

Modelação de Lajes com Elementos de Grelha

Luís Manuel Santos Castro

1 Introdução

A resolução analítica da equação de Lagrange só é possível nos casos em que a laje apresenta geometria, condições de fronteira e carregamentos muito particulares. Nos casos correntes, as técnicas analíticas de resolução de equações diferenciais não são em geral suficientes para permitir a determinação do comportamento do elemento estrutural que se pretende analisar.

Torna-se desta forma necessário recorrer a técnicas numéricas que possibilitem uma resolução aproximada da equação de Lagrange. De entre estas técnicas, a mais difundida é a do Método dos Elementos Finitos (MEF)¹. O MEF [1] é uma técnica de cálculo aproximado bastante potente, mas que torna difícil o trabalho do projectista na análise e utilização prática dos resultados que fornece. A sua utilização pode no entanto ser imprescindível quando a complexidade da laje a analisar, resultante de uma geometria muito irregular ou de condições de apoio e/ou carregamento pouco usuais, impede que sejam utilizados outros modelos de cálculo na determinação do comportamento da estrutura.

Para evitar o recurso à utilização do MEF nos casos em que o tipo de laje a analisar não o requer, utiliza-se na generalidade dos casos uma técnica bastante simples que consiste em modelar a laje com recurso à consideração de um conjunto de elementos de grelha.

Esta técnica é de fácil aplicação e a sua fundamentação é intuitiva, sendo baseada em conceitos físicos de significado quase imediato. Para além disto, a análise e posterior utilização dos resultados vem bastante facilitada. É importante sublinhar que a modelação com elementos de grelha permite obter apenas uma aproximação para o comportamento real da laje que se pretende analisar. No entanto, a validade da sua aplicação não pode ser posta em causa, uma vez que os resultados obtidos desta forma estão sempre do lado da segurança, o que é um factor de grande importância para o projectista.

Há no entanto alguns cuidados a ter quando se efectua a modelação, para que os resultados obtidos possam ter o significado desejado. Antes de mais é necessário

¹O método dos elementos finitos será estudado na disciplina de Análise de Estruturas II

decidir quantos são os elementos de grelha que se devem considerar na análise e qual a sua localização. Torna-se necessário ainda determinar quais as características geométricas a atribuir aos elementos de grelha por forma a que a modelação conduza a resultados o mais perto possível do que se passa na laje real. É ainda preciso definir com rigor quais os tipos de apoio a considerar nos nós pertencentes a bordos apoiados da laje e quais as cargas a considerar na modelação do carregamento actuante. Por fim, é necessário determinar qual a relação existente entre os deslocamentos nodais na grelha e os deslocamentos na laje e a relação entre os esforços instalados em cada uma das barras utilizadas na modelação e os esforços a considerar na laje.

2 Como modelar lajes com elementos de grelha

2.1 Justificação

É de certa forma intuitivo que se possa estimar o comportamento de uma laje com recurso à análise de uma grelha. Nos dois casos têm-se estruturas que “existem” num dado plano e se encontram sujeitas a uma carregamento que actua perpendicularmente a esse mesmo plano.

Para além deste aspecto, repare-se que em cada nó da grelha os deslocamentos possíveis, um deslocamento transversal w e duas rotações segundo duas direcções ortogonais, θ_x e θ_y , correspondem precisamente aos campos de deslocamentos a considerar na modelação do comportamento de uma laje, tal como se encontra apresentado em [2]. Esta correspondência encontra-se representada na figura 1.

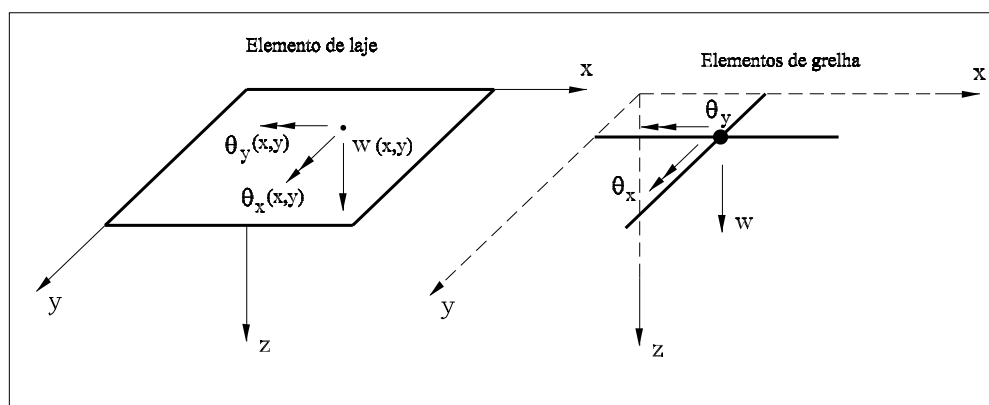


Figura 1: Campos de deslocamentos nas lajes e nas grelhas

Tal como se encontra discutido em [2], também é possível relacionar os esforços necessários para a caracterização do comportamento das lajes com os esforços que surgem em elementos de grelha dispostos em duas direcções ortogonais. Desta forma, e tal como se encontra ilustrado na figura 2, os momentos m_x e m_{xy} e o esforço

transverso v_x estão directamente associados aos esforços que existem em elementos de grelha com um eixo paralelo ao eixo x . Também os momentos flectores, torsões e esforços transversos em barras paralelas ao eixo y correspondem aos esforços m_y , m_{xy} e v_y , os quais se desenvolvem no elemento de laje. O único aspecto a ter em conta diz respeito ao sentido positivo do momentos torses m_{xy} ao longo de x e o momento torses nos elementos de grelha que possuem a mesma orientação. De acordo com a informação representada na figura 2, a convenção adoptada para identificar os valores positivos desses esforços no caso das grelhas é a contrária à que é utilizada nas lajes.

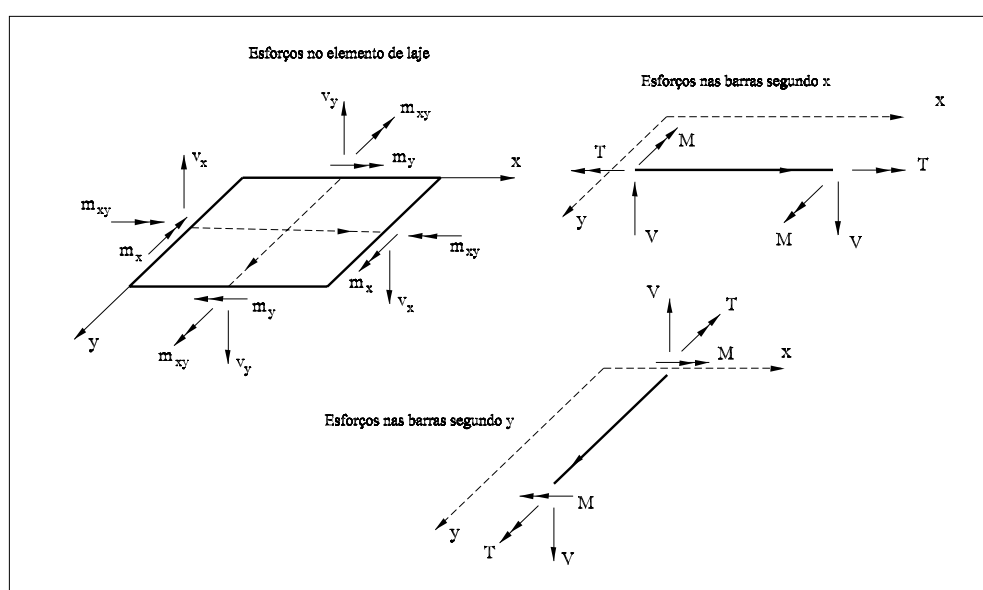


Figura 2: Campos de esforços nas lajes e nas grelhas

A grande diferença entre estes dois tipos de elementos estruturais está relacionada com o carácter bidimensional do comportamento das lajes. Trata-se de uma estrutura laminar, em que não é possível dissociar o comportamento numa dada direcção com o que se passa na outra. Já as grelhas são peças lineares, com um comportamento uni-dimensional. Desta forma, nunca se conseguirá representar de forma exacta o comportamento bidimensional com recurso a uma modelação com elementos uni-dimensionais, mesmo que se considerem espaçamentos muito pequenos entre os elementos de grelha.

É importante sublinhar que esta técnica de modelação permite obter apenas resultados aproximados. Como foi referido acima, nunca se conseguirá com recurso a modelações com elementos uni-dimensionais reproduzir de forma exacta o comportamento de uma estrutura bidimensional. Desta forma, não se pode afirmar que existe uma forma “certa” ou “correcta” de efectuar a modelação pretendida. Para uma dada laje podem existir, dentro de certos limites é claro, diferentes modelações que podem conduzir a resultados bastante satisfatórios. Assim, um dos princípios

básicos da modelação é o de tentar obter uma definição simples e pouco “complicada” da estrutura e carregamentos a utilizar na análise. Regra geral, a utilização de modelações muito “sofisticadas” não está necessariamente associada à obtenção de uma solução de muito melhor qualidade.

A distribuição de esforços resultante da modelação com elementos de grelha equilibra o carregamento aplicado à laje. Desta forma, pode afirmar-se que o dimensionamento efectuado com base nesta informação se encontra efectuado do lado da segurança.

2.2 Discretização a adoptar

A primeira das tarefas a realizar quando se pretende efectuar a modelação de uma laje consiste em determinar a localização dos elementos de grelha a utilizar.

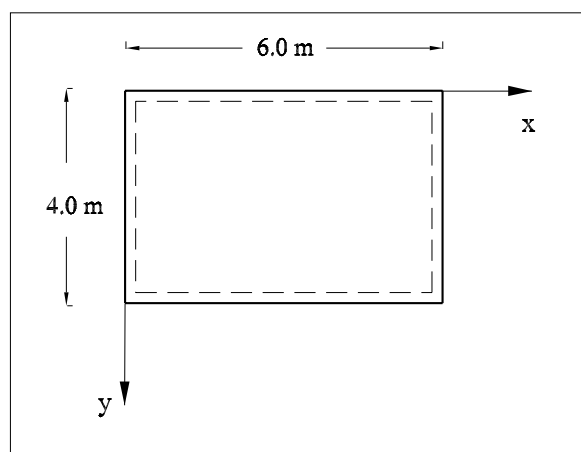


Figura 3: Laje rectangular simplesmente apoiada

Para discutir como essa escolha pode ser efectuada, considere-se a laje simplesmente apoiada representada na figura 3. Considere-se agora que a laje é subdividida num conjunto de *faixas* ou *bandas* com 1 m de largura, dispostas segundo x e segundo y , tal como se encontra representado na figura 4. Cada uma destas faixas de laje é agora substituída por um elemento de grelha disposto a meio da banda, tal como se encontra esquematicamente representado na figura 5. Cada um desses elementos de grelha tem a tarefa de *modelar* o comportamento desse troço da laje.

Juntando as barras definidas em ambas as direcções, obtém-se a modelação representada na figura 6. As propriedades a atribuir a cada uma das barras devem ser escolhidas por forma a que o comportamento da grelha escolhida permita representar, da forma o mais aproximada possível, o comportamento da laje que se pretende modelar. A determinação destas propriedades será discutida na secção seguinte. Por agora limitemo-nos a observar de novo que cada um dos elementos de grelha considerados está a representar o comportamento de uma faixa de laje com uma

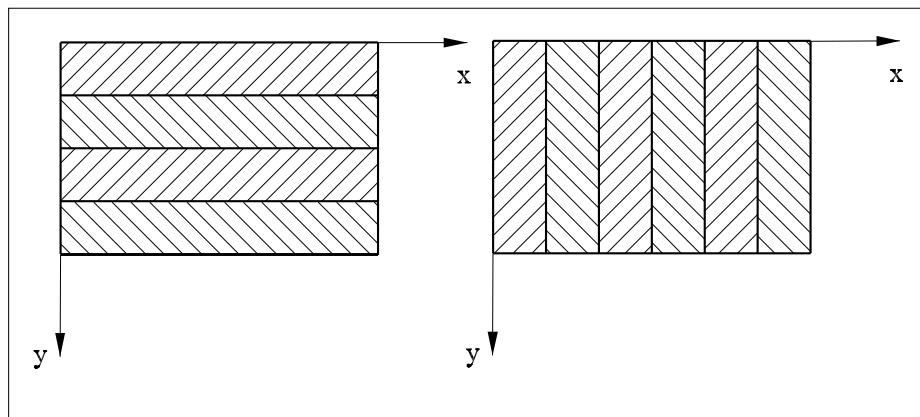


Figura 4: Subdivisão da laje em bandas de largura unitária

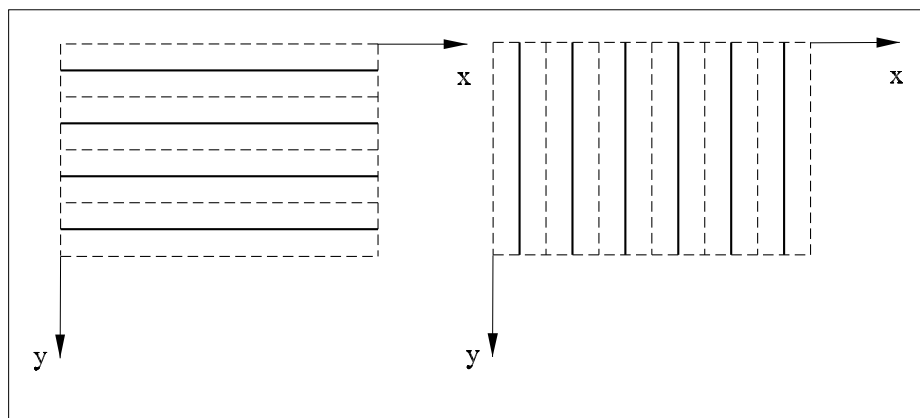


Figura 5: Eixos dos elementos de grelha a considerar na modelação

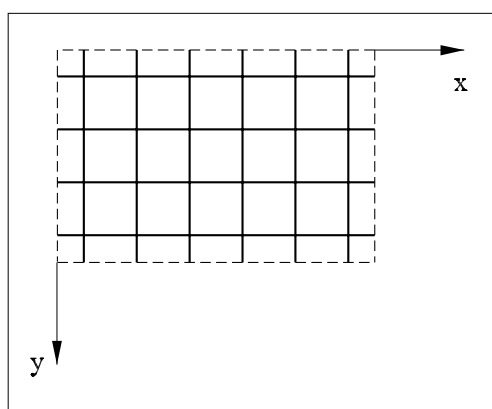


Figura 6: Modelação da laje rectangular simplesmente apoiada com recurso a elementos de grelha

largura igual a $1 m$.

A pergunta que se pode colocar de imediato está relacionada com a largura escolhida para cada uma das bandas. Desta forma, poderá perguntar-se qual é a largura ideal a considerar para que a modelação com grelhas permita obter a melhor solução possível. Mais uma vez, não existe uma resposta certa para esta questão. Intuitivamente se perceberá que a largura de banda deve estar relacionada de certa forma com a dimensão da laje a analisar. Devem evitar-se modelações em que a largura das bandas consideradas seja muito grande quando comparado com o vão representativo da laje a analisar. Por outro lado, larguras de banda exageradamente pequenas apenas dificultam a definição da geometria da grelha, sem que os resultados aproximados obtidos melhorem significativamente de qualidade.

Existem apenas regras empíricas para a definição da largura das faixas a considerar, muitas das quais afinadas para o caso de tabuleiros de pontes e viadutos [3]. Para as lajes correntes de edifícios, pode considerar-se que o espaçamento utilizado na discussão que se está a efectuar ($1 m$) é perfeitamente razoável. Esta afirmação será confirmada através da análise dos exemplos apresentados na secção 3.

Embora esta forma de definir a distribuição dos elementos de grelha seja a que mais sentido faz de um ponto de vista intuitivo, não é a que mais correntemente se utiliza. Para tornar mais simples a definição da estrutura a utilizar na análise, começa-se por efectuar a identificação da localização dos elementos de grelha a considerar. Desta forma, depois de se subdividir a laje em bandas, como se encontra representado na figura 4 para o exemplo em estudo, considera-se que os elementos de grelha existem nas extremidades de cada uma delas.

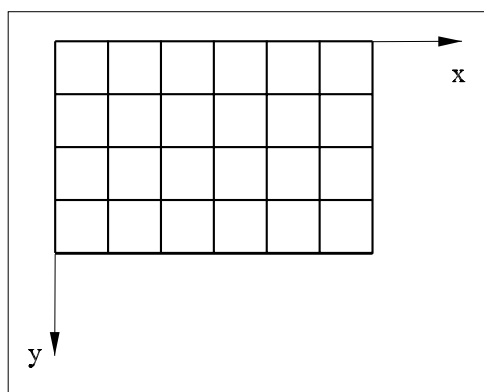


Figura 7: Modelação da laje simplesmente apoiada com elementos de grelha; técnica alternativa

Este procedimento dará origem à grelha representada na figura 7. É importante salientar agora que quando se forem determinar as propriedades a atribuir a cada uma destas barras é necessário ter em atenção que a largura da faixa que elas representam deixa de ser idêntica, tal como se encontra ilustrado na figura 8. As barras

que se encontram dispostas sobre os bordos simplesmente apoiados modelam uma banda de laje com $0,5\text{ m}$ de largura, enquanto que as barra “interiores” continuam a modelar faixas com 1 m .

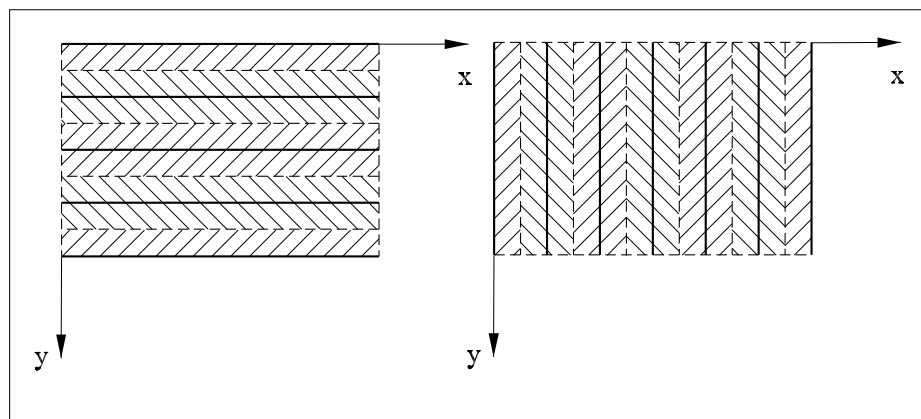


Figura 8: Identificação das bandas associadas a cada um dos elementos de grelha considerados na modelação

Este é o procedimento que será seguido daqui para a frente. No entanto, antes de se avançar mais é ainda necessário discutir alguns detalhes referentes à utilização desta metodologia. Como é fácil de entender pela descrição da metodologia envolvida na distribuição dos elementos de grelha e também tendo em conta a ilustração desta técnica apresentada na figura 7, existem barras dispostas sobre os bordos da laje.

Essas barras devem existir sempre que se trate de um bordo livre (para se conseguir determinar o momento flector e o momento torsor ao longo desse lado) e de um bordo simplesmente apoiado (para se conseguir modelar a distribuição correspondente de momentos torsores). Já quando se trata de um bordo encastrado, não se torna necessário considerar a existência de barras ao longo desse lado, podendo estas ser removidas da modelação a considerar.

Estas situações encontram-se ilustradas na figura 9, onde para duas estruturas se apresentam modelações possíveis. Refira-se desde já que o tratamento das condições de apoio será discutido na secção 2.4.

Outra situação que merece alguma atenção diz respeito à existência de pilares. Sempre que tal aconteça, é necessário que se garanta que nesse ponto passa um nó da grelha, para que seja posteriormente possível a correcta definição das condições de apoio correspondentes. Este cuidado encontra-se ilustrado nas modelações apresentadas na figura 10.

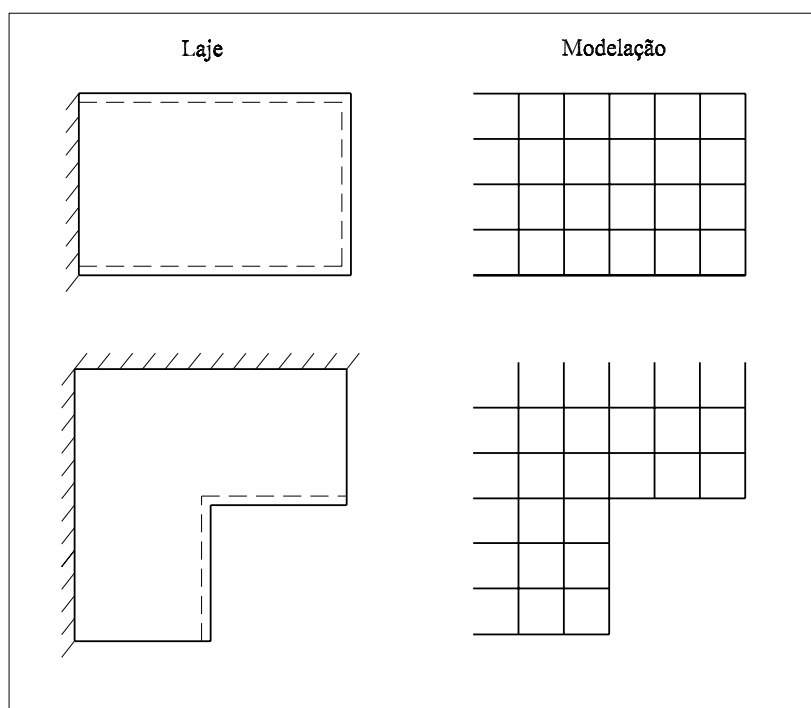


Figura 9: Exemplos de modelação; lajes com bordos livres e bordos encastrados

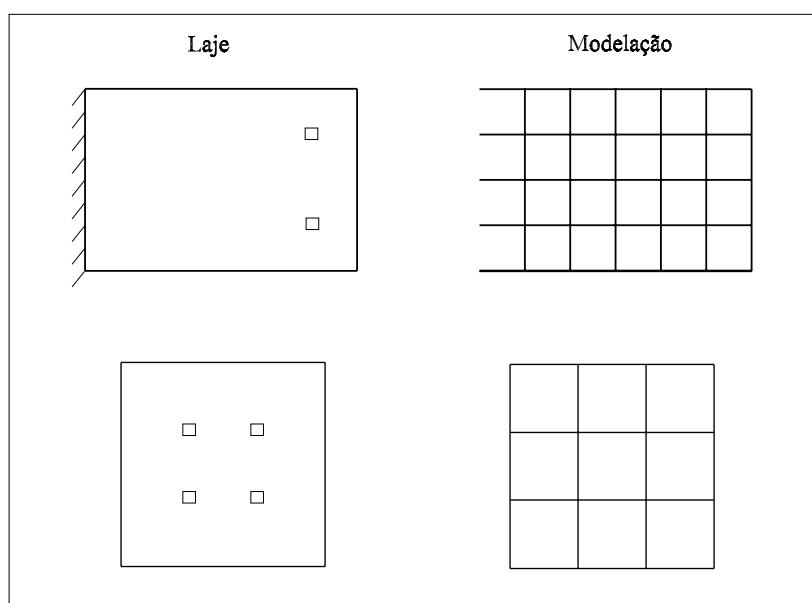


Figura 10: Exemplos de modelação; lajes com pilares

2.3 Características geométricas dos elementos de grelha

Quando se definem os elementos de grelha que pretendem simular o comportamento da laje, é necessário atribuir-lhes uma dada rigidez à flexão, EI e uma dada rigidez de torção, GJ . A escolha destas propriedades deve ser efectuada de forma a que se possa representar, de forma o mais aproximada possível, o comportamento dos elementos estruturais que se pretendem modelar.

Desta forma, a informação relevante para determinar quais as propriedades a considerar deve ser extraída das relações constitutivas para as lajes de Kirchhoff, as quais podem ser escritas na forma [2]:

$$\begin{bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Para se conseguir estimar o valor da rigidez de flexão para as barras com eixo paralelo à coordenada x , considere-se que a laje se encontra sujeita a um estado de flexão cilíndrica com $\chi_x \neq 0$ e $\chi_y = \chi_{xy} = 0$. Tendo em conta as relações de elasticidade expressas na forma (1), a relação momentos-curvaturas m_x/χ_x pode ser escrita da seguinte forma

$$m_x = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \chi_x = E \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \chi_x$$

É possível agora verificar que se escrever a relação habitual nas vigas $M = EI \chi$, se pode obter o valor da inércia equivalente, I_{eq} , que deverá ser considerada para modelar o comportamento à flexão de uma faixa de laje com 1 m de largura. Tem-se então:

$$I_{eq} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Se a largura da banda não for unitária, deverá considerar-se:

$$I_{eq} = b \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}$$

onde b corresponde à largura da faixa considerada. Verifica-se que a rigidez à flexão a considerar para modelar uma banda de laje com largura de b m é muito semelhante à rigidez que se teria de utilizar se se estivesse a analisar uma peça linear com essas mesmas dimensões, resultando mesmo idêntica se o coeficiente de Poisson se anular. A justificação para a existência dessa pequena diferença pode ser encontrada na referência [2].

Para ter em conta o comportamento à torção, considere-se agora que a laje se encontra sujeita ao estado de deformação caracterizado por $\chi_{xy} \neq 0$ e $\chi_x = \chi_y = 0$. Tendo em conta as relações constitutivas (1), o campo de momento torsões vem dado pela igualdade:

$$m_{xy} = \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \chi_{xy} = E \frac{h^3}{12(1+\nu)} \chi_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{h^3}{6} \chi_{xy} = G \frac{h^3}{6} \chi_{xy}$$

Comparando agora a equação anterior com a equação constitutiva que relaciona os momentos torsões, T , com as deformações por torção, ϕ_t , em elementos de grelha,

$$T = G J \phi_t,$$

é possível determinar qual o valor da rigidez de torção “equivalente” que deverá se considerada na modelação da laje. Tem-se então que:

$$J_{eq} = \frac{h^3}{6}$$

A igualdade anterior permite concluir que a rigidez equivalente a considerar para o caso da torção é igual a metade da rigidez à torção de um elemento de viga com a secção transversal com as mesmas dimensões. De facto, se se considerar uma secção rectangular com $b \gg h$, é possível verificar que a teoria de peças lineares permite definir

$$J = \frac{h^3}{3}$$

A explicação para este facto é simples e intuitiva. No caso das lajes existem dois momentos torsões que actuam em simultâneo. De uma forma um pouco mais rigorosa, pode afirmar-se então que para o aparecimento de uma curvatura de torção unitária contribuem os momentos torsões ao longo de x (m_{xy}) e os momentos torsões ao longo de y ($m_{yx} = m_{xy}$).

Se a largura da banda a modelar não for unitária, a rigidez de torção equivalente deverá então ser dada pela igualdade,

$$J_{eq} = b \frac{h^3}{6} \tag{2}$$

onde b representa de novo a largura da faixa em consideração.

Sublinhe-se desde já que uma vez que a consideração directa do efeito do momento torsor dificulta a tarefa de dimensionamento das lajes, é frequente que nas grelhas se despreze o valor da rigidez de torção, assumindo então que $GJ = 0$. Esta opção faz com que o carregamento seja equilibrado apenas com o *recurso* a distribuições de momentos flectores. Saliente-se também que esta opção está do lado da segurança, uma vez que mais uma vez se consideram diagramas de esforços que satisfazem as condições de equilíbrio no domínio e na fronteira estática.

Na secção dedicada aos exemplos será ilustrada a influência que a não consideração de rigidez à torção pode ter nos valores dos campos de esforços e nos campos de deslocamentos transversais.

2.4 Simulação das condições de apoio

2.5 Bordos encastrados

Esta é a situação mais simples de tratar. Todos os nós que estiverem sobre um bordo encastrado devem considerar-se de imediato como nós encastrados, onde todos os deslocamentos de encontram impedidos (ver exemplo da figura 11).

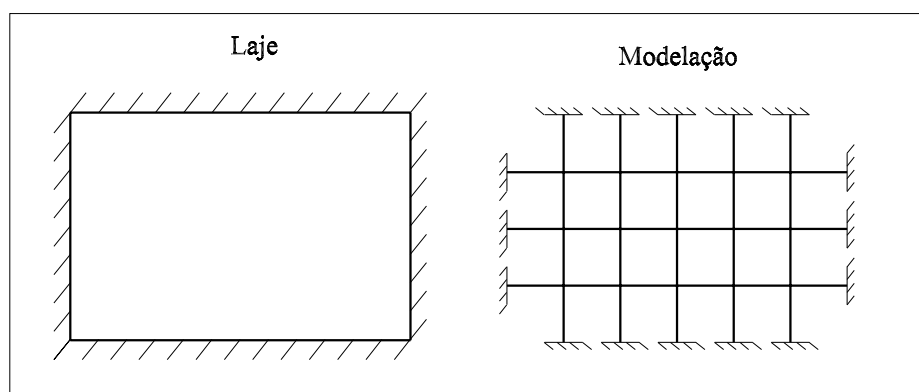


Figura 11: Apoios a considerar na modelação de uma laje encastrada em todo o seu contorno

2.6 Bordos simplesmente apoiados

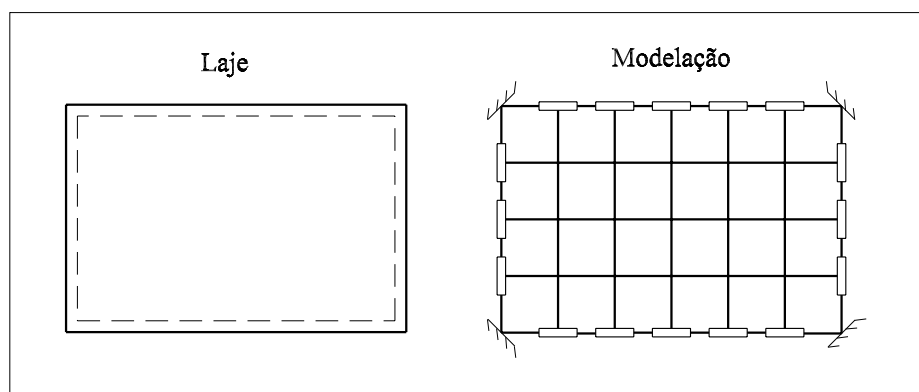


Figura 12: Apoios a considerar na modelação de uma laje apoiada em todo o seu contorno

Considere-se agora a existência de um bordo simplesmente apoiado. Para os nós existentes sobre esse bordo devem restringir-se o deslocamento transversal e as rotações em torno da normal exterior ao bordo em causa. Isto corresponde a considerar-se a

existência de apoios cilíndricos em cada um destes nós, nos quais o eixo do cilindro é coincidente com o bordo da laje.

Na figura 12 encontram-se esquematizados os apoios a considerar nos nós existentes no contorno de uma laje simplesmente apoiada. Repare-se que os nós de cantos têm todos os deslocamentos impedidos.

2.7 Pilares

Sempre que existem pilares, devem colocar-se apoios esféricos nos nós correspondentes da modelação. Este tipo de apoio apenas impede o deslocamento transversal. Na figura 13 apresenta-se uma modelação para uma laje fungiforme, onde os únicos apoios existentes correspondem aos quatro pilares identificados na figura.

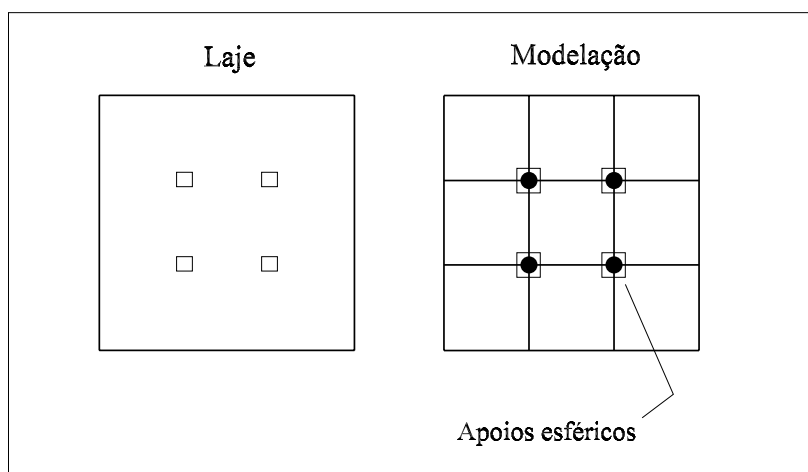


Figura 13: Apoios a considerar na modelação de uma laje fungiforme

2.8 Bordos de continuidade

Considere-se agora a situação definida na figura 14, onde se considera a existência de um apoio de rigidez infinita entre os pontos A e B. Este apoio pode corresponder, por exemplo, à existência de uma parede existente sob a laje. Quando se efectua a modelação, todos os nós existente sobre este eixo devem estar sujeitos a um apoio cilíndrico, tal como se encontra representado na figura 14.

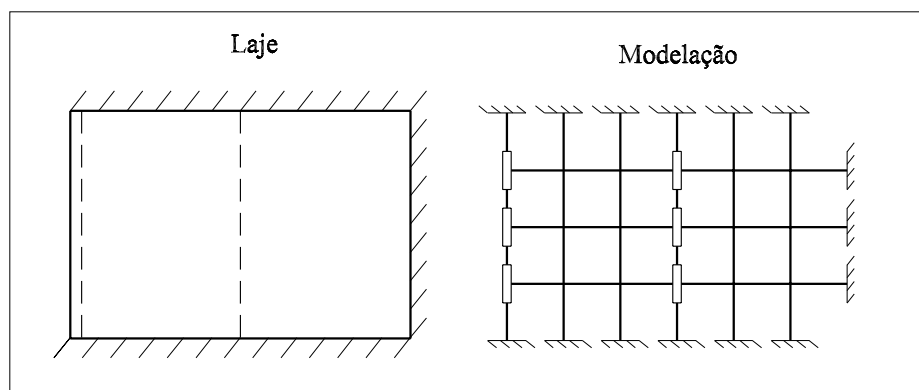


Figura 14: Apoios a considerar na modelação de uma laje com um apoio de continuidade

2.9 Apoios elásticos

Em problemas reais, as condições de apoio das lajes diferem das que acabámos de discutir. Regra geral, estes elementos estruturais apoiam-se em elementos deformáveis (vigas, pilares, paredes de rigidez finita), pelo que as condições de fronteira deverão ser alteradas para ter em conta este efeito.

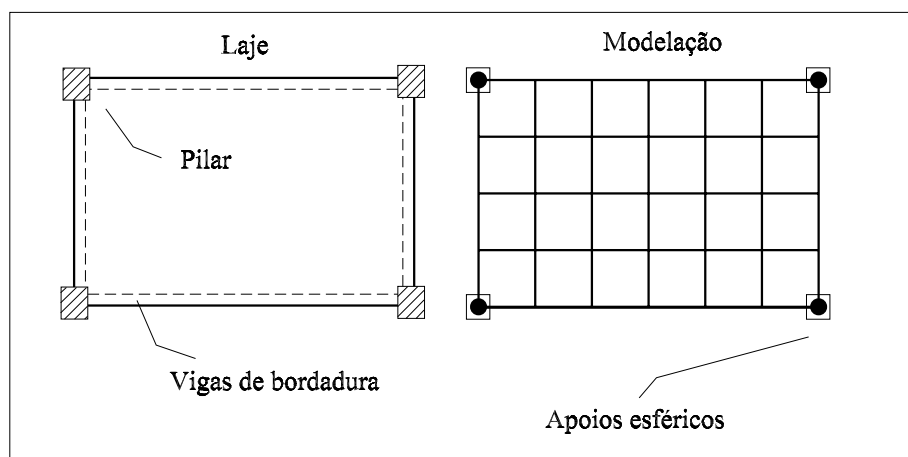


Figura 15: Apoios a considerar na modelação de uma laje com apoios elásticos

Considere-se por exemplo a laje rectangular representada na figura 15, onde se assume a existência de uma viga de bordadura de rigidez à flexão EI_v e uma rigidez à torção dada por GJ_v . Considere-se ainda que o sistema laje + vigas de bordadura descarrega em quatro pilares localizados nos vértices da laje.

Se se assumisse que os bordos se encontram simplesmente apoiados, as condições de fronteira seriam as habituais, ou seja

$$w = 0 \quad ; \quad m_n = 0$$

Neste caso, apenas se poderá dizer que

$$w_{laje} = w_{viga} \quad \text{e} \quad m_{mlaje} = T_{viga}$$

onde w_{viga} e T_{viga} representam o campo de deslocamentos transversais e o campo de momentos torsores na viga, respectivamente.

Os únicos apoios a considerar são os apoios elásticos representados na modelação apresentada na figura 15. Esses apoios devem restringir apenas o deslocamento transversal e a sua rigidez deve ser dada pela rigidez axial dos pilares considerados.

Para se conseguir modelar o comportamento conjunto da laje e das vigas de bordadura, deve ter-se em conta que nas barras dispostas ao longo da fronteira se devem considerar em simultâneo as propriedades geométricas e elásticas envolvidas na caracterização da faixa de laje correspondente e as propriedades necessárias à caracterização das vigas de bordadura propriamente ditas.

Desta forma, deverá considerar-se para esses elementos da discretização:

$$I_{eq} = b \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} + I_v$$

$$J_{eq} = b \frac{h^3}{6} + J_v$$

onde as rigidezes à flexão e à torção das vigas de bordadura, I_v e J_v , podem ser calculadas de acordo com a teoria das peças lineares:

$$I_v = b \frac{h^3}{12} \tag{3}$$

$$J_v = \frac{bh^3}{16} \left[\frac{16}{3} - 3, 36 \frac{h}{b} \left(1 - \frac{h^4}{12b^4} \right) \right] \tag{4}$$

2.10 Carregamento a considerar

Tendo em conta que esta forma para modelar lajes apenas permite determinar uma solução aproximada, não faz sentido de um ponto de vista prático sofisticar em demasia o processo de determinação da distribuição de cargas pelas barras da estrutura.

Para simplificar a apresentação, considera-se aqui que o carregamento aplicado na laje é sempre constituído por uma carga uniformemente distribuída, q , aplicada em todo o domínio da laje.

Quando se efectua a modelação, poder-se-ia pensar em aplicar em cada elemento de grelha da discretização um carregamento trapezoidal, correspondente à forma como as lajes “descarregam” em cada uma das vigas fictícias. Esta forma de definição do

carregamento tem como desvantagem o volume de cálculos envolvido na determinação dos correspondentes valores para cada uma das barras da discretização.

Um processo mais simples consiste em considerar que todas as barras da grelha se encontram sujeitas à acção de uma carga uniformemente distribuída. A carga q deve ser “repartida” pelas duas direcções, considerando-se que as barras paralelas ao eixo x são responsáveis pelo equilíbrio de parte da carga, enquanto que a parcela restante é “absorvida” pelas barras dispostas segundo a direcção y . Desta forma, considera-se que todas as barras dispostas segundo x estão sujeitas à acção de uma carga uniforme com o valor $\alpha \times q$, enquanto que para as barras segundo y se aplica uma carga distribuída dada por $(1 - \alpha) \times q$. O valor do parâmetro α depende da geometria da laje e das condições de fronteira especificadas. Para lajes quadrangulares com a mesma condição de apoio definida para todos os bordos, faz todo o sentido considerar que $\alpha = 0,5$.

No entanto, esta metodologia para a definição do carregamento ainda é algo morosa e não corresponde à que normalmente se utiliza. Uma técnica bem mais simples consiste em considerar apenas cargas transversais nodais. Desta forma, para se determinarem as forças a aplicar em cada um dos nós, bastará determinar a correspondente área de influência e multiplicá-la pelo valor da carga uniformemente distribuída.

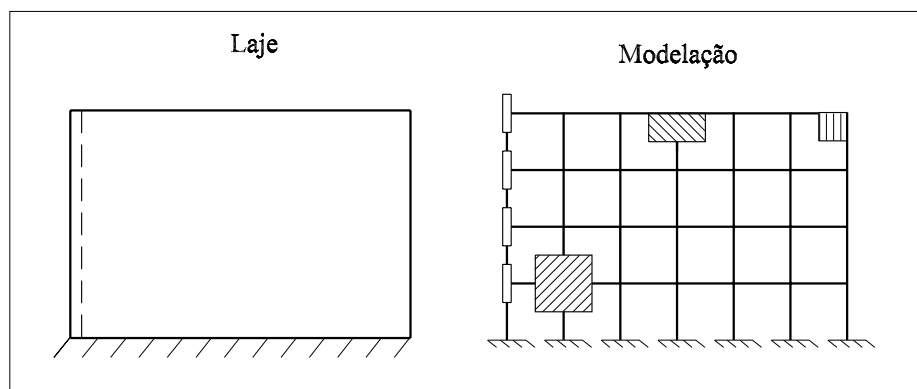


Figura 16: Áreas de influência a considerar na determinação das cargas nodais concentradas a aplicar na modelação

Tome-se como exemplo a laje representada na figura 16. Definem-se neste caso três áreas de influência diferentes. Chama-se a atenção para o facto de não ser necessário a definição de cargas em todos os nós onde o deslocamento vertical está impedido (nós pertencentes a bordos encastrados ou a bordos simplesmente apoiados).

Pode parecer à primeira vista que esta modelação simplista efectuada para o carregamento não poderá conduzir à obtenção de bons resultados. No entanto, verificar-se-à na secção 3, que a adopção desta metodologia para a definição do carregamento já permite obter boas soluções aproximadas.

2.11 Análise da solução

Uma vez obtida a solução referente à análise da grelha, torna-se necessário estimar os valores correspondentes na laje que se pretende modelar.

Em cada nó da discretização, os três deslocamentos obtidos, w , θ_x e θ_y correspondem aos deslocamentos na laje, tal como se encontra esquematicamente representado na figura 1.

A passagem dos esforços obtidos em cada barra para os esforços na laje já não é tão simples. É necessário por um lado ter em consideração a relação entre os esforços nas barras e na laje, a qual se encontra representada na figura 2. Por outro lado, tendo em conta que os esforços na laje são definidos por unidade de comprimento, é necessário dividir os esforços referentes ao elemento de grelha pela largura da banda de laje que tal barra pretende modelar.

Os momentos flectores m_x , esforços transversos v_x e momentos torsores m_{xy} são obtidos com base nos valores dos esforços nas barras paralelas ao eixo x , os quais vêm aqui denotados por M^x , V^x e T^x . Pode escrever-se então:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{M^x}{l_b} \\ v_x &= \frac{V^x}{l_b} \\ m_{xy} &= \frac{T^x}{l_b} \end{aligned}$$

onde l_b corresponde à largura da faixa de laje modelado pelo elemento de grelha em causa.

Os esforços nas barras paralelas ao eixo y (M^y , V^y e T^y) permitem estimar para a laje o valor dos momentos flectores m_y , dos esforços transversos v_y e também dos momentos torsores m_{xy} . Podem neste caso escrever-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} m_y &= \frac{M^y}{l_b} \\ v_y &= \frac{V^y}{l_b} \\ m_{xy} &= \frac{T^y}{l_b} \end{aligned}$$

3 Exemplos de aplicação

3.1 Análise de uma laje simplesmente apoiada

Para ilustrar e validar as técnicas de modelação apresentadas nas secções anteriores, considere-se a análise da laje simplesmente apoiada representada na figura 17. Considere-se que o carregamento é constituído por uma carga uniformemente distribuída, $q = 10 \text{ kN/m}$, aplicada em toda a laje. Considere-se ainda que esta possui uma espessura dada por $h = 0,20 \text{ m}$ e que o material estrutural tem um módulo de elasticidade dado por $E = 30,5 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ e um coeficiente de Poisson, $\nu = 0,2$.

3.1.1 Definição da modelação

A modelação a considerar na análise da laje encontra-se representada também na figura 17. Adoptou-se de novo um espaçamento unitário $h = 1,0 \text{ m}$, na definição da grelha a utilizar.

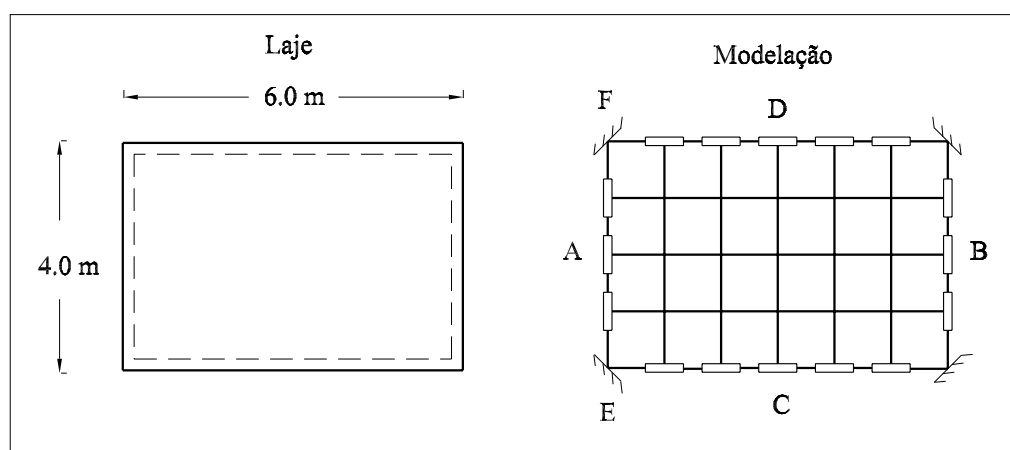


Figura 17: Modelação considerada para a laje rectangular simplesmente apoiada

Na definição da rigidez à flexão e à torção existem dois tipos de barras a considerar; as barras que se encontram sobre os bordos da laje e as restantes. As primeiras modelam faixas de laje com uma largura de $0,5 \text{ m}$, enquanto que as segundas modelam bandas com uma largura de 1 m .

Desta forma, e tendo em conta o que foi discutido na secção 2.3, as propriedades a considerar na modelação são as seguintes:

$$I_{eq} = 0,5 \frac{0,2^3}{12(1-0,2^2)} = 3,4722 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \quad \text{e} \quad J_{eq} = 0,5 \frac{0,2^3}{6} = 6,6667 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

para as vigas sobre os bordos e

$$I_{eq} = \frac{0,2^3}{12(1-0,2^2)} = 6,9444 \times 10^{-4} m^4 \quad e \quad J_{eq} = \frac{0,2^3}{6} = 1,3333 \times 10^{-3} m^4$$

para as restantes.

Para ter em conta o efeito do carregamento, consideram-se aplicadas nos nós da discretização cargas verticais concentradas com um valor dado por:

$$F_v = 10 \times 1,0 \times 1,0 = 10kN$$

Nos nós do contorno não foi aplicada qualquer carga tendo em conta que todos eles se encontram apoiados.

3.1.2 Análise dos resultados aproximados

Na figura 18 apresenta-se a aproximação obtida para o campo de momentos flectores m_y , ao longo do troço CD. Nessa mesma figura representa-se a traço interrompido a correspondente solução exacta. Esta última foi obtida com recurso à solução de Navier, a qual pode ser encontrada nas referências [2, 4].

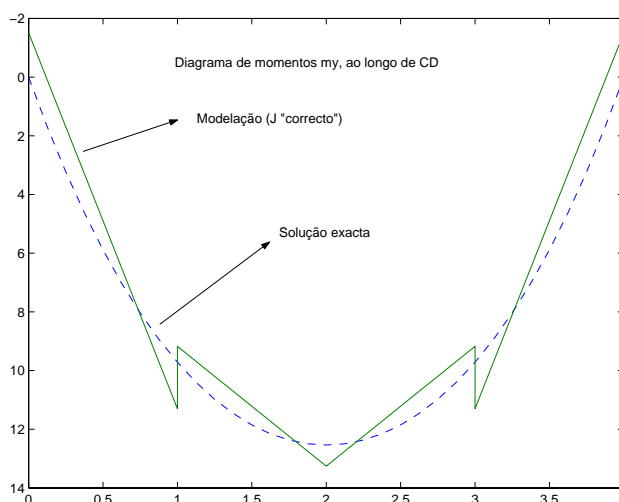


Figura 18: *Diagrama de momentos m_y ao longo de CD*

Verifica-se que a modelação considerada permite obter uma aproximação de muito boa qualidade para o campo de momentos em análise. Este facto é significativo, sobretudo se se tiver em consideração que é nesta direcção (direcção associada ao menor vão da laje) que se encontram os momentos flectores com maior valor absoluto, os quais irão condicionar o dimensionamento da estrutura em estudo.

A análise do diagrama apresentado na figura 18 permite ainda identificar algumas das características típicas dos resultados obtidos com recurso a esta técnica. Verifica-se então que na solução aproximada os diagramas de momentos são lineares por

troços. A explicação para tal é imediata se se tiver em conta que apenas se considerou a existência de cargas concentradas aplicadas nos nós da grelha.

Por outro lado, existem “saltos” de certa forma inesperados no diagrama de momentos nas secções que correspondem a nós da grelha. Esses saltos não existem na solução exacta, mas na modelação resultam do equilíbrio de momentos nos nós. De facto, e tal como se encontra ilustrado na figura 19, o momento flector na secção final da barra i não será igual ao momento flector na secção inicial da barra j , a menos que sejam nulos os momentos torsores nas barras que lhes são perpendiculares.

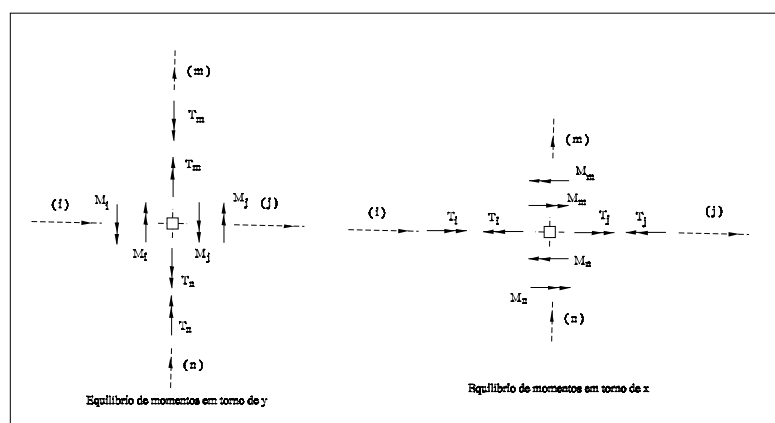


Figura 19: *Equilíbrio de momentos nos nós da grelha*

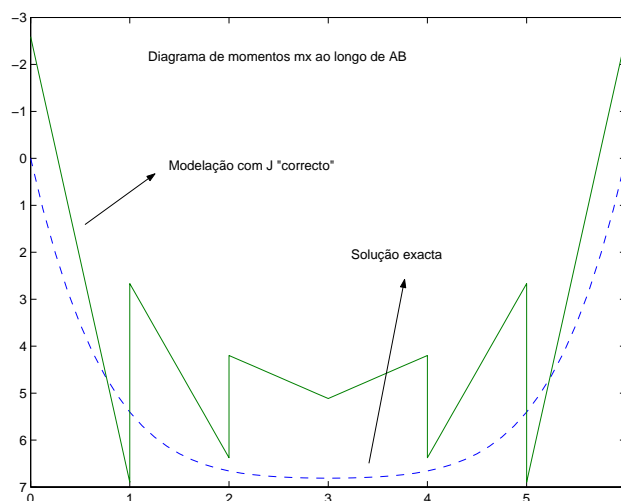


Figura 20: *Diagrama de momentos m_x ao longo de AB*

É também por existirem momentos torsores nas barras dispostas sobre os bordos da laje que os momentos flectores não se anulam em C e em D, como seria à partida de esperar. Para conseguir garantir que os momentos sobre os bordos da laje se anulam, poderia ter sido considerado que o conjunto de elementos de grelha que se situa no contorno tem um valor de J nulo. No entanto, esta escolha já não permite determinar qualquer aproximação para o campo de momentos torsores ao longo

desses bordos, uma vez que quando se assume rigidez à torção nula para uma dada barra, ela passa apenas a “absorver” momentos flectores e esforços transversos.

Na figura 20 representa-se o diagrama de momentos flectores m_x , ao longo do troço AB identificado na modelação da figura 17. Tal como referido anteriormente, ao longo desta direcção o valor máximo dos momentos é inferior ao que se regista na direcção y , ao longo do troço CD.

Quando se compara a solução aproximada com a solução exacta correspondente (apresentada a traço interrompido na figura 20), verifica-se uma discrepância entre as duas soluções, superior à que foi registada na análise da figura 18. Esta diferença não é contudo tão significativa quanto pode parecer à primeira vista. Isto porque as soluções resultantes da técnica de modelação se devem utilizar fundamentalmente para se conseguir estimar o valor máximo dos esforços ao longo de uma dada direcção e a sua localização. Como é possível verificar, essa informação encontra-se presente no diagrama apresentado na figura 20.

Na figura 21 apresenta-se o campo de momentos torsores ao longo do bordo EF. Saliente-se que para se obter diagrama foi necessário multiplicar os valores dos correspondentes momentos obtidos para os elementos de grelha existentes sobre o bordo, tendo em conta que aí a faixa de laje modelada tem uma espessura de apenas 0,5 m.

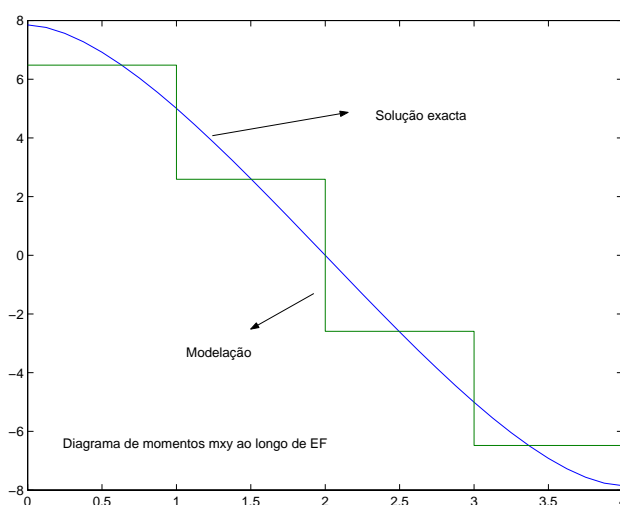


Figura 21: *Diagrama de momentos m_{xy} ao longo de EF*

O facto de se terem considerado apenas cargas nodais, faz com que o diagrama de momentos torsores aproximado obtido seja constante por troços. Interessante é verificar que esse valor constante é em cada um desses troços aproximadamente igual ao valor do diagrama exacto no ponto médio do troço.

A aproximação conseguida para o campo de deslocamentos transversais, w , ao longo de AB, encontra-se representada na figura 22. É mais uma vez possível verificar uma muito boa concordância entre a solução aproximada obtida e a solução exacta.

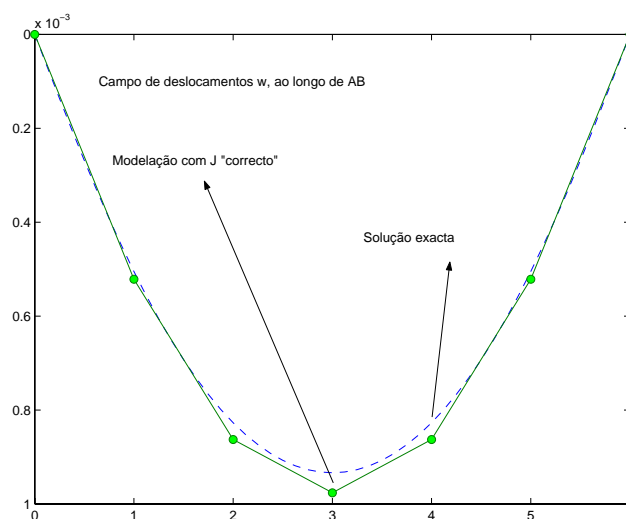


Figura 22: *Campo de deslocamentos transversais, w , ao longo de AB*

3.1.3 Análise do efeito do valor de J considerado

Nesta secção estuda-se o efeito que o valor da rigidez à torção considerada na modelação pode ter na qualidade das soluções. Comparam-se as aproximações obtidas com a consideração do valor de J “correcto” com outras duas soluções, obtidas com recurso a modelações onde se consideram outros valores para a rigidez à torção dos elementos de grelha.

No primeiro dos casos utiliza-se o valor de J que se tomaria se se estivesse a analisar uma peça linear exactamente com as mesmas dimensões das bandas de laje consideradas. Esse valor é determinado de acordo com a equação (4). Tal como foi comentado anteriormente, tal valor será superior ao que deve ser utilizado para modelar o comportamento à torção da laje, de acordo com a informação contida no formato de rigidez das relações constitutivas, apresentadas em (1).

Sendo maior a rigidez à torção das barras utilizadas na modelação, é de esperar que o valor dos momentos torsores aumente em relação ao que se obteve considerando o J “correcto”. Sendo a carga a equilibrar a mesma, é de esperar também um ligeiro decréscimo no valor dos diagramas de momentos flectores.

A segunda das alternativas testadas consiste em assumir que todas as barras utilizadas na modelação têm rigidez à torção nula, $J = 0$. Desta forma, está a equilibrar-se o carregamento apenas com a “contribuição” dos diagramas de momentos flectores.

Sendo nulos os momentos torsores, é de esperar que os momentos flectores passem a tomar valores mais elevados, para garantir que o mesmo carregamento ainda continua a ser equilibrado pelos elementos de grelha dispostos. Como a distribuição de esforços continua a equilibrar o carregamento, a informação obtida continua do lado da segurança.

Salienta-se que esta opção é muitas vezes adoptada em análises práticas, uma vez que simplifica o tratamento dos resultados e permite efectuar o dimensionamento estrutural de forma mais simples e natural.

Quando se considera $J = 0$ em todas as barras da modelação, os diagramas de momentos flectores passam também a ser contínuos, uma vez que os momentos torsores envolvidos no estabelecimentos das equações de equilíbrio nodais passam a ser nulos também.

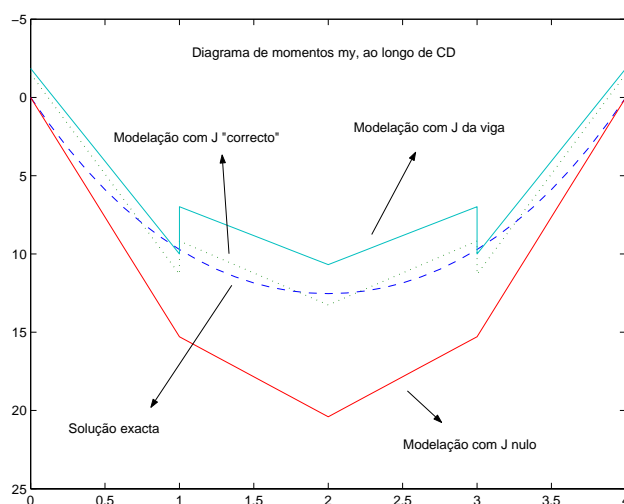


Figura 23: Diagrama de momentos m_y ao longo de CD; estudo da influência do valor de J

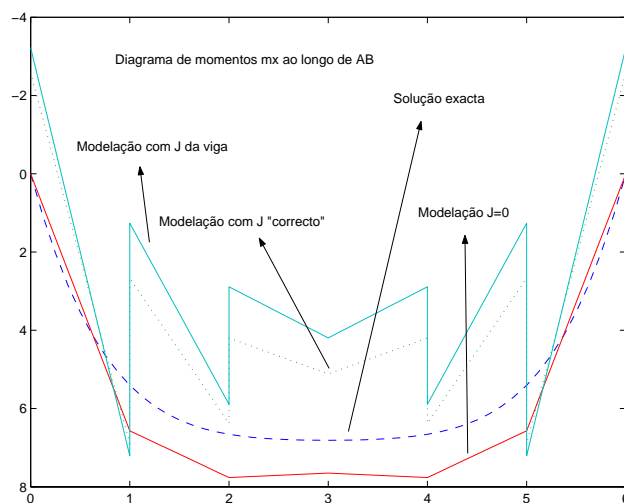


Figura 24: Diagrama de momentos m_x ao longo de AB; estudo da influência do valor de J

A análise da figura 23, onde se apresenta o do diagrama de momentos m_y ao longo de CD, permite confirmar o que foi dito nos parágrafos anteriores. Verifica-se que a solução conseguida considerando $J = 0$ é linear por troços, contínua e permite

recuperar um campo de momentos nulo sobre os apoios C e B. No entanto, verifica-se que os valores máximos sobrestimam a solução exacta em cerca de 60%.

Quando se considera na modelação a rigidez à torção das vigas, o valor do campo de momentos vem inferior ao que corresponde à solução exacta e inferior ao que é conseguido quando se considera o valor correcto para J .

O mesmo tipo de comentários se pode aplicar de imediato à análise do diagrama de momentos m_x ao longo do troço AB, o qual se encontra representado na figura 24 para as diferentes modelações testadas.

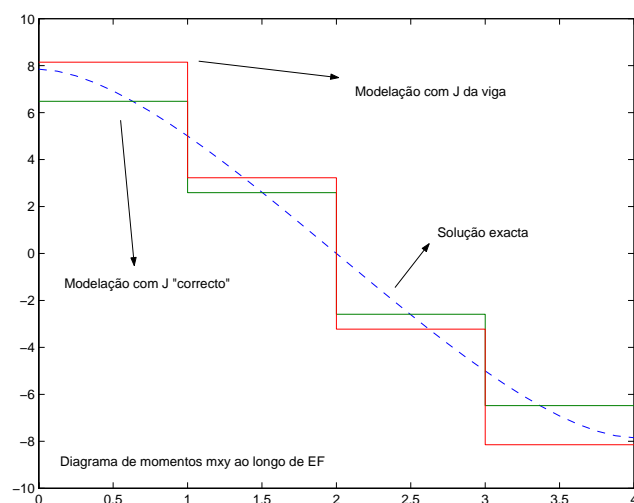


Figura 25: *Diagrama de momentos m_{xy} ao longo de EF; estudo da influência do valor de J*

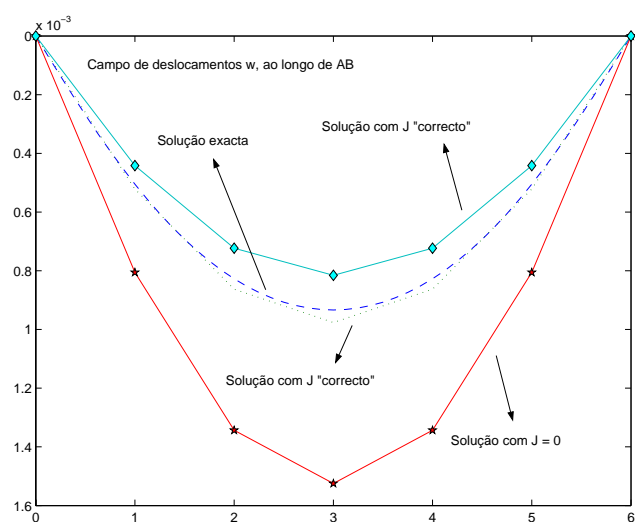


Figura 26: *Campo de deslocamentos transversais, w , ao longo de AB; estudo da influência do valor de J*

Na figura 25 apresenta-se o diagrama de momentos torsores ao longo do bordo EF. As soluções obtidas com a rigidez à torção correcta e a rigidez à torção da

teoria das vigas são muito semelhantes. No entanto, é possível verificar que os valores associados a esta última solução são ligeiramente superiores, tal como seria de esperar.

Na figura 26 apresentam-se as soluções aproximadas obtidas para o campo de deslocamentos transversais ao longo de AB. Comentários muito semelhantes aos anteriores poderiam agora ser efectuados. A modelação que permite obter uma solução mais próxima da exacta é a que utiliza o valor de J definido pela equação (2). A consideração de J nulo conduz a uma modelação mais “flexível”, pelo que o valor dos deslocamentos transversais vêm superiores aos da solução exacta. Já a consideração de uma rigidez de torção superior, resultante da adopção do valor para J fornecido pela teoria das peças lineares, torna mais rígida a modelação. De facto, a análise da informação contida na figura 26 permite verificar que nesta situação os deslocamentos são inferiores aos da solução exacta.

3.1.4 Análise da influência da largura de banda

Estuda-se agora a influência que a largura das bandas consideradas na definição da modelação pode vir a ter na qualidade da solução obtida. Para tal, considerou-se uma segunda grelha, onde os elementos de barra se encontram afastados de $0,5\text{ m}$. Neste caso, as barras existentes sobre os apoios modelam faixas de laje com uma largura de $0,25\text{ m}$, enquanto que as restantes modelam bandas de $0,5\text{ m}$.

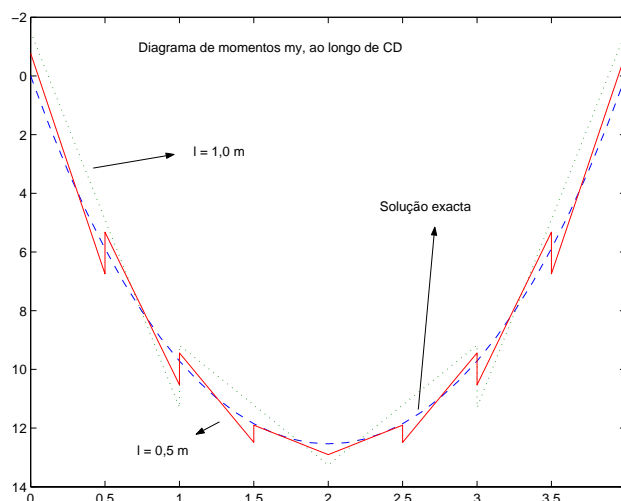


Figura 27: Diagrama de momentos m_y ao longo de CD; estudo da influência da largura da banda considerada

Na figura 27 compara-se a solução obtida com as duas grelhas consideradas para o campo de momentos m_y ao longo do troço CD. Em ambos os casos se considerou a rigidez à torção correcta, ou seja aquela que resulta da aplicação da equação (2).

Nas figuras 28 e 29 comparam-se as soluções referentes ao campo de momentos

m_x ao longo de AB e ao campo de momentos torsores m_{xy} ao longo do bordo EF. Em qualquer um dos casos, é possível observar que a consideração de uma largura de banda inferior conduz a uma melhoria ligeira dos resultados aproximados obtidos. No entanto, essa melhoria na qualidade da solução obtida não é de tal forma significativa que justifique o acréscimo de trabalho tido na utilização de uma discretização com um número muito mais elevado de barras. Em termos práticos, a modelação com o espaçamento de $1,0\text{ m}$ entre barras é preferível, pois permite obter praticamente a mesma informação com um volume de trabalho (na definição da estrutura e no tratamento dos resultados obtidos) bastante inferior.

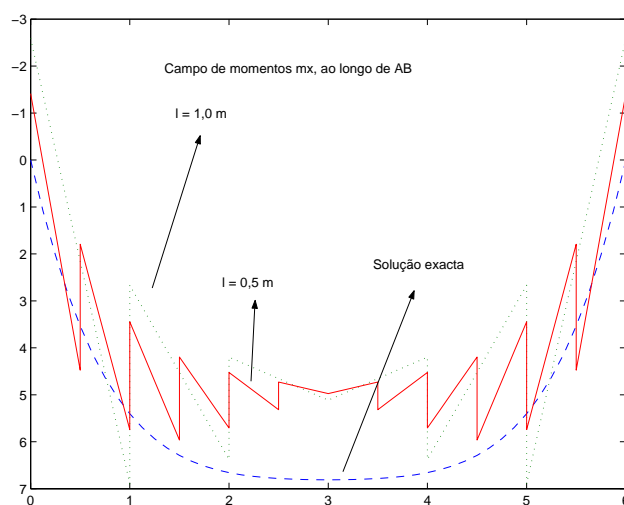


Figura 28: Diagrama de momentos m_x ao longo de AB; estudo da influência da largura da banda considerada

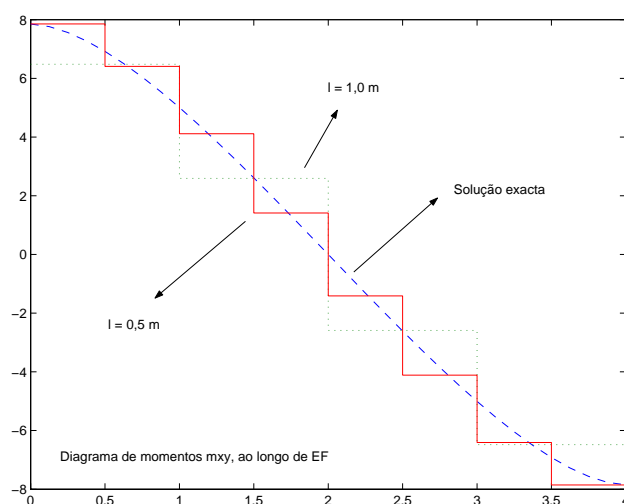


Figura 29: Diagrama de momentos m_{xy} ao longo de EF; estudo da influência da largura da banda considerada

Mais uma vez se salienta que a solução conseguida com recurso a modelações com elementos de grelha nunca permitirá recuperar a solução exacta para a laje, mesmo

considerando espaçamentos muito pequenos entre elementos de grelha. A análise da figura 28 permite ilustrar esta afirmação. Mesmo considerando um espaçamento de $0,5\text{ m}$, os resultados obtidos pela modelação para o diagrama de momentos flectores m_x na parte central da laje ainda se afastam significativamente dos valores exactos.

Na figura 30 comparam-se as soluções obtidas para o campo de deslocamentos transversais ao longo de AB.

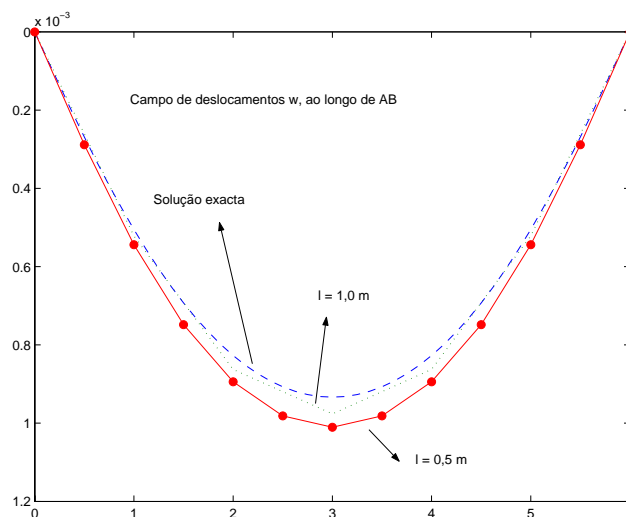


Figura 30: *Campo de deslocamentos transversais, w , ao longo de AB; estudo da influência da largura da banda considerada*

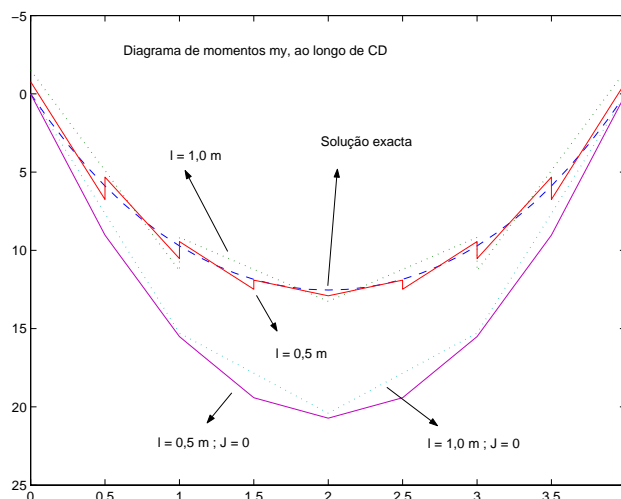


Figura 31: *Diagrama de momentos m_y ao longo de CD; estudo da influência da largura da banda considerada e do valor de J*

Na figura 31 é apresentado de novo o campo de momentos flectores m_y ao longo de CD. Para além da informação já contida na figura 27, apresentam-se os diagramas que resultam da consideração de $J = 0$ nas análises com as duas grelhas anterior-

mente definidas. Verifica-se de novo que os resultados obtidos para as modelações com espaçamentos diferentes são praticamente coincidentes.

O mesmo tipo de comentário se pode efectuar a partir da análise da figura 32, onde se apresenta o traçado aproximado do campo de deslocamentos transversais ao longo de AB.

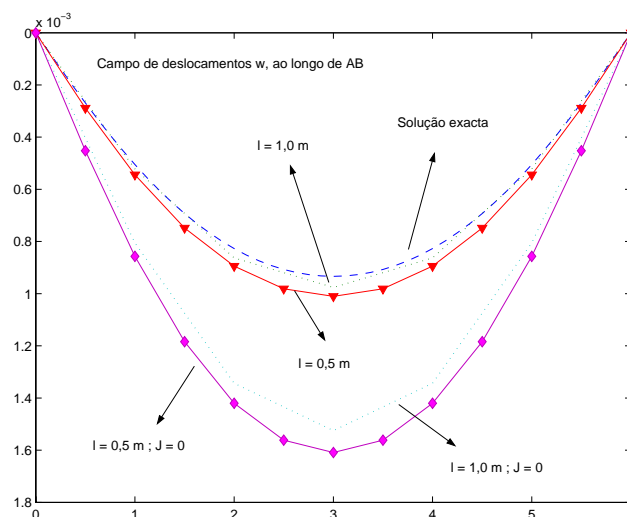


Figura 32: *Campo de deslocamentos transversais, w , ao longo de AB; estudo da influência da largura da banda considerada e do valor de J*

3.1.5 Análise da influência da definição do carregamento

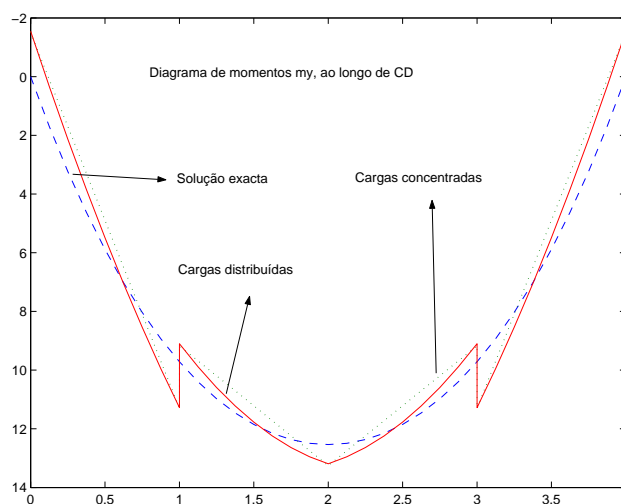


Figura 33: *Diagrama de momentos m_y ao longo de CD; estudo da influência da definição do carregamento*

Para concluir a ilustração da técnica de modelação de lajes com elementos de grelha, falta ainda discutir a influência que a definição do carregamento pode ter na qualidade da solução aproximada obtida. Em todas as análises efectuadas nos parágrafos

anteriores se considerou um carregamento constituído apenas por cargas concentradas aplicadas nos nós da grelha.

Considera-se agora que todas as barras da grelha ilustrada na figura 17 se encontram sujeitas à acção de uma carga uniformemente distribuída de $p = 5 \text{ kN/m}$ aplicada em toda a sua extensão. Este carregamento corresponde à adopção de um coeficiente de repartição de cargas $\alpha = 0,5$ (ver secção 2.10).

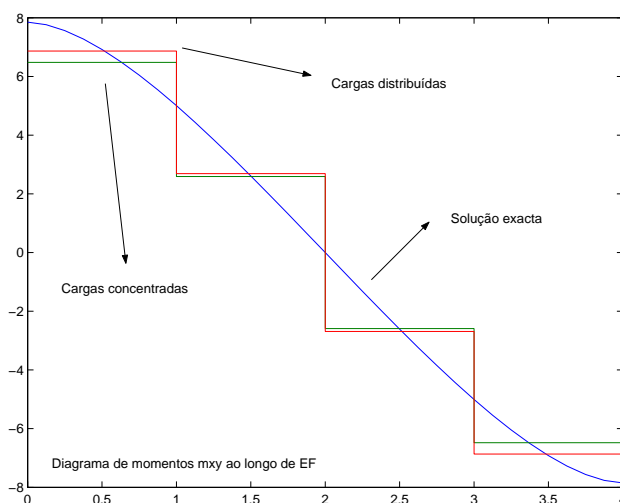


Figura 34: Diagrama de momentos m_{xy} ao longo de EF; estudo da influência da definição do carregamento

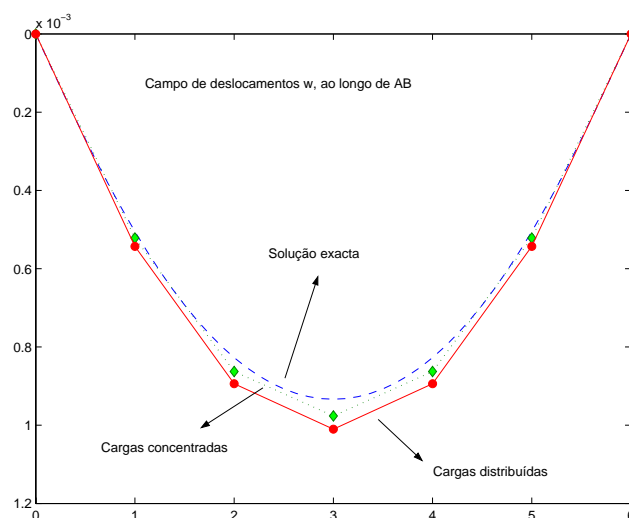


Figura 35: Campo de deslocamentos transversais, w , ao longo de AB; estudo da influência da definição do carregamento

Na figura 33 comparam-se os diagramas de momentos flectores m_y ao longo de CD obtidos com a modelação onde se consideram cargas concentradas e a modelação onde se definem apenas cargas distribuídas em cada uma das barras. Neste último caso, a análise da figura 33 permite verificar que o diagrama de momentos flectores

passa a ser do 2º grau em cada um dos troços. No entanto, as soluções referentes às duas modelações são praticamente coincidentes.

Nas figuras 34 e 35 essa mesma comparação é agora efectuada para o diagrama de momentos torsores m_{xy} ao longo de EF e para o campo de deslocamentos transversais w ao longo de AB, respectivamente. De novo, os resultados obtidos são praticamente coincidentes, independentemente da forma utilizada para modelar o carregamento.

Como conclusão, pode referir-se que a consideração de cargas concentradas na modelação, embora pareça à partida uma opção algo “grosseira”, permite obter resultados perfeitamente aceitáveis.

3.2 Análise de uma laje com um bordo encastrado

Nesta secção é efectuada a análise da laje representada na figura 36, a qual possui um bordo encastrado e três bordos simplesmente apoiados. Tal como no exemplo anterior, considera-se que o carregamento é constituído por uma carga uniformemente distribuída aplicada em toda a laje com um valor $q = 10 \text{ kN/m}$. A laje possui uma espessura de $h = 0,20 \text{ m}$ e o material estrutural tem um módulo de elasticidade de $E = 30,5 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$.

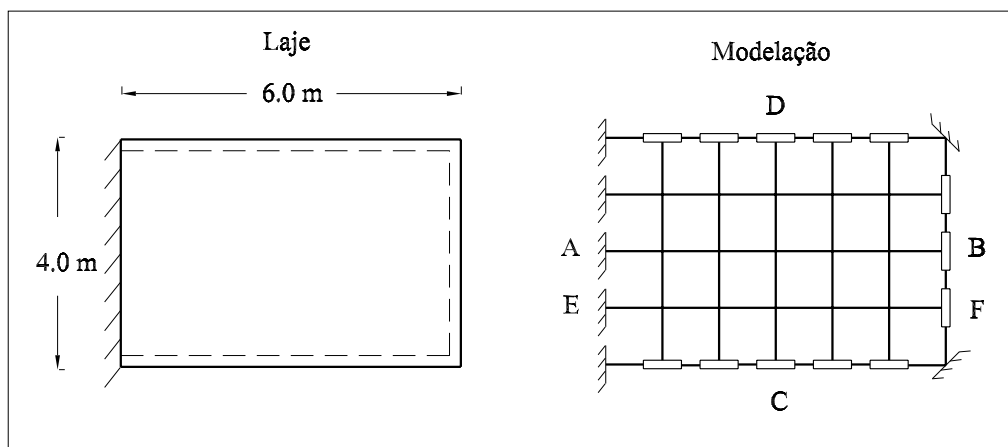


Figura 36: Modelação considerada para a laje rectangular com um bordo encastrado simplesmente apoiada

Na análise desta laje considera-se a modelação representada na figura 36. As propriedades a atribuir a cada uma das barras da discretização são em tudo semelhantes às que foram determinadas na secção 3.1.1 para a análise da laje simplesmente apoiada. O carregamento considerado é também constituído apenas por cargas concentradas, $F_v = 10 \text{ kN}$, aplicadas em todos os nós “interiores” da discretização.

Na figura 37 encontra-se representada a solução aproximada para o campo de momentos flectores m_x ao longo de AB. É de salientar que mais uma vez a solução

aproximada conseguida com recurso à técnica de modelação em estudo se aproxima bastante da solução exacta.

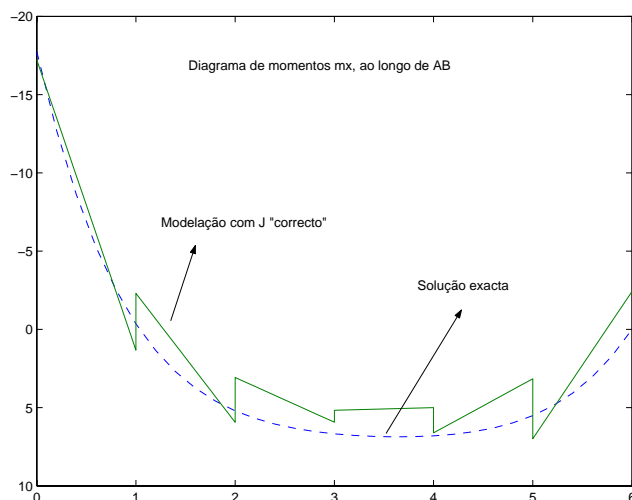


Figura 37: Laje com bordo encastrado; diagrama de momentos m_x ao longo de AB

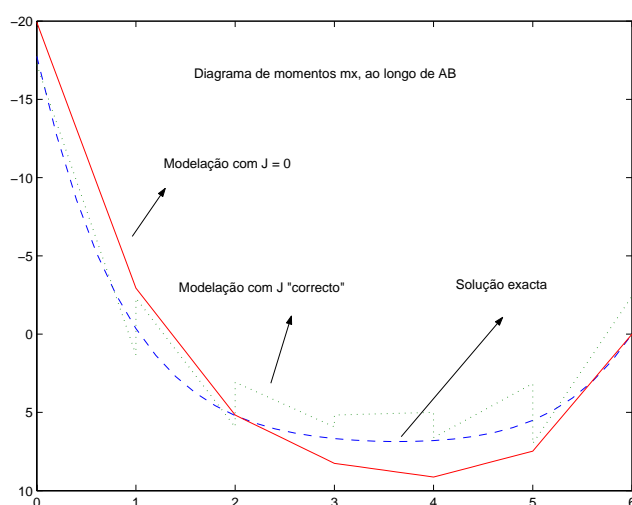


Figura 38: Laje com bordo encastrado; diagrama de momentos m_x ao longo de AB; influência do valor de J

Na figura 38 apresenta-se ainda a solução que se consegue para esse diagrama de momentos flectores quando se considera nula a rigidez à torção ($J = 0$) em cada uma das barras da discretização. Tal como seria de esperar, o valor dos momentos (em valor absoluto) cresce, uma vez que o campo de momentos torsores na grelha é nulo e é necessário equilibrar o mesmo carregamento.

Na figura 39 apresenta-se de novo a solução aproximada conseguida para o diagrama de momentos m_x ao longo de AB, quando se considera agora a aplicação de uma carga uniformemente distribuída, com valor $p = 5 \text{ kN/m}$, em cada uma das barras da discretização. À semelhança do que já tinha sido verificado no exemplo anterior,

não existem praticamente diferenças entre as soluções referentes a esta forma de definir o carregamento e aquela em que se consideram apenas cargas concentradas.

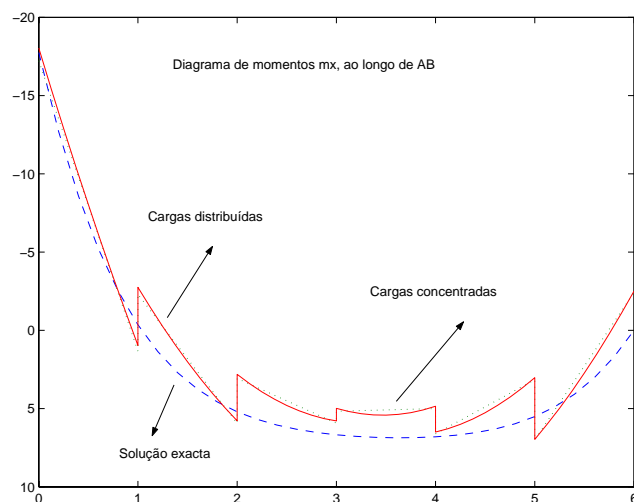


Figura 39: Laje com bordo encastrado; diagrama de momentos m_x ao longo de AB; influência do carregamento considerado

Na figura 40 apresentam-se os diagramas de momentos flectores m_y ao longo do troço CD. A análise destes diagramas não introduz qualquer novidade a tudo o que tem vindo a ser referido.

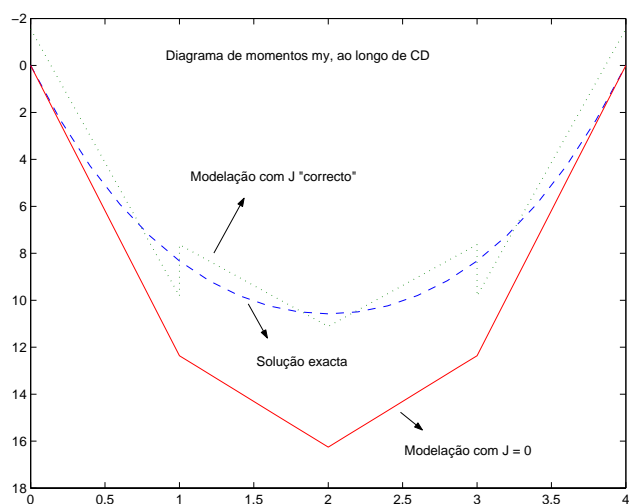


Figura 40: Laje com bordo encastrado; diagrama de momentos m_y ao longo de CD; influência do valor de J

O diagrama de momentos torsores ao longo de EF encontra-se representado na figura 41. De novo, cada troço apresenta um valor constante para este esforço, o qual volta a corresponder aproximadamente ao valor da solução exacta no ponto médio desse troço. É fácil verificar que uma melhor modelação do andamento do diagrama de momentos torsores junto ao encastramento requer a consideração de um

maior número de elementos de grelha, o que corresponde à consideração de larguras de banda inferiores.

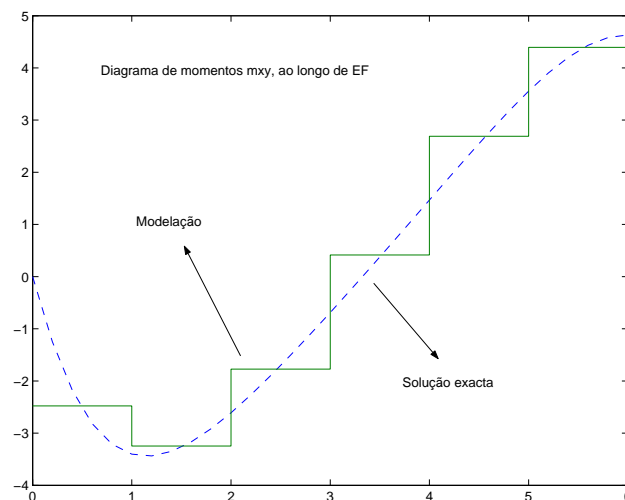


Figura 41: Laje com bordo encastrado; diagrama de momentos m_{xy} ao longo de EF

Por fim, na figura 42 apresenta-se a solução aproximada determinada para o campo de deslocamentos transversais, w , ao longo de AB. É de novo visível que a consideração de $J = 0$ conduz a uma modelação muito “flexível”, onde os deslocamentos transversais sobrestimam em muito os correspondentes valores exactos.

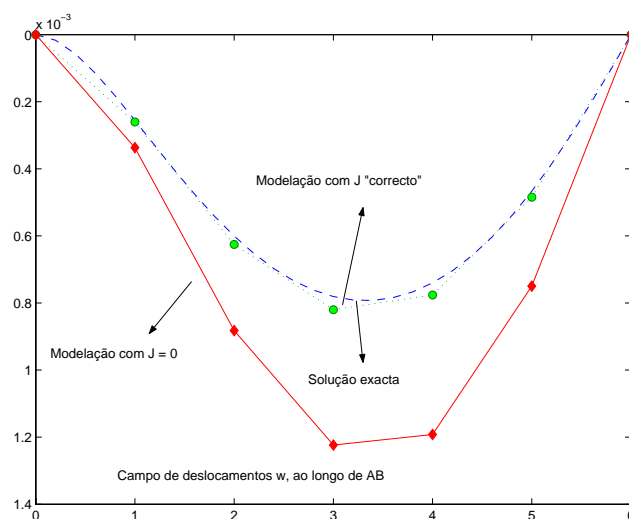


Figura 42: Laje com bordo encastrado; campo de deslocamentos transversais, w , ao longo de AB; influência do valor de J

3.3 Análise de uma laje em L

Ilustra-se nesta secção a aplicação da técnica de modelação na análise de uma laje com geometria e condições de apoio mais gerais do que as que foram consideradas

nos exemplos anteriores.

Considera-se para tal efeito a laje em L representada na figura 43, na qual existem bordos encastrados, simplesmente apoiados e livres. No canto entre os dois bordos livres considera-se ainda a existência de um pilar.

A laje tem uma espessura de $0,20\text{ m}$ e continua a assumir-se para o material estrutural um módulo de elasticidade de $E = 30,5 \times 10^6\text{ kN/m}^2$ e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Considera-se que está aplicada em toda a laje uma carga uniformemente distribuída com um valor de 10 kN/m^2 .

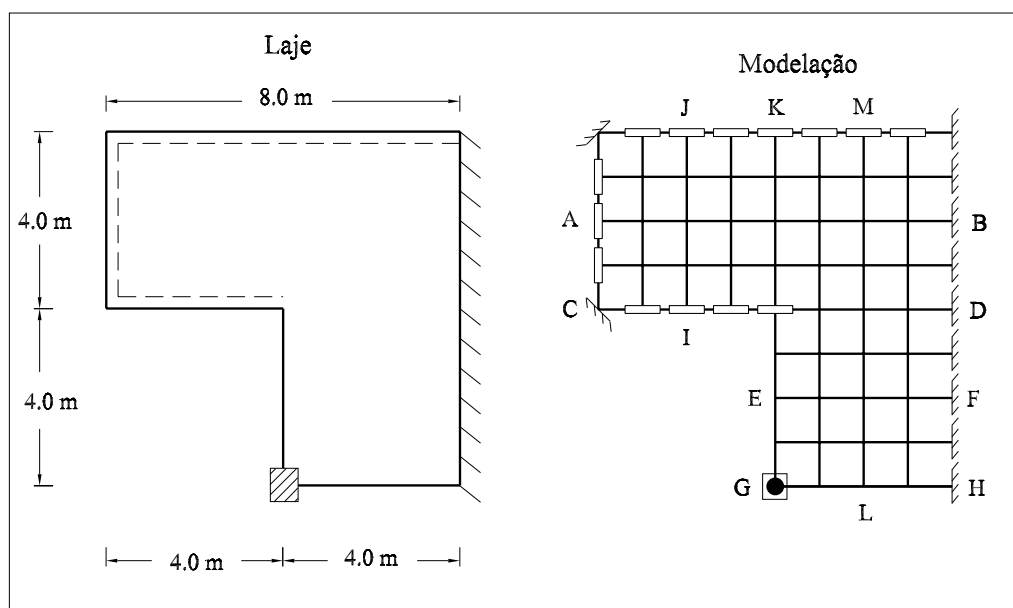


Figura 43: Laje em L e respectiva modelação com elementos de grelha

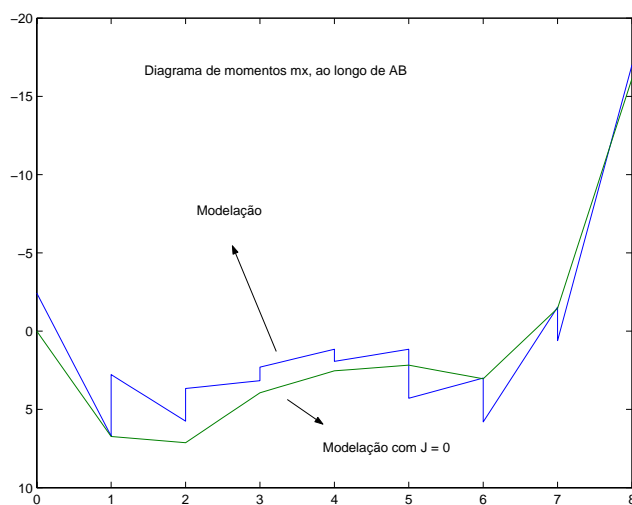


Figura 44: Laje em L; diagrama de momentos m_x ao longo de AB

Na figura 43 apresenta-se a modelação considerada na análise da laje. Sendo o espaçamento entre barras unitário, o valor da rigidez à flexão e da rigidez à torção a considerar na modelação são em tudo semelhantes aos que foram determinados na secção 3.1.1.

Nos nós interiores são aplicadas cargas verticais concentradas com valores dados por $F_v = 10 \times 1,0 \times 1,0 = 10kN$. Para os nós existentes sobre os bordos livres, a respectiva *área de influência* é diferente, pelo que o valor das cargas concentradas a aplicar nestes casos vem agora dado por $F_{bor\,do} = 10 \times 0,5 \times 1,0 = 5kN$. Nos nós existentes sobre os bordos encastrados, apoiados e sobre o pilar não é necessário definir qualquer carregamento, como já anteriormente tinha sido referido.

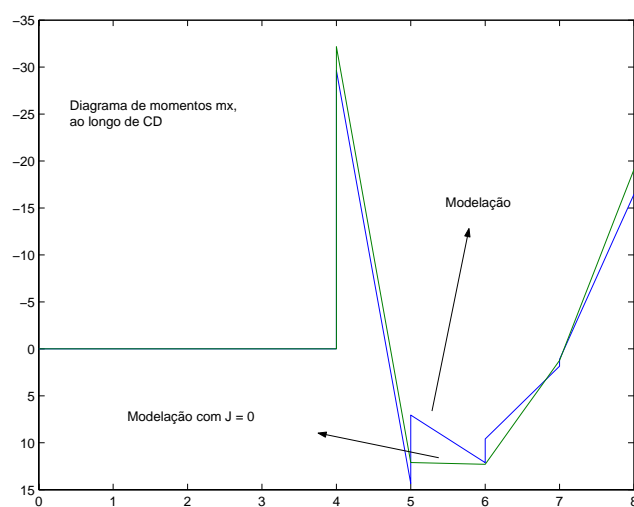


Figura 45: Laje em L; diagrama de momentos m_x ao longo de CD

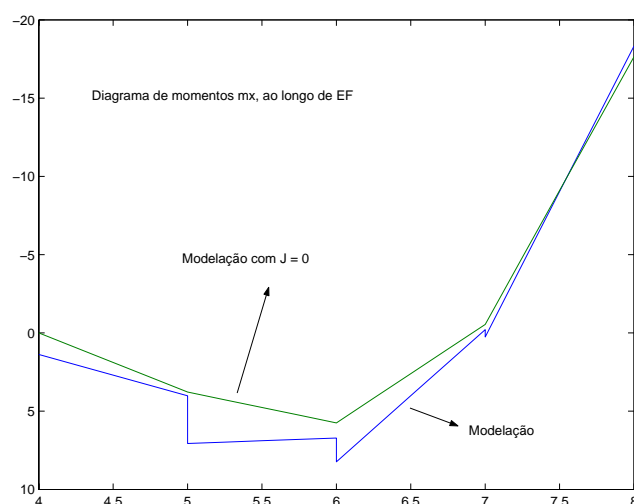


Figura 46: Laje em L; diagrama de momentos m_x ao longo de EF

Nas figuras 44, 45, 46 e 47 são apresentados os resultados obtidos para os diagramas de momentos flectores m_x ao longo dos alinhamentos AB, CD, EF e GH, respecti-

vamente. Em cada uma destas figuras são apresentados os resultados referentes à modelação com o valor de J correcto e com $J = 0$.

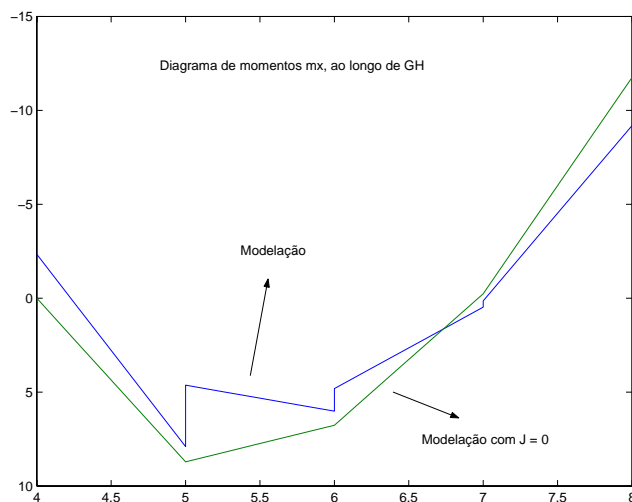


Figura 47: Laje em L; diagrama de momentos m_x ao longo de GH

Os diagramas de momentos flectores m_y ao longo dos alinhamentos IJ, GK e LM são apresentados nas figuras 48, 49 e 50, respectivamente.

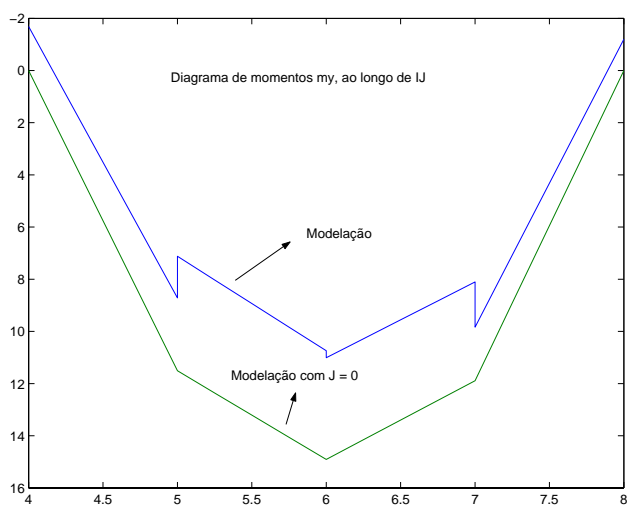


Figura 48: Laje em L; diagrama de momentos m_y ao longo de IJ

Por fim, os diagramas de momentos torsores ao longo dos alinhamentos CD, GH e GK são apresentados nas figuras 51, 52 e 53, respectivamente.

Verifica-se que no caso dos momentos torsores a solução aproximada ainda é algo grosseira, muito embora permita desde já a percepção da variação daquele esforço ao longo dos alinhamentos considerados.

Tal como seria de esperar, o momento torsor é importante junto ao vértice onde se encontram dois bordos simplesmente apoiados. Tal efeito é visível na análise do

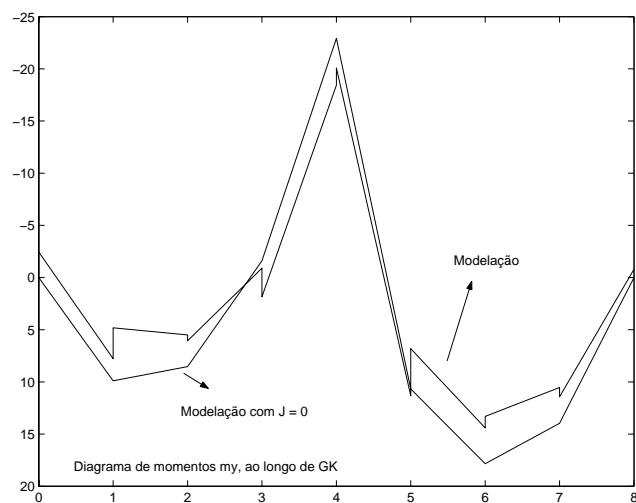


Figura 49: Laje em L; diagrama de momentos m_y ao longo de GK

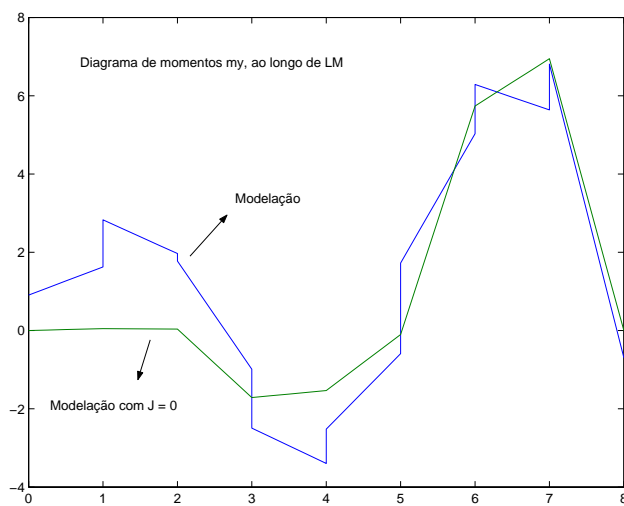


Figura 50: Laje em L; diagrama de momentos m_y ao longo de LM

diagrama apresentado na figura 51, onde o valor máximo de m_{xy} se regista no nó C. A informação contida nos diagramas das figuras 52 e 53 permite ainda constatar que sobre o pilar o momento torsor apresenta valores elevados.

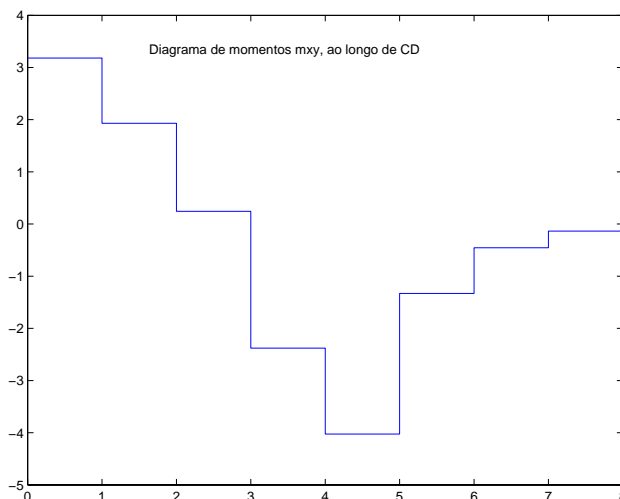


Figura 51: Laje em L; diagrama de momentos m_{xy} ao longo de CD

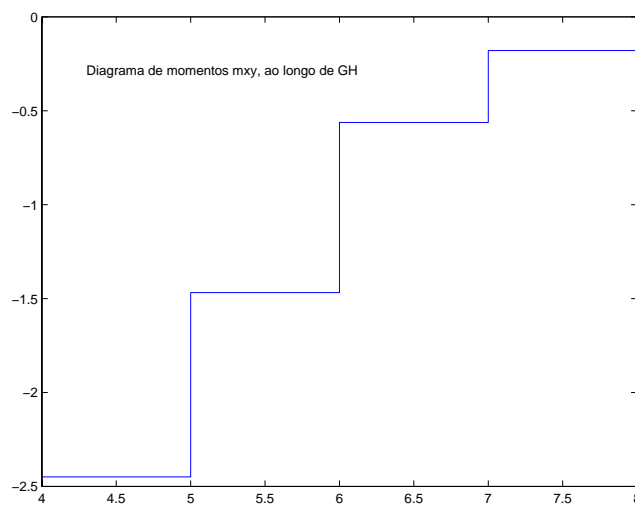


Figura 52: Laje em L; diagrama de momentos m_{xy} ao longo de GH

Referências

- [1] LMS Castro, “Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes”, Elementos de estudo da disciplina de Análise de Estruturas II, Instituto Superior Técnico, 1998;
- [2] Grupo de Análise de Estruturas, “Apontamentos sobre a análise elástica de lajes”, Elementos de estudo da disciplina de Análise de Estruturas I, Instituto Superior Técnico, 2000;

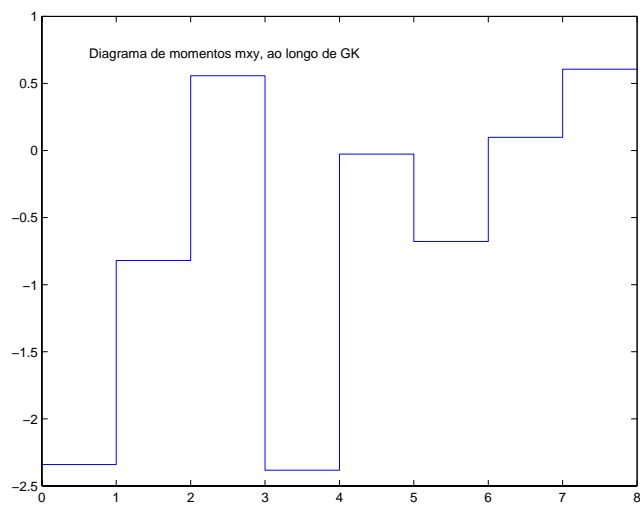


Figura 53: Laje em L ; diagrama de momentos m_{xy} ao longo de GK

- [3] Sulumine Raúl, “Métodos de Análise Elástica de Lajes de Edifícios”, dissertação submetida para a obtenção do grau de mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Dezembro de 1988;
- [4] S. P. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2^a edição, McGraw-Hill International Book Company, Tóquio, (1970);