac{11 L^2}{210} & \frac{13 L}{35} \end{bmatrix}$$

No exemplo que está a servir de base para ilustrar a aplicação do método dos elementos finitos, os dois elementos têm exactamente a mesma dimensão e as mesmas propriedades elásticas. Desta forma, a matriz de rigidez elementar será semelhante para ambos.

Substituindo  $L = 1.5 m$ ,  $EI = 1$  e  $k_m = 200$  na definição anterior, obtém-se:

$$\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 9.0952 & 26.2381 & -3.4881 & 11.2619 \\ 26.2381 & 114.9841 & -11.2619 & 35.0159 \\ -3.4881 & -11.2619 & 9.0952 & -26.2381 \\ 11.2619 & 35.0159 & -26.2381 & 114.9841 \end{bmatrix} \quad (155)$$

O vector das forças nodais equivalentes,  $\mathbf{Q}$ , é dado pela seguinte igualdade [2, 5, 1]:

$$\mathbf{Q} = \int_0^L \Psi^t \mathbf{p} dx, \quad (156)$$

onde no vector  $\mathbf{p}$  se lista a carga de vão aplicada no domínio do elemento.

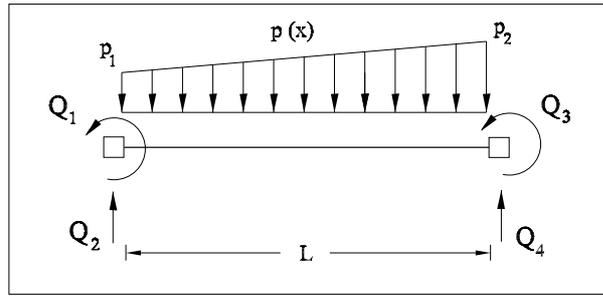


Figura 39: Definição da carga trapezoidal aplicada na viga

Se se considerar a carga trapezoidal representada na figura 39, a qual pode ser expressa na forma,

$$p(x) = p_1 + (p_2 - p_1) x/L$$

o vector das forças nodais equivalentes será dado por:

$$\mathbf{Q}^{(e)} = \begin{bmatrix} -\frac{L^2}{60} (3p_1 + 2p_2) \\ -\frac{L}{20} (7p_1 + 3p_2) \\ \frac{L^2}{60} (2p_1 + 3p_2) \\ -\frac{L}{20} (3p_1 + 7p_2) \end{bmatrix} \quad (157)$$

No exemplo que se encontra em análise, a carga é uniformemente distribuída com valor unitário. Desta forma, tem-se nos dois elementos  $p_1 = p_2 = 1$  e o vector das forças

nodais equivalentes é semelhante em ambos. Verifica-se com facilidade que:

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.1875 \\ -0.7500 \\ 0.1875 \\ -0.7500 \end{bmatrix} \quad (158)$$

### Passo 5 - Definição da equação de equilíbrio global

A equação de equilíbrio global é também uma equação de equilíbrio de forças nodais. Relaciona os deslocamentos independentes globais,  $d_i$ , com as correspondentes forças nodais,  $F_i$ . Esta equação pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{K} \times \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (159)$$

No exemplo em estudo, as forças e deslocamentos nodais envolvidos na equação de equilíbrio global encontram-se representados na figura 40.

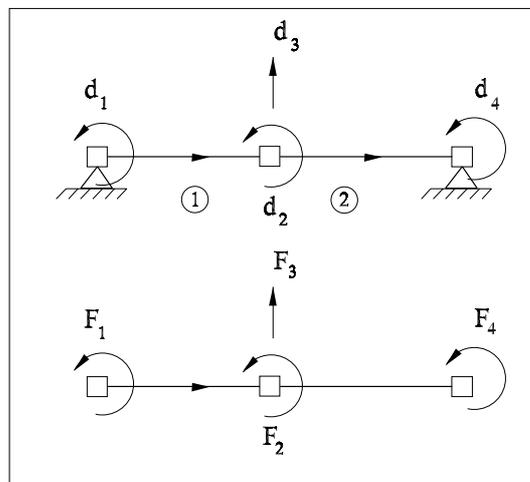


Figura 40: Deslocamentos e forças nodais equivalentes globais na malha de elementos finitos

A matriz de rigidez global é *construída* através da reunião da contribuição de cada um dos elementos da malha. O processo que permite determinar a matriz de rigidez global tem um significado físico bem preciso, o qual se encontra discutido na referência [1]. Neste documento apenas se mostra como essa construção pode ser efectuada de uma forma simples e eficaz.

Para se determinar a matriz de rigidez global, é necessário conhecer apenas as matrizes de rigidez de cada um dos elementos da malha e utilizar a informação contida nas

tabelas de incidências, as quais relacionam os graus de liberdade globais com os graus de liberdade definidos a nível elementar.

Desta forma, e para o exemplo em estudo, a matriz de rigidez da estrutura é dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & \cdot \\ K_{31}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ \cdot & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (160)$$

Importa referir nesta altura que a matriz de rigidez da estrutura é sempre uma matriz simétrica e positiva-definida [2, 5].

Para a malha utilizada na análise da viga simplesmente apoiada, a matriz de rigidez pode ser obtida substituindo na definição anterior os correspondentes coeficientes das matrizes de rigidez elementares, já anteriormente calculadas. Obtém-se:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 9.0952 & -3.4881 & 11.2619 & 0 \\ -3.4881 & 18.1905 & 0 & -3.4881 \\ 11.2619 & 0 & 229.9683 & -11.2619 \\ 0 & -3.4881 & -11.2619 & 9.0952 \end{bmatrix} \quad (161)$$

A construção do vector de forças nodais equivalentes global passa também por um processo de reunião das contribuições elementares [1]. Para tal, volta a ser necessário utilizar a informação contida nas tabelas de incidências. Para o exemplo em análise, a aplicação de tal procedimento conduz a:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_3^{(1)} + Q_1^{(2)} \\ Q_4^{(1)} + Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (162)$$

Caso existissem forças ou momentos concentrados aplicados nos nós da discretização, o seu valor teria de ser adicionado directamente ao correspondente valor no vector de forças global, uma vez concluída a determinação das contribuições elementares.

No caso em estudo, e tendo em conta os cálculos já efectuados anteriormente, o vector  $\mathbf{F}$  será dado por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.1875 \\ 0 \\ -1.5000 \\ 0.1875 \end{bmatrix} \quad (163)$$

**Passo 6 - Obtenção do valor dos deslocamentos independentes**

O valor dos deslocamentos independentes da estrutura será obtido agora a partir da equação de equilíbrio global (159). Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} 9.0952 & -3.4881 & 11.2619 & 0 \\ -3.4881 & 18.1905 & 0 & -3.4881 \\ 11.2619 & 0 & 229.9683 & -11.2619 \\ 0 & -3.4881 & -11.2619 & 9.0952 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1875 \\ 0 \\ -1.5000 \\ 0.1875 \end{bmatrix} \quad (164)$$

obtém-se o valor das incógnitas do problema,

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -0.0143 \\ 0.0000 \\ -0.0051 \\ 0.0143 \end{bmatrix} \quad (165)$$

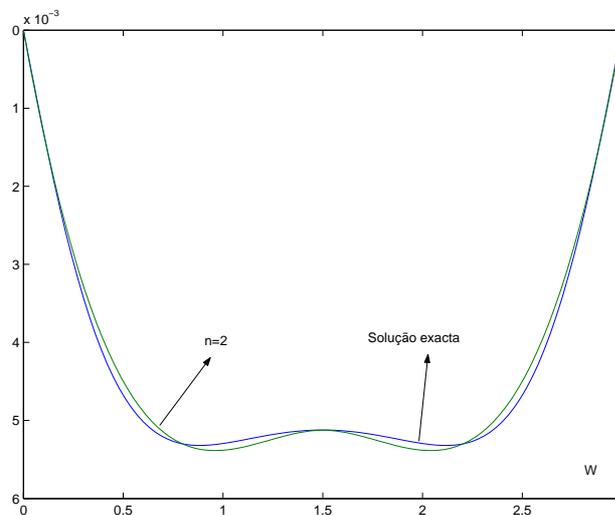
**Passo 7 - Obtenção das soluções aproximadas em cada um dos elementos**

Figura 41: *Campo de deslocamentos transversais na viga simplesmente apoiada; solução com dois elementos*

Uma vez determinados os deslocamentos independentes, é possível obter as soluções aproximadas para os campos de deslocamentos, curvaturas e esforços. Para tal, basta ter em conta as definições apresentadas nas equações (126), (141) e (147), respectivamente.

A aproximação para o campo de deslocamentos em cada um dos elementos representados na malha da figura 34 pode ser determinada então com recurso às expressões apresentadas nas equações (128) e (130).

O campo de deslocamentos obtido encontra-se representado na figura 41. Verifica-se que mesmo com esta discretização grosseira, a aproximação obtida já é bastante rigorosa. É possível confirmar ainda que todas as condições de fronteira cinemática do problema vêm respeitadas na solução aproximada e que o campo de deslocamentos é contínuo entre elementos. Como foi anteriormente referido, esta é uma das características da formulação de deslocamentos do método dos elementos finitos; as soluções obtidas satisfazem sempre, *a priori*, todas as condições de compatibilidade do problema.

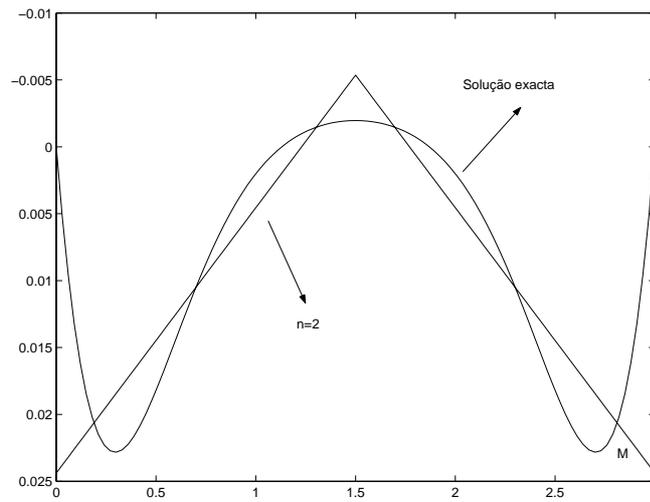


Figura 42: Campo de momentos flectores na viga simplesmente apoiada; solução com dois elementos

A aproximação para os campos de curvaturas é determinada com base nas equações (143) e (145). Por sua vez, o campo de momentos flectores em cada elemento é calculado aplicando-se as equações (149) e (151). Os campos de momentos aproximados obtidos encontram-se representados na figura 42. Ao contrário do que foi observado para o caso do campo de deslocamentos, esta malha constituída apenas por dois elementos finitos conduz à obtenção de uma aproximação manifestamente insatisfatória no que diz respeito ao campo de esforços na viga.

Esta é uma das características gerais do método dos elementos finitos; para uma dada malha, a qualidade da solução obtida para os campos cinemáticos (deslocamentos) é sempre melhor que a qualidade da solução obtida para os campos estáticos (esforços). De uma forma mais rigorosa, poder-se-á dizer que para uma dada discretização, o erro em deslocamentos é sempre inferior ao erro em esforços.

Outra das características da formulação de deslocamentos do método dos elementos finitos é também visível na análise do campo de momentos apresentado na figura 42. Os campos de esforços aproximados determinados com este método não satisfazem as condições de fronteira estática, tal como se pode observar, tendo em conta que nos apoios se têm momentos flectores não-nulos. Também no domínio a condição de equilíbrio não é verificada, tendo em conta que o diagrama de momentos flectores obtido é linear.

Este facto é importante, uma vez que permite concluir que a solução aproximada com o método dos elementos finitos, sendo compatível mas não equilibrada, está contra a segurança. É sempre necessário ter bastante cuidado na utilização desta ferramenta para se evitarem surpresas desagradáveis em termos de dimensionamento da estrutura.

A utilização do método dos elementos finitos conduz a uma sobre-avaliação da capacidade resistente da estrutura em análise. Para que os resultados possam ser utilizados, é necessário que se considere uma malha suficientemente refinada para garantir que os desequilíbrios (na fronteira e entre elementos adjacentes) sejam suficientemente pequenos para poderem ser desprezados.

Em elementos finitos, o refinamento da solução pode ser conseguido de uma de duas formas. Ou se aumenta o número de elementos considerado na malha, o que corresponde a diminuir a dimensão dos elementos considerados, ou se aumenta o grau das funções de aproximação utilizadas [2]. Destas duas estratégias de refinamento, a mais comumente utilizada é a primeira, à qual é usual designar por refinamento do *tipo h*.

### 6.3 Análise da viga simplesmente apoiada utilizando uma malha com três elementos finitos

Para ilustrar de novo a aplicação do *MEF* na análise de vigas em fundação elástica, determina-se uma solução mais refinada para a estrutura representada na figura 2.

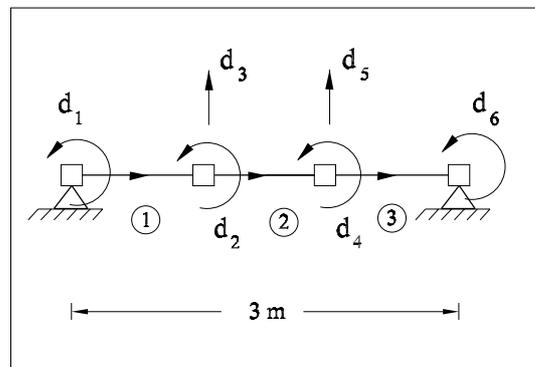


Figura 43: Malha com três elementos para a análise da viga simplesmente apoiada

#### Discretização da estrutura

Considera-se na análise da viga a malha constituída por três elementos finitos, a qual se encontra representada na figura 43.

### Identificação dos deslocamentos independentes

Os deslocamentos independentes globais a considerar na análise por elementos finitos encontram-se identificados na figura 43. Desta forma, a equação de equilíbrio global corresponderá a um sistema linear de seis equações a seis incógnitas.

A relação entre os graus de liberdade elementares,  $q_i$  e os graus de liberdade globais,  $d_k$ , permite a definição das incidências apresentadas na tabela 3.

Elemento	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$
1	$d_1$	–	$d_2$	$d_3$
2	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
3	$d_4$	$d_5$	$d_6$	–

Tabela 3: Tabelas de incidências para a malha com 3 elementos

### Definição da aproximação em cada um dos elementos da malha

Todos os elementos da malha considerada têm o mesmo comprimento,  $L = 1 m$ . Desta forma, as funções de aproximação podem ser escritas na forma:

$$\psi_1(x) = -x + 2x^2 - x^3$$

$$\psi_2(x) = -1 + 3x^2 - 2x^3$$

$$\psi_3(x) = x^2 - x^3$$

$$\psi_4(x) = -3x^2 + 2x^3$$

Tendo em conta a expressão geral (126) e as incidências definidas na tabela 3, é possível escrever, para cada um dos elementos da malha:

$$\begin{aligned} w(x)^{(1)} &= \psi_1(x) \times d_1 + \psi_3(x) \times d_2 + \psi_4(x) \times d_3 \\ &= (-x + 2x^2 - x^3) \times d_1 + (x^2 - x^3) \times d_2 + (-3x^2 + 2x^3) \times d_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x)^{(2)} &= \psi_1(x) \times d_2 + \psi_2(x) \times d_3 + \psi_3(x) \times d_4 + \psi_4(x) \times d_5 \\ &= (-x + 2x^2 - x^3) \times d_2 + (-1 + 3x^2 - 2x^3) \times d_3 \\ &+ (x^2 - x^3) \times d_4 + (-3x^2 + 2x^3) \times d_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x)^{(3)} &= \psi_1(x) \times d_4 + \psi_2(x) \times d_5 + \psi_3(x) \times d_6 + \\ &= (-x + 2x^2 - x^3) \times d_4 + (-1 + 3x^2 - 2x^3) \times d_5 + (x^2 - x^3) \times d_6 \end{aligned}$$

### Definição das equações elementares

Tendo em conta a definição (154) e as propriedades geométricas e mecânicas de cada um dos elementos da discretização, é possível obter a seguinte matriz de rigidez elementar:

$$\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{k}^{(2)} = \mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 5.9048 & 16.4762 & 0.5714 & 0.1905 \\ 16.4762 & 86.2857 & -0.1905 & 13.7143 \\ 0.5714 & -0.1905 & 5.9048 & -16.4762 \\ 0.1905 & 13.7143 & -16.4762 & 86.2857 \end{bmatrix} \quad (166)$$

Como em cada um dos elementos se encontra aplicada uma carga uniformemente distribuída de valor unitário, a aplicação da definição (157) permite recuperar os seguintes vectores de forças nodais equivalentes elementares:

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{Q}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.0833 \\ -0.5000 \\ 0.0833 \\ -0.5000 \end{bmatrix} \quad (167)$$

### Definição da equação de equilíbrio global

Tendo em conta as incidências definidas na tabela 3, a matriz de rigidez da estrutura é dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{31}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & \cdot \\ K_{41}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & \cdot \\ \cdot & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{34}^{(2)} + K_{12}^{(3)} & K_{13}^{(3)} \\ \cdot & K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} + K_{21}^{(3)} & K_{44}^{(2)} + K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{33}^{(3)} \end{bmatrix}$$

onde se identifica de forma clara a contribuição de cada um dos elementos da malha.

Substituindo nesta definição o resultado obtido para cada uma das matrizes de rigidez elementares, obtém-se:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5.9048 & 0.5714 & 0.1905 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5714 & 11.8095 & 0 & 0.5714 & 0.1905 & 0 \\ 0.1905 & 0 & 172.5714 & -0.1905 & 13.7143 & 0 \\ 0 & 0.5714 & -0.1905 & 11.8095 & 0 & 0.5714 \\ 0 & 0.1905 & 13.7143 & 0 & 172.5714 & -0.1905 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5714 & -0.1905 & 5.9048 \end{bmatrix} \quad (168)$$

O vector das forças nodais equivalentes globais é dado por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_3^{(1)} + Q_1^{(2)} \\ Q_4^{(1)} + Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} + Q_1^{(3)} \\ Q_4^{(2)} + Q_2^{(3)} \\ Q_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0833 \\ 0 \\ -1.0000 \\ 0 \\ -1.0000 \\ 0.0833 \end{bmatrix} \quad (169)$$

### Obtenção do valor dos deslocamentos independentes

A resolução da equação de equilíbrio global,

$$\begin{bmatrix} 5.9048 & 0.5714 & 0.1905 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5714 & 11.8095 & 0 & 0.5714 & 0.1905 & 0 \\ 0.1905 & 0 & 172.5714 & -0.1905 & 13.7143 & 0 \\ 0 & 0.5714 & -0.1905 & 11.8095 & 0 & 0.5714 \\ 0 & 0.1905 & 13.7143 & 0 & 172.5714 & -0.1905 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5714 & -0.1905 & 5.9048 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0833 \\ 0 \\ -1.0000 \\ 0 \\ -1.0000 \\ 0.0833 \end{bmatrix}$$

permite determinar os seguintes valores para os deslocamentos independentes da malha:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0140 \\ 0.0008 \\ -0.0054 \\ -0.0008 \\ -0.0054 \\ 0.0140 \end{bmatrix}$$

A obtenção das aproximações para os campos de deslocamentos, deformações e esforços em cada um dos elementos da malha pode agora ser efectuada através da utilização

de um conjunto de procedimentos em tudo semelhantes aos que anteriormente foram desenvolvidos para o caso da malha com dois elementos finitos.

#### 6.4 Análise comparativa das soluções aproximadas obtidas

Os resultados obtidos com a malha representada na figura 43 são agora comparados com a solução exacta para o problema em análise. São ainda comparados com as soluções que resultam da consideração da malha de dois elementos anteriormente utilizada e com a utilização de uma malha constituída por seis elementos finitos.

Cabe agora salientar que em todas as malhas definidas para a análise deste problema se considerou que a dimensão de todos os elementos é idêntica. Tal não é de forma nenhuma uma restrição imposta pela aplicação do *MEF*. Muito pelo contrário, haverá sempre vantagens em se considerar malhas *não-uniformes*, onde se devem dispor elementos de menores dimensões nas zonas onde existem elevados gradientes nos campos que se pretendem modelar e colocar elementos de maiores dimensões em zonas da estrutura onde a variação dos campos estático e cinemático seja mais *suave*.

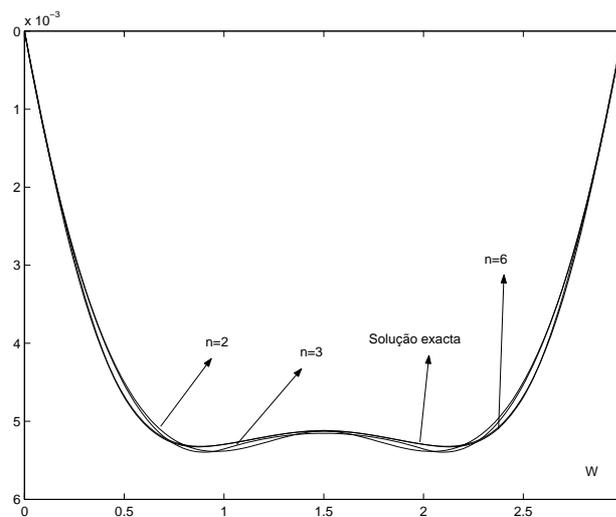


Figura 44: Campo de deslocamentos devido à acção da carga uniformemente distribuída

Na figura 44 apresenta-se o campo de deslocamentos aproximado obtido com as três discretizações referidas (com 2, 3 e 6 elementos) e a sua comparação com a solução exacta.

De novo se verifica que a qualidade da aproximação obtida é bastante significativa, mesmo para estas discretizações pouco refinadas. A discretização  $n = 6$  (6 elementos com  $L = 0.5 m$ ) permite mesmo recuperar praticamente a solução exacta.

Já as aproximações obtidas para os campos de esforços são de muito pior qualidade, tal como se pode observar na figura 45. Na malha com três elementos, para além de não resultarem verificadas as condições de fronteira estática nos apoios (os momentos

nas secções sobre os apoios extremos não se anulam), é visível que não estão também verificadas as condições de equilíbrio entre elementos. De facto, os *saltos* identificados no diagrama de momentos flectores só poderiam existir se existissem momentos concentrados aplicados nos nós, o que não é manifestamente o caso, uma vez que o carregamento é constituído apenas por uma carga uniformemente distribuída. Como é natural, se se considerassem malhas mais refinadas, estas descontinuidades existentes nos diagramas tenderiam a desaparecer e a solução aproximada tenderia a recuperar a solução exacta.

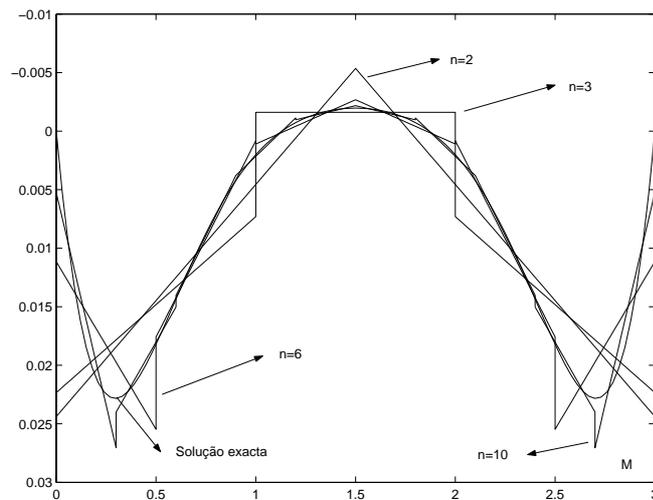


Figura 45: *Campo de momentos flectores devido à acção da carga uniformemente distribuída*

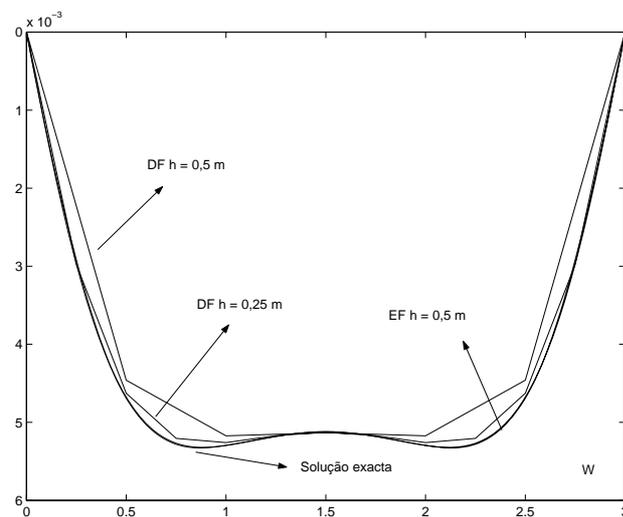


Figura 46: *Campo de deslocamentos devido à acção da carga uniformemente distribuída; Comparação elementos finitos/diferenças finitas*

Para finalizar esta análise, convém mais uma vez sublinhar que a qualidade da solução conseguida com uma malha do *MEF* nunca pode ser aferida directamente apenas pela qualidade da solução obtida para o campo de deslocamentos. Para se obter uma boa

aproximação para os campos estáticos é geralmente necessário utilizar malhas bem mais refinadas do que as que seria necessário utilizar se se pretendesse apenas modelar os campos cinemáticos. Este facto é bem visível nas análises efectuadas; se a malha com  $n = 6$  quase permite recuperar a solução exacta para  $w$ , fornece ainda uma solução pouco refinada para o campo de esforços na viga.

Interessante é agora efectuar uma breve comparação entre os desempenhos das duas técnicas numéricas aqui estudadas: o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas.

Na figura 46 compara-se a solução aproximada obtida com a malha regular de seis elementos finitos ( $EF h = 0.5 m$ ) e a solução obtida com uma malha de diferenças finitas com um espaçamento semelhante ( $DF h = 0.5 m$ ). É fácil observar que a aproximação conseguida com o *MEF* se aproxima mais da solução exacta. No entanto, esta forma de efectuar a comparação é injusta para o Método das Diferenças Finitas. Isto porque embora o espaçamento entre nós da discretização seja o mesmo em ambos os casos ( $h = 0.5 m$ ), o número de graus de liberdade associado à malha de elementos finitos (um total de 12 deslocamentos nodais independentes) é superior ao número de graus de liberdade existentes na malha de diferenças finitas (5 deslocamentos transversais correspondentes aos nós *interiores* da malha).

Para ser mais justa, a comparação deverá envolver discretizações com aproximadamente o mesmo número de graus de liberdade. Desta forma, também se apresenta na figura 46 a solução aproximada obtida com uma malha de diferenças finitas com um espaçamento  $h = 0.25 m$ . Esta malha tem já um total de 11 graus de liberdade.

A análise da figura 46 permite verificar que a diferença *MEF* / *MDF* é menos significativa que a anteriormente apontada, mas ainda assim é a malha de elementos finitos a que permite obter uma melhor solução.

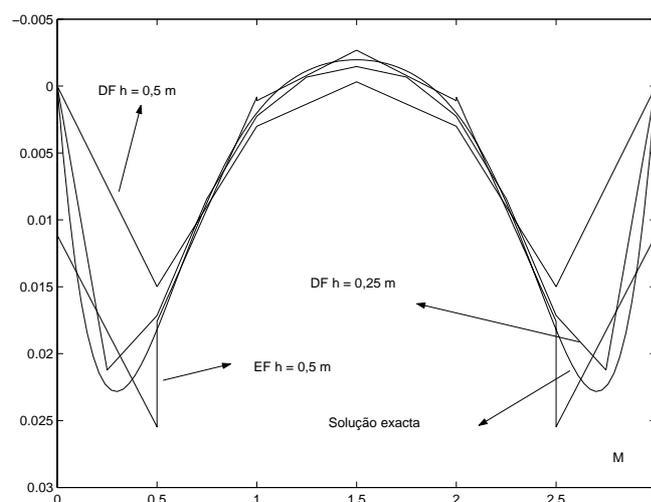


Figura 47: Campo de momentos flectores devido à acção da carga uniformemente distribuída; Comparação elementos finitos/diferenças finitas

A comparação das aproximações obtidas para os campos de esforços já não permite identificar de forma tão clara qual a técnica que permite recuperar a melhor solução. Este facto é confirmado pela análise da figura 47.

Para além da simples comparação da qualidade das soluções aproximadas obtidas, é importante sublinhar que o método dos elementos finitos apresenta a vantagem de permitir a consideração, de uma forma simples e eficaz, de geometrias, condições de apoio e de carregamento mais complexas. Daí a sua maior popularidade e divulgação como ferramenta numérica para a Análise de Estruturas.

### 6.5 Análise da viga simplesmente apoiada sujeita à acção de uma carga concentrada

A consideração da existência de cargas e momentos concentrados aplicados nos nós da malha é tratada pelo *MEF* de uma forma extremamente simples, sem haver a necessidade de se recorrerem a *truques* do género dos que são utilizados pelo Método das Diferenças Finitas.

Para ilustrar este aspecto, analisa-se de novo a viga simplesmente apoiada sujeita à acção de uma força vertical concentrada aplicada a meio-vão, tal como se encontra representado na figura 23. É utilizada na análise a malha com dois elementos finitos representada na figura 34. Considera-se  $P = 10kN$  e  $L = 3m$ .

Em relação à resolução efectuada na secção 6.2, apenas se alterou o carregamento a considerar. Desta forma, permanece inalterado tudo quanto se afirmou sobre a identificação dos deslocamentos independentes, a construção das tabelas de incidências e a definição dos campos aproximados em cada elemento. Mantêm-se também as matrizes de rigidez elementares e a matriz de rigidez global. As únicas alterações a efectuar dizem respeito à construção dos vectores das forças nodais equivalentes a nível elementar e a nível global,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{F}$ , respectivamente.

Tendo em conta que não existem quaisquer forças distribuídas aplicadas no domínio dos elementos da malha é possível escrever:

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{0}$$

A força nodal aplicada no nó central da viga é directamente adicionada ao vector das forças nodais equivalentes global, o qual passa a ser dado pela igualdade:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desta forma, o sistema de equações que permite determinar o valor dos deslocamentos

independentes passa a ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} 9.0952 & -3.4881 & 11.2619 & 0 \\ -3.4881 & 18.1905 & 0 & -3.4881 \\ 11.2619 & 0 & 229.9683 & -11.2619 \\ 0 & -3.4881 & -11.2619 & 9.0952 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O campo de deslocamentos transversais obtido com uma malha regular com seis elementos finitos encontra-se representado na figura 48. Comparando esta aproximação com a correspondente solução exacta, é mais uma vez possível observar que as duas soluções praticamente coincidem.

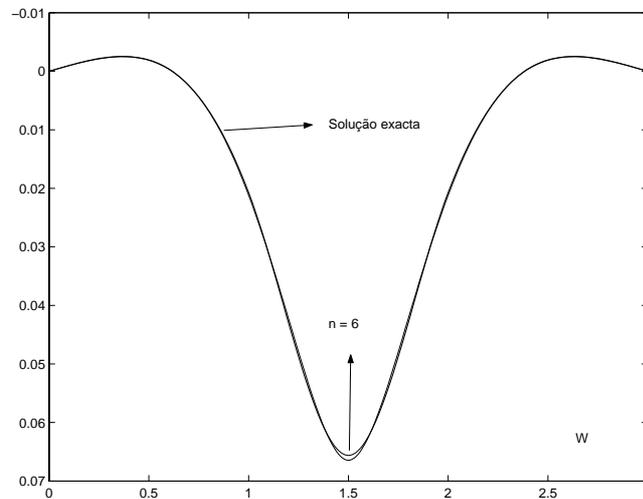


Figura 48: *Campo de deslocamentos devido à acção da carga concentrada*

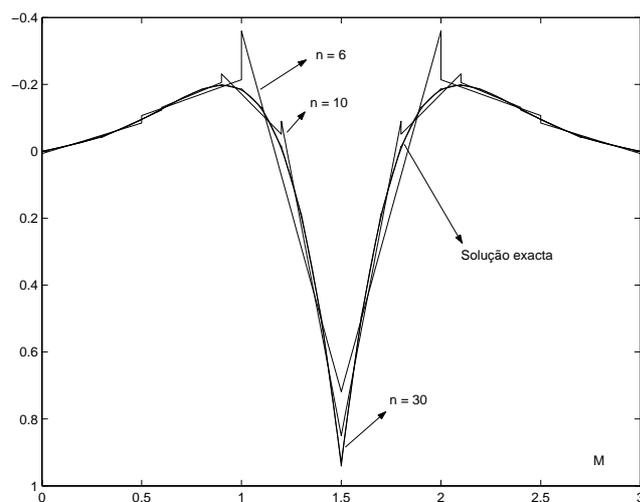


Figura 49: *Campo de momentos flectores devido à acção da carga concentrada*

Na figura 49 compara-se o diagrama de momentos flector exacto com a aproximação que é conseguida com três malhas de elementos finitos. A primeira ( $n = 6$ ) tem seis

elementos regulares, enquanto que as malhas  $n = 10$  e  $n = 30$  são constituídas por 10 e 30 elementos, respectivamente.

A solução com seis elementos mais uma vez permite identificar de forma clara os *saltos* existentes no diagrama de esforços nas fronteiras inter-elementares. No entanto, e tal como referido em parágrafos anteriores, essas discontinuidades vão diminuindo à medida que se refina a malha. De facto, para a malha mais refinada já praticamente não se consegue distinguir a solução aproximada da solução exacta.

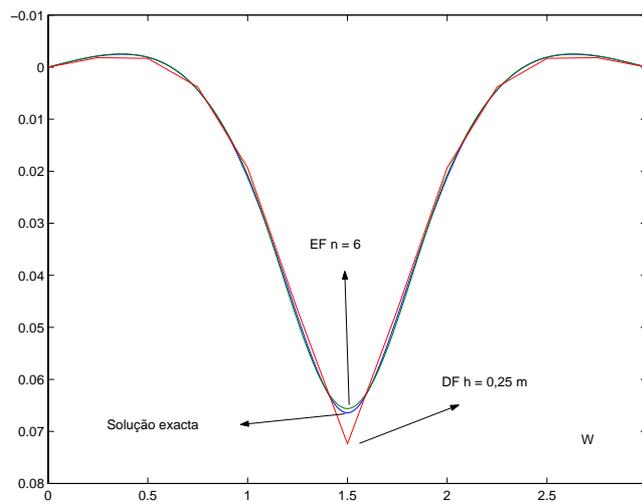


Figura 50: Comparação de soluções obtidas para o campo de deslocamentos; acção da carga concentrada

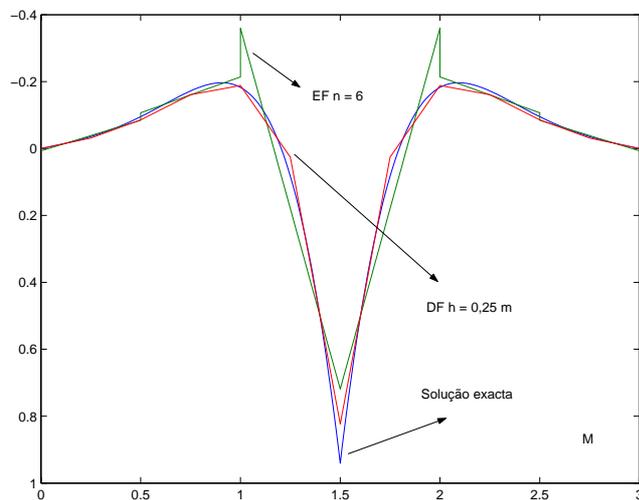


Figura 51: Comparação de soluções obtidas para o campo de momentos; acção da carga concentrada

A diferença entre as soluções que se conseguem determinar com recurso ao *MEF* e ao *MDF* encontra-se representada nas figuras 50 e 51 onde se comparam as soluções obtidas para o campo de deslocamentos transversais e para o campo de momentos flectores, respectivamente.

Mais uma vez se utilizaram discretizações envolvendo aproximadamente o mesmo número de graus de liberdade. Comentários semelhantes aos efectuados na secção anterior poderiam agora ser efectuados com base na análise do conteúdo destas duas figuras.

## 6.6 Análise da viga simplesmente apoiada sujeita à acção de um momento concentrado

Ilustra-se agora a aplicação do método dos elementos finitos na análise da viga simplesmente apoiada quando se considera a acção de um momento concentrado, de valor  $M = 10 \text{ kN/m}$ , aplicado na secção de meio-vão (ver figura 26). É utilizada mais uma vez a discretização representada na figura 34.

À semelhança do que foi discutido no parágrafo anterior, esta alteração do carregamento vai ter influência apenas na definição dos vectores das forças nodais equivalentes. Como também neste caso não existem quaisquer cargas de vão aplicadas nos elementos da discretização, continua a verificar-se

$$\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{0}$$

O vector das forças nodais equivalentes global vai *receber* directamente a contribuição do momento concentrado existente. Pode então escrever-se:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema de equações que resulta do estabelecimento das condições de equilíbrio nos nós (equação do Método dos Elementos Finitos) pode ser agora escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} 9.0952 & -3.4881 & 11.2619 & 0 \\ -3.4881 & 18.1905 & 0 & -3.4881 \\ 11.2619 & 0 & 229.9683 & -11.2619 \\ 0 & -3.4881 & -11.2619 & 9.0952 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O campo de deslocamentos transversais obtido com a malha regular com seis elementos finitos encontra-se representado na figura 52. De novo se verifica que a solução aproximada obtida é quase coincidente com a solução exacta para o problema.

A aproximação para o campo de momentos flectores conseguida com recurso a três malhas de elementos finitos é apresentada na figura 53. É curioso agora verificar que a descontinuidade associada à existência do momento concentrado aplicado no nó central é modelada de forma bastante precisa por qualquer uma das malhas em comparação.

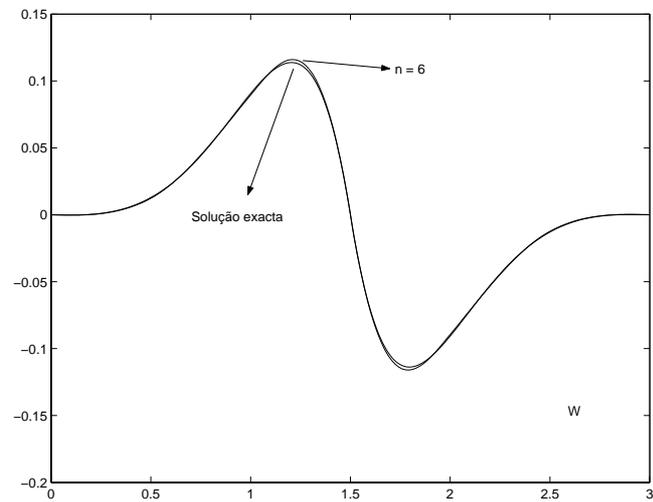


Figura 52: *Campo de deslocamentos devido à acção de um momento concentrado*

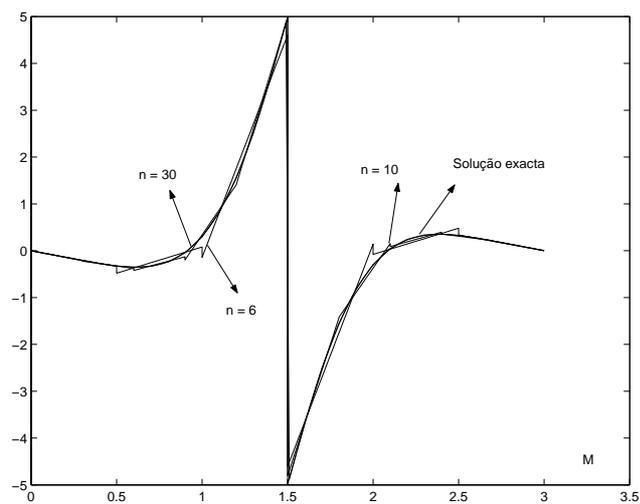


Figura 53: *Campo de momentos flectores devido à acção do momento concentrado*

Mais uma vez se pode observar que a malha com 30 elementos regulares permite obter um diagrama de esforços praticamente coincidente com a solução exacta.

Nas figuras 54 e 55 comparam-se as soluções de elementos e de diferenças finitas obtidas para o campo de deslocamentos transversais e para o campo de momentos flectores, respectivamente. Em relação a idênticas comparações efectuadas em secções anteriores, importa agora salientar que o *MEF* consegue modelar com muito mais facilidade e rigor o diagrama de momentos flectores na vizinhança do ponto de aplicação do momento concentrado. Este aspecto é bem visível se se analisarem os diagramas apresentados na figura 55,

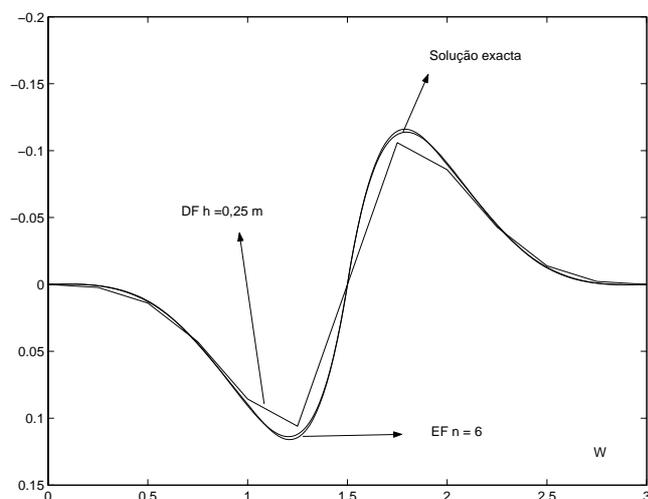


Figura 54: Comparação de soluções obtidas para o campo de deslocamentos;acção do momento concentrado

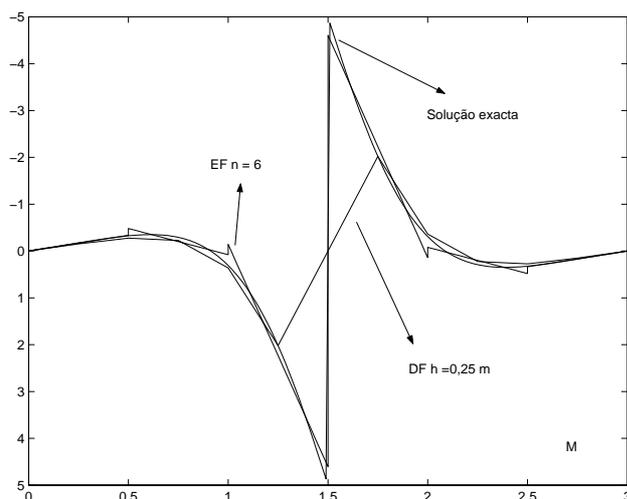


Figura 55: Comparação de soluções obtidas para o campo de momentos;acção do momento concentrado

## Referências

- [1] Orlando JBA Pereira, “Introdução ao Método dos Elementos Finitos na Análise de Problemas Planos de Elasticidade”, 2001;
- [2] OC Zienkiewicz e RL Taylor, ”The Finite Element Method - Basic Formulation and Linear Problems”, Volume 1, 4ª edição, McGraw-Hill, Berkshire, 1989;
- [3] OC Zienkiewicz e RL Taylor, ”The Finite Element Method - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity”, Volume 2, 4ª edição, Berkshire, 1991;
- [4] RD Cook, DS Malkus e ME Plesha, “Concepts and Applications of Finite Element Analysis”, John Wiley & Sons, New York, 1989;
- [5] JN Reddy, “An Introduction to the Finite Element Method”, McGraw-Hill, 2ª edição, Singapura, 1993;
- [6] JAT Freitas, “Análise Elástica de Estruturas”, elementos de estudo da disciplina de Análise de Estruturas I, Instituto Superior Técnico, 1987;

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Definição do problema</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Solução Analítica</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Solução com Séries de Fourier</b>	<b>8</b>
4.1	Carregamentos sinusoidais . . . . .	8
4.2	Introdução à Análise de Fourier . . . . .	10
4.3	Definição de soluções aproximadas . . . . .	11
4.4	Carga uniformemente distribuída . . . . .	12
4.5	Carga triangular . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Método das Diferenças Finitas</b>	<b>19</b>
5.1	Introdução ao método das diferenças finitas . . . . .	19
5.2	Análise da viga simplesmente apoiada . . . . .	20

<i>CONTEÚDO</i>	63
5.2.1 Carga permanente . . . . .	20
5.2.2 Carga triangular . . . . .	24
5.2.3 Cargas concentradas . . . . .	26
5.2.4 Momentos concentrados . . . . .	29
5.3 Consideração de outras condições de apoio . . . . .	31
5.3.1 Definição de nós encastrados . . . . .	31
5.3.2 Definição de nós livres . . . . .	32
5.3.3 Definição de nós simplesmente apoiados . . . . .	33
<b>6 Método dos Elementos Finitos</b>	<b>34</b>
6.1 Considerações iniciais . . . . .	34
6.2 Etapas do método dos elementos finitos . . . . .	35
6.3 Análise da viga simplesmente apoiada utilizando uma malha com três elementos finitos . . . . .	49
6.4 Análise comparativa das soluções aproximadas obtidas . . . . .	53
6.5 Análise da viga simplesmente apoiada sujeita à acção de uma carga concentrada . . . . .	56
6.6 Análise da viga simplesmente apoiada sujeita à acção de um momento concentrado . . . . .	59