

Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes

Luís Manuel Santos Castro

27 de Novembro de 2007

1 Introdução

Nestes apontamentos sobre Elementos Finitos de Laje encontram-se sumarizados os conceitos apresentados nas aulas da cadeira de Análise de Estruturas II. Na primeira parte deste texto são definidas as grandezas em função das quais se descreve o comportamento das lajes - *deslocamentos, deformações e esforços* -, assim como as equações que as permitem relacionar - *compatibilidade, equilíbrio e elasticidade*. São tratadas em separado a teoria das lajes finas (teoria de Kirchhoff) e a teoria das lajes espessas (teoria de Reissner-Mindlin).

A teoria das lajes finas já foi estudada na cadeira de Análise de Estruturas I [1]. Como foi referido na altura, a teoria de Kirchhoff não permite considerar o efeito da deformabilidade por esforço transversal. A teoria de Reissner-Mindlin já permite a consideração deste efeito. A sua utilização é desta forma aconselhável sempre que a espessura da laje ultrapassa os limites que a permitem classificar como laje fina. Tal sucede sempre que a influência do esforço de corte se torna não desprezável e as hipóteses sobre as quais se baseia a teoria de Kirchhoff deixam de ser válidas. Em geral, costuma considerar-se uma laje como espessa quando a relação vão/espessura é menor que 10.

Uma vez sumarizadas as teorias de lajes, é discutida a forma através da qual se podem definir as aproximações para o campo de deslocamentos quando se formulam elementos finitos para efectuar a análise de lajes finas. Para ilustrar alguns dos aspectos focados, são definidos dois dos elementos finitos utilizados na análise deste tipo de estruturas. É ainda estudado um exemplo de aplicação, com base no qual é ilustrada a utilização do método dos elementos finitos na análise de lajes finas. Numa primeira etapa é obtida a equação de equilíbrio global, utilizando-se para o efeito a sequência de cálculo já estudada no caso dos problemas de placas (elasticidade plana). Depois de obtidos os deslocamentos independentes é efectuado o pós-processamento, sendo definida a solução aproximada para o campo de deslocamentos transversais em cada um dos elementos da malha. Com base nas condições de compatibilidade e nas relações constitutivas, são calculadas de seguida as aproximações para os campos de deformações e para os campos de esforços. Especial atenção é dedicada à caracterização das soluções aproximadas obtidas.

Finalmente, é definida a forma através da qual se podem obter elementos finitos para a análise de lajes espessas, sendo salientados alguns cuidados a ter na sua utilização. É também apresentado um exemplo de aplicação no qual se discutem fundamentalmente os aspectos referentes ao pós-processamento, uma vez que no caso das lajes espessas o tipo de elementos finitos

a utilizar se assemelha bastante ao utilizado no caso das placas. A análise da aproximação obtida permitirá caracterizar a solução que este tipo de elementos permite obter. É chamada a atenção para as diferenças fundamentais existentes entre as soluções obtidas com elementos finitos desenvolvidos para as teorias de Reissner-Mindlin e de Kirchhoff, respectivamente.

2 Teoria de Kirchhoff

O domínio de uma laje pode ser descrito na forma,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 : z \in [-h/2, h/2], (x, y) \in V \subset R^2\},$$

onde V e h denotam o plano médio e a espessura da laje, respectivamente. Na figura 1 encontra-se representado o sistema de eixos utilizado e em relação ao qual se encontram escritas as relações fundamentais do problema.

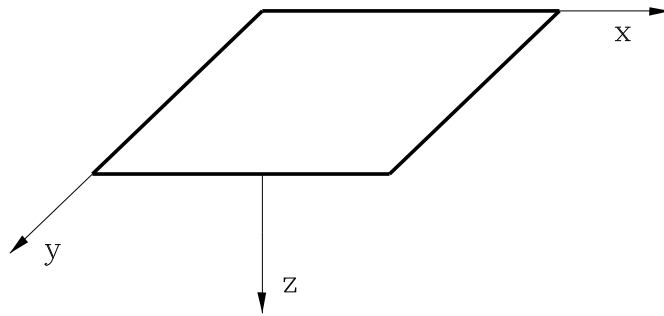


Figura 1: Sistema de eixos

O campo de deslocamentos num ponto qualquer do elemento de laje pode ser determinado através das igualdades:

$$u_x(x, y, z) = z \times \theta_x(x, y)$$

$$u_y(x, y, z) = z \times \theta_y(x, y)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y)$$

onde $w(x, y)$, $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ representam os deslocamentos transversais, as rotações no plano (x, z) e as rotações no plano (y, z) dos pontos pertencentes ao plano médio da laje.

As deformações de corte podem ser obtidas através das igualdades:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}; \quad (1)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \theta_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}. \quad (2)$$

Quando se despreza a deformabilidade por corte, as expressões anteriores permitem obter de imediato:

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (3)$$

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (4)$$

A relação entre o campo de rotações θ_x e o campo de deslocamentos transversais w encontra-se representada graficamente na figura 2.

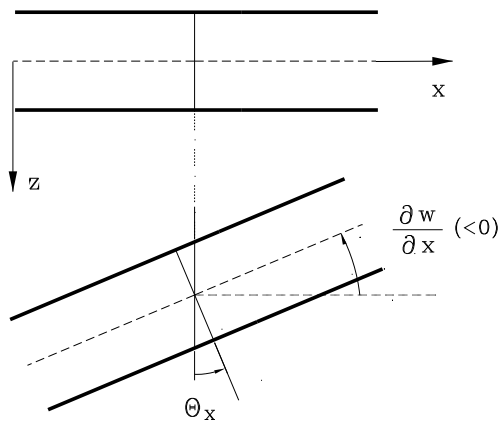


Figura 2: Definição das rotações; teoria de Kirchhoff.

Verifica-se então que os campos $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ não são independentes do campo de deslocamentos transversais, $w(x, y)$. Este é por consequência o único campo de deslocamentos a determinar para se poder caracterizar de forma completa os campos de deslocamentos numa laje fina. Resulta daqui que quando se formulam elementos finitos para a análise deste tipo de elementos estruturais, deverá ser necessário definir apenas uma aproximação conveniente para o campo de deslocamentos transversais.

As restantes componentes do tensor das deformações são definidas pelas seguintes igualdades:

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial u_y}{\partial y} = z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \right)$$

As igualdades (3) e (4) permitem agora escrever:

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = z \chi_x(x, y)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = z \chi_y(x, y)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = -2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = 2z \chi_{xy}(x, y)$$

Para caracterizar de forma completa o estado de deformação numa laje fina são então necessárias duas curvaturas de flexão, $\chi_x(x, y)$ e $\chi_y(x, y)$, e uma curvatura de torção, $\chi_{xy}(x, y)$. As condições de compatibilidade que permitem relacionar as componentes independentes do tensor das curvaturas e o campo de deslocamentos na laje podem ser escritas na forma genérica,

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (5)$$

onde se define

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ 2\chi_{xy}(x, y) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \{w(x, y)\}. \quad (6)$$

Para se caracterizarem os esforços existentes no elemento de laje são definidos dois momentos flectores, $m_x(x, y)$ e $m_y(x, y)$, e um momento torsor, $m_{xy}(x, y)$. As relações constitutivas permitem relacionar as componentes independentes do tensor dos momentos com as componentes independentes do tensor das curvaturas. Esta relação linear pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \mathbf{e} \quad (7)$$

onde neste caso se define

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = D_f \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

e onde D_f , a rigidez de flexão do elemento de laje, tem a definição habitual:

$$D_f = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (9)$$

Uma vez definidos os campos de momentos flectores, os campos de esforços transversos podem ser obtidos através das igualdades

$$v_x(x, y) = \frac{\partial m_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial y}$$

$$v_y(x, y) = \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_y(x, y)}{\partial y}$$

As condições de equilíbrio estabelecem a relação que deve existir entre o carregamento aplicado ao elemento de laje e os esforços que nele se instalam. Esta condição pode ser escrita genericamente na forma:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{s} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (10)$$

No caso das lajes finas tem-se:

$$\mathbf{A}^* = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mid \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mid 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\}, \quad \mathbf{f} = \{q(x, y)\} \quad (11)$$

onde $q(x, y)$ denota a carga distribuída que actua segundo a direcção perpendicular à superfície média do elemento de laje.

Na tabela 1 encontram-se especificadas as condições de fronteira a verificar em cada um dos bordos existentes na laje a analisar. A rotação "normal" a um dado bordo, ou seja a rotação no plano definido pela normal ao bordo e pelo eixo z , é denotada por θ_n . O momento flector em cada bordo, m_n , corresponde ao momento que se desenvolve exactamente no mesmo plano. Na figura 3 encontram-se representadas, para um bordo genérico \overline{AB} , as rotações θ_n e θ_t , assim como os momentos m_n e m_t . Na tabela 1, \bar{g} denota o valor especificado para a grandeza g envolvida na definição da condição de fronteira em causa. Saliente-se que regra geral são nulos os valores especificados para essas grandezas.

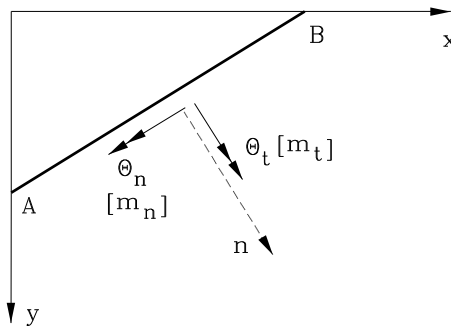


Figura 3: Definição das rotações θ_n e θ_t .

Recorde-se ainda que na teoria das lajes finas sempre que se define um bordo livre, as condições de fronteira envolvem a definição do esforço transversal efectivo [1], denotado na tabela 1 por v_{en} .

Bordo encastrado	Bordo simplesmente apoiado	Bordo livre
$w = \bar{w}$	$w = \bar{w}$	$v_{en} = \bar{v}_{en}$
$\theta_n = \bar{\theta}_n$	$m_n = \bar{m}_n$	$m_n = \bar{m}_n$

Tabela 1: Condições de fronteira para as lajes de Kirchhoff

Para finalizar, refira-se que quando se desenvolve uma formulação de elementos finitos que passa pela definição de uma aproximação para o campo de deslocamentos transversais, especial atenção deverá ser colocada na forma como se impõem as condições de fronteira cinemática, ou seja, aquelas onde o valor dos deslocamentos é prescrito.

3 Teoria de Reissner-Mindlin

A teoria de lajes de Reissner-Mindlin permite considerar o efeito da deformabilidade por esforço transversal. Tal como se encontra ilustrado na figura 4, considera-se que fibras inicialmente perpendiculares ao plano médio da laje permanecem rectas após deformação do elemento estrutural, mas não continuam necessariamente a ser ortogonais àquele mesmo plano.

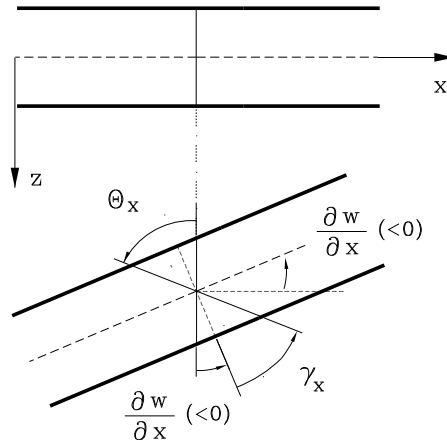


Figura 4: Definição das rotações; teoria de Mindlin

Como as deformações por corte deixam de ser nulas, as equações (1) e (2) permitem verificar que os campos de rotações $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ deixam de se poder calcular directamente a partir do campo de deslocamentos transversais. Desta forma, para se caracterizar o campo de deslocamentos numa laje espessa, torna-se necessário determinar três campos independentes, o campo de deslocamentos transversais, e os dois campos de rotações.

Para caracterizar o estado de deformação num elemento de laje, para além da definição das curvaturas utilizadas na caracterização do comportamento das lajes finas, passa a ser necessário conhecer o valor das deformações de corte, $\gamma_x(x, y)$ e $\gamma_y(x, y)$. Os operadores intervenientes nas equações de compatibilidade (5) passam agora a ser definidos através das igualdades:

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ 2\chi_{xy}(x, y) \\ \gamma_x(x, y) \\ \gamma_y(x, y) \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

As relações de elasticidade continuam a poder ser escritas na forma (7), mas agora tem-se

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \\ v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_f & \nu D_f & 0 & 0 & 0 \\ \nu D_f & D_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G h^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi G h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi G h \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde o factor de corte ϕ tem como finalidade *corrigir* o efeito da distribuição não-uniforme das tensões tangenciais ao longo da espessura da laje. É usual admitir-se que $\phi = A'/A = 5/6$, onde A' corresponde à área reduzida do rectângulo.

Os operadores intervenientes nas equações de equilíbrio definidas em (10) vêm agora dados pelas seguintes igualdades:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} q(x, y) \\ \bar{m}_x(x, y) \\ \bar{m}_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Na definição do vector de forças aplicadas, \mathbf{f} , $q(x, y)$ continua a denotar a distribuição de cargas aplicadas na perpendicular ao plano médio da laje. As grandezas $\bar{m}_x(x, y)$ e $\bar{m}_y(x, y)$ correspondem a campos de momentos distribuídos, aplicados nos planos (x, z) e (y, z) , respectivamente.

Na teoria de Reissner-Mindlin são três as condições de fronteira que se torna necessário especificar para cada um dos bordos da laje. Na tabela 2 sumarizam-se estas condições para o caso dos bordos encastrados, simplesmente apoiados e livres.

Bordo encastrado	Bordo simplesmente apoiado	Bordo livre
$w = \bar{w}$ $\theta_n = \bar{\theta}_n$ $\theta_t = \bar{\theta}_t$	$w = \bar{w}$ $m_n = \bar{m}_n$ $\theta_t = \bar{\theta}_t$	$v_n = \bar{v}_n$ $m_n = \bar{m}_n$ $m_t = \bar{m}_t$
—	$w = \bar{w}$ $m_n = \bar{m}_n$ $m_t = \bar{m}_t$	—

Tabela 2: Condições de fronteira para as lajes de Reissner-Mindlin

Nos bordos encastrados é necessário impor directamente o valor dos deslocamentos transversais, w , e das rotações θ_n e θ_t . Tal como no caso das lajes finas, a rotação θ_n $\{\theta_t\}$ corresponde à rotação no plano definido pela normal $\{\text{tangente}\}$ ao bordo em causa e pela direcção z .

Nos bordos livres considera-se que são especificados o esforço transversal, v_n , e os momentos flector e torsor, m_n e m_t , respectivamente. Note-se que na teoria das lajes espessas já não se definem os campos de esforços transversos efectivos.

Quando se têm bordos simplesmente apoiados, há duas formas alternativas para se definirem as condições de fronteira. A primeira alternativa passa pela imposição do valor dos deslocamentos transversais, w , e das rotações tangenciais, θ_t . É também especificado o valor do momento flector, m_n .

Na segunda alternativa, apenas se especifica o valor do campo de deslocamentos transversais, permitindo-se que as rotações θ_t possam tomar valores não-nulos. Sublinhe-se que esta forma de impor as condições de fronteira se torna possível porque na teoria das lajes espessas se desfaz a dependência directa entre deslocamentos transversais e rotações. Saliente-se ainda que as duas restantes condições de fronteira no mesmo bordo envolvem a especificação do valor dos momentos flector e torsor.

Das duas formas alternativas existentes para tratar os bordos simplesmente apoiados, a que mais se utiliza é a primeira, uma vez que se encontra mais próximo da percepção física do comportamento do elemento estrutural em análise. A segunda alternativa é utilizada sempre que se torna complicado impor a condição $\theta_t = \bar{\theta}_t$, o que acontece por exemplo quando se estudam lajes circulares simplesmente apoiadas. É ainda utilizada quando se pretende tornar o modelo numérico mais flexível. De facto, como se impõem apenas os valores dos deslocamentos transversais há uma quantidade menor de deslocamentos especificados, o que torna menos rígido o modelo adoptado, conduzindo à obtenção de valores ligeiramente maiores para os diferentes campos de deslocamentos.

4 Elementos finitos para lajes finas

Como foi referido na secção 2, quando se desenvolve uma formulação de elementos finitos para a análise de lajes finas é o campo de deslocamentos transversais que importa aproximar. Uma vez obtida uma solução aproximada para $w(x, y)$, a aproximação para todas as outras grandezas envolvidas na caracterização do comportamento da laje pode ser obtida a partir da aplicação sucessiva das condições de compatibilidade, elasticidade e equilíbrio.

Quando se baseia a formulação de elementos finitos de laje na teoria de Kirchhoff, torna-se necessário garantir a continuidade dos deslocamentos transversais, w , e das suas derivadas, $\partial w / \partial n$, entre elementos adjacentes. Esta é uma diferença muito importante em relação ao que foi estudado para os problemas de placas, onde apenas se tem que garantir a continuidade dos deslocamentos interpolados [2].

Para justificar de uma forma muito simplista esta imposição, recorde-se que existe uma grande analogia entre as equações das lajes de Kirchhoff e as equações das vigas. Recorde-se ainda que quando se impõe a continuidade dos deslocamentos entre elementos de viga adjacentes, é necessário garantir não só a continuidade dos deslocamentos transversais, mas também a

continuidade da sua derivada, o que corresponde a assegurar a continuidade das rotações.

De um ponto de vista mais formal, pode dizer-se que quando no operador diferencial de compatibilidade \mathbf{A} existem "segundas derivadas", a definição das aproximações deve ter em conta que as funções de interpolação a utilizar devem ter continuidade C^1 (continuidade das funções e suas derivadas). É o que se passa no caso das vigas e das lajes finas.

A necessidade de garantir a continuidade dos deslocamentos e das suas derivadas dificulta significativamente a tarefa de obtenção das funções para efectuar a aproximação dos campos cinemáticos. Torna-se bastante complexa e trabalhosa a obtenção de elementos que permitam verificar por completo as equações de compatibilidade. A utilização de funções polinomiais simples e a utilização dos deslocamentos nodais como incógnitas do problema (situação típica dos elementos finitos de placa) conduz, regra geral, à obtenção de elementos em que pelo menos uma das condições de compatibilidade/continuidade é violada.

Este dilema coloca-se com frequência a quem pretende desenvolver elementos de lajes finas. Se por um lado as construções mais simples não permitem verificar *a priori* todas as condições de compatibilidade, os elementos que permitem satisfazer todos aqueles requisitos são mais complexos, o seu desenvolvimento muito mais trabalhoso e por vezes a sua aplicação bem mais restrita.

Aos elementos em que todas as condições de compatibilidade são verificadas, é habitual chamar-se *elementos conformes*. Caso contrário, são designados *elementos não-conformes*.

É importante salientar que alguns dos elementos não-conformes são frequentes vezes utilizados na análise de lajes finas. A validade da sua aplicação não pode ser posta em causa, uma vez que o seu comportamento e a sua convergência se encontram convenientemente estudados e demonstrados. É importante salientar que em muitos casos estes elementos permitem mesmo obter resultados de melhor qualidade do que os que são obtidos com a utilização de elementos conformes.

4.1 Exemplo de um elemento não-conforme

Um dos elementos não-conformes mais utilizado é o elemento *ACM*. O seu nome reúne as iniciais dos nomes dos investigadores que participaram no seu desenvolvimento (Adini-Clough-Melosh). Trata-se de um elemento rectangular de quatro nós, em cada um dos quais são considerados três deslocamentos independentes; o deslocamento transversal, w_i , e as duas rotações, θ_{xi} e θ_{yi} . Em cada elemento define-se desta forma um total de 12 graus de liberdade, como se encontra ilustrado na figura 5.

A aproximação para o campo de deslocamentos transversais pode ser escrita na forma:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{12} \psi_i(x, y) u_i . \quad (15)$$

Matricialmente, pode escrever-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Psi} \mathbf{u}^{(e)} \quad (16)$$

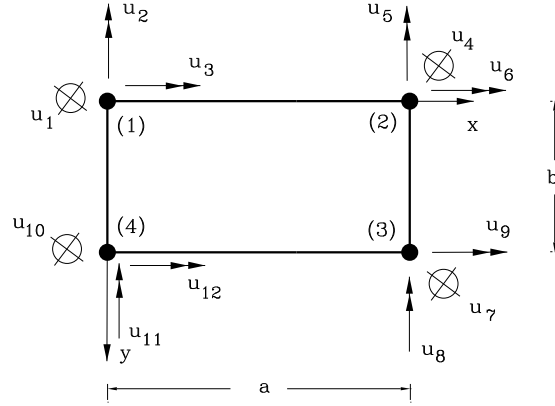


Figura 5: Elemento ACM.

onde,

$$\Psi = \left[\psi_1(x, y) \quad \psi_2(x, y) \quad \cdots \quad \psi_{11}(x, y) \quad \psi_{12}(x, y) \right] \quad \mathbf{u}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Fisicamente, a função de interpolação $\psi_i(x, y)$ corresponde ao campo de deslocamentos transversais que surge quando se impõe o deslocamento elementar u_i com valor unitário e se garante que todos os restantes são nulos ($u_j = 0$, se $j \neq i$), assim como se garante que não existe qualquer carga distribuída aplicada. Cada função de interpolação terá a seguinte expressão geral [4]:

$$\begin{aligned} \psi_i(x, y) = & c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2 \\ & + c_7 x^3 + c_8 x^2 y + c_9 xy^2 + c_{10} y^3 + c_{11} x^3 y + c_{12} xy^3. \end{aligned} \quad (18)$$

Para se conseguirem determinar as 12 constantes envolvidas na definição da função $\psi_i(x, y)$, basta escrever e resolver o sistema linear de 12 equações e 12 incógnitas que pode ser obtido quando se impõe o campo de deslocamentos pretendido, ou seja $u_i = 1$ e $u_j = 0$ quando $j \neq i$ [4]. Considere-se, como exemplo, que se pretende determinar a função $\psi_4(x, y)$. As equações que permitem obter os valores dos coeficientes c_i presentes na definição (18) são as seguintes:

$$\begin{aligned} \psi_4(0, 0) = 0; \quad \psi_4(a, 0) = 1; \quad \psi_4(a, b) = 0; \quad \psi_4(0, b) = 0 \\ \frac{\partial \psi_4(0, 0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \psi_4(a, 0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \psi_4(a, b)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \psi_4(0, b)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \psi_4(0, 0)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \psi_4(a, 0)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \psi_4(a, b)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \psi_4(0, b)}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Seguindo este procedimento, obter-se-á a seguinte definição para cada uma das funções de

interpolação [4]:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x, y) &= 1 - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3} - \frac{xy}{ab} + \frac{3x^2y}{a^2b} - \frac{2x^3y}{a^3b} - \frac{3y^2}{b^2} \\
&\quad + \frac{3xy^2}{ab^2} + \frac{2y^3}{b^3} - \frac{2xy^3}{ab^3} \\
\psi_2(x, y) &= x - \frac{2x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} - \frac{xy}{b} + \frac{2x^2y}{ab} - \frac{x^3y}{a^2b} \\
\psi_3(x, y) &= y - \frac{xy}{a} - \frac{2y^2}{b} + \frac{2xy^2}{ab} + \frac{y^3}{b^2} - \frac{xy^3}{ab^2} \\
\psi_4(x, y) &= \frac{3x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{xy}{ab} - \frac{3x^2y}{a^2b} + \frac{2x^3y}{a^3b} - \frac{3xy^2}{ab^2} + \frac{2xy^3}{ab^3} \\
\psi_5(x, y) &= -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2y}{ab} - \frac{x^3y}{a^2b} \\
\psi_6(x, y) &= \frac{xy}{a} - \frac{2xy^2}{ab} + \frac{xy^3}{ab^2} \\
\psi_7(x, y) &= -\frac{xy}{ab} + \frac{3x^2y}{a^2b} - \frac{2x^3y}{a^3b} + \frac{3xy^2}{ab^2} - \frac{2xy^3}{ab^3} \\
\psi_8(x, y) &= -\frac{x^2y}{ab} + \frac{x^3y}{a^2b} \\
\psi_9(x, y) &= -\frac{xy^2}{ab} + \frac{xy^3}{ab^2} \\
\psi_{10}(x, y) &= \frac{xy}{ab} - \frac{3x^2y}{a^2b} + \frac{2x^3y}{a^3b} + \frac{3y^2}{b^2} - \frac{3xy^2}{ab^2} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{2xy^3}{ab^3} \\
\psi_{11}(x, y) &= \frac{xy}{b} - \frac{2x^2y}{ab} + \frac{x^3y}{a^2b} \\
\psi_{12}(x, y) &= -\frac{y^2}{b} + \frac{xy^2}{ab} + \frac{y^3}{b^2} - \frac{xy^3}{ab^2}
\end{aligned}$$

As definições apresentadas para as funções de interpolação permitem verificar que a equação (15) define uma aproximação cúbica para o campo de deslocamentos transversais no elemento de laje. Saliente-se que devido à existência dos termos $c_{11} x^3y$ e $c_{12} xy^3$, o campo de deslocamentos transversais ao longo de segmentos de recta oblíquos em relação ao sistema de eixos coordenados terá um andamento do 4º grau. Na figura 6 encontram-se representadas cada uma das funções de interpolação definidas anteriormente.

O elemento *ACM* é dito não-conforme porque não garante a continuidade das rotações θ_n entre elementos adjacentes. A análise da situação representada na figura 7 permite esclarecer o porquê dessa não-conformidade. Considere-se o elemento “i” e a fronteira definida por $x = a$. Ao longo desse bordo, a aproximação para o campo de deslocamentos transversais

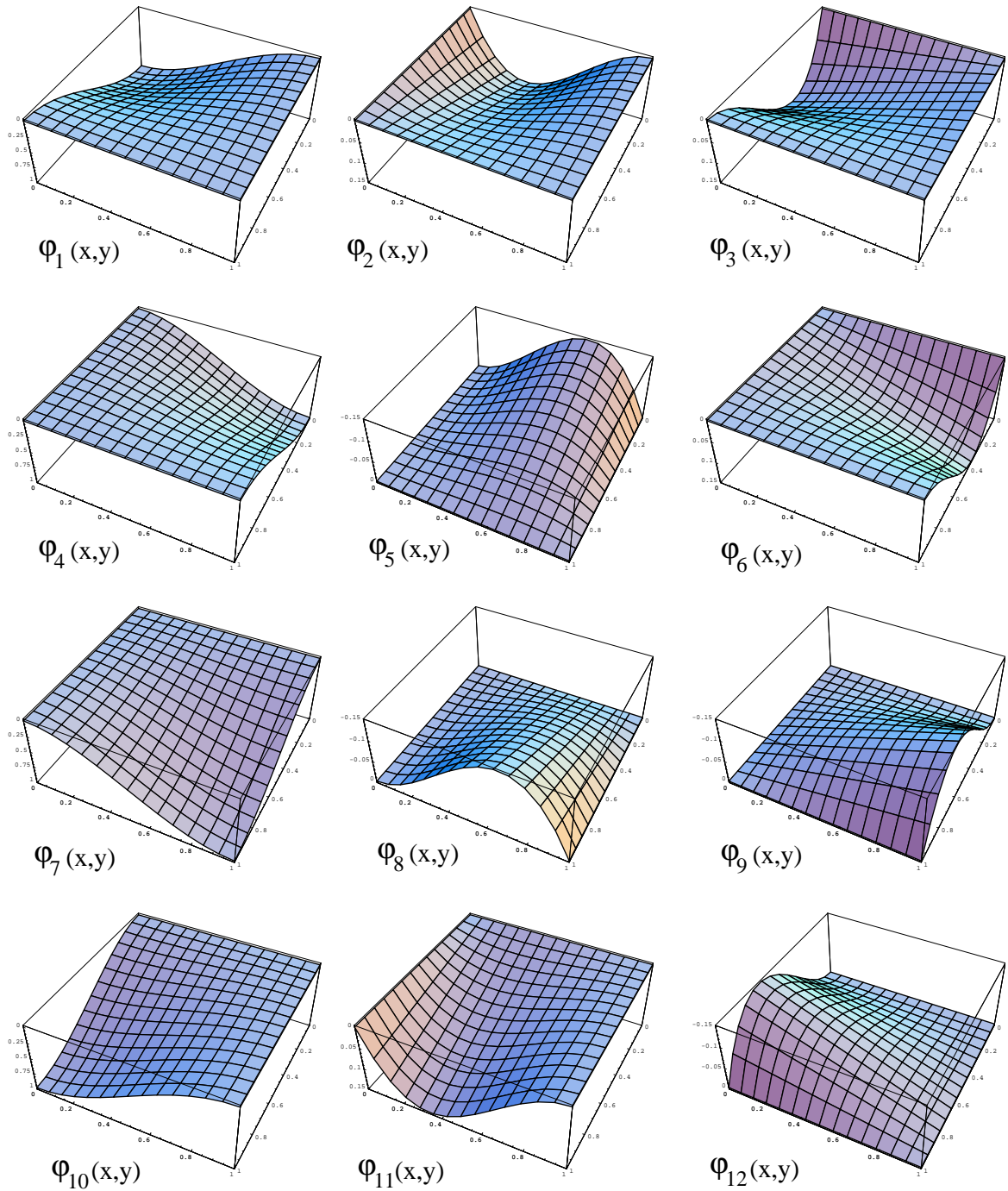


Figura 6: Funções de aproximação do elemento ACM.

pode ser escrita na forma genérica,

$$w(a, y) = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3,$$

enquanto que os campos de rotações vêm dados por:

$$\theta_x(a, y) = \left(-\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right)_{x=a} = a_5 + a_6 y + a_7 y^2 + a_8 y^3,$$

$$\theta_y(a, y) = \left(-\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right)_{x=a} = -a_2 - 2a_3 y - 3a_4 y^2.$$

Para que os campos de deslocamentos transversais e rotações pudessem ser definidos de forma única ao longo desse bordo, seria necessário estabelecer oito condições que permitissem calcular os oito coeficientes a_i presentes nas definições anteriores. Ora acontece que ao longo do bordo em causa apenas se conseguem estabelecer seis equações, correspondentes aos valores dos deslocamentos nodais nos dois nós que definem o lado.

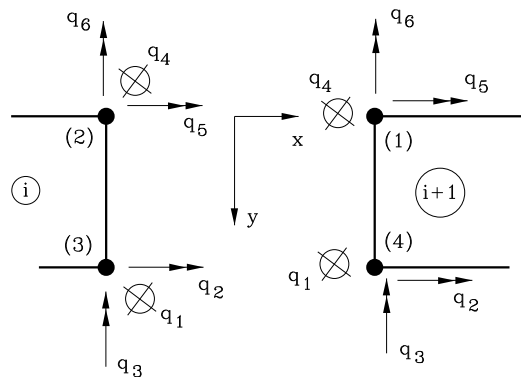


Figura 7: Não-conformidade do elemento *ACM*.

Pode observar-se que na definição de $w(a, y)$ e de $\theta_y(a, y)$ intervêm as mesmas quatro constantes a_i , com i a variar de 1 até 4. Verifica-se desta forma que os deslocamentos transversais w e as rotações θ_y nos nós (2) e (3) do elemento “i” permitem definir, de forma única, a expressão para os correspondentes campos cinemáticos. Se se pensar no que se passa no elemento “i+1” e no bordo $x = 0$, conclui-se também que w e θ_y vêm definidos de forma única em função dos deslocamentos dos nós (1) e (4). Quando se impõe que estes nós tenham os mesmos deslocamentos que os nós (2) e (3) do elemento “i”, garante-se a continuidade do campo de deslocamentos transversais e do campo de rotações θ_y (que neste bordo correspondem às rotações θ_t) na fronteira comum a ambos os elementos.

No que respeita à rotação θ_n , não é difícil concluir que os dois deslocamentos nodais q_3 e q_6 (ver figura 7) não são suficientes para se conseguir determinar de forma única a expressão do campo de rotações $\theta_x(a, y)$. Assim, e mesmo garantindo que os deslocamentos nos nós partilhados pelos elementos “i” e “i+1” são os mesmos, poderão surgir discontinuidades no campo de *rotações normais* na fronteira comum àqueles elementos.

Esta não-conformidade na definição das rotações normais, θ_n , faz também com que a solução aproximada não respeite de forma integral todas as condições de fronteira cinemática. Deste modo, sempre que existir um bordo encastrado, mesmo sendo nulo o valor de θ_n nos nós da discretização, o campo de rotações poderá tomar valores diferentes de zero nos restantes pontos do bordo em causa.

Uma vez definida a matriz das funções de interpolação, Ψ , a matriz de rigidez elementar pode ser obtida através da definição geral:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int_V (\mathbf{A} \Psi)^t \mathbf{D} (\mathbf{A} \Psi) dV \quad (19)$$

A matriz de rigidez elementar do elemento *ACM* pode ser escrita na forma genérica,

$$\mathbf{K}^{(e)} = D_f \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{12}^t & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^t & \mathbf{K}_{23}^t & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

onde a definição de cada um dos blocos é dada por:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{4a}{b^3} + \frac{14}{5ab} + \frac{4b}{a^3} - \frac{4\nu}{5ab} & \frac{1}{5b} + \frac{2b}{a^2} + \frac{4\nu}{5b} & \frac{1}{5a} + \frac{2a}{b^2} + \frac{4\nu}{5a} & \frac{2a}{b^3} - \frac{14}{5ab} - \frac{4b}{a^3} + \frac{4\nu}{5ab} \\ \frac{1}{5b} + \frac{2b}{a^2} + \frac{4\nu}{5b} & \frac{4a}{15b} + \frac{4b}{3a} - \frac{4a\nu}{15b} & \nu & \frac{-1}{5b} - \frac{2b}{a^2} + \frac{\nu}{5b} \\ \frac{1}{5a} + \frac{2a}{b^2} + \frac{4\nu}{5a} & \nu & \frac{4a}{3b} + \frac{4b}{15a} - \frac{4b\nu}{15a} & \frac{-1}{5a} + \frac{2a}{b^2} - \frac{4\nu}{5a} \\ \frac{2a}{b^3} - \frac{14}{5ab} - \frac{4b}{a^3} + \frac{4\nu}{5ab} & \frac{-1}{5b} - \frac{2b}{a^2} + \frac{\nu}{5b} & \frac{-1}{5a} + \frac{2a}{b^2} - \frac{4\nu}{5a} & \frac{4a}{b^3} + \frac{14}{5ab} + \frac{4b}{a^3} - \frac{4\nu}{5ab} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5b} + \frac{2b}{a^2} - \frac{\nu}{5b} & \frac{-1}{5a} + \frac{a}{b^2} - \frac{4\nu}{5a} & \frac{-2a}{b^3} + \frac{14}{5ab} - \frac{2b}{a^3} - \frac{4\nu}{5ab} & \frac{-1}{5b} + \frac{b}{a^2} + \frac{\nu}{5b} \\ \frac{-a}{15b} + \frac{2b}{3a} + \frac{a\nu}{15b} & 0 & \frac{1}{5b} - \frac{b}{a^2} - \frac{\nu}{5b} & \frac{a}{15b} + \frac{b}{3a} - \frac{a\nu}{15b} \\ 0 & \frac{2a}{3b} + \frac{4b(-1+\nu)}{15a} & \frac{-a}{b^2} - \frac{-1+\nu}{5a} & 0 \\ \frac{-1}{5b} - \frac{2b}{a^2} - \frac{4\nu}{5b} & \frac{1}{5a} + \frac{2a}{b^2} + \frac{4\nu}{5a} & \frac{-4a}{b^3} - \frac{14}{5ab} + \frac{2b}{a^3} + \frac{4\nu}{5ab} & \frac{1}{5b} - \frac{b}{a^2} + \frac{4\nu}{5b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{13} = \begin{bmatrix} \frac{a}{b^2} + \frac{-1+\nu}{5a} & \frac{-4a}{b^3} - \frac{14}{5ab} + \frac{2b}{a^3} + \frac{4\nu}{5ab} & \frac{-1}{5b} + \frac{b}{a^2} - \frac{4\nu}{5b} & \frac{1}{5a} + \frac{2a}{b^2} - \frac{\nu}{5a} \\ 0 & \frac{-1}{5b} + \frac{b}{a^2} - \frac{4\nu}{5b} & \frac{-4a}{15b} + \frac{2b}{3a} + \frac{4a\nu}{15b} & 0 \\ \frac{a}{3b} - \frac{b(-1+\nu)}{15a} & \frac{-1}{5a} - \frac{2a}{b^2} + \frac{\nu}{5a} & 0 & \frac{2a}{3b} - \frac{b}{15a} + \frac{b\nu}{15a} \\ \frac{2a}{b^2} - \frac{-1+\nu}{5a} & \frac{-2a}{b^3} + \frac{14}{5ab} - \frac{2b}{a^3} - \frac{4\nu}{5ab} & \frac{1}{5b} - \frac{b}{a^2} - \frac{\nu}{5b} & \frac{a}{b^2} + \frac{-1+\nu}{5a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{4a}{15b} + \frac{4b}{3a} - \frac{4a\nu}{15b} & -\nu & \frac{1}{5b} - \frac{b}{a^2} + \frac{4\nu}{5b} & \frac{-4a}{15b} + \frac{2b}{3a} + \frac{4a\nu}{15b} \\ -\nu & \frac{4a}{3b} - \frac{4b(-1+\nu)}{15a} & \frac{-2a}{b^2} + \frac{-1+\nu}{5a} & 0 \\ \frac{1}{5b} - \frac{b}{a^2} + \frac{4\nu}{5b} & \frac{-2a}{b^2} + \frac{-1+\nu}{5a} & \frac{4a}{b^3} + \frac{14}{5ab} + \frac{4b}{a^3} - \frac{4\nu}{5ab} & \frac{-1}{5b} - \frac{2b}{a^2} - \frac{4\nu}{5b} \\ \frac{-4a}{15b} + \frac{2b}{3a} + \frac{4a\nu}{15b} & 0 & \frac{-1}{5b} - \frac{2b}{a^2} - \frac{4\nu}{5b} & \frac{4a}{15b} + \frac{2b}{3a} - \frac{4a\nu}{15b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5b} + \frac{b}{a^2} + \frac{\nu}{5b} & \frac{a}{15b} + \frac{b}{3a} - \frac{a\nu}{15b} & 0 \\ \frac{2a}{3b} + \frac{b(-1+\nu)}{15a} & -\frac{a}{b^2} - \frac{-1+\nu}{5a} & 0 & \frac{a}{3b} - \frac{b(-1+\nu)}{15a} \\ -\frac{1}{5a} - \frac{2a}{b^2} - \frac{4\nu}{5a} & \frac{2a}{b^3} - \frac{14}{5ab} - \frac{5a}{a^3} + \frac{4\nu}{5ab} & -\frac{1}{5b} - \frac{2b}{a^2} + \frac{\nu}{5b} & \frac{1}{5a} - \frac{a}{b^2} + \frac{4\nu}{5a} \\ \nu & \frac{1}{5b} + \frac{2b}{a^2} - \frac{\nu}{5b} & \frac{-a}{15b} + \frac{2b}{3a} + \frac{a\nu}{15b} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} \frac{4a}{3b} - \frac{4b(-1+\nu)}{15a} & \frac{1}{5a} - \frac{a}{b^2} + \frac{4\nu}{5a} & 0 & \frac{2a}{3b} + \frac{4b(-1+\nu)}{15a} \\ \frac{1}{5a} - \frac{a}{b^2} + \frac{4\nu}{5a} & \frac{4a}{b^3} + \frac{14}{5ab} + \frac{4b}{a^3} - \frac{4\nu}{5ab} & \frac{1}{5b} + \frac{2b}{a^2} + \frac{4\nu}{5b} & -\frac{1}{5a} - \frac{2a}{b^2} - \frac{4\nu}{5a} \\ 0 & \frac{1}{5b} + \frac{2b}{a^2} + \frac{4\nu}{5b} & \frac{4a}{15b} + \frac{4b}{3a} - \frac{4a\nu}{15b} & -\nu \\ \frac{2a}{3b} + \frac{4b(-1+\nu)}{15a} & -\frac{1}{5a} - \frac{2a}{b^2} - \frac{4\nu}{5a} & -\nu & \frac{4a}{3b} + \frac{4b}{15a} - \frac{4b\nu}{15a} \end{bmatrix}$$

O vector da forças nodais elementares pode ser obtido através da definição geral:

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int_V \Psi^t \mathbf{f} dV . \tag{21}$$

Utilizando as definições (17) e (11) e considerando-se uma carga uniformemente distribuída, q , obtém-se:

$$\mathbf{F} = q \begin{Bmatrix} \frac{ab}{4} \\ \frac{a^2b}{24} \\ \frac{24}{ab^2} \\ \frac{24}{ab} \\ \frac{4}{(a^2b)} \\ \frac{24}{ab^2} \\ \frac{24}{ab} \\ \frac{4}{(a^2b)} \\ \frac{24}{(ab^2)} \\ \frac{24}{ab} \\ \frac{4}{a^2b} \\ \frac{24}{(ab^2)} \\ \frac{24}{24} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

4.1.1 Exemplo de aplicação

A resolução do problema apresentado na figura 8 vai permitir ilustrar a aplicação do elemento ACM na análise elástica linear de lajes finas. Considera-se que o material que constitui a

estrutura tem um coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. O módulo de elasticidade, E , e a espessura da laje, h , são tais que a rigidez de flexão, D_f , tem um valor unitário. A laje está sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q(x, y) = 1.0 \text{ kN/m}^2$.

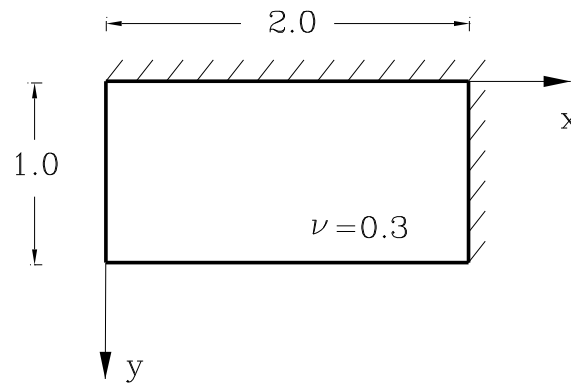


Figura 8: Definição do problema

Discretização da estrutura e identificação dos deslocamentos independentes

A laje é discretizada em 2 elementos finitos retangulares do tipo *ACM*. Os deslocamentos independentes correspondentes a esta discretização encontram-se identificados na figura 9.

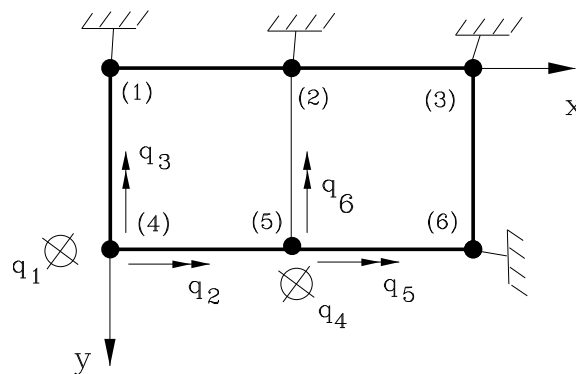


Figura 9: Discretização adoptada

Definição da aproximação

Como os dois elementos considerados têm a mesma geometria, as funções de aproximação (escritas no referencial local) a considerar na análise têm a mesma definição em ambos. Assim, substituindo $a = 1$ e $b = 1$ nas definições dadas anteriormente para as funções de interpolação obtém-se:

$$\psi_1(x, y) = 1 - 3x^2 + 2x^3 - xy + 3x^2y - 2x^3y - 3y^2 + 3xy^2 + 2y^3 - 2xy^3$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(x, y) &= x - 2x^2 + x^3 - xy + 2x^2y - x^3y \\
\psi_3(x, y) &= y - xy - 2y^2 + 2xy^2 + y^3 - xy^3 \\
\psi_4(x, y) &= 3x^2 - 2x^3 + xy - 3x^2y + 2x^3y - 3xy^2 + 2xy^3 \\
\psi_5(x, y) &= -x^2 + x^3 + x^2y - x^3y \\
\psi_6(x, y) &= xy - 2xy^2 + xy^3 \\
\psi_7(x, y) &= -xy + 3x^2y - 2x^3y + 3xy^2 - 2xy^3 \\
\psi_8(x, y) &= -x^2y + x^3y \\
\psi_9(x, y) &= -xy^2 + xy^3 \\
\psi_{10}(x, y) &= xy - 3x^2y + 2x^3y + 3y^2 - 3xy^2 - 2y^3 + 2xy^3 \\
\psi_{11}(x, y) &= xy - 2x^2y + x^3y \\
\psi_{12}(x, y) &= -y^2 + xy^2 + y^3 - xy^3
\end{aligned}$$

As incidências para os elementos 1 e 2 encontram-se definidas nas tabelas 3 e 4, respectivamente.

<i>Local</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>Global</i>	-	-	-	-	-	-	4	6	5	1	3	2

Tabela 3: Tabela de incidências do elemento 1.

<i>Local</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>Global</i>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	6	5

Tabela 4: Tabela de incidências do elemento 2.

Obtenção das equações de equilíbrio elementares

Tendo uma geometria semelhante e sendo constituídos pelo mesmo material, os elementos 1 e 2 partilham a mesma matriz de rigidez elementar. Substituindo na definição (20) os valores $a = 1$, $b = 1$, $\nu = 0.3$ e $D_f = 1.0$, obtém-se:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 10.56 & 2.44 & 2.44 & -4.56 & 2.14 & 0.56 & -1.44 & 0.86 & 0.86 & -4.56 & 0.56 & 2.14 \\ 2.44 & 1.52 & 0.3 & -2.14 & 0.62 & 0 & -0.86 & 0.38 & 0 & 0.56 & 0.48 & 0 \\ 2.44 & 0.3 & 1.52 & 0.56 & 0 & 0.48 & -0.86 & 0 & 0.38 & -2.14 & 0 & 0.62 \\ -4.56 & -2.14 & 0.56 & 10.56 & -2.44 & 2.44 & -4.56 & -0.56 & 2.14 & -1.44 & -0.86 & 0.86 \\ 2.14 & 0.62 & 0 & -2.44 & 1.52 & -0.3 & -0.56 & 0.48 & 0 & 0.86 & 0.38 & 0 \\ 0.56 & 0 & 0.48 & 2.44 & -0.3 & 1.52 & -2.14 & 0 & 0.62 & -0.86 & 0 & 0.38 \\ -1.44 & -0.86 & -0.86 & -4.56 & -0.56 & -2.14 & 10.56 & -2.44 & -2.44 & -4.56 & -2.14 & -0.56 \\ 0.86 & 0.38 & 0 & -0.56 & 0.48 & 0 & -2.44 & 1.52 & 0.3 & 2.14 & 0.62 & 0 \\ 0.86 & 0 & 0.38 & 2.14 & 0 & 0.62 & -2.44 & 0.3 & 1.52 & -0.56 & 0 & 0.48 \\ -4.56 & 0.56 & -2.14 & -1.44 & 0.86 & -0.86 & -4.56 & 2.14 & -0.56 & 10.56 & 2.44 & -2.44 \\ 0.56 & 0.48 & 0 & -0.86 & 0.38 & 0 & -2.14 & 0.62 & 0 & 2.44 & 1.52 & -0.3 \\ 2.14 & 0 & 0.62 & 0.86 & 0 & 0.38 & -0.56 & 0 & 0.48 & -2.44 & -0.3 & 1.52 \end{bmatrix}$$

Como a carga distribuída aplicada em ambos os elementos é igual, o vector de forças nodais elementares é partilhado pelos elementos 1 e 2. De (22) vem de imediato:

$$\mathbf{F}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{24}{1} \\ \frac{24}{1} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{24}{1} \\ \frac{24}{1} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{24}{1} \\ \frac{24}{1} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{24}{1} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{24}{1} \\ \frac{24}{1} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Reunião das equações elementares

Para efectuar o processo de reunião das equações elementares, é utilizada da forma habitual a informação contida nas tabelas de incidências definidas para cada um dos elementos. Desta forma, a matriz de rigidez global é obtida através de:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{10,10}^{(1)} & K_{10,12}^{(1)} & K_{10,11}^{(1)} & K_{10,7}^{(1)} & K_{10,9}^{(1)} & K_{10,8}^{(1)} \\ & K_{12,12}^{(1)} & K_{12,11}^{(1)} & K_{12,7}^{(1)} & K_{12,9}^{(1)} & K_{12,8}^{(1)} \\ & & K_{11,11}^{(1)} & K_{11,7}^{(1)} & K_{11,9}^{(1)} & K_{11,8}^{(1)} \\ & & & K_{7,7}^{(1)} + K_{10,10}^{(2)} & K_{7,9}^{(1)} + K_{10,12}^{(2)} & K_{7,8}^{(1)} + K_{10,11}^{(2)} \\ & & & & K_{9,9}^{(1)} + K_{12,12}^{(2)} & K_{9,8}^{(1)} + K_{12,11}^{(2)} \\ & & & & & K_{8,8}^{(1)} + K_{11,11}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Utilizando as matrizes de rigidez elementares definidas anteriormente, é possível determinar

o valor numérico dos elementos da matriz de rigidez da estrutura. Obtém-se:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 10.56 & -2.44 & 2.44 & -4.56 & -0.56 & 2.14 \\ -2.44 & 1.52 & -0.3 & -0.56 & 0.48 & 0.0 \\ 2.44 & -0.30 & 1.52 & -2.14 & 0.0 & 0.62 \\ -4.56 & -0.56 & -2.14 & 21.12 & -4.88 & 0.0 \\ -0.56 & 0.48 & 0.0 & -4.88 & 3.04 & 0.0 \\ 2.14 & 0.0 & 0.62 & 0.0 & 0.0 & 3.04 \end{bmatrix}$$

O vector das forças nodais é obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{10}^{(1)} \\ F_{12}^{(1)} \\ F_{11}^{(1)} \\ F_7^{(1)} + F_{10}^{(2)} \\ F_9^{(1)} + F_{12}^{(2)} \\ F_8^{(1)} + F_{11}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Utilizando a informação referente a cada um dos elementos, torna-se possível obter:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.0417 \\ 0.0417 \\ 0.50 \\ -0.0834 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Resolução da equação de equilíbrio nodal

A resolução da equação de equilíbrio global,

$$\mathbf{K} \times \mathbf{q} = \mathbf{F} ,$$

permite determinar o valor dos deslocamentos independentes. Obtém-se:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0.09987 \quad (m) \\ 0.13757 \quad (rad) \\ 0.02383 \quad (rad) \\ 0.07025 \quad (m) \\ 0.08201 \quad (rad) \\ -0.07164 \quad (rad) \end{pmatrix}$$

Análise da solução obtida

Uma vez determinados os deslocamentos independentes e utilizando de novo a informação contida nas tabelas de incidências, é possível escrever a aproximação obtida para o campo de deslocamentos transversais em cada um dos elementos.

Para o elemento 1 é possível escrever:

$$\begin{aligned} w^{(1)}(x, y) &= \psi_7(x, y) q_4 + \psi_8(x, y) q_6 + \psi_9(x, y) q_5 \\ &\quad + \psi_{10}(x, y) q_1 + \psi_{11}(x, y) q_3 + \psi_{12}(x, y) q_2 \end{aligned}$$

Substituindo na expressão anterior as definições para as funções de forma e os valores dos deslocamentos independentes, obtém-se:

$$w^{(1)}(x, y) = 0.05345 xy - 0.06488 x^2 y + 0.01143 x^3 y + 0.16204 y^2 - 0.0333 x y^2 - 0.06217 y^3 + 0.00368 x y^3 \quad (23)$$

Para o elemento 2 vem:

$$w^{(2)}(x, y) = \psi_{10}(x, y) q_4 + \psi_{11}(x, y) q_6 + \psi_{12}(x, y) q_5$$

o que permite definir:

$$w^{(2)}(x, y) = -0.00139 xy - 0.06747 x^2 y + 0.06886 x^3 y + 0.12874 y^2 - 0.12874 x y^2 - 0.05849 y^3 + 0.05849 x y^3$$

Confirma-se que ao longo de segmentos de recta paralelos aos sistemas de eixos se obtém uma aproximação cúbica para o campo de deslocamentos transversais. Já ao longo de rectas não paralelas a x ou a y , a expressão para o deslocamento transversal aproximado é do 4º grau.

Uma vez obtidas as aproximações para o campo de deslocamentos transversais, as expressões (3) e (4) permitem determinar as aproximações para os campos de rotações θ_x e θ_y . Para o elemento 1 obtém-se as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \theta_x^{(1)} &= -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ &= -0.05345 y + 0.12976 xy - 0.03429 x^2 y + 0.0333 y^2 - 0.00368 y^3 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \theta_y^{(1)} &= -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ &= -0.05345 x + 0.06488 x^2 - 0.01143 x^3 - 0.32408 y \\ &\quad + 0.0666 xy + 0.18651 y^2 - 0.01104 x y^2 \end{aligned} \quad (25)$$

É importante averiguar neste instante se a solução obtida para os campos de deslocamentos no elemento 1 respeita as condições de fronteira cinemática. No bordo com $y = 0$, tanto os deslocamentos transversais quanto os campos de rotações deveriam ser nulos, tendo em conta o encastramento existente. A partir de (23) e (24) não é difícil verificar que $w(x, 0) = 0$ e $\theta_x(x, 0) = 0$. Já quanto à rotação normal, $\theta_y(x, 0)$, verifica-se que se anula apenas nos nós 1 e 2 (onde o seu valor foi directamente prescrito), tomando valores diferentes de zero na restante parte do bordo encastrado. A variação de $\theta_y(x, 0)$ encontra-se ilustrada no gráfico representado na figura 10. Fica desta forma ilustrado que a utilização do elemento *ACM* conduz a soluções aproximadas que não verificam de forma total as condições de fronteira do problema sempre que se especifica o valor das rotações normais num determinado bordo da laje.

Os campos de rotações no elemento 2 são dados pelas igualdades:

$$\theta_x(x, y)^{(2)} = 0.00139 y + 0.13494 xy - 0.20658 x^2 y + 0.12874 y^2 - 0.05849 y^3$$

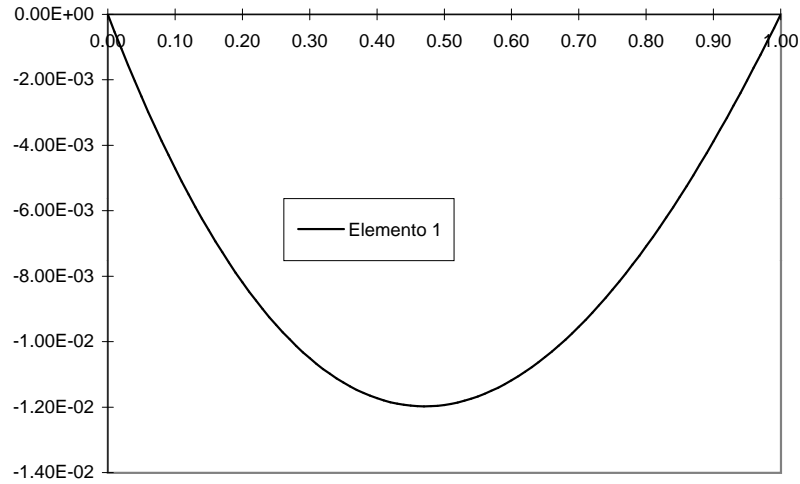


Figura 10: Distribuição das rotações θ_y no bordo superior - $y = 0$ - do elemento 1.

$$\begin{aligned} \theta_y(x, y)^{(2)} = & 0.00139x + 0.06747x^2 - 0.06886x^3 - 0.25748y + 0.25748xy \\ & + 0.17547y^2 - 0.17547xy^2 \end{aligned}$$

É agora possível verificar que não há continuidade para o campo de rotações θ_x ao longo da fronteira entre os elementos 1 e 2. Dadas as expressões definidas atrás, não é difícil verificar que:

$$\theta_x^{(1)}(1, y) \neq \theta_x^{(2)}(0, y) .$$

Esta mesma conclusão pode ser retirada da análise da figura 11, onde se representam os campos de rotações θ_x no bordo $x = 1$ (referencial global) obtidos através das aproximações definidas para os elementos 1 e 2.

Os campos de curvaturas no elemento 1 podem ser obtidos através da aplicação das equações de compatibilidade definidas em (6). Obtém-se:

$$\begin{aligned} \chi_x^{(1)} &= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\ &= 0.12976y - 0.06858xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_y^{(1)} &= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\ &= -0.32408 + 0.0666x + 0.37302y - 0.02208xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{xy}^{(1)} &= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \\ &= -0.05345 + 0.12976x - 0.03429x^2 + 0.0666y - 0.01104y^2 \end{aligned}$$

Os campos de momentos podem agora ser calculados com o recurso às relações constitutivas

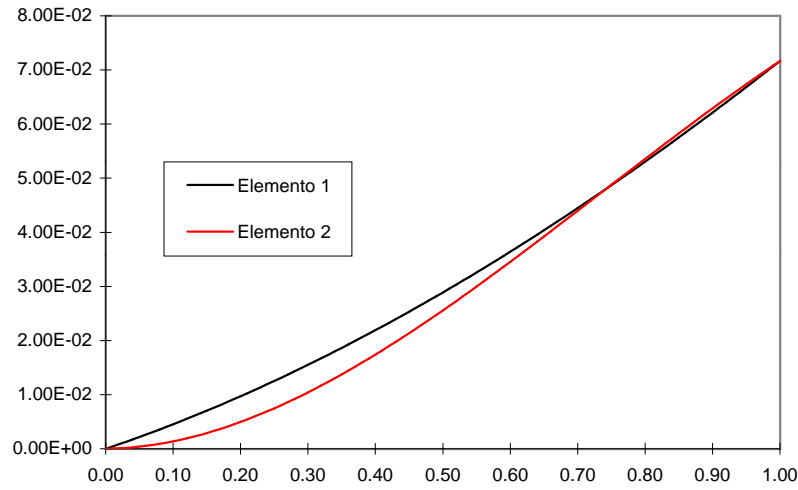


Figura 11: Distribuição das rotações θ_x na interface entre os elementos 1 e 2.

definidas em (8):

$$\begin{aligned} m_x^{(1)} &= D_f (\chi_x(x, y) + \nu \chi_y(x, y)) \\ &= -0.097224 + 0.01998 x + 0.241666 y - 0.075204 x y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_y^{(1)} &= D_f (\nu \chi_x(x, y) + \chi_y(x, y)) \\ &= -0.32408 + 0.0666 x + 0.411948 y - 0.042654 x y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{xy}^{(1)} &= D_f (1 - \nu) \chi_{xy}(x, y) \\ &= -0.037415 + 0.090832 x - 0.024003 x^2 + 0.04662 y - 0.007728 y^2 \end{aligned}$$

A aproximação definida para os campos de momentos flectores é bilinear, o que faz com que os respectivos diagramas ao longo de segmentos de recta paralelos aos sistemas de eixos coordenados sejam lineares. Por sua vez, é obtida uma aproximação quadrática para o campo de momentos torsões, m_{xy} .

Importa agora verificar se a distribuição de momentos obtida verifica as condições de equilíbrio no domínio e na fronteira. Para se verificar o equilíbrio no domínio, a distribuição de cargas aplicadas $q(x, y)$ obtida aplicando a condição (11) à aproximação obtida para os campos de momentos, deve corresponder ao carregamento inicialmente aplicado à estrutura. Ora a aplicação da equação (11) permite verificar que a solução de momentos aproximada obtida para o elemento 1 equilibra uma carga distribuída nula, $q(x, y) = 0$, o que faz com que o equilíbrio no domínio não venha verificado.

Para haver equilíbrio na fronteira, é necessário que a solução obtida para os esforços permita recuperar as condições de carregamento nos bordos da laje (condições de fronteira estática). Repare-se agora o que se passa, por exemplo, na fronteira definida por $x = 0$. O diagrama

de momentos flectores ao longo desse bordo é dado por:

$$m_n = m_x^{(1)}(0, y) = -0.097224 + 0.241666 y .$$

Esta expressão permite concluir que não há equilíbrio na fronteira em causa, uma vez que o momento flector toma valores não nulos, o que contraria as condições de fronteira inicialmente especificadas. O diagrama representado na figura 12 permite reforçar esta ideia.

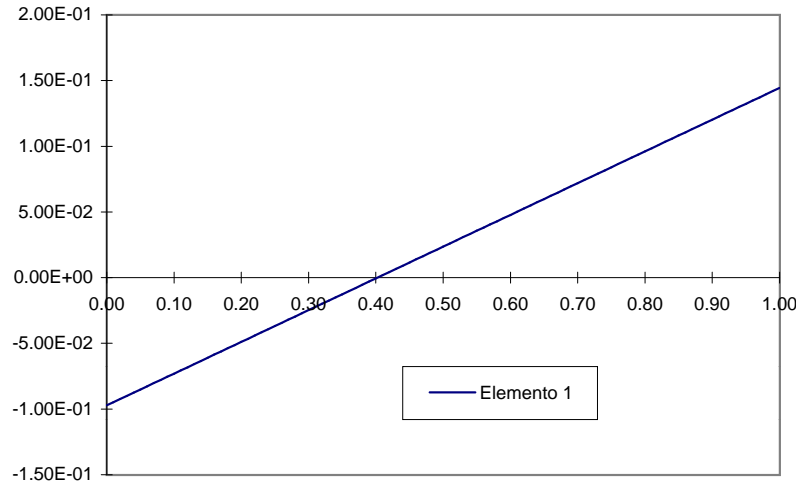


Figura 12: Distribuição dos momentos flectores no bordo $x = 0$ do elemento 1.

No elemento 2, os campos de curvaturas e os campos de momentos são dados pelas seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \chi_x(x, y)^{(2)} &= 0.13494 y - 0.41316 x y \\ \chi_y(x, y)^{(2)} &= -0.25748 + 0.25748 x + 0.35094 y - 0.35094 x y \\ \chi_{xy}(x, y)^{(2)} &= 0.00139 + 0.13494 x - 0.20658 x^2 + 0.25748 y - 0.17547 y^2 \\ \\ m_x(x, y)^{(2)} &= -0.077244 + 0.077244 x + 0.240222 y - 0.518442 x y \\ m_y(x, y)^{(2)} &= -0.25748 + 0.25748 x + 0.391422 y - 0.474888 x y \\ m_{xy}(x, y)^{(2)} &= 0.000973 + 0.094458 x - 0.144606 x^2 + 0.180236 y - 0.122829 y^2 \end{aligned}$$

Para haver equilíbrio de esforços na fronteira inter-elementar, será necessário que a distribuição de momentos flectores obtida com base na solução aproximada definida para o elemento 1 seja igual à distribuição obtida com base na aproximação referente ao elemento 2. A figura 13, onde se traçam aquelas duas distribuições, permite verificar que também não há equilíbrio na fronteira entre elementos.

Conclui-se desta forma que a solução aproximada obtida não verifica as condições de equilíbrio nem no domínio, nem na fronteira, o que constitui uma das características gerais das formulações clássicas (de deslocamento) do método dos elementos finitos.

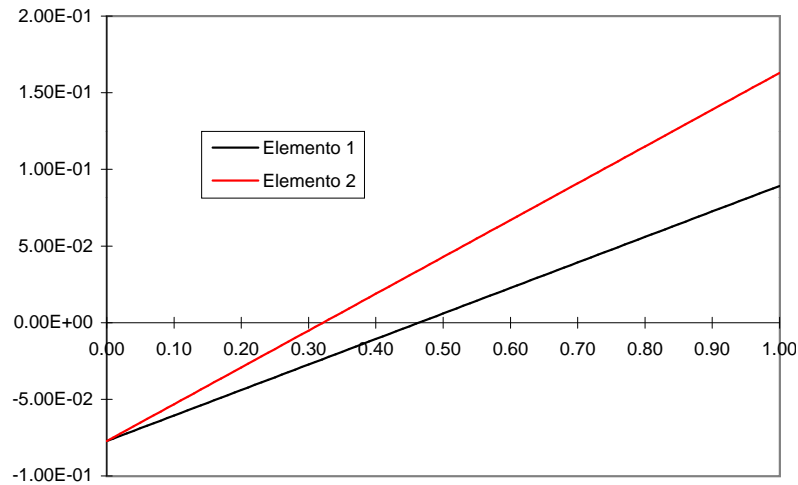


Figura 13: Distribuição dos momentos flectores no bordo comum aos dois elementos finitos.

4.2 Exemplo de um elemento conforme

Apresenta-se agora de forma muito sucinta o exemplo de um elemento conforme. Trata-se também de um elemento rectangular com quatro nós, e é conhecido geralmente por elemento *BFS* (Bogner-Fox-Schmit) [4].

Para justificar o tipo de funções de interpolação utilizadas na definição do elemento *BFS*, mais uma vez se recorre à semelhança existente entre as equações que regem o comportamento das lajes finas e dos elementos de viga. Recorde-se então que quando se formula este tipo de elemento se aproxima o campo de deslocamentos transversais através da expansão

$$w(x) = h_1(x) \delta_i + h_2(x) \theta_i + h_3(x) \delta_j + h_4(x) \theta_j ,$$

onde $\delta_{i\{j\}}$ e $\theta_{i\{j\}}$ representam o deslocamento transversal e a rotação do nó inicial{final} da barra, respectivamente. Para assegurar a continuidade da função (deslocamentos transversais) e das suas derivadas (rotações) entre elementos adjacentes, são utilizadas as seguintes funções,

$$h_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$h_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$h_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$h_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

conhecidas geralmente por funções de Hermite e cuja representação gráfica se encontra na figura 14.

A passagem para os elementos de laje é agora simples. Intuitivamente, compreender-se-á que se as funções de Hermite permitem verificar as condições de continuidade em domínios

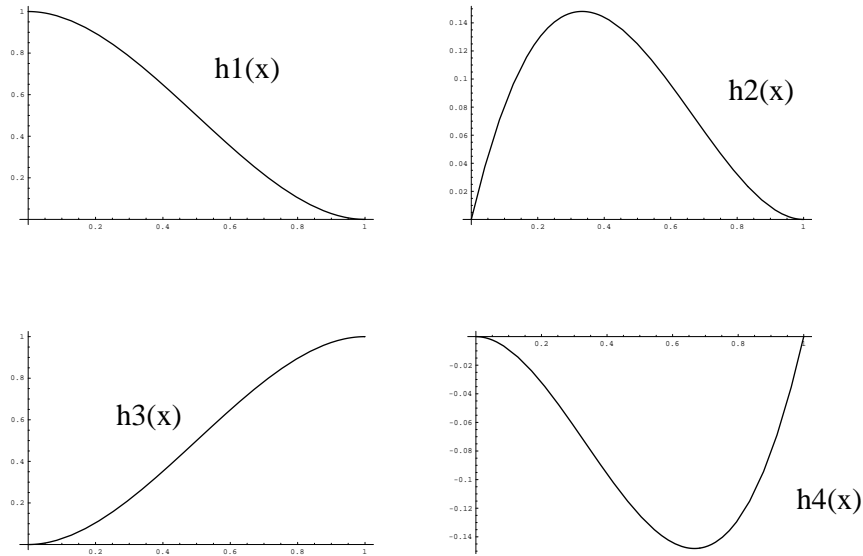


Figura 14: Funções de hermite unidimensionais

unidimensionais, o produto de duas funções de Hermite, uma definida em x e a outra definida em y , deverá conduzir à construção de uma função de interpolação *conforme* num domínio bidimensional.

As funções de aproximação do elemento *BFS* são construídas desta forma. Consideram-se quatro polinómios de Hermite definidos em x e quatro polinómios de Hermite definidos em y . O produto cruzado dessas funções unidimensionais permite a construção de um total de 16 funções bidimensionais, que correspondem precisamente às funções de interpolação procuradas. Define-se então:

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x, y) &= h_1(x) \times h_1(y) & \psi_5(x, y) &= h_3(x) \times h_1(y) \\
 \psi_2(x, y) &= h_2(x) \times h_1(y) & \psi_6(x, y) &= h_4(x) \times h_1(y) \\
 \psi_3(x, y) &= h_1(x) \times h_2(y) & \psi_7(x, y) &= h_3(x) \times h_2(y) \\
 \psi_4(x, y) &= h_2(x) \times h_2(y) & \psi_8(x, y) &= h_4(x) \times h_2(y) \\
 \\ \\
 \psi_9(x, y) &= h_3(x) \times h_3(y) & \psi_{13}(x, y) &= h_1(x) \times h_3(y) \\
 \psi_{10}(x, y) &= h_4(x) \times h_3(y) & \psi_{14}(x, y) &= h_2(x) \times h_3(y) \\
 \psi_{11}(x, y) &= h_3(x) \times h_4(y) & \psi_{15}(x, y) &= h_1(x) \times h_4(y) \\
 \psi_{12}(x, y) &= h_4(x) \times h_4(y) & \psi_{16}(x, y) &= h_2(x) \times h_4(y)
 \end{aligned}$$

Obtém-se desta forma um elemento com 16 graus de liberdade, sendo quatro as incógnitas associadas a cada um dos nós. Assim, para além dos graus de liberdade habituais (o deslocamento transversal e as duas rotações), há um outro “deslocamento nodal” independente

a ter em conta. O significado físico deste quarto grau de liberdade corresponde ao valor da curvatura de torção no nó em causa. Na figura 15 encontram-se representados os graus de liberdade elementares a considerar quando se utiliza um elemento *BFS*. A aproximação para o campo de deslocamentos transversais pode agora ser escrita na forma:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{16} \psi_i(x, y) u_i \quad (26)$$

A utilização deste elemento resulta bastante limitada, uma vez que a sua aplicabilidade se resume a domínios rectangulares.

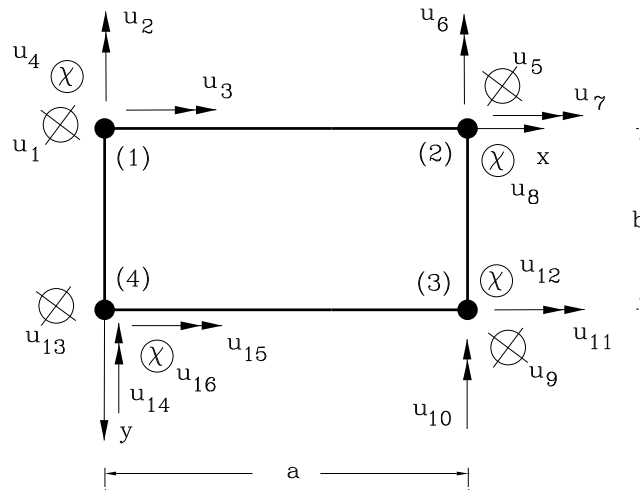


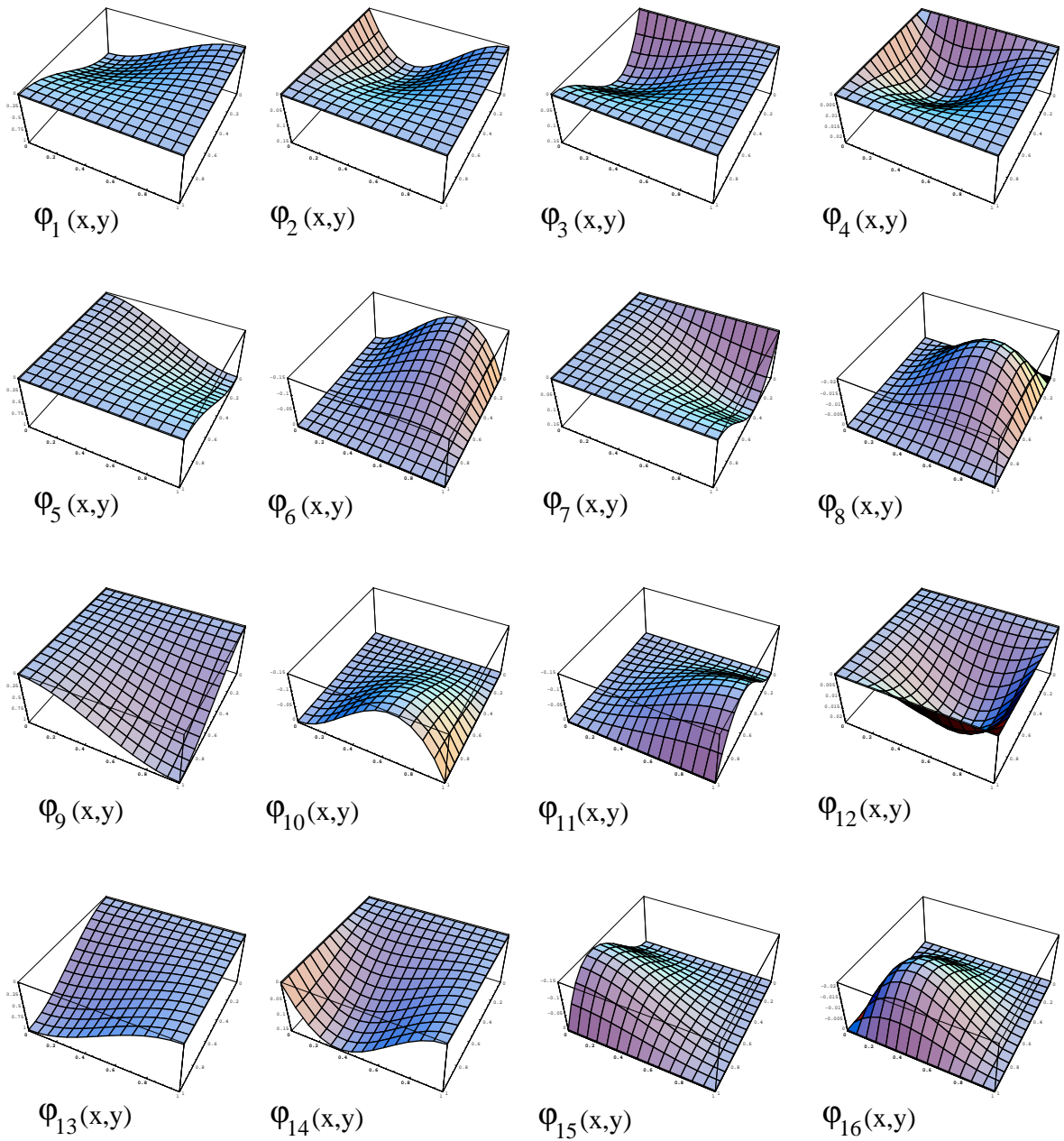
Figura 15: Elemento BFS

As dezasseis funções de aproximação utilizadas na definição do elemento *BFS* encontram-se representadas na figura 16. Repare-se na forma pouco habitual que as funções de interpolação associadas aos *deslocamentos nodais* correspondentes às curvaturas de torção apresentam (ver por exemplo o gráfico de $\psi_4(x, y)$).

5 Elementos finitos para lajes espessas

Na teoria de Mindlin, o campo de deslocamentos transversais, $w(x, y)$, é independente dos campos de rotações, $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$. Torna-se desta forma necessário interpolar de uma forma independente cada um destes campos.

Para assegurar a continuidade dos deslocamentos transversais e de todas as rotações, é suficiente neste caso garantir a continuidade das funções de interpolação utilizadas. Este facto faz com que venha muito facilitado o desenvolvimento de elementos finitos para a análise de lajes espessas. Note-se que no operador diferencial de compatibilidade definido em (12) apenas intervêm derivadas de primeira ordem, o que implica que apenas seja necessário garantir continuidade C^0 para as funções de aproximação.

Figura 16: Funções de aproximação do elemento *BFS*.

Ao contrário do que sucede nas lajes finas, é então possível a definição de elementos muito semelhantes aos que foram estudados no caso dos problemas de elasticidade plana [2, 3]. As funções de interpolação são semelhantes, diferindo apenas os graus de liberdade que devem ser considerados em cada um dos nós. Como deslocamentos nodais independentes consideram-se os deslocamentos transversais, w , e as duas rotações, θ_x e θ_y . As interpolações em cada elemento finito podem ser então escritas na forma,

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{nnos} \psi_i(x, y) w_i, \quad (27)$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{i=1}^{nnos} \psi_i(x, y) (\theta_x)_i, \quad (28)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{i=1}^{nnos} \psi_i(x, y) (\theta_y)_i, \quad (29)$$

onde $nnos$ denota o número de nós do elemento finito utilizado. As aproximações podem ser expressas matricialmente na forma (16), mas onde agora se define:

$$\Psi = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \psi_1(x, y) & \dots & \psi_{nnos}(x, y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \psi_1(x, y) & \dots & \psi_{nnos}(x, y) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \psi_1(x, y) & \dots & \psi_{nnos}(x, y) \end{array} \right] \quad (30)$$

e

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{l} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{array} \right\} \quad \mathbf{u}^{(e)} = \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ \vdots \\ w_{nnos} \\ (\theta_x)_1 \\ \vdots \\ (\theta_x)_{nnos} \\ (\theta_y)_1 \\ \vdots \\ (\theta_y)_{nnos} \end{array} \right\} \quad (31)$$

Se se utilizar um elemento finito rectangular com 4 nós, os deslocamentos nodais elementares a considerar são os que se encontram representados na figura 17.

Recorde-se que para elementos de forma rectangular com lados paralelos ao sistema de eixos coordenados, as funções de interpolação têm a seguinte definição:

$$\psi_1(x, y) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}$$

$$\psi_2(x, y) = \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab}$$

$$\psi_3(x, y) = \frac{xy}{ab}$$

$$\psi_4(x, y) = \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}$$

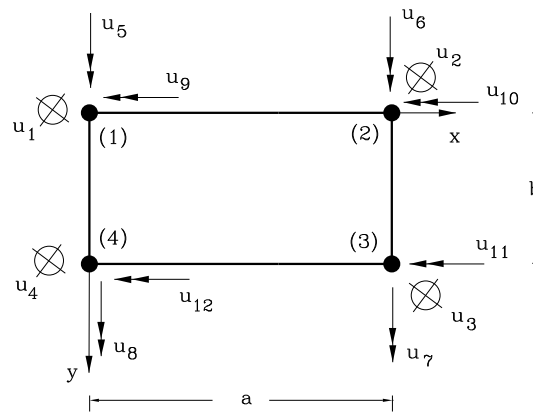


Figura 17: Elemento rectangular de 4 nós para a análise de lajes de Reissner-Mindlin .

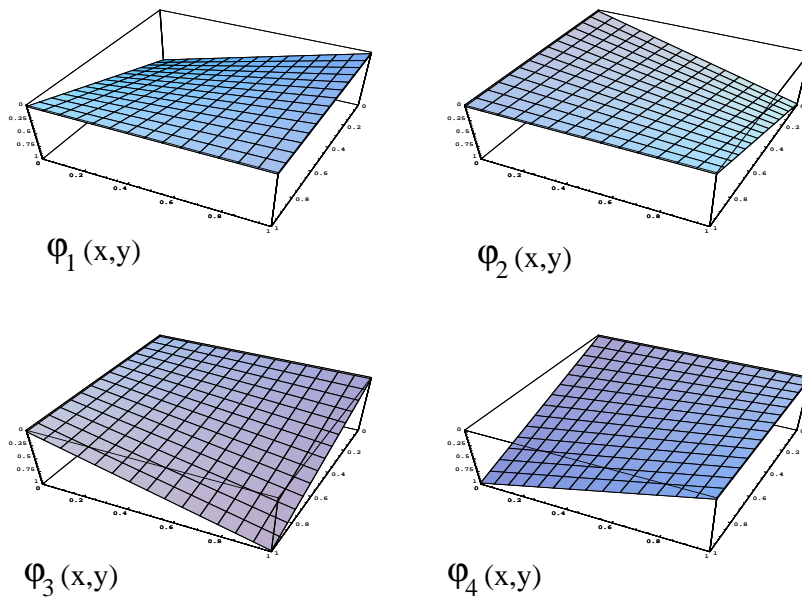


Figura 18: Funções de aproximação para o elemento rectangular de 4 nós.

Na figura 18 representa-se graficamente cada uma destas quatro funções de interpolação.

Conhecida a matriz das funções de interpolação, Ψ , e o operador diferencial de compatibilidade \mathbf{A} definido em (12), a matriz de rigidez elementar pode ser calculada com recurso à expressão geral (19), onde agora a matriz das constantes elásticas \mathbf{D} é definida em (13).

O vector das forças nodais elementares pode ser determinado utilizando-se a definição (21). No caso das lajes espessas, o vector \mathbf{f} corresponde à definição apresentada em (14).

5.1 Cuidados a ter na utilização deste tipo de elementos

Dada a sua simplicidade e facilidade de utilização, os modelos de elementos finitos para lajes espessas são os mais utilizados, mesmo em situações para as quais se pode deixar de considerar a laje como espessa.

Costuma considerar-se que um “bom” elemento de Reissner-Mindlin deve conseguir recuperar os resultados fornecidos pela teoria de Kirchhoff quando a espessura da laje começa a diminuir. Embora esta afirmação seja verdadeira em muitos dos casos, situações há em que a diminuição da espessura da laje coloca alguns problemas no que toca à utilização de elementos baseados na implementação da teoria de Reissner-Mindlin. Um dos fenómenos mais graves que podem surgir nesta circunstância é o chamado *locking*. Este fenómeno pode destruir por completo a solução, tornando muito pequenos (ou mesmo nulos) os valores calculados para o campo de deslocamentos.

O fenómeno de *locking* surge porque na definição dos elementos da matriz de rigidez há coeficientes que têm parcelas que vêm multiplicadas por h^3 (parcela de flexão) e parcelas que vêm multiplicadas apenas por h (parcela de corte). Quando a espessura da laje começa a diminuir, a parcela de corte começa a predominar sobre a parcela de flexão, o que faz com que a influência desta última tenda a “desaparecer”.

Uma vez que o fenómeno de *locking* está associado a uma rigidez excessiva do modelo numérico utilizado, a sua resolução passa pela sub-avaliação dos elementos das matrizes de rigidez elementares. Assim, no cálculo numérico de cada um dos coeficientes que compõem essa matriz, em vez de se utilizar o número de pontos de Gauss necessário para se efectuar uma integração exacta [2, 3], utiliza-se um número inferior, o que vai permitir fazer desaparecer o *locking*.

A integração diz-se *reduzida* quando se considera um número de pontos de Gauss inferior ao necessário para efectuar as integrações tanto das parcelas de corte quanto das parcelas de flexão. A integração dir-se-à *selectiva* quando se integra a parcela de flexão de forma exacta e se utiliza sub-integração apenas para a parcela de corte, que é no fundo a principal reponsável pelo *locking*.

Para diferentes tipos de elementos finitos, encontra-se representada na tabela 5 o número de pontos de Gauss que permite efectuar a integração exacta, assim como o número de pontos de Gauss que permitem definir integrações reduzidas e selectivas.

Para ilustrar o fenómeno de *locking*, considere-se uma laje quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno e sujeita à acção de uma carga uniformemente distribuída, q . Consi-


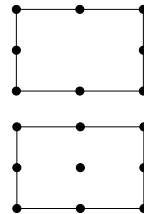
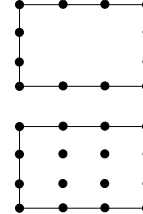
Tipo de integração			
<i>Exacta</i>	2×2	3×3	4×4
<i>Reduzida</i>	1×1	2×2	3×3
<i>Selectiva</i>	2×2 (flexão) 1×1 (corte)	3×3 (flexão) 2×2 (corte)	4×4 (flexão) 3×3 (corte)

Tabela 5: Tipos de integração para elementos isoparamétricos

derando a teoria de lajes finas, a solução exacta para o valor do deslocamento transversal no ponto central da laje é dado por:

$$w_e = 0.40644 \frac{q L^4}{100 D_f},$$

onde L corresponde ao comprimento do bordo da laje. O valor exato do momento flector nesse mesmo ponto é dado pela igualdade:

$$m_e = 4.78863 \frac{q L^2}{100}$$

Na figura 19 encontra-se representada a evolução do valor do deslocamento transversal do ponto central da laje à medida que se diminui a espessura da laje. Em abcissas representa-se a relação L/h e em ordenadas o valor normalizado para o deslocamento em causa, w/w_e . A malha utilizada na análise é sempre a mesma e é constituída por elementos isoparamétricos de 4 nós. Seria de esperar que à medida que a espessura da laje fosse diminuindo, os resultados se aproximassem dos resultados fornecidos pela teoria de Kirchhoff, muito embora os elementos utilizados resultem da implementação da teoria de Reissner-Mindlin.

Os gráficos representados na figura 19 permitem verificar que quando se utiliza uma integração reduzida ou uma integração selectiva este é de facto o comportamento verificado. Já quando se utiliza a integração total, é bem visível a activação do fenómeno de locking a partir de uma dada relação L/h .

Este mesmo efeito pode ser recuperado na análise dos gráficos representados na figura 20, onde agora se representa, exactamente para os mesmos casos testados anteriormente, a evolução do valor do momento flector normalizado, m/m_e .

Quando se utilizam malhas constituídas por elementos de ordem superior, é de esperar que o fenómeno de locking comece a ser activado para valores de espessuras inferiores. Este aspecto

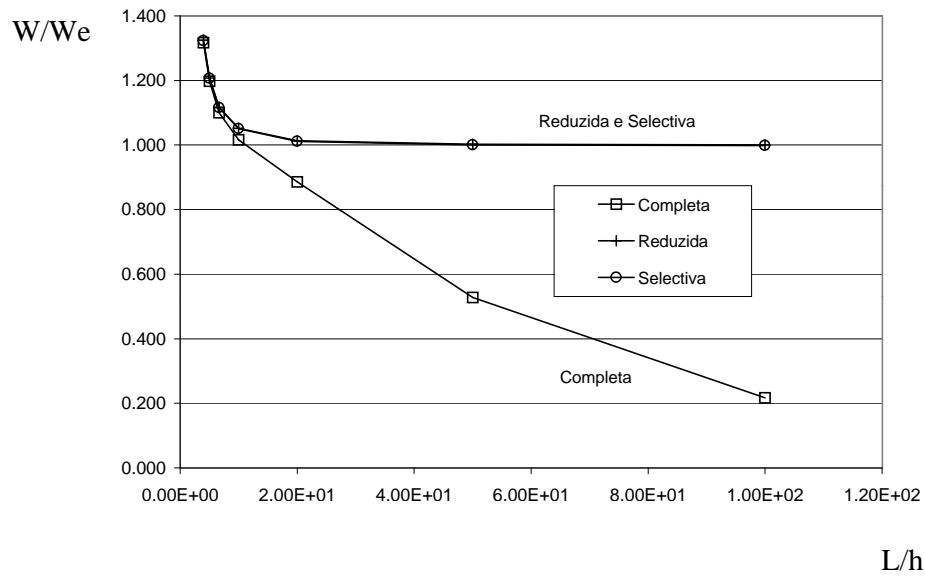


Figura 19: Efeito de locking no valor do deslocamento transversal; elementos de 4 nós.

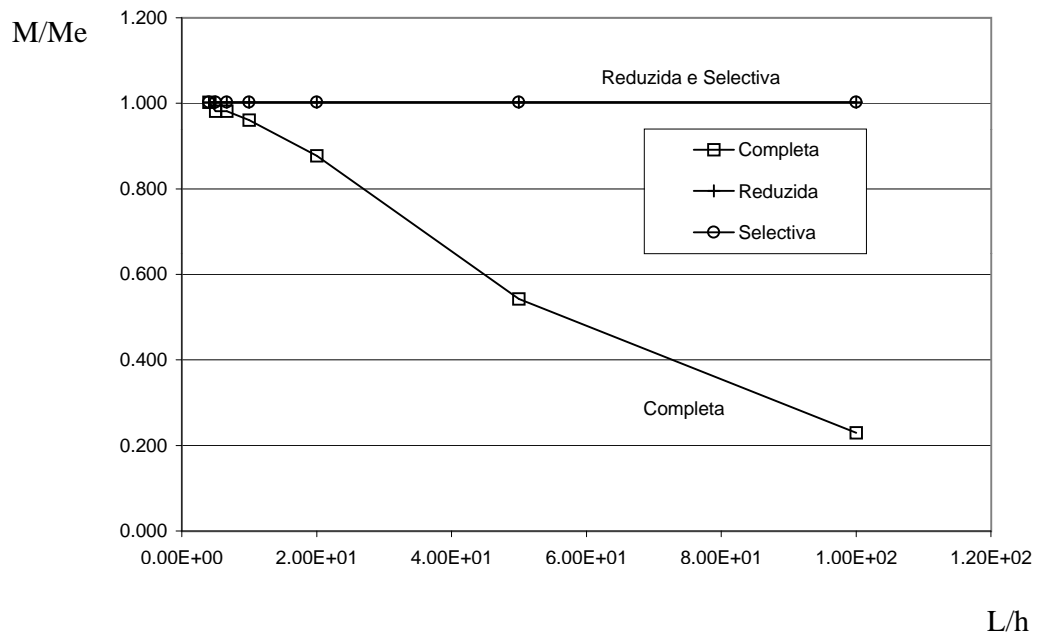


Figura 20: Efeito de locking no valor dos momentos flectores; elementos de 4 nós.

é visível através da análise da figura 21, onde na análise da mesma laje, mas considerando agora uma discretização envolvendo elementos rectangulares com 8 nós, o locking só começa a surgir para valores mais elevados da relação L/h .

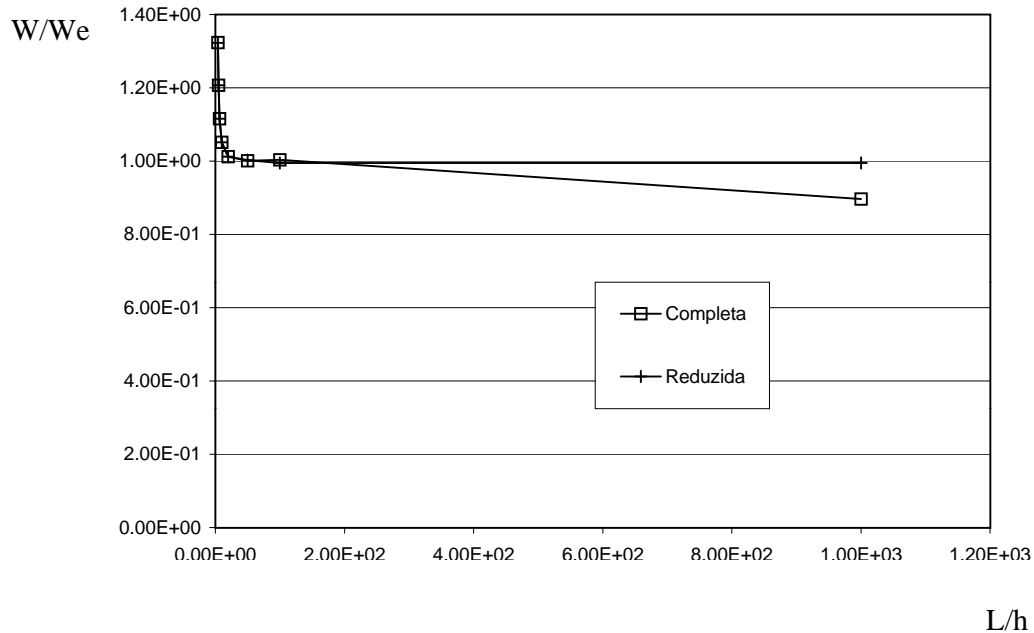


Figura 21: Efeito de locking no valor do deslocamento transversal; elementos de 8 nós.

Embora os exemplos que aqui são apresentados não o permitem observar, pode afirmar-se que os elementos rectangulares com nove e dezasseis nós são menos sensíveis ao locking que os elementos com oito e doze nós, respectivamente.

5.2 Exemplo de aplicação

Retome-se o exemplo de aplicação definido na figura 8. Considere-se de novo uma discretização com dois elementos, mas onde agora são utilizados os elementos isoparamétricos de 4 nós obtidos com a implementação da teoria de lajes espessas. Note-se que os graus de liberdade são os mesmos que anteriormente, e encontram-se identificados na figura 9.

Considerou-se nesta análise uma espessura $h = 0.01 \text{ m}$. O valor do módulo de elasticidade foi escolhido por forma a garantir que a rigidez de flexão da laje, D_f , tenha um valor unitário. Para evitar o fenómeno de locking foi utilizada uma integração selectiva.

De seguida apenas se efectua a análise crítica da solução aproximada obtida. O processo de obtenção da equação de equilíbrio global não encerra qualquer novidade em relação ao que foi discutido no caso das placas e também no caso da aplicação do elemento *ACM*.

Utilizando o programa de cálculo automático LAJE32, obtiveram-se os seguintes valores para

os deslocamentos independentes.

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0.1287 (m) \\ -0.0051 (rad) \\ 0.2573 (rad) \\ 0.0656 (m) \\ 0.1312 (rad) \\ 0.1313 (rad) \end{pmatrix}$$

Os valores dos deslocamentos nodais nos elementos 1 e 2 podem ser encontrados nas tabelas 6 e 7, respectivamente. Note-se que dada a convenção de sinais adoptada para as rotações no elemento isoparamétrico de 4 nós (ver figura 17), os valores nodais de θ_x e θ_y aparecem com o sinal trocado nas referidas tabelas.

<i>Local</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>Global</i>	-	-	0.0656	0.1287	-	-	- 0.1312	0.0051	-	-	-0.1313	-0.2573

Tabela 6: Valores dos deslocamentos nodais no elemento 1.

<i>Local</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>Global</i>	-	-	-	0.0656	-	-	-	-0.1312	-	-	-	-0.1313

Tabela 7: Valores dos deslocamentos nodais no elemento 2.

O campo de deslocamentos transversais no elemento 1 pode ser obtido substituindo-se na equação (27) os valores dos deslocamentos listados na tabela 6. Obtém-se desta forma:

$$\begin{aligned} w(x, y)^{(1)} &= \psi_3(x, y) u_3 + \psi_4(x, y) u_4 \\ &= \psi_3(x, y) w_3 + \psi_4(x, y) w_4 \\ &= 0.1287 y - 0.06307 x y \end{aligned}$$

Substituindo nas definições (28) e (29) os valores das rotações nodais do elemento 1 pode obter-se:

$$\begin{aligned} \theta_x^{(1)} &= \psi_3(x, y) u_7 + \psi_4(x, y) u_8 \\ &= \psi_3(x, y) (\theta_x)_3 + \psi_4(x, y) (\theta_x)_4 \\ &= 0.005123 y - 0.136323 x y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_y^{(1)} &= \psi_3(x, y) u_{11} + \psi_4(x, y) u_{12} \\ &= \psi_3(x, y) (\theta_y)_3 + \psi_4(x, y) (\theta_y)_4 \\ &= -0.2573 y + 0.126 x y \end{aligned}$$

Como pode verificar-se com facilidade, os elementos rectangulares isoparamétricos de 4 nós permitem obter aproximações bilineares para os campos de deslocamentos envolvidos na

caracterização do comportamento do elemento de laje. Não é difícil verificar que a solução obtida para o campo de deslocamentos satisfaz todas as condições de fronteira cinemática. De facto, no bordo encastrado (onde $y = 0$) obtém-se de imediato:

$$w^{(1)}(x, 0) = 0 \quad ; \quad \theta_x^{(1)}(x, 0) = 0 \quad ; \quad \theta_y^{(1)}(x, 0) = 0$$

Os campos de curvaturas podem agora ser obtidos a partir da aplicação das equações de compatibilidade definidas em (12).

$$\chi_x^{(1)}(x, y) = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -0.136323 y$$

$$\chi_y^{(1)}(x, y) = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = -0.2573 + 0.126 x$$

$$2 \chi_{xy}^{(1)}(x, y) = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = 0.005123 - 0.136323 x + 0.126 y$$

Por sua vez, as deformações de corte podem ser obtidas através das igualdades:

$$\gamma_x^{(1)}(x, y) = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -0.057947 y - 0.136323 x y$$

$$\gamma_y^{(1)}(x, y) = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.1287 - 0.06307 x - 0.2573 y + 0.126 x y$$

A aplicação das relações de elasticidade (13) permite neste instante determinar a aproximação para os campos de esforços. Para os campos de momentos flectores e momentos torsões obtém-se:

$$m_x^{(1)}(x, y) = -0.07719 + 0.0378 x - 0.136323 y$$

$$m_y^{(1)}(x, y) = -0.2573 + 0.126 x - 0.0408969 y$$

$$m_{xy}^{(1)}(x, y) = 0.00015 - 0.003976 x + 0.003675 y$$

Verifica-se que a utilização de elementos rectangulares com quatro nós conduz à obtenção de uma aproximação linear para os campos de momentos. Os esforços transversos são definidos através das igualdades:

$$v_x^{(1)}(x, y) = \phi G h \gamma_x = -2028.15 y - 4771.3 x y$$

$$v_y^{(1)}(x, y) = \phi G h \gamma_y = 4504.5 - 2207.45 x - 9005.5 y + 4410. x y$$

Os resultados anteriores permitem verificar que a solução aproximada não verifica as condições de equilíbrio na fronteira. No bordo livre os momentos flector e tissor e o esforço transversal, em vez de tomarem valores nulos de acordo com as condições de carregamento, são definidos pelas seguintes igualdades:

$$m_n = m_x^{(1)}(0, y) = -0.07719 - 0.136323 y$$

$$m_t = m_{xy}^{(1)}(0, y) = 0.00015 + 0.003675 y$$

$$v_n = v_x^{(1)}(0, y) = -2028.15 y$$

A solução aproximada obtida também não verifica as condições de equilíbrio no domínio. Se se calcularem as componentes do vector das forças de massa, \mathbf{f} , utilizando as condições de equilíbrio expressas na equação (14), obtém-se:

$$\begin{aligned}\overline{m}_x^{(1)}(x, y) &= 0.041475 + 2028.15 y + 4771.3 x y \\ \overline{m}_y^{(1)}(x, y) &= -4504.54 + 2207.45 x + 9005.5 y - 4410. x y \\ q^{(1)}(x, y) &= -9005.5 + 4410. x - 4771.3 y\end{aligned}$$

o que não corresponde ao carregamento aplicado à laje em análise.

No elemento 2, a aproximação definida para os campos de deslocamentos permite obter:

$$\begin{aligned}w^{(2)}(x, y) &= \psi_4(x, y) u_4 \\ &= \psi_4(x, y) w_4 \\ &= 0.06563 y - 0.06563 x y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_x^{(2)}(x, y) &= \psi_4(x, y) u_8 \\ &= \psi_4(x, y) (\theta_x)_4 \\ &= -0.1312 y + 0.1312 x y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_y^{(2)}(x, y) &= \psi_4(x, y) u_{12} \\ &= \psi_4(x, y) (\theta_y)_4 \\ &= -0.1313 y + 0.1313 x y\end{aligned}$$

Estas expressões permitem mais uma vez verificar que a solução obtida verifica todas as condições de fronteira cinemática. Permite ainda confirmar que a continuidade de deslocamentos nas fronteiras inter-elementares é verificada. De facto, obtém-se

$$\begin{aligned}w^{(1)}(1, y) &= w^{(2)}(0, y) \\ \theta_x^{(1)}(1, y) &= \theta_x^{(2)}(0, y) \\ \theta_y^{(1)}(1, y) &= \theta_y^{(2)}(0, y)\end{aligned}$$

Os campos de curvaturas e os campos de momentos no elemento 2 são dados por:

$$\begin{aligned}\chi_x^{(2)}(x, y) &= 0.1312 y \\ \chi_y^{(2)}(x, y) &= -0.1313 + 0.1313 x \\ 2 \chi_{xy}^{(2)}(x, y) &= -0.1312 + 0.1312 x + 0.1313 y \\ m_x^{(2)}(x, y) &= -0.03939 + 0.03939 x + 0.1312 y\end{aligned}$$

$$m_y^{(2)}(x, y) = -0.1313 + 0.1313x + 0.03936y$$

$$m_{xy}^{(2)}(x, y) = -0.00382667 + 0.00382667x + 0.00382958y$$

Os resultados obtidos permitem confirmar que não há equilíbrio de esforços na fronteira entre os elementos utilizados na discretização da laje. Com efeito, é simples verificar que:

$$m_x^{(1)}(1, y) = m_x^{(2)}(0, y)$$

$$m_{xy}^{(1)}(1, y) = m_{xy}^{(2)}(0, y)$$

$$v_x^{(1)}(1, y) = v_x^{(2)}(0, y) .$$

Referências

- [1] Vitor MA Leitão, “Apontamentos sobre a Análise Elástica Linear de Lajes”, Edição da secção de folhas da Associação de Estudantes do IST, Lisboa, 1997;
- [2] Orlando JBA Pereira, “Introdução ao Método dos Elementos Finitos na Análise de Problemas Planos de Elasticidade”, 2001;
- [3] OC Zienkiewicz e RL Taylor, ”The Finite Element Method - Basic Formulation and Linear Problems”, Volume 1, 4 edição, McGraw-Hill, Berkshire, 1989;
- [4] OC Zienkiewicz e RL Taylor, ”The Finite Element Method - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity”, Volume 2, 4 edição, Berkshire, 1991;