

Análise de Lajes com o Método das Diferenças Finitas

Luís Manuel Santos Castro

6 de Dezembro de 2001

1 Introdução

Estes apontamentos têm por finalidade ilustrar a aplicação do método das diferenças finitas na resolução de problemas de lajes.

Num primeiro capítulo é efectuada uma breve revisão da teoria de lajes de Kirchhoff. São apresentadas as grandezas e as relações fundamentais que permitem caracterizar o comportamento deste tipo de elementos estruturais. É obtida a equação de Lagrange, a qual corresponde à equação diferencial que rege o comportamento da laje e são discutidas quais as condições de fronteira a ter em conta na sua resolução.

No segundo capítulo é introduzida a metodologia associada à aplicação do Método das Diferenças Finitas - *MDF* - na resolução aproximada deste tipo de problemas. Para tal, discute-se a técnica que permitirá exprimir, de forma aproximada, os diferentes operadores diferenciais envolvidos na especificação das equações de campo e das condições de fronteira em termos de diferenças entre o valor que o campo de deslocamentos transversais toma num conjunto de pontos definidos no domínio da estrutura.

A aplicação do *MDF* é depois ilustrado com base na análise de um conjunto de estruturas simples. Para cada um dos casos de estudo são consideradas diversas discretizações, sendo as correspondentes soluções aproximadas comparadas com as soluções analíticas obtidas para os mesmos problemas. Os exemplos utilizados contemplam a análise de lajes simplesmente apoiadas, encastradas e de lajes com bordos livres.

Para finalizar estes apontamentos, discutem-se quais as alterações a introduzir, tanto no que diz respeito à formulação quanto no que toca à sua resolução numérica com recurso ao método das diferenças finitas quando se considera que a laje se encontra assente em fundação elástica.

Antes de prosseguir, é importante salientar que estas notas não pretendem tratar de forma completa tanto a teoria de Kirchhoff quanto o Método das Diferenças Finitas. Ao longo do texto serão indicados elementos de consulta complementares para um estudo mais aprofundado destas matérias.

2 Teoria de Kirchhoff

Neste capítulo apresenta-se uma descrição muito sucinta da teoria das lajes finas, a qual também é usual designar por teoria de Kirchhoff. Listam-se quais as grandezas necessárias para caracterizar o comportamento deste tipo de elementos estruturais - *deslocamentos, deformações e esforços* - e apresentam-se as equações que permitem relacionar essas grandezas - *equações de compatibilidade, elasticidade e equilíbrio*.

Uma vez apresentadas estas equações, discute-se a obtenção da equação diferencial que rege o comportamento da laje e apresenta-se o conjunto das condições de fronteira a ter em consideração na resolução deste tipo de problemas.

Esta secção não pretende tratar este problema de forma exaustiva. Apenas se pretende recordar os conceitos fundamentais da teoria de Kirchhoff e preparar a informação relevante que permitirá efectuar a resolução aproximada deste tipo de problema com o recurso ao método das diferenças finitas. Uma apresentação mais detalhada da teoria de lajes finas pode ser encontrada em [1, 2].

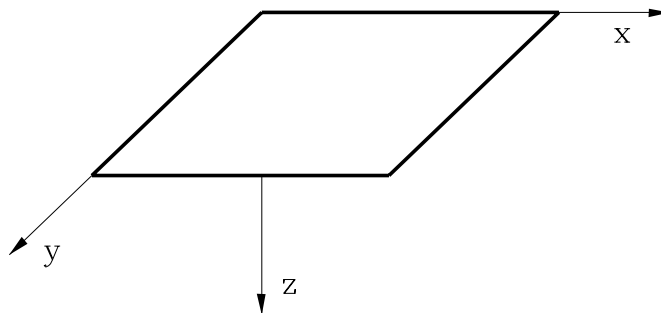


Figura 1: Sistema de eixos

O domínio de uma laje pode ser descrito na forma,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 : z \in [-h/2, h/2], (x, y) \in V \subset R^2\},$$

onde V e h denotam o plano médio e a espessura da laje, respectivamente. Na figura 1 encontra-se representado o sistema de eixos utilizado e em relação ao qual se encontram escritas as relações fundamentais do problema.

2.1 Definição das grandezas intervenientes

O comportamento das lajes finas é descrito com base num conjunto de grandezas estáticas e cinemáticas definidas sobre o seu plano médio. O campo de deslocamentos numa laje fina fica caracterizado de forma completa se forem conhecidos os deslocamentos transversais, as rotações no plano (x, z) e as rotações no plano (y, z) , $w(x, y)$, $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$, respectivamente. Na figura 2 encontram-se representados estes campos de deslocamentos.

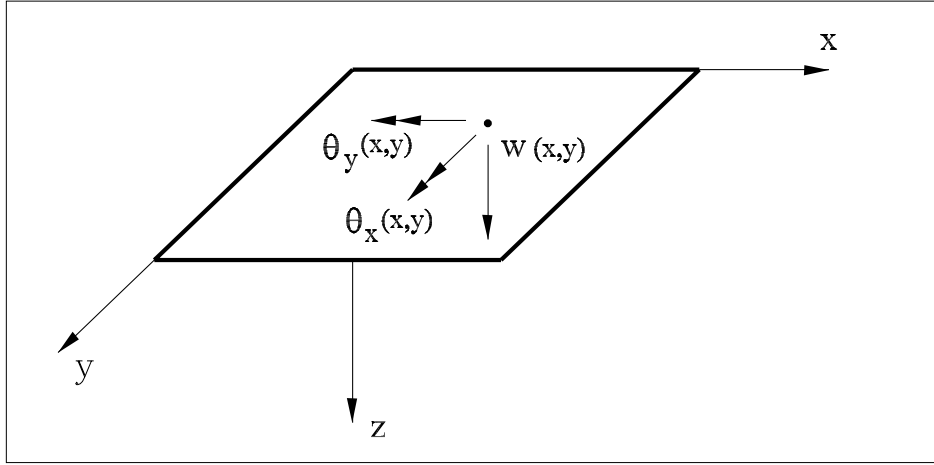


Figura 2: Campos de deslocamentos numa laje de Kirchhoff

Se forem conhecidas as grandezas cinemáticas $w(x, y)$, $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$, o movimento de um ponto P pertencente à laje e com coordenadas (x, y, z) pode ser determinado a partir das seguintes igualdades:

$$u_x(x, y, z) = z \times \theta_x(x, y)$$

$$u_y(x, y, z) = z \times \theta_y(x, y)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y)$$

As deformações de corte podem ser obtidas através das igualdades:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (1)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \theta_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (2)$$

Quando se despreza a deformabilidade por corte, as expressões anteriores permitem obter de imediato:

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (3)$$

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (4)$$

A relação entre o campo de rotações θ_x e o campo de deslocamentos transversais w encontra-se representada graficamente na figura 3.

Verifica-se então que os campos $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ não são independentes do campo de deslocamentos transversais, $w(x, y)$. Este é por consequência o único campo de deslocamentos a determinar para se poder caracterizar de forma completa os campos de deslocamentos numa laje fina.

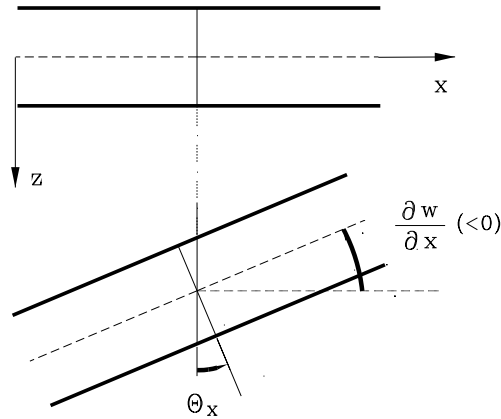


Figura 3: Definição das rotações; teoria de Kirchhoff

A relação entre o campo de rotações θ_x e o campo de deslocamentos transversais w também pode ser obtida utilizando-se um raciocínio mais intuitivo. Para tal, considere-se de novo a figura 3. Geometricamente, é possível verificar que o valor absoluto da rotação θ_x é igual ao valor da derivada do campo de deslocamentos transversais, $\partial w / \partial x$. Esta igualdade decorre directamente do facto de se ter considerado que as fibras permanecem perpendiculares ao plano médio, mesmo após a deformação do elemento estrutural. Observando de novo a figura em análise, verifica-se que a rotação é positiva (de acordo com a convenção adoptada), mas o valor dos deslocamentos transversais está a diminuir, pelo que a sua derivada assume valores negativos. Este facto justifica o sinal negativo que existe nas definições 3 e 4.

O campo de deformações generalizadas é obtido quando se substitui o tensor das deformações por grandezas definidas sobre o plano médio da laje [1]. As hipóteses admitidas implicam que as deformações de corte, γ_{xz} e γ_{yz} , e as extensões segundo a espessura, ε_{zz} , se anulam. As restantes deformações podem ser determinadas a partir das condições de compatibilidade da elasticidade tridimensional. Pode verificar-se desta forma [1] que para caracterizar o estado de deformação de uma laje fina são necessárias três grandezas independentes, duas curvaturas de flexão, $\chi_x(x, y)$ e $\chi_y(x, y)$, e uma curvatura de torção, $\chi_{xy}(x, y)$.

Na figura 4 encontram-se representados dois campos de deslocamentos caracterizados pela não existência de curvaturas de torção. Na deformada do lado esquerdo tem-se $\chi_x(x, y) = 1.0$ e $\chi_y(x, y) = 0.0$, enquanto que na do lado direito se tem que $\chi_x(x, y) = 0.0$ e $\chi_y(x, y) = 1.0$.

A figura 5 mostra a deformada de uma laje caracterizada pela existência de uma curvatura de torção unitária e na qual ambas as curvaturas de flexão se anulam.

Falta agora definir quais os esforços que se torna necessário conhecer para que se consiga caracterizar o estado de tensão existente numa laje de Kirchhoff.

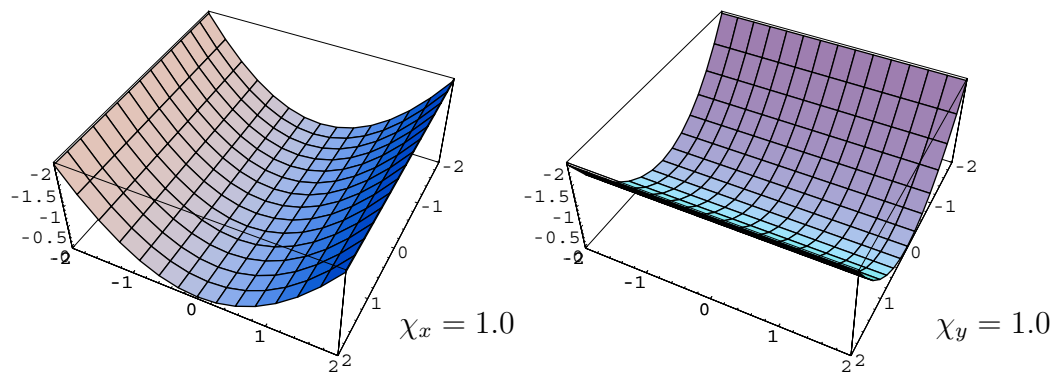


Figura 4: Campos de deslocamentos com curvaturas de flexão unitárias

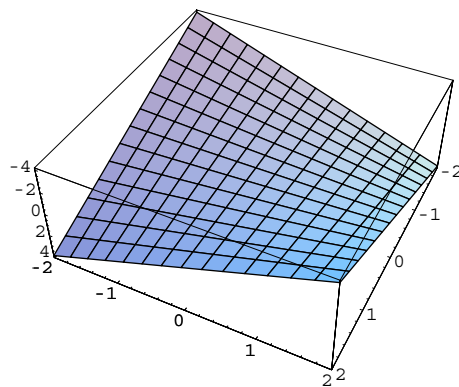


Figura 5: Campo de deslocamentos com curvatura de torção unitária

Tendo em atenção os campos de deformações generalizadas - curvaturas - definidos anteriormente, é possível intuir que se deverão definir dois campos independentes de momentos flectores e um campo de momentos torsores. A existência de momentos flectores faz prever ainda a necessidade de se definirem dois campos de esforços transversos.

Este raciocínio intuitivo pode ser confirmado se se utilizar um processo de definição mais rigoroso, que nos permita representar, num ponto qualquer do elemento de laje, as componentes independentes do tensor das tensões em função de um conjunto de grandezas definidas apenas sobre o plano médio. Esse procedimento pode ser encontrado na referência [1].

Na figura 6 representam-se todos os esforços que intervêm na caracterização do comportamento de uma laje de Kirchhoff.

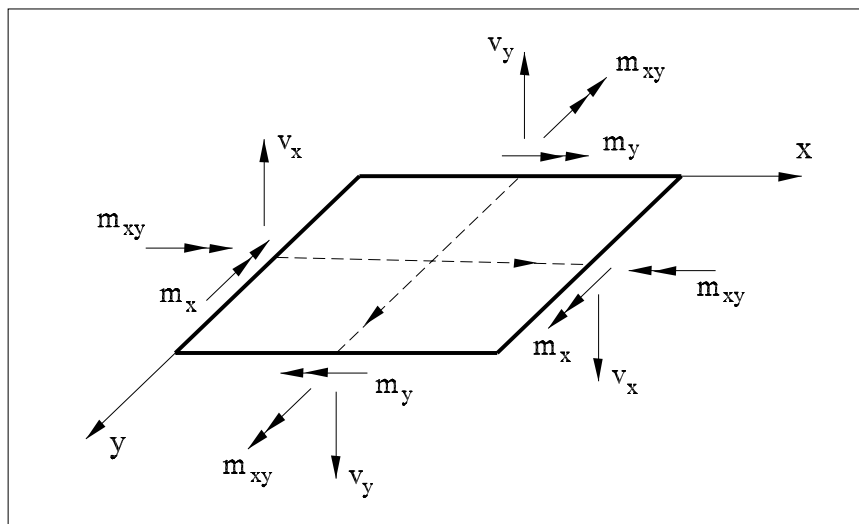


Figura 6: Campos de esforços numa laje de Kirchhoff

É importante salientar desde já que o momento flector $m_x(x, y)$ não é um momento em torno do eixo x . Trata-se na realidade do momento flector associado à deformação por flexão no plano (x, z) . De um ponto de vista de comportamento físico, pode considerar-se que se trata do momento flector que surge se se considerar o comportamento à flexão de um conjunto de vigas com o eixo paralelo a x . Pode ainda considerar-se que o momento $m_x(x, y)$ é o que condiciona directamente o dimensionamento das armaduras longitudinais com a direcção x em lajes de betão armado.

Repare-se que se pode considerar, de uma forma muito simplificada, que o comportamento da laje pode ser representado pela consideração de um conjunto de barras com eixo paralelo a x e por um outro conjunto de barras com eixo paralelo a y . Os esforços m_x , v_x e m_{xy} são aqueles que se relacionam directamente com o comportamento das primeiras, enquanto que m_y , v_y e m_{xy} são os esforços necessários à caracterização do segundo conjunto de elementos de viga.

2.2 Definição das equações de campo

Neste instante estão definidas as grandezas generalizadas em função das quais se descreve o comportamento das lajes finas. Falta agora definir as equações que permitem relacionar essas grandezas.

As condições de compatibilidade permitem determinar a relação entre as grandezas cinemáticas, deslocamentos generalizados e curvaturas. As grandezas estáticas, esforços e cargas aplicadas, devem respeitar as condições de equilíbrio. Por fim, as condições de elasticidade permitem estabelecer a relação entre esforços e curvaturas.

2.2.1 Condições de compatibilidade

As condições de compatibilidade permitem relacionar os campos de curvaturas $\chi_x(x, y)$, $\chi_y(x, y)$ e $\chi_{xy}(x, y)$ com o campo de deslocamentos transversais, $w(x, y)$. Podem ser escritas na forma

CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE	
$\chi_x(x, y)$	$= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$
$\chi_y(x, y)$	$= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$
$\chi_{xy}(x, y)$	$= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$

Tabela 1: Condições de compatibilidade

2.2.2 Relações de elasticidade

A relação entre os campos de momentos e os campos de curvaturas é dependente do tipo de comportamento que se admite para o material constituinte da laje. Tendo sido admitida como válida a hipótese da linearidade física, a relação esforços-deformações é linear e dependente das características geométricas da laje (nomeadamente da sua espessura) e das características mecânicas que permitem caracterizar o comportamento elástico linear do material estrutural (módulo de elasticidade, E , e coeficiente de Poisson, ν).

As relações de elasticidade podem ser escritas no formato apresentado na tabela 2. Este é o formato de rigidez para as relações de elasticidade e é, regra geral, o que mais interessa na resolução dos problemas que se surgirão no seguimento. No entanto, situações há em que é necessário determinar as curvaturas associadas a um determinado campo de

momentos. Para tal, é possível inverter a equação (5) e obter as relações de elasticidade escritas num formato de flexibilidade, tal como se indica na tabela 3.

RELAÇÕES DE ELASTICIDADE - FORMATO DE RIGIDEZ	
$\begin{bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (5)$	

Tabela 2: Relações de elasticidade escritas no formato de rigidez

RELAÇÕES DE ELASTICIDADE - FORMATO DE FLEXIBILIDADE	
$\begin{bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{12}{E h^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (6)$	

Tabela 3: Relações de elasticidade escritas no formato de flexibilidade

2.2.3 Condições de equilíbrio

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO	
$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = v_x \quad (7)$	
$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = v_y \quad (8)$	
$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q(x, y) = 0 \quad (9)$	

Tabela 4: Condições de equilíbrio

As condições de equilíbrio relacionam os campos de esforços na laje, $m_x(x, y)$, $m_y(x, y)$, m_{xy} , $v_x(x, y)$ e $v_y(x, y)$, com a carga aplicada, $q(x, y)$, tal como se encontra indicado no quadro da tabela 4.

Frequentes vezes, as três condições de equilíbrio acima indicadas são transformadas numa equação apenas. Basta para tal substituir (7) e (8) na condição (9). Obtém-se uma

única equação que relaciona os dois campos de momentos flectores, $m_x(x, y)$ e $m_y(x, y)$, o campo de momentos torsores, $m_{xy}(x, y)$, e a carga distribuída aplicada, $q(x, y)$. Esta equação encontra-se indicada no quadro da tabela 5.

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO	
$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$	(10)

Tabela 5: Condições de equilíbrio; formato condensado

2.2.4 Resumo das equações

O quadro apresentado na figura 7 resume as equações apresentadas anteriormente.

2.3 Equação de Lagrange

Para que um dado campo de deslocamentos possa ser considerado como a solução exacta, é necessário que as curvaturas obtidas a partir das condições de compatibilidade permitam dar origem a um campo de esforços que satisfaça as condições de equilíbrio.

Pode desta forma dizer-se que uma dada solução só poderá ser exacta se satisfizer em simultâneo as condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade.

A obtenção da equação que rege o comportamento do elemento de laje pode ser então obtida por condensação das três equações fundamentais atrás descritas. Desta forma, se se substituírem as condições de compatibilidade nas relações constitutivas obtém-se:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Se se substituírem estes campos de momentos na equação de equilíbrio (10), obtém-se após a execução de algumas simplificações a equação (12).

Esta é a equação diferencial que rege o comportamento da laje e é geralmente conhecida como Equação de Lagrange. A analogia com o que se passa nos elementos de viga é notória. A equação de Lagrange também relaciona quartas derivadas dos campos de deslocamentos transversais com a carga distribuída aplicada e com a rigidez à flexão da laje, D_f .

$$v_x(x, y) = \frac{\partial m_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial y}$$

$$v_y(x, y) = \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}(x, y)}{\partial y}$$

$$\begin{matrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = D_f \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx}(x, y) \\ \chi_{yy}(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \chi_{xx}(x, y) \\ \chi_{yy}(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$$

$$q(x, y)$$

$$\chi_{xx}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\chi_{yy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$$

$$w(x, y)$$

Figura 7: Grandezas e equações fundamentais nas lajes de Kirchhoff

EQUAÇÃO DA LAJE (EQUAÇÃO DE LAGRANGE)
$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D_f} \quad (12)$

Tabela 6: Equação de Lagrange

A semelhança entre as equações da viga e da laje ainda é maior se se escrever a equação de Lagrange na forma:

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D_f} \quad (13)$$

onde

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Para se conseguir determinar a solução para uma dada laje será suficiente a utilização da equação de Lagrange? Tal como no caso das peças lineares, a consideração da equação diferencial no domínio não permite, por si só, que se consiga determinar a solução para o problema que se coloca. Para que a análise se possa efectuar, torna-se indispensável que se especifiquem as condições de fronteira para o problema. As condições de fronteira podem ser de dois tipos: as condições de fronteira cinemáticas, nas quais se especifica qual o valor dos deslocamentos num determinado bordo, e as condições de fronteira estáticas, que passam pela imposição de um determinado valor para as cargas directamente aplicadas nesse bordo.

2.4 Definição das condições de fronteira

Discutem-se nesta secção quais as condições de fronteira mais usuais em problemas de lajes. Considera-se que os troços da fronteira de uma laje, aos quais se costuma chamar bordos, se podem encontrar encastrados, simplesmente apoiados ou ainda livres. A simbo-

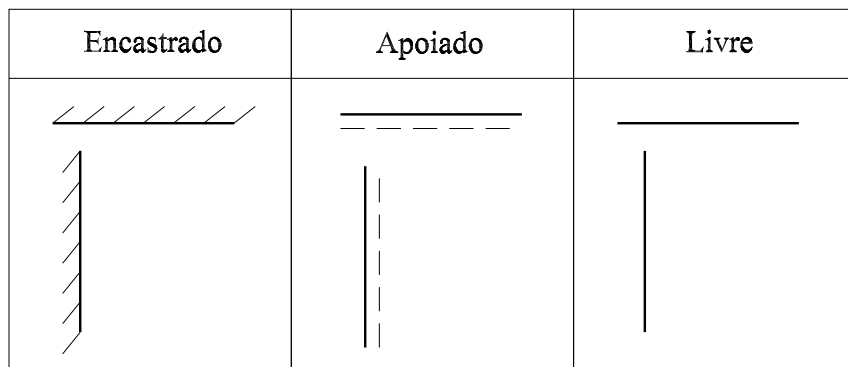


Figura 8: Tipos de apoios a considerar

logia adoptada para referenciar cada um desses tipos de apoio encontra-se representada na figura 8. Por simplicidade, considera-se na apresentação que se segue que todos os bordos são paralelos a algum dos eixos do sistema de coordenadas, (x, y) .

É importante salientar que para que uma dada condição de fronteira se verifique ao longo de um determinado bordo, é necessário que essa condição seja verdadeira em todos os pontos pertencentes a essa fronteira. Basta que haja um só ponto onde a equação em causa não seja verificada, para que se possa dizer de imediato que a condição de fronteira não está satisfeita.

Num bordo encastrado há sempre duas condições de fronteira cinemática a verificar. O deslocamento transversal deve ser nulo, assim como deve ser nula a rotação em torno do bordo em causa. Na figura 9 indicam-se quais as condições de fronteira a satisfazer no caso de uma laje rectangular encastrada em todo o seu contorno.

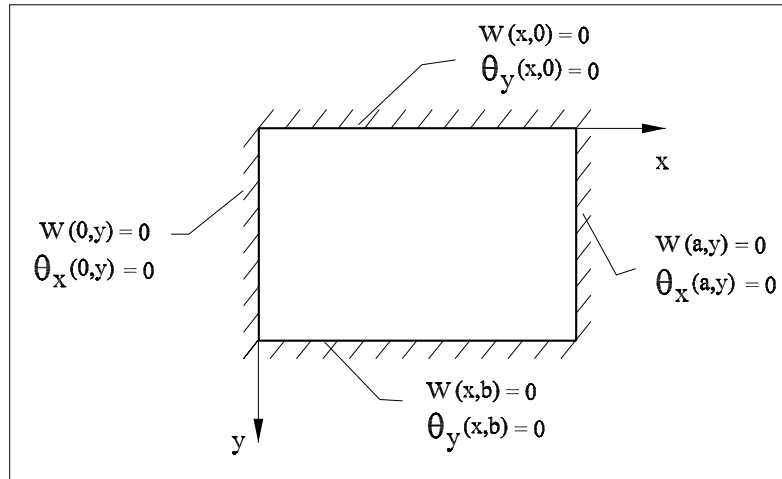


Figura 9: Condições de fronteira a considerar na laje com todos os bordos encastrados

Na laje representada nessa figura, considera-se que o seu comprimento segundo x é igual a a , enquanto que segundo a direcção y o seu comprimento é igual a b .

A existência de duas condições de fronteira em cada bordo é uma característica que vai estar presente também no caso dos bordos simplesmente apoiados e no caso dos bordos livres.

Considere-se agora que a laje se encontra simplesmente apoiada em todo o seu contorno. Neste tipo de apoio, e à semelhança do que acontece nos nós simplesmente apoiados dos elementos de viga, as condições de fronteira passam pela imposição do valor de uma grandeza cinemática (campo de deslocamentos transversais) e de uma grandeza estática (campo de momento flector ao longo da direcção da normal exterior ao bordo). Na figura 10 encontram-se todas as condições de fronteira a considerar para a uma laje com este tipo de apoios. Nesta figura, \bar{m}_I , \bar{m}_{II} , \bar{m}_{III} , e \bar{m}_{IV} , correspondem a distribuições de momentos aplicados ao longo do contorno da laje. Caso não existam distribuições de momentos aplicados sobre os bordos em causa, os valores de \bar{m}_j devem ser considerados como nulos.

Finalmente, falta discutir o tratamento das condições de fronteira em bordos livres. É aqui que surge uma novidade em relação ao que é habitual considerar na teoria de vigas. A imposição das condições de fronteira nos bordos livres requer a transformação dos campos de esforços transversos e dos momentos torsões ao longo da fronteira num conjunto de grandezas que lhes sejam estaticamente equivalentes. Surgem desta forma os esforços transversos efectivos e as forças de canto, tal como se encontra explicado de forma detalhada em [1]. É precisamente em função dos esforços transversos efectivos (e dos momentos flectores) que são especificadas as condições de fronteira em bordos livres.

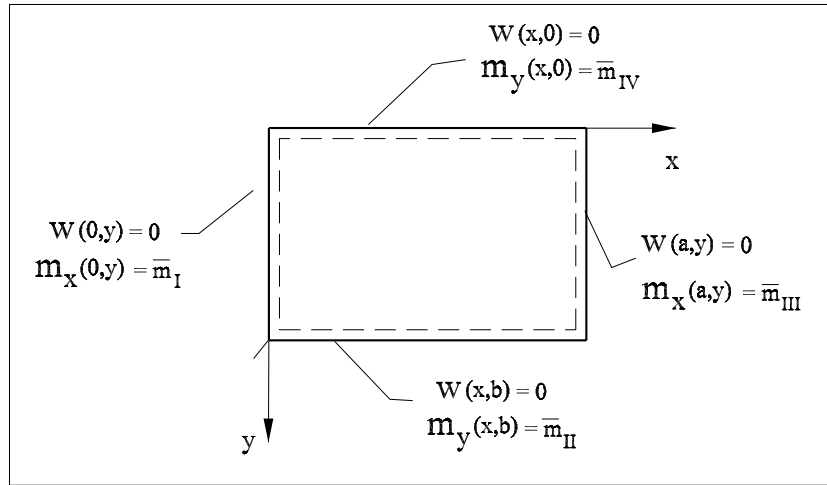


Figura 10: Condições de fronteira a verificar numa laje rectangular simplesmente apoiada

A equivalência estática acima referida encontra-se ilustrada de forma gráfica na figura 11.

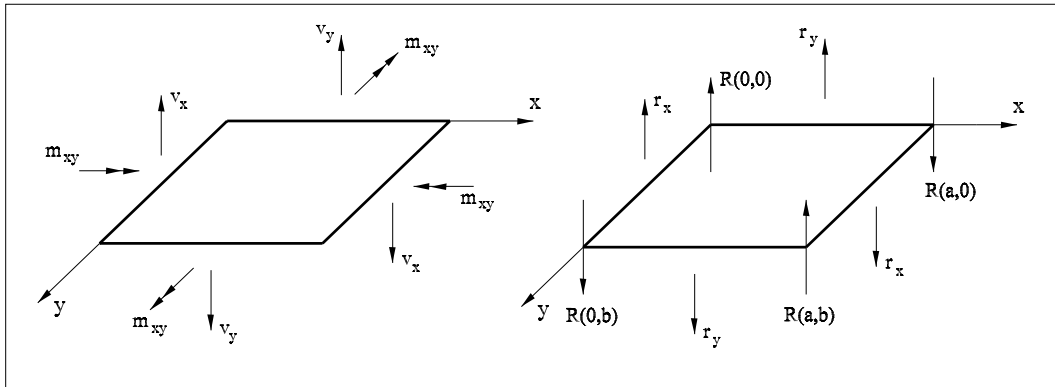


Figura 11: Equivalência estática na laje

Pode demonstrar-se que os esforços transversos efectivos $r_x(x, y)$ e $r_y(x, y)$ são dados pelas equações:

$$r_x(x, y) = v_x(x, y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (14)$$

$$r_y(x, y) = v_y(x, y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (15)$$

A figura 12 resume as condições de fronteira a verificar em bordos livres. Nesta figura, n indica a direcção da normal exterior ao bordo livre; \bar{v}_n e \bar{m}_n são distribuições de forças verticais e momentos aplicadas directamente ao longo do bordo.

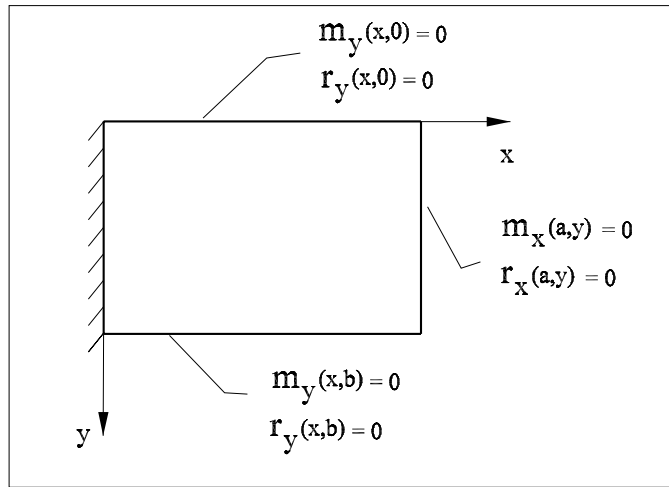


Figura 12: Condições de fronteira a verificar em bordos livres

3 Método das diferenças finitas

Nesta secção discute-se a metodologia que visa permitir escrever os diferentes operadores envolvidos na caracterização do comportamento dos elementos de laje (equações no domínio e condições de fronteira) em termos de diferenças finitas.

Numa primeira fase recorda-se como se podem escrever os operadores diferenciais unidimensionais em função de diferenças entre os valores que a função incógnita toma entre pontos igualmente espaçados no domínio do elemento estrutural (nós da malha de diferenças finitas).

Apresenta-se de seguida o procedimento que permitirá generalizar este procedimento a operadores definidos sobre domínios bidimensionais. A obtenção destes operadores pode seguir uma via “analítica” que no entanto pode ser bastante pesada na maioria das situações. Discute-se desta forma uma técnica “gráfica” bastante simples que permite obter a mesma informação de uma forma bastante eficiente e intuitiva.

Por fim, aplica-se este conjunto de procedimentos na identificação dos esquemas de diferenças finitas que intervêm na caracterização do comportamento das lajes de Kirchhoff.

3.1 Definição dos operadores diferenciais em domínios 1D

Considere-se o “troço” de malha de diferenças finitas (conjunto de nós igualmente espaçados) representado na figura 13.

Considere-se por simplicidade que a função incógnita da equação diferencial corresponde ao campo de deslocamentos transversais. As derivadas de $w(x)$ no nó i podem ser

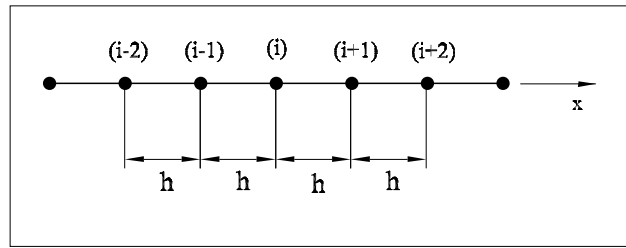


Figura 13: Malha de diferenças finitas

aproximadas da seguinte forma:

$$w'(i) = \frac{dw(i)}{dx} = \frac{1}{2h} (w_{i+1} - w_{i-1}) \quad (16)$$

$$w''(i) = \frac{d^2w(i)}{dx^2} = \frac{1}{h^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \quad (17)$$

$$w'''(i) = \frac{d^3w(i)}{dx^3} = \frac{1}{2h^3} (w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}) \quad (18)$$

$$w^{IV}(i) = \frac{d^4w(i)}{dx^4} = \frac{1}{h^4} (w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) \quad (19)$$

Estas equações de diferenças finitas podem ser apresentadas num formato gráfico, tal como se encontra ilustrado na figura 14.

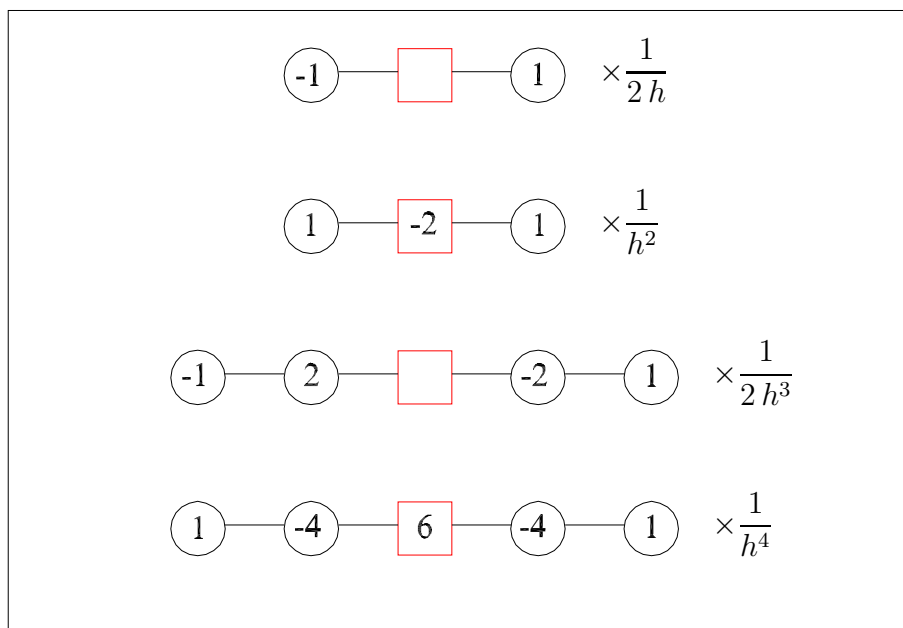


Figura 14: Representação gráfica das equações de diferenças finitas

3.2 Definição dos operadores diferenciais em domínios 2D

Para ilustrar a obtenção da representação em diferenças finitas dos operadores diferenciais definidos sobre domínios bi-dimensionais, considere-se a malha representada na figura 15, onde os nós se encontram igualmente espaçados e onde o espaçamento “horizontal” é igual ao espaçamento “vertical”.

Pretende-se calcular o operador $\nabla^2 w(x, y)$ no nó (i, j) .

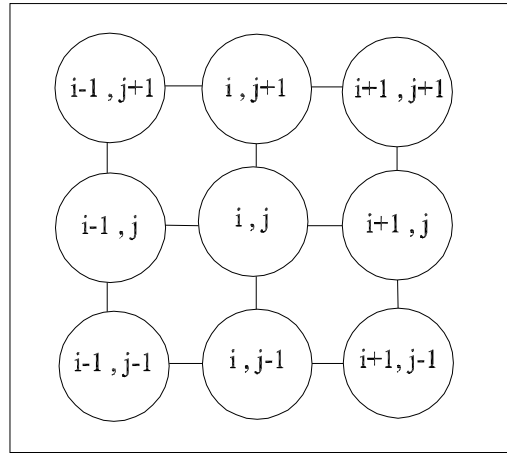


Figura 15: Troço de malha bidimensional de diferenças finitas

Tendo em conta que

$$\nabla^2 w(x, y) = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$$

e tendo em conta a definição (17), é possível escrever

$$\nabla^2 w_{i,j} = \frac{1}{h^2} (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) \quad (20)$$

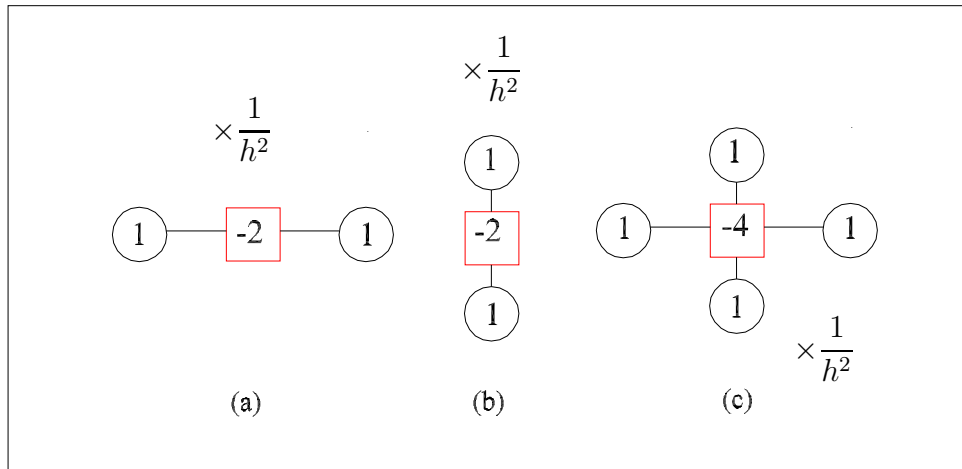
$$+ \frac{1}{h^2} (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}) \quad (21)$$

Finalmente, é possível simplificar a expressão anterior e obter:

$$\nabla^2 w(x, y) = \frac{1}{h^2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j}) \quad (22)$$

À semelhança do que se passa com os operadores uni-dimensionais, também esta equação pode ser representada de forma gráfica, tal como se encontra ilustrado no diagrama (c) da figura 16. Também nessa mesma figura se ilustra a forma através da qual esta equação de diferenças finitas pode ser obtida com um raciocínio bastante simples.

De facto, se se tiver em atenção que no diagrama (a) da figura 16 se representa o operador $\partial^2 w / \partial x^2$ e que no diagrama (b) se representa a equação de diferenças finitas para $\partial^2 w / \partial y^2$, o operador $\nabla^2(x, y)$ é obtido “somando” a informação contida nesses dois diagramas, o que permite recuperar a informação representada em (c).

Figura 16: Representação do operador $\nabla^2(x, y)$

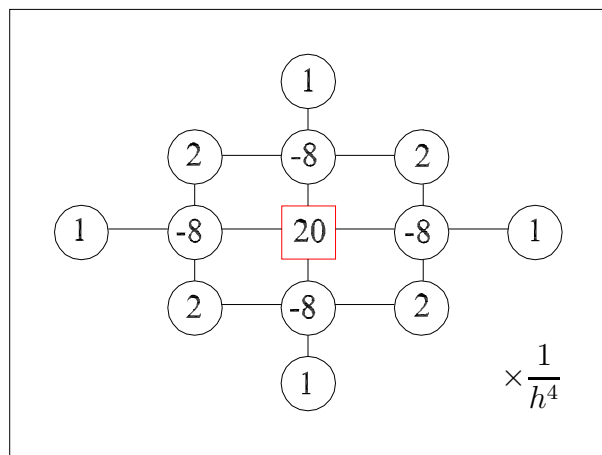
3.3 Definição das equações no domínio

É necessário escrever agora as equações que regem o comportamento da laje em termos de diferenças finitas. Começemos pela equação de Lagrange, a qual se encontra expressa pela igualdade (12).

Na figura 17 encontra-se representado de forma gráfica o esquema de diferenças finitas que permite calcular o valor de

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2}$$

em cada um dos nós interiores da malha de diferenças finitas.

Figura 17: Operador diferencial $\nabla^4 w(x, y)$

Para se “construir” esta informação, basta ter em conta as três parcelas que constituem o operador $\nabla^4(x, y)$. Para as duas primeiras, $\partial^4 w/\partial x^4$ e $\partial^4 w/\partial y^4$, pode ser directamente

utilizada a igualdade definida para as quartas derivadas uni-dimensionais, o que permite recuperar de imediato a informação apresentada na figura 18.

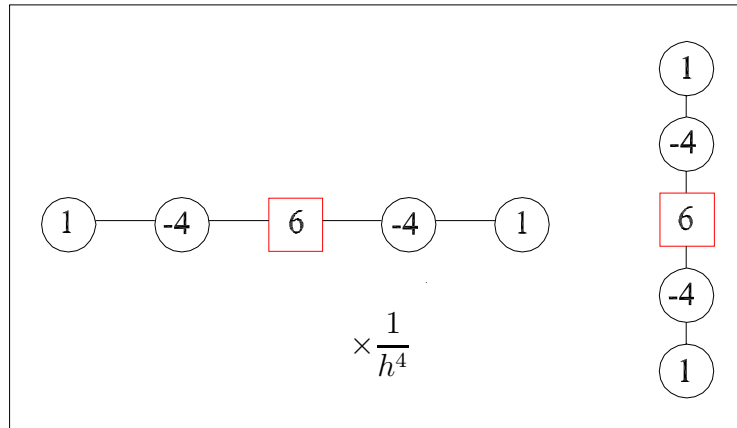


Figura 18: Operadores diferenciais $\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4}$ e $\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4}$

Fica desta forma apenas a faltar o esquema de diferenças finitas para o cálculo de $\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2$, o qual se encontra representado na figura 19.

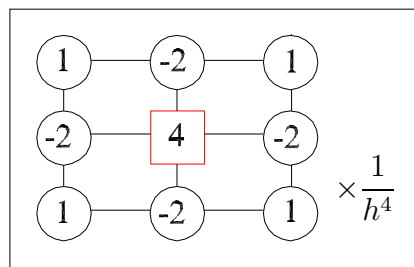


Figura 19: Operador diferencial $\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2}$

Para se obter esta expressão, basta ter em conta que

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

O esquema para o cálculo de $\partial^2 w / \partial y^2$ encontra-se representado na figura 20. Para se recuperar o esquema representado na figura 19, basta agora aplicar as equações de diferenças finitas para o cálculo das segundas derivadas ao longo da direcção x em cada um dos pontos representados na figura 20.

A soma das equações de diferenças finitas representadas nas figuras 18 e 19 permite recuperar de imediato as equações de cálculo do operador ∇^4 , tal como se pretendia ilustrar.

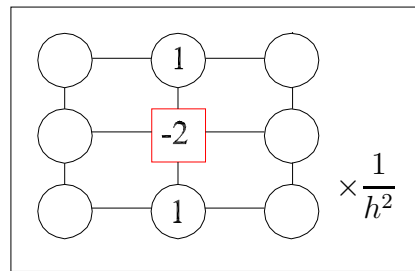


Figura 20: Construção do operador diferencial $\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$

3.4 Definição das grandezas em termos de diferenças finitas

Quando se determina uma solução aproximada utilizando o Método das Diferenças Finitas, obtém-se o valor do campo de deslocamentos transversais em cada um dos nós da malha considerada. Desta forma, se se pretenderem determinar os valores das outras grandezas envolvidas na caracterização do comportamento da laje (rotações, curvaturas e esforços) torna-se necessário relacioná-las directamente com o valor de $w(x, y)$ e suas derivadas.

São essas equações que se apresentam nesta secção. Como essas equações envolvem quase todas elas derivadas dos valores do campo de deslocamentos transversais, torna-se necessário ainda exprimir essas equações em termos de diferenças finitas.

3.4.1 Definição dos campos de rotações

Os campos de rotações são dados pelas igualdades (3) e (4). Estando apenas envolvidas primeiras derivadas do campo de deslocamentos transversais, o cálculo aproximado dessas grandezas cinemáticas pode ser efectuado com o recurso a equações do tipo (16).

3.4.2 Definição dos campos de curvaturas

As curvaturas de flexão são definidas pelas condições de compatibilidade

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (23)$$

$$\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (24)$$

Mais uma vez, para se escreverem estas grandezas em termos de diferenças finitas apenas é necessário ter em conta os operadores uni-dimensionais apresentados de forma esquemática na figura 14.

Já a obtenção da curvatura de torção,

$$\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

requer a determinação desta derivada cruzada em diferenças finitas. Se se verificar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

é simples verificar que o esquema representado na figura 21 permite representar esse operador.

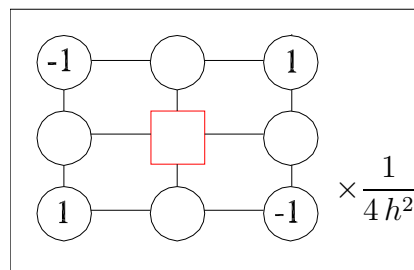


Figura 21: Operador diferencial $\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$

3.4.3 Cálculo dos campos de esforços

O campo de momentos m_x é dado pela igualdade

$$m_x = -D_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

A expressão de diferenças finitas que permite calcular o operador diferencial envolvido na determinação deste campo de momentos encontra-se representado no gráfico (c) da figura 22. Nos gráficos (a) e (b) da mesma figura indica-se a forma através da qual se pode obter cada uma das parcelas envolvidas na determinação daquela expressão.

Para se determinarem os momentos flectores ao longo da direcção y , é necessário determinar:

$$m_y = -D_f \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

O esquema de diferenças finitas para o cálculo deste operador pode ser encontrado no gráfico (c) da figura 23. Também nessa figura se indicam as parcelas envolvidas na “construção” deste esquema.

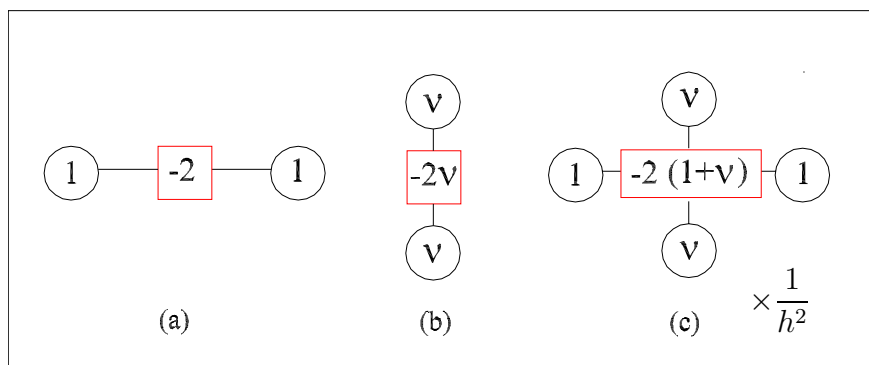


Figura 22: Operador diferencial $\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$

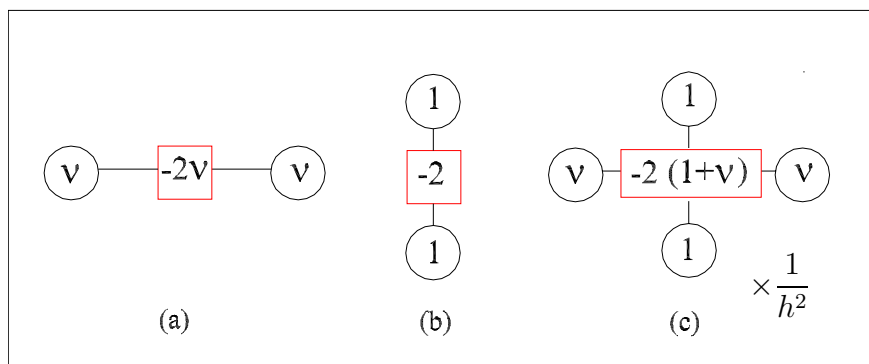


Figura 23: Operador diferencial $\nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$

As definições dadas para os campos de momentos flectores m_x e m_y são utilizadas em duas fases distintas da análise. São utilizadas sempre que seja necessário impor as condições de fronteira ao longo de bordos livres e de bordos simplesmente apoiados. São também utilizadas nas operações de “pós-processamento”, quando se pretende caracterizar o comportamento da laje uma vez obtida uma aproximação para o valor do campo de deslocamentos transversais em todos os nós da malha.

O campo de momentos torsores é dado pela igualdade

$$m_{xy} = -D_f (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Como é fácil reconhecer, a determinação da solução aproximada para o campo de momentos torsores passa pela utilização do esquema de diferenças finitas apresentado na figura 21.

Os esforços transversos podem ser obtidos através das condições de equilíbrio (7) e (8). Tendo agora em conta as relações entre os campos de momentos e o campo de deslocamentos transversais, vem:

$$v_x = -D_f \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (25)$$

$$v_y = -D_f \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (26)$$

Por seu lado, os esforços transversos efectivos são definidos pelas igualdades (14) e (15). Rescrevendo estas equações apenas em função das derivadas do campo de deslocamentos transversais obtém-se:

$$r_x = -D_f \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (27)$$

$$r_y = -D_f \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (28)$$

Recorde-se que os esforços transversos efectivos estão associados à imposição das condições de fronteira em bordos livres.

Na figura 24 apresenta-se o esquema de diferenças finitas que permite determinar o campo de esforços transversos efectivos, r_x .

Na figura 25 encontram-se representadas cada uma das parcelas envolvidas na determinação daquela equação de diferenças finitas. Desta forma, no gráfico (a) representa-se o operador diferencial $\partial^2 w(x, y)/\partial y^2$, enquanto que no gráfico (b) se representa a derivada cruzada $\partial^3 w(x, y)/\partial x \partial y^2$. Por fim, em (c) apresenta-se o esquema que permite determinar o operador $\partial^3 w(x, y)/\partial x^3$. Combinando estas três parcelas, recupera-se de imediato a informação contida na figura 24.

A equação de diferenças finitas que permite determinar o esforço transversal efectivo r_y pode ser encontrada na figura 26. A construção deste diagrama pode ser conseguido se se tiver em conta a informação sumariada nos gráficos da figura 27.

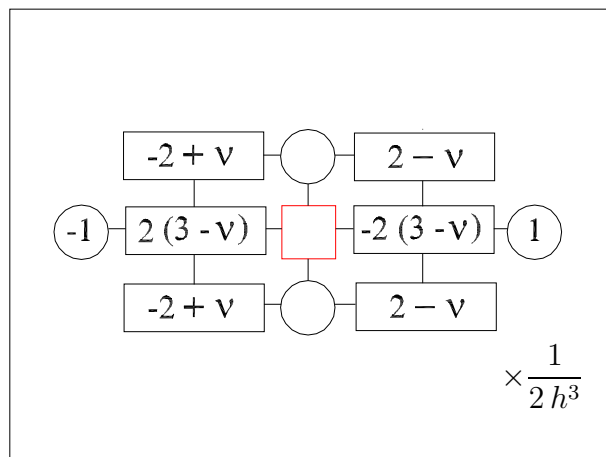


Figura 24: Operador diferencial $\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2}$

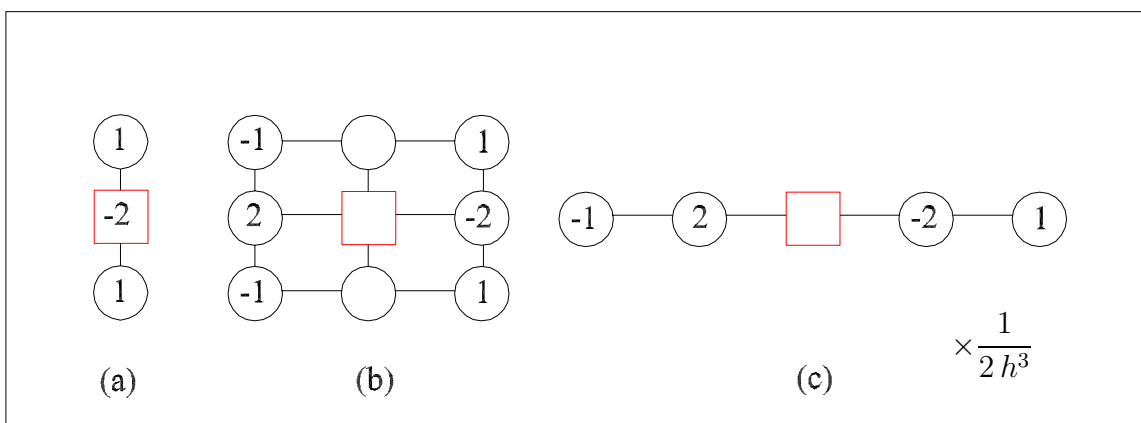


Figura 25: Construção do operador diferencial $\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2}$

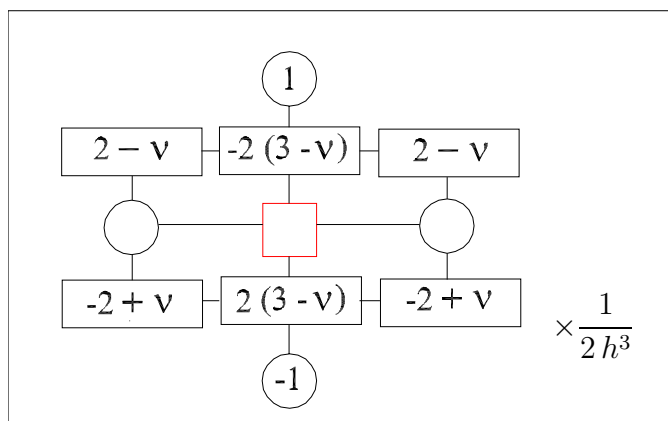


Figura 26: Operador diferencial $\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y}$

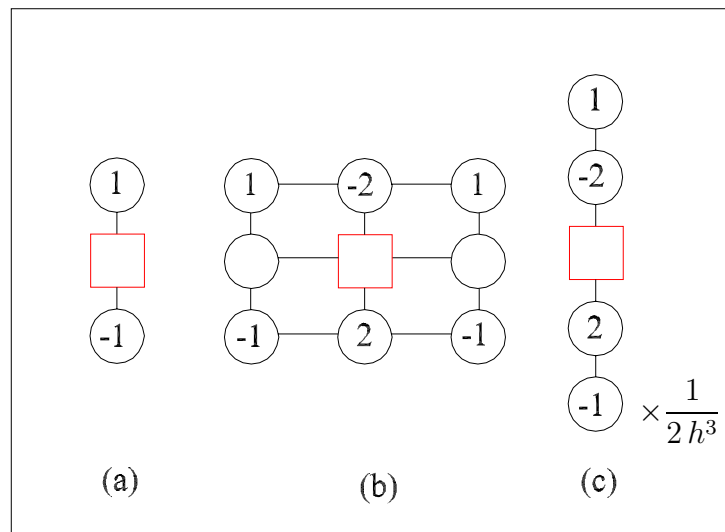


Figura 27: Construção do operador diferencial $\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y}$

4 Exemplos de aplicação

Nesta secção ilustra-se a aplicação do método das diferenças finitas na resolução de problemas de lajes em regime elástico linear.

4.1 Laje simplesmente apoiada

Considere-se a laje quadrangular representada na figura 28, a qual se considera simplesmente apoiada em todo o seu contorno e sujeita a uma carga uniformemente distribuída de valor $q = 1.0 \text{ kN/m}^2$. O material tem um coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$.

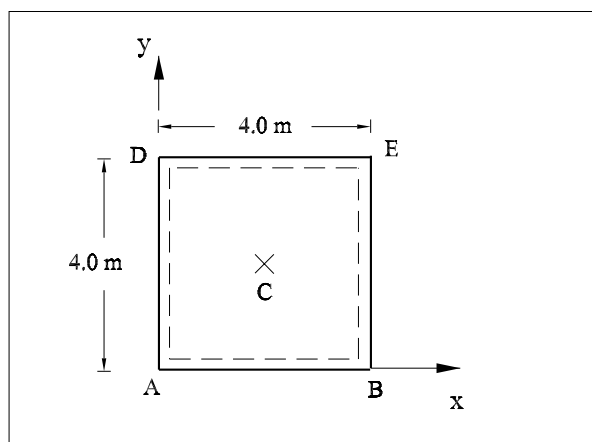


Figura 28: Laje quadrada simplesmente apoiada em todo o contorno

Pretende-se determinar uma solução aproximada considerando uma malha de diferenças

finitas com um espaçamento entre nós igual a $h = 2.0m$. Tem-se desta forma uma malha constituída pelos nove nós representados na figura 29.

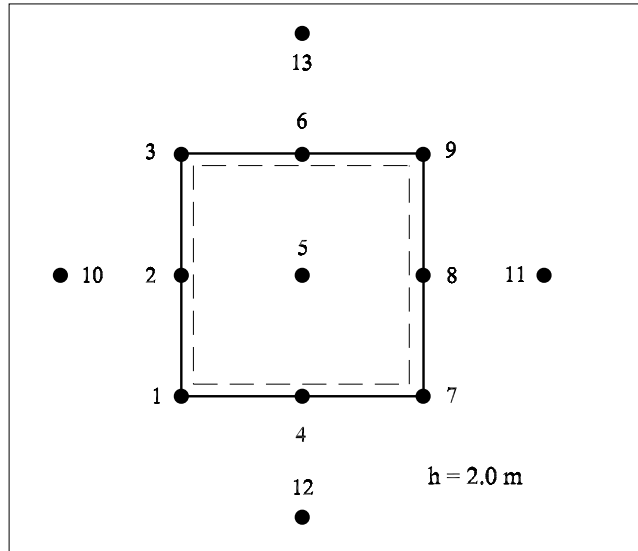


Figura 29: Malha para a análise da laje simplesmente apoiada com $h = 2.0m$

A imposição das condições de fronteira em cada um dos bordos da laje impõe a consideração de um conjunto de nós “exteriores” ao domínio da estrutura em estudo, à semelhança do que acontece quando se aplica o Método das Diferenças Finitas na resolução de problemas de vigas [4]. O conveniente tratamento das condições de fronteira permitirá escrever os deslocamentos desses pontos exteriores em função dos deslocamentos dos pontos interiores.

O número de incógnitas e conseqüentemente o número de equações a escrever no domínio é condicionado pelo número de nós da malha onde se desconhece o valor do campo de deslocamentos transversais. Nesta discretização, a única incógnita corresponderá ao valor do campo de deslocamentos no ponto central da laje, ao qual corresponde o nó 5 da discretização considerada.

Tendo em conta que em bordos simplesmente apoiados se especifica o valor do campo de deslocamentos transversais, é possível escrever:

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_6 = w_7 = w_8 = w_9 = 0 \quad (29)$$

Nos bordos com normal exterior segundo x , a segunda das condições de fronteira a considerar corresponde a impor o valor do campo de momentos flectores m_x . Neste caso, e tendo em conta que não há momentos aplicados no bordo da laje, esses momentos flectores deverão ser nulos. Já nos bordos com normal exterior segundo y se deverá impor como nulo o valor do campo de momentos flectores m_y .

Tendo em conta agora as equações de diferenças finitas representadas nas figuras 22 e 23 poderá escrever-se

$$(m_x)_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_5 + w_{10} - (2 + 2\nu)w_2 + \nu w_1 + \nu w_3) = 0 \quad (30)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_5 + w_{10}) = 0 \Rightarrow w_{10} = -w_5 \quad (31)$$

$$(m_x)_8 = 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_5 + w_{11} - (2 + 2\nu)w_8 + \nu w_7 + \nu w_9) = 0 \quad (32)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_5 + w_{11}) = 0 \Rightarrow w_{11} = -w_5 \quad (33)$$

$$(m_y)_4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_5 + w_{12} - (2 + 2\nu)w_4 + \nu w_1 + \nu w_7) = 0 \quad (34)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_5 + w_{12}) = 0 \Rightarrow w_{12} = -w_5 \quad (35)$$

$$(m_y)_6 = 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_5 + w_{13} - (2 + 2\nu)w_6 + \nu w_3 + \nu w_9) = 0 \quad (36)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} (w_5 + w_{13}) = 0 \Rightarrow w_{13} = -w_5 \quad (37)$$

As condições de fronteira foram já convenientemente tratadas. Falta agora escrever a equação de Lagrange para todos os nós da discretização onde o valor do campo de deslocamentos transversais é desconhecido. Tendo em conta que nesta malha apenas se desconhece o valor de w no nó 5, o método das diferenças finitas conduz neste caso à resolução de uma equação a uma incógnita.

Aplicando o esquema de diferenças finitas apresentado na figura 17, pode escrever-se:

$$\frac{1}{h^4} (20 w_5 - 8 w_2 - 8 w_4 - 8 w_8 - 8 w_6 \quad (38)$$

$$+ 2 w_3 + 2 w_9 + 2 w_1 + 2 w_7 + w_{10} + w_{12} + w_{11} + w_{13}) = \frac{q}{D_f} \quad (39)$$

Substituindo nesta equação a informação referente à imposição das condições de fronteira, é possível escrever:

$$\frac{1}{24} (20 w_5 + w_{10} + w_{12} + w_{11} + w_{13}) = \frac{q}{D_f} \quad (40)$$

$$\frac{1}{24} (20 w_5 - w_5 - w_5 - w_5 - w_5) = \frac{q}{D_f} \quad (41)$$

$$\frac{1}{24} (16 w_5) = \frac{q}{D_f} \quad (42)$$

$$w_5 = \frac{1}{D_f} \quad (43)$$

É agora possível efectuar o cálculo do valor aproximado de algumas das grandezas envolvidas na caracterização do comportamento da laje simplesmente apoiada. Desta forma,

o valor da rotação θ_x no nó 2 pode ser calculada através da equação:

$$(\theta_x)_2 = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2h}(w_5 - w_{10}) \quad (44)$$

$$= -\frac{1}{2 \times 2}(w_5 + w_5) \quad (45)$$

$$= -0.5 w_5 = -\frac{1}{2 D_f} \quad (46)$$

O valor do momento m_x no nó 5 é dado por

$$(m_x)_5 = -\frac{D_f}{h^2}(w_2 + w_8 - (2 + 2\nu)w_5 + \nu w_6 + \nu w_4) \quad (47)$$

$$= -\frac{D_f}{2^2}(-(2 + 2\nu)w_5) \quad (48)$$

$$= \frac{2 + 2\nu}{4} = 0.6 \quad (49)$$

O valor do momento m_y no nó 5 é dado por

$$(m_y)_5 = -\frac{D_f}{h^2}(\nu w_2 + \nu w_8 - (2 + 2\nu)w_5 + w_6 + w_4) \quad (50)$$

$$= -\frac{D_f}{2^2}(-(2 + 2\nu)w_5) \quad (51)$$

$$= \frac{2 + 2\nu}{4} = 0.6 \quad (52)$$

Tal como seria de esperar tendo em conta que se tem uma laje quadrangular com as mesmas condições de apoio em todo o seu contorno, o valor dos momentos m_x e m_y no ponto central da laje coincidem.

Interessante é poder verificar agora a qualidade dos resultados obtidos, embora seja de antever que com uma discretização tão grosseira não se possa obter uma solução muito refinada. Esta ideia é confirmada pela análise da informação contida na tabela 7, na qual se apresentam os valores obtidos para o campo de deslocamento transversal (w) e para o campo de momentos flectores (m_x) no ponto central da laje e para o campo de momentos torsores (m_{xy}) para o canto inferior esquerdo da laje. Nessa tabela comparam-se as soluções aproximadas obtidas com base na consideração de várias discretizações e a solução exacta. Esta é obtida através da utilização da solução semi-analítica de Navier [1], a qual pode ser deduzida através da utilização da Análise de Fourier. Em anexo apresentam-se as equações que permitem determinar a solução exacta para o campo de deslocamentos transversais e para os campos de momentos na laje.

Para além da discretização representada na figura 29, foram incluídas na comparação malhas com espaçamentos de $h = 1.0 m$, $h = 0.5 m$, $h = 0.25 m$ e $h = 0.20 m$. Na tabela 7 é indicado, para cada uma destas discretizações, o número total de graus de liberdade, n_{gl} ,

	Sol. exacta	$h = 2.0$	$h = 1.0$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.20$
$m_x (kNm/m)$	0.7072	0.6000	0.6750	0.6987	0.7051	0.7059
$m_{xy} (kNm/m)$	-0.5938	-0.2000	-0.4375	-0.5429	-0.5784	-0.5834
$w (\times 1/D_f)(m)$	1.0400	1.0000	1.0313	1.0380	1.0395	1.0397
n_{gl}	-	1	9	49	225	361

Tabela 7: Comparação da solução obtida com várias discretizações

considerados na análise da laje. É visível da análise da informação contida na referida tabela que a aproximação obtida com a discretização mais grosseira ainda se encontra bastante longe da solução para o problema, quer se compare o valor do deslocamento transversal, quer se comparem os valores dos esforços.

Para se conseguir obter uma solução mais refinada, é então necessário utilizar discretizações com espaçamentos menores entre pontos interiores. Naturalmente, quanto menor o espaçamento melhor será a solução aproximada obtida. No entanto, maior será a dimensão do sistema de equações que se torna necessário resolver. Desta forma, torna-se importante chegar a uma situação de compromisso entre a precisão numérica que se pretende obter com a análise e o peso computacional da discretização adoptada.

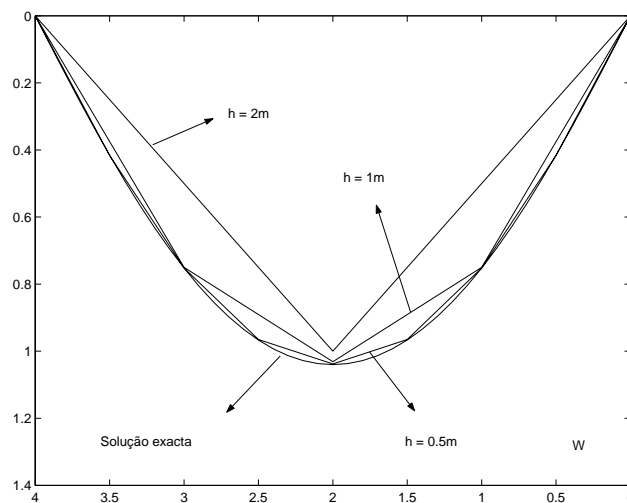


Figura 30: Laje simplesmente apoiada; comparação das soluções obtidas para o campo de deslocamentos transversais

A relação existente entre o espaçamento considerado na malha de diferenças finitas e a qualidade da solução obtida é confirmada pela análise do gráfico apresentado na figura 30, onde se representa o campo de deslocamentos transversais ao longo do segmento de laje com $y = 2 m$. São apresentados os resultados obtidos com diferentes discretizações e o diagrama correspondente à solução exacta. A solução obtida com $h = 1 m$ já começa a aproximar-se da solução que se pretende obter. A discretização com um espaçamento de $h = 0.5 m$ já se aproxima bastante da solução exacta.

Comentários bastante semelhantes se poderiam tecer a propósito da análise do conteúdo das figuras 31 e 33, onde se apresentam os gráficos referentes ao diagrama de momentos

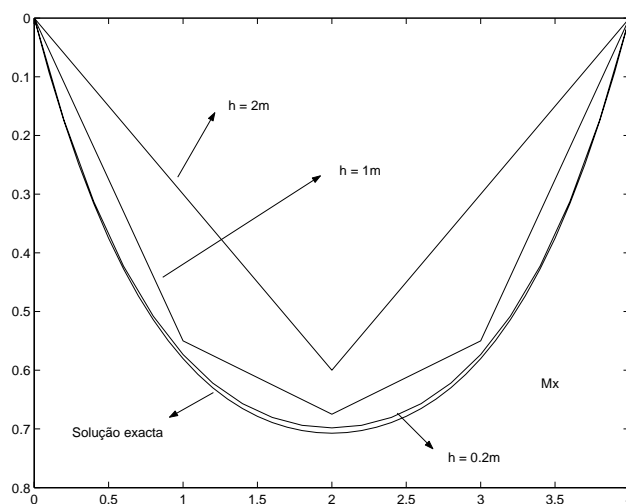


Figura 31: Laje simplesmente apoiada; comparação das soluções obtidas para o campo de momentos flectores m_x

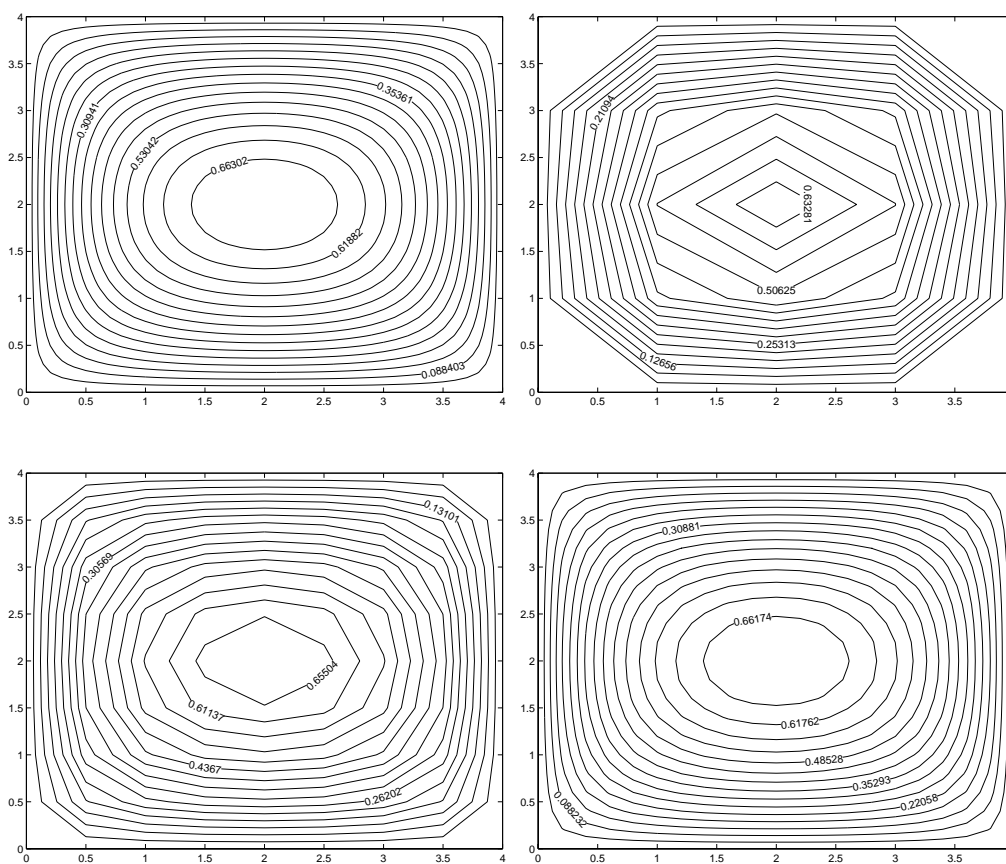


Figura 32: Laje simplesmente apoiada; campo de momentos flectores m_x para diferentes valores de h

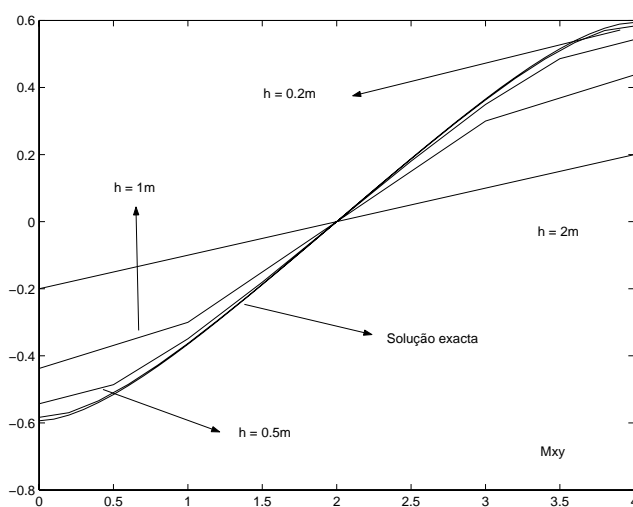


Figura 33: Laje simplesmente apoiada; comparação das soluções obtidas para o campo de momentos torsores m_{xy}

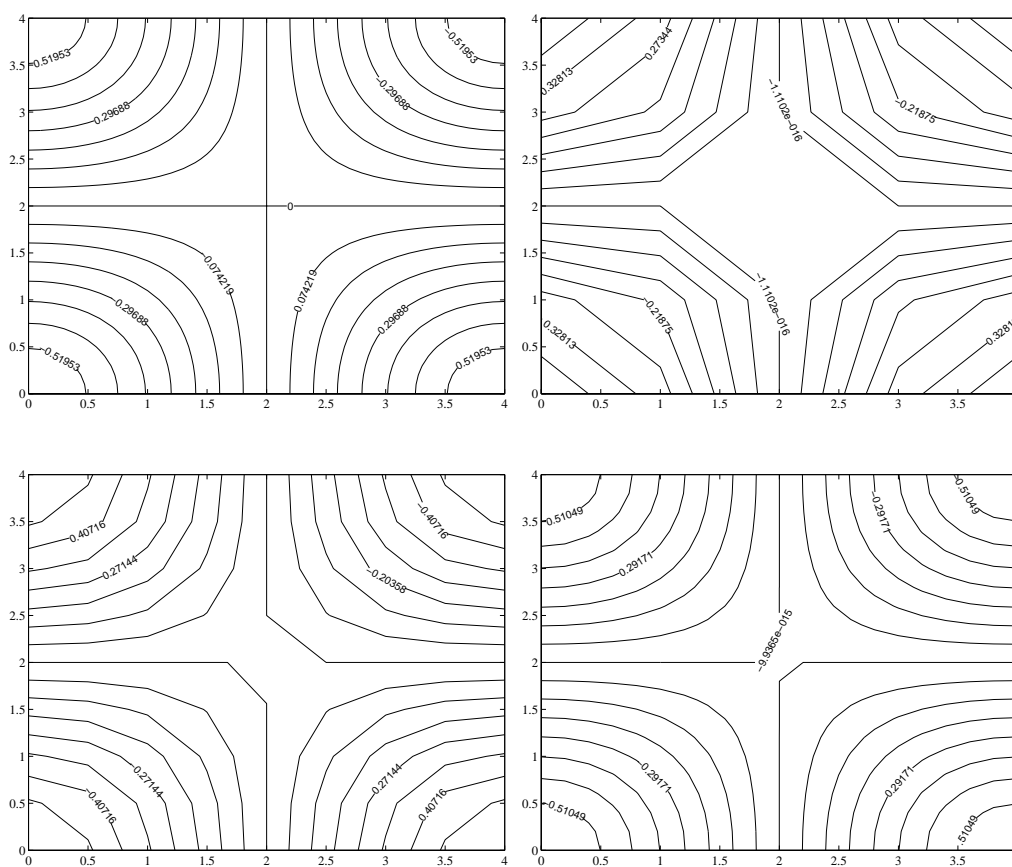


Figura 34: Laje simplesmente apoiada; campo de momentos torsores m_{xy} para diferentes valores de h

flectores m_x , ao longo de $y = 2m$ e ao diagrama de momentos torsores sobre o bordo inferior da laje, $y = 0m$, respectivamente. Em qualquer um dos diagramas é possível verificar que a utilização da malha com um espaçamento de $h = 0.20m$ conduz a uma solução que praticamente coincide com a solução exacta para a estrutura.

Na figura 32 encontra-se representada a aproximação obtida para o campo de momentos flectores m_x em toda a placa com recurso às malhas com $h = 1m$, $h = 0.5m$ e $h = 0.2m$. Apresenta-se também a correspondente solução exacta, obtida utilizando-se a definição (104) apresentada em anexo. É mais uma vez clara a qualidade da solução obtida com a malha mais refinada.

O mesmo tipo de informação, mas agora para o campo de momentos torsores, m_{xy} é apresentado na figura 34.

Ilustram-se agora os cálculos envolvidos na determinação da solução considerando a malha de diferenças finitas onde se assume um espaçamento $h = 1.0m$. A discretização correspondente encontra-se representada na figura 35.

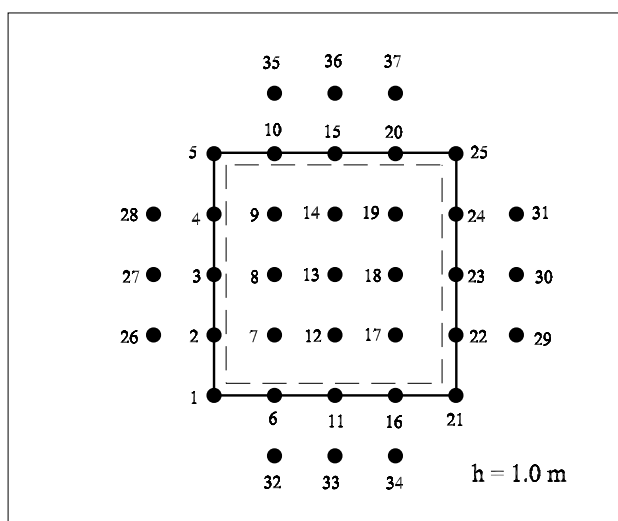


Figura 35: Malha para a análise da laje simplesmente apoiada com $h = 1.0m$

Nesta malha existem 9 pontos interiores onde se desconhece o valor do campo de deslocamentos transversais. A aplicação do método das diferenças finitas conduzirá então a um sistema de nove equações a nove incógnitas.

O tratamento das condições de fronteira é efectuado de uma forma bastante semelhante ao efectuado para a malha anterior. Desta forma, apenas se escrevem de seguida as equações de campo para cada um dos pontos interiores. Saliente-se que na escrita dessas equações já não se consideram os pontos situados sobre o contorno da laje, uma vez que aí o campo de deslocamentos transversais se anula.

Aplicando para cada ponto interior a equação apresentada na figura 17 obtém-se sucessi-

vamente:

$$D_f(w_{26} + w_{32} + 20w_7 - 8w_8 + w_9 - 8w_{12} + 2w_{13} + w_{17}) = q_7 \quad (53)$$

$$D_f(w_{27} - 8w_7 + 20w_8 - 8w_9 + 2w_{12} - 8w_{13} + 2w_{14} + w_{18}) = q_8 \quad (54)$$

$$D_f(w_{28} + w_7 - 8w_8 + 20w_9 + w_{35} + 2w_{13} - 8w_{14} + w_{19}) = q_9 \quad (55)$$

$$D_f(-8w_7 + 2w_8 + w_{33} + 20w_{12} - 8w_{13} + w_{14} - 8w_{17} + 2w_{18}) = q_{12} \quad (56)$$

$$D_f(2w_7 - 8w_8 + 2w_9 - 8w_{12} + 20w_{13} - 8w_{14} + 2w_{17} - 8w_{18} + 2w_{19}) = q_{13} \quad (57)$$

$$D_f(2w_8 - 8w_9 + w_{12} - 8w_{13} + 20w_{14} + w_{36} + 2w_{18} - 8w_{10}) = q_{14} \quad (58)$$

$$D_f(w_7 - 8w_{12} + 2w_{13} + w_{34} + 20w_{17} - 8w_{18} + w_{19} + w_{29}) = q_{17} \quad (59)$$

$$D_f(w_8 + 2w_{12} - 8w_{13} + 2w_{14} - 8w_{17} + 20w_{18} - 8w_{19} + w_{30}) = q_{18} \quad (60)$$

$$D_f(w_9 + 2w_{13} - 8w_{14} + w_{17} - 8w_{18} + 20w_{19} + w_{37} + w_{31}) = q_{19} \quad (61)$$

Substituindo nas igualdades anteriores as restantes condições de fronteira, somos conduzidos de imediato ao seguinte sistema de equações

$$D_f \begin{bmatrix} 18 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 19 & -8 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 18 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 19 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & -8 & 20 & -8 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 19 & 0 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 18 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & -8 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{12} \\ w_{13} \\ w_{14} \\ w_{17} \\ w_{18} \\ w_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

A resolução deste sistema de equações permite determinar o valor do campo de deslocamentos transversais em cada um dos nós interiores da discretização apresentada na figura 35. A utilização dos esquemas de diferenças finitas apresentados na secção 3.4 permitirá por fim a determinação dos valores dos esforços em cada um daqueles pontos da laje.

4.2 Lajes encastradas

Considere-se que agora a laje rectangular se encontra encastrada em todo o seu contorno, tal como se encontra representado na figura 36. Considera-se de novo a malha de diferenças finitas com um espaçamento entre nós dado por $h = 2.0m$.

O tipo de raciocínio a desenvolver para se obter uma solução aproximada com recurso ao método das diferenças finitas é bastante semelhante ao que foi apresentado no exemplo discutido na secção anterior. A diferença reside no tratamento das condições de fronteira, tendo em conta que agora a laje se encontra encastrada em todo o seu contorno.

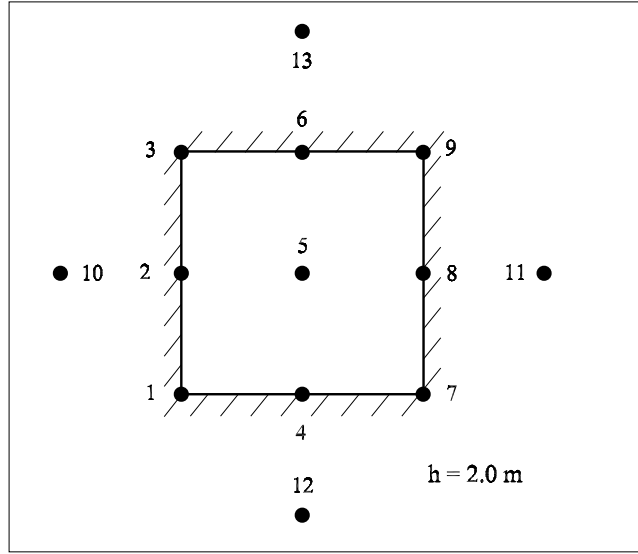


Figura 36: Malha para a análise da laje encastrada com $h = 2.0m$

Para além de se garantir que os deslocamentos transversais em todos os nós situados no contorno da laje se devem anular,

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_6 = w_7 = w_8 = w_9 = 0$$

é necessário impor que se devem anular as rotações em torno de cada um dos bordos da laje. A imposição desta condição conduz às seguintes igualdades:

$$(\theta_x)_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2h} (w_5 - w_{10}) = 0 \Rightarrow w_{10} = w_5 \quad (63)$$

$$(\theta_x)_8 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2h} (w_{11} - w_5) = 0 \Rightarrow w_{11} = w_5 \quad (64)$$

$$(\theta_y)_4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2h} (w_5 - w_{12}) = 0 \Rightarrow w_{12} = w_5 \quad (65)$$

$$(\theta_y)_6 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2h} (w_{13} - w_5) = 0 \Rightarrow w_{13} = w_5 \quad (66)$$

A condição no domínio escrita para o nó 5 vem agora no formato

$$\frac{1}{24} (20 w_5 + w_{10} + w_{12} + w_{11} + w_{13}) = \frac{q}{D_f} \quad (67)$$

$$\frac{1}{24} (20 w_5 + w_5 + w_5 + w_5 + w_5) = \frac{q}{D_f} \quad (68)$$

$$\frac{1}{24} (24 w_5) = \frac{1}{D_f} \quad (69)$$

$$w_5 = \frac{2}{3 D_f} \quad (70)$$

O momento flector m_x no ponto central da laje e no nó 2 será dado então pelas igualdades:

$$(m_x)_5 = -\frac{D_f}{h^2}(w_2 + w_8 - (2 + 2\nu)w_5 + \nu w_6 + \nu w_4) \quad (71)$$

$$= -\frac{D_f}{2^2}(-(2 + 2\nu)w_5) \quad (72)$$

$$= \frac{1 + \nu}{3} = 0.4 \quad (73)$$

$$(m_x)_2 = -\frac{D_f}{h^2}(w_5 + w_{10} - (2 + 2\nu)w_2 + \nu w_1 + \nu w_3) \quad (74)$$

$$= -\frac{D_f}{2^2}(2w_5) = -\frac{1}{3} \quad (75)$$

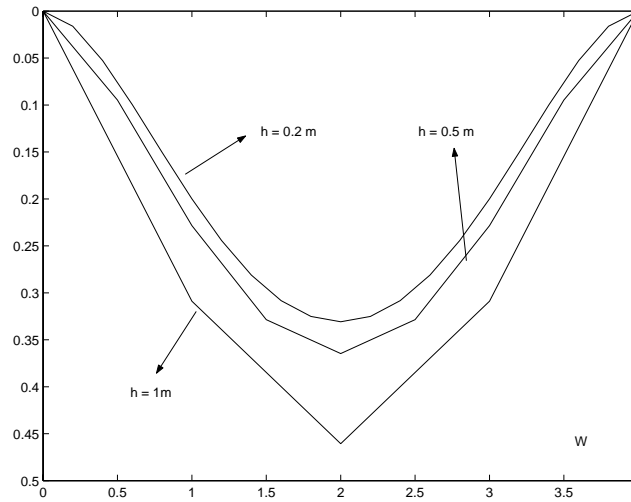


Figura 37: Laje com bordos encastrados; comparação das soluções obtidas para o campo de deslocamentos transversais

Na figura 37 apresenta-se o traçado da deformada da laje ao longo da linha $y = 2\text{ m}$. Comparam-se as soluções obtidas através da utilização de malhas com espaçamentos de $h = 1\text{ m}$, $h = 0.5\text{ m}$ e $h = 0.2\text{ m}$. Tendo em conta o exemplo que foi discutido no parágrafo anterior, a solução obtida com esta última malha pode ser considerada como correspondendo à solução *exacta* para o problema. Volta a ser visível que para a dimensão da laje em análise, espaçamentos superiores a 0.5 m deverão ser evitados, uma vez que conduzem a soluções ainda muito pouco refinadas.

Nas figuras 38 e 39 comparam-se as soluções obtidas para o campo de momentos flectores m_x ao longo de $y = 2\text{ m}$ e para o campo de momentos torsores m_{xy} ao longo de $y = 1\text{ m}$, respectivamente.

Na figura 40 apresentam-se, para a laje em estudo, os campos de deslocamentos transversais e os campos de momentos (flectores e torsores) obtidos com as malhas com espaçamentos de $h = 1.0\text{ m}$ e $h = 0.2\text{ m}$.

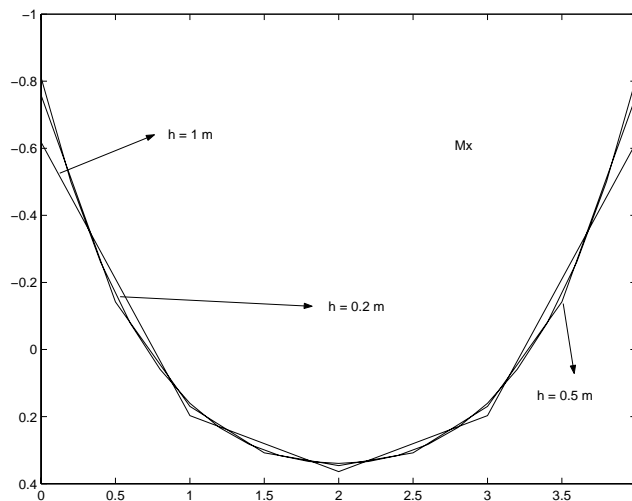


Figura 38: Laje com bordos encastrados; comparação das soluções obtidas para o campo de momentos flectores m_x

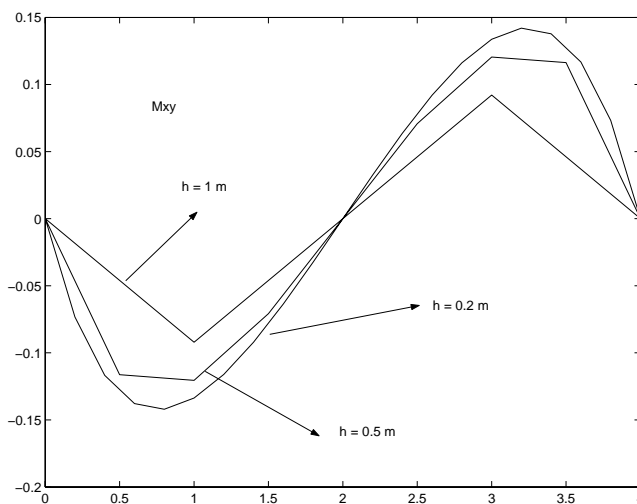


Figura 39: Laje com bordos encastrados; comparação das soluções obtidas para o campo de momentos torsores m_{xy}

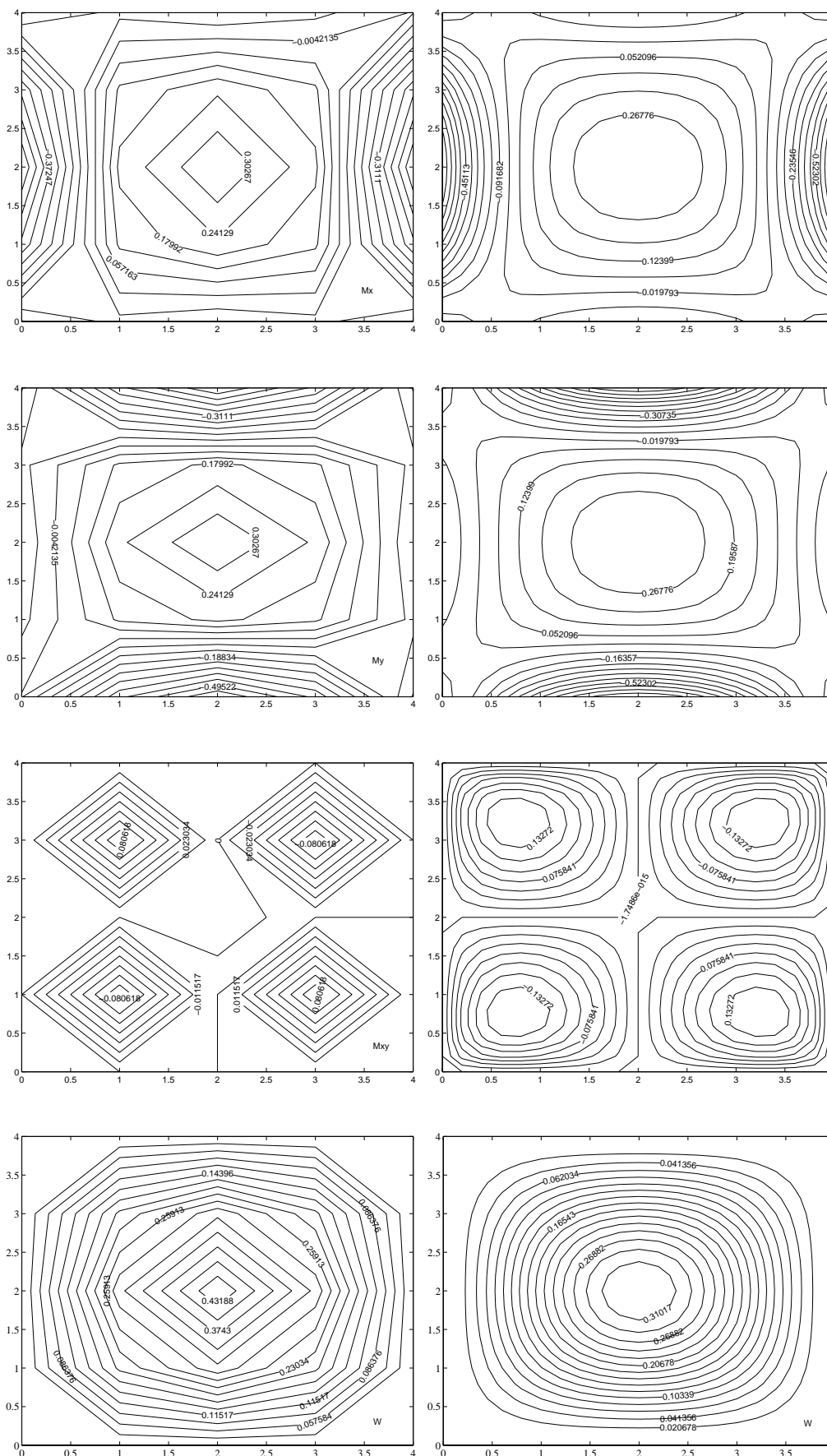


Figura 40: Laje com bordos encastrados; solução com $h = 1.0m$ e $h = 0.2m$

4.3 Lajes com condições de apoio variáveis

Por fim, considere-se a laje representada na figura 41, onde dois dos bordos se encontram encastrados e os restantes estão simplesmente apoiados.

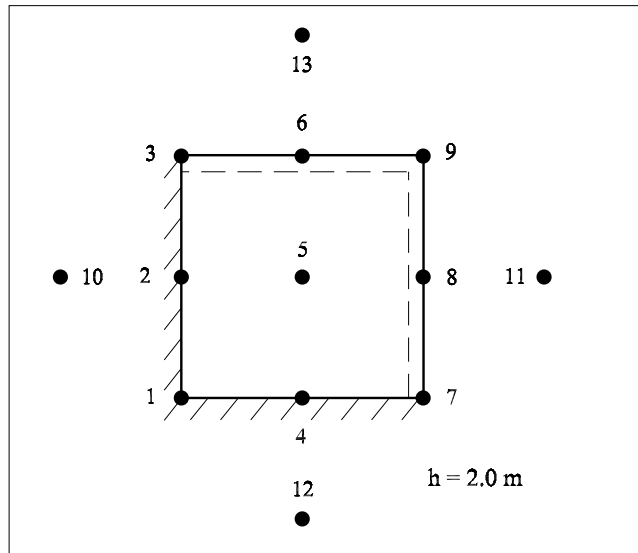


Figura 41: Malha para a análise da laje encastrada com $h = 2.0m$

Tendo em conta os exemplos discutidos nas secções anteriores, será agora simples concluir que o tratamento das condições de fronteira conduzirá às igualdades:

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_6 = w_7 = w_8 = w_9 = 0$$

e

$$w_{10} = w_5 \quad ; \quad w_{12} = w_5 \quad ; \quad w_{13} = -w_5 \quad ; \quad w_{11} = -w_5$$

A equação no domínio assumirá a forma:

$$\frac{1}{24} (20 w_5 + w_{10} + w_{12} + w_{11} + w_{13}) = \frac{q}{D_f} \quad (76)$$

$$\frac{1}{24} (20 w_5 + w_5 + w_5 - w_5 - w_5) = \frac{q}{D_f} \quad (77)$$

$$\frac{1}{24} (20 w_5) = \frac{1}{D_f} \quad (78)$$

$$w_5 = \frac{4}{5 D_f} \quad (79)$$

À semelhança do efectuado nos problemas anteriores, determine-se o valor aproximado de algumas grandezas. Desta forma, o valor do momento flector m_x nos pontos 5 e 2 pode

ser dado pelas igualdades seguintes:

$$(m_x)_5 = -\frac{D_f}{h^2}(w_2 + w_8 - (2 + 2\nu)w_5 + \nu w_6 + \nu w_4) \quad (80)$$

$$= -\frac{D_f}{2^2}(-(2 + 2\nu)w_5) \quad (81)$$

$$= \frac{2 + 2\nu}{5} = 0.48 \quad (82)$$

$$(m_x)_2 = -\frac{D_f}{h^2}(w_5 + w_{10} - (2 + 2\nu)w_2 + \nu w_1 + \nu w_3) \quad (83)$$

$$= -\frac{D_f}{2^2}(2w_5) = -0.4 \quad (84)$$

Finalmente, a rotação θ_x no nó 8 pode ser obtida a partir de

$$(\theta_x)_8 = -\frac{1}{2h}(w_{11} - w_5) \quad (85)$$

$$= \frac{1}{2 \times 2}(w_5 + w_5) \quad (86)$$

$$= \frac{0.4}{D_f} \quad (87)$$

Na figura 42 apresenta-se o traçado da deformada da laje ao longo da linha $y = 2m$. Comparam-se as soluções obtidas através da utilização de malhas com espaçamentos de $h = 1m$, $h = 0.5m$ e $h = 0.2m$. Comentários em tudo idênticos aos que foram efectuados sobre a análise de laje encastrada em todo o seu contorno poderiam agora ser repetidos.

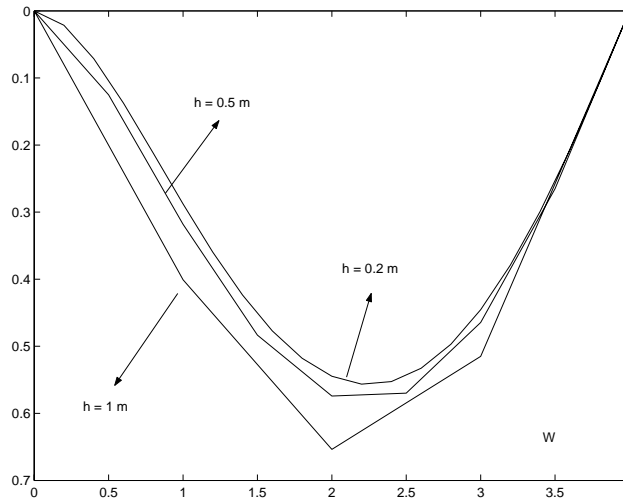


Figura 42: Laje com condições de apoio mistas; comparação das soluções obtidas para o campo de deslocamentos transversais

As soluções aproximadas obtidas com cada uma das discretizações testadas para o campo de momento flectores m_x ao longo de $y = 2m$ e para o campo de momentos torsões m_{xy} ao longo de $y = 1m$ são agora apresentadas nas figuras 43 e 44, respectivamente.

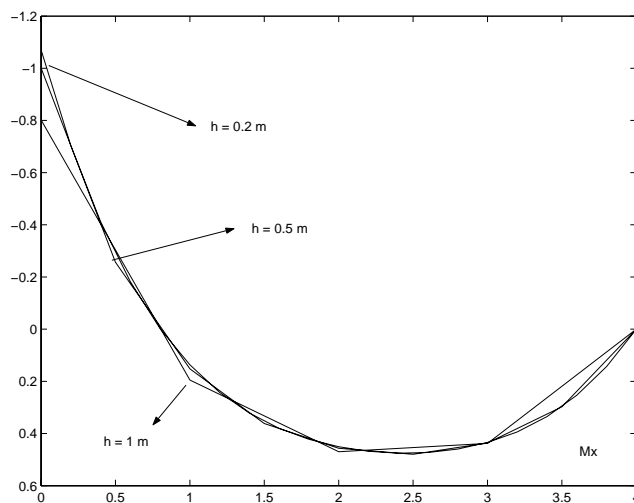


Figura 43: Laje com condições de apoio mistas; comparação das soluções obtidas para o campo de momentos flectores m_x

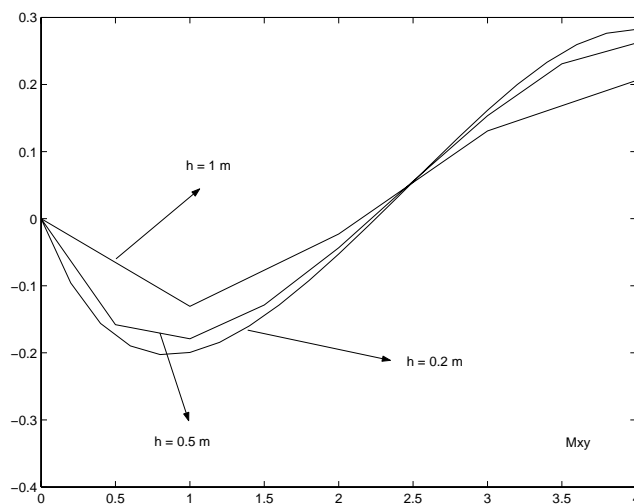


Figura 44: Laje com condições de apoio mistas; comparação das soluções obtidas para o campo de momentos torsores m_{xy}

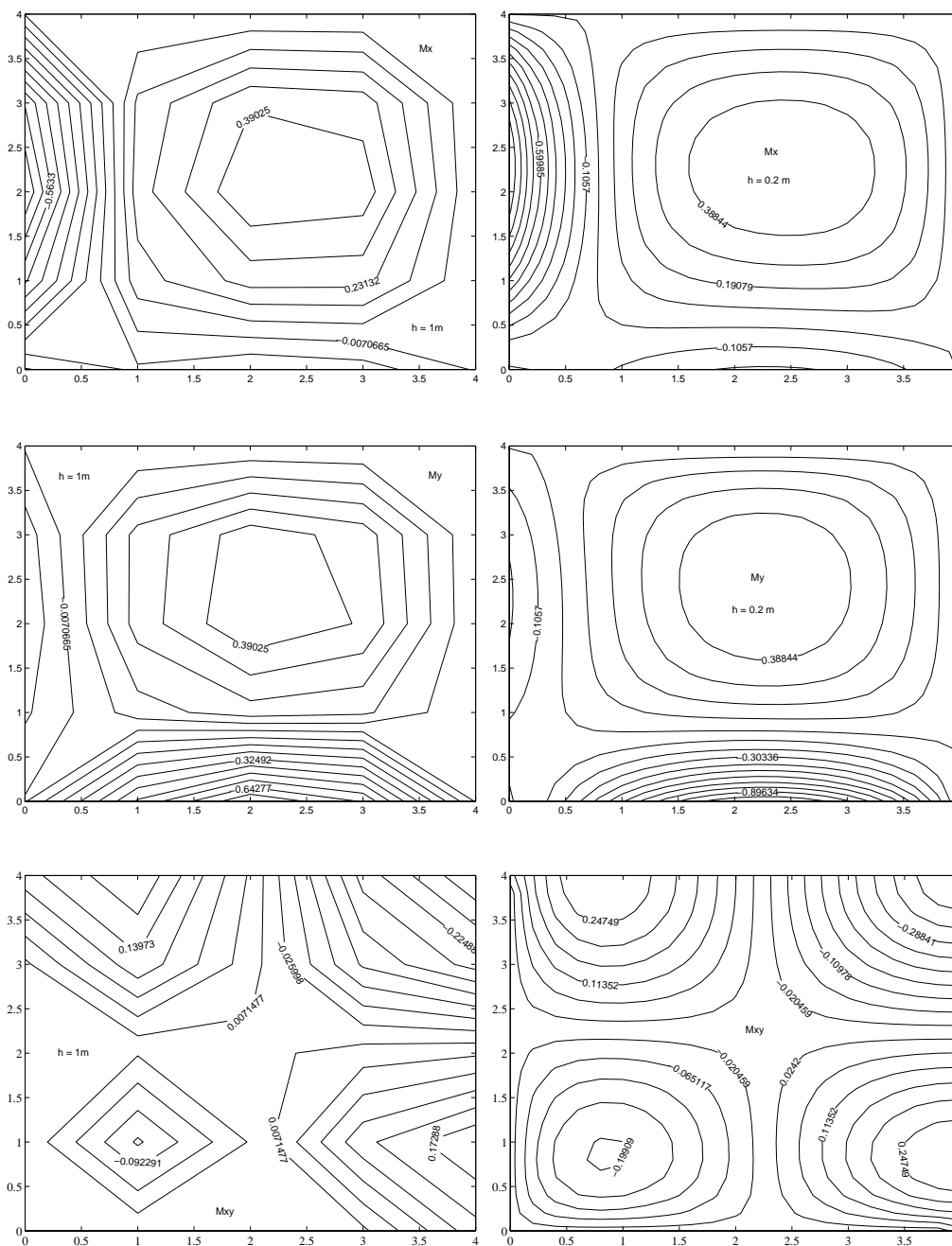


Figura 45: Laje com condições de apoio variáveis; solução com $h = 1.0\text{ m}$ e $h = 0.2\text{ m}$

Os campos de momentos obtidos para as malhas com $h = 1\text{ m}$ e $h = 0.2\text{ m}$ são apresentados na figura 45.

5 Lajes em fundação elástica

Considera-se agora que a laje se encontra assente numa fundação elástica. Nesta secção, começa-se por discutir quais as alterações a introduzir ao nível da formulação para ter em conta este facto. Admite-se como válida a hipótese de Winckler segundo a qual a reacção transversal mobilizada pelo meio elástico de fundação é directamente proporcional ao valor do campo de deslocamentos transversais, $w(x, y)$. Esta hipótese é também commumente utilizada na definição das equações diferenciais que regem o comportamento de vigas em fundação elástica [4].

Numa segunda etapa, verifica-se que as alterações verificadas ao nível das equações de campo são facilmente incorporadas nas equações de diferenças finitas que permitem a obtenção de uma solução aproximada para este tipo de problemas.

Esta secção termina com a apresentação e discussão da análise de uma laje simplesmente apoiada assente em fundação elástica.

5.1 Formulação do problema

Admitindo a hipótese de Winckler, a equação diferencial que rege o comportamento da laje assente em fundação elástica será dada por:

$$D_f \nabla^4 w(x, y) + k w(x, y) = q(x, y) \quad (88)$$

Todas as condições de fronteira definidas em 2.4 permanecem inalteradas. Mantêm-se também sem sofrer qualquer alteração as condições de compatibilidade e as relações de elasticidade. Desta forma, o cálculo dos campos de momentos pode ser efectuado directamente a partir da determinação das segundas derivadas do campo de deslocamentos transversais, tal como se encontra indicado na equação (11).

5.2 Aplicação do método das diferenças finitas

Os ajustes a introduzir na aplicação do método das diferenças finitas para ter em conta a alteração efectuada na equação que rege o comportamento da laje quando esta se encontra assente em fundação elástica são muito simples de entender e de efectuar.

O tratamento das condições de fronteira estática e cinemática permanece perfeitamente idêntico ao que foi definido anteriormente, tendo em atenção que estas condições não sofrem qualquer alteração decorrente da existência de uma fundação elástica.

A única alteração a introduzir diz respeito à equação de campo, a qual deverá ser escrita para cada um dos nós interiores da malha de diferenças finitas. Desta forma, em vez da equação

$$\frac{D_f}{h^4} (20 w_{i,j} - 8 w_{i-1,j} - 8 w_{i+1,j} - 8 w_{i,j-1} - 8 w_{i,j+1} + 2 w_{i+1,j+1} + 2 w_{i+1,j-1} + 2 w_{i-1,j+1} + 2 w_{i-1,j-1} + w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2}) = q_{i,j}$$

a qual corresponde ao esquema de diferenças finitas apresentado esquematicamente na figura 17, deve escrever-se:

$$\frac{D_f}{h^4} (20 w_{i,j} - 8 w_{i-1,j} - 8 w_{i+1,j} - 8 w_{i,j-1} - 8 w_{i,j+1} + 2 w_{i+1,j+1} + 2 w_{i+1,j-1} + 2 w_{i-1,j+1} + 2 w_{i-1,j-1} + w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2}) + \mathbf{k}_m \mathbf{w}_{i,j} = q_{i,j}$$

Uma vez obtido o valor do campo de deslocamentos transversais em cada um dos nós da discretização, o cálculo de rotações, curvaturas e esforços segue um procedimento em tudo análogo ao já apresentado e discutido em secções anteriores.

5.3 Análise de uma laje simplesmente apoiada

Considere-se de novo a laje quadrada simplesmente apoiada representada na figura 28, mas agora tenha-se em conta a existência de uma fundação elástica com uma rigidez $k_m = 10 D_f$. Assuma-se que o carregamento é constituído por uma carga uniformemente distribuída de valor unitário, $q(x, y) = 1.0 kN/m^2$.

5.3.1 Solução com uma malha com $h = 2m$

Para a análise da laje, considere-se uma primeira discretização com os nós interiores com um espaçamento $h = 2m$. Esta malha encontra-se representada na figura 29.

O tratamento das condições de fronteira é em tudo semelhante ao que foi efectuado na análise do problema apresentado na secção 4.1. Desta forma, tem-se que

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_6 = w_7 = w_8 = w_9 = 0$$

e

$$w_{10} = -w_5 \quad , \quad w_{11} = -w_5 \quad , \quad w_{12} = -w_5 \quad , \quad w_{13} = -w_5$$

A equação de campo no ponto interior 5 é então dada por:

$$\frac{D_f}{h^4} (20 w_5 - 8 w_2 - 8 w_4 - 8 w_8 - 8 w_6) \tag{89}$$

$$+ 2 w_3 + 2 w_9 + 2 w_1 + 2 w_7 + w_{10} + w_{12} + w_{11} + w_{13}) + k_m w_5 = q_5 \tag{90}$$

Impondo as condições de fronteira é possível obter:

$$\frac{D_f}{24} (20 w_5 + w_{10} + w_{12} + w_{11} + w_{13}) + k_m w_5 = q_5 \quad (91)$$

$$\frac{D_f}{24} (20 w_5 - w_5 - w_5 - w_5 - w_5) + k_m w_5 = q_5 \quad (92)$$

$$\frac{D_f}{24} (16 w_5) + k_m w_5 = q_5 \quad (93)$$

Tendo agora em atenção que $k_m = 10 D_f$ e que $q_5 = 1$ tem-se

$$w_5 = \frac{1}{11 D_f}$$

O valor do momento flector m_x no ponto central da laje será dado pela seguinte igualdade:

$$(m_x)_5 = -\frac{D_f}{h^2} (w_2 + w_8 - (2 + 2\nu) w_5 + \nu w_6 + \nu w_4) \quad (94)$$

$$= -\frac{D_f}{2^2} (-(2 + 2\nu) w_5) \quad (95)$$

$$= \frac{2 + 2\nu}{4} \times \frac{1}{11} = \frac{0.6}{11} = 0.0545 \quad (96)$$

5.3.2 Solução com uma malha com $h = 1 m$

Tal como discutido anteriormente, a obtenção de uma boa solução aproximada requer a utilização de malhas com menor espaçamento entre os nós da discretização. Analisa-se agora a laje considerando a malha representada na figura 35, na qual se considera um espaçamento de $h = 1.0 m$.

As nove equações que resultam da imposição da equação de campo a cada um dos nós interiores da discretização podem ser escritas na forma:

$$D_f(w_{26} + w_{32} + 20w_7 - 8w_8 + w_9 - 8w_{12} + 2w_{13} + w_{17}) + k_m w_7 = q_7$$

$$D_f(w_{27} - 8w_7 + 20w_8 - 8w_9 + 2w_{12} - 8w_{13} + 2w_{14} + w_{18}) + k_m w_8 = q_8$$

$$D_f(w_{28} + w_7 - 8w_8 + 20w_9 + w_{35} + 2w_{13} - 8w_{14} + w_{19}) + k_m w_9 = q_9$$

$$D_f(-8w_7 + 2w_8 + w_{33} + 20w_{12} - 8w_{13} + w_{14} - 8w_{17} + 2w_{18}) + k_m w_{12} = q_{12}$$

$$D_f(2w_7 - 8w_8 + 2w_9 - 8w_{12} + 20w_{13} - 8w_{14} + 2w_{17} - 8w_{18} + 2w_{19}) + k_m w_{13} = q_{13}$$

$$D_f(2w_8 - 8w_9 + w_{12} - 8w_{13} + 20w_{14} + w_{36} + 2w_{18} - 8w_{19}) + k_m w_{14} = q_{14}$$

$$D_f(w_7 - 8w_{12} + 2w_{13} + w_{34} + 20w_{17} - 8w_{18} + w_{19} + w_{29}) + k_m w_{17} = q_{17}$$

$$D_f(w_8 + 2w_{12} - 8w_{13} + 2w_{14} - 8w_{17} + 20w_{18} - 8w_{19} + w_{30}) + k_m w_{18} = q_{18}$$

$$D_f(w_9 + 2w_{13} - 8w_{14} + w_{17} - 8w_{18} + 20w_{19} + w_{37} + w_{31}) + k_m w_{19} = q_{19}$$

A imposição das restantes condições de fronteira (que permitem relacionar os deslocamentos dos nós *exteriores* com os deslocamentos dos nós *interiores*) e a substituição de $k_m = 10 D_f$ e $q_i = 1$ nas equações anteriores permite a obtenção do sistema de equações que vai determinar o valor das incógnitas do problema. Este sistema aparece escrito na forma:

$$D_f \begin{bmatrix} 28 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 29 & -8 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 28 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 29 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & -8 & 30 & -8 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 29 & 0 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 28 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & -8 & 29 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{12} \\ w_{13} \\ w_{14} \\ w_{17} \\ w_{18} \\ w_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os campos de deslocamentos e de esforços que resultam desta discretização encontram-se representados na figura 46.

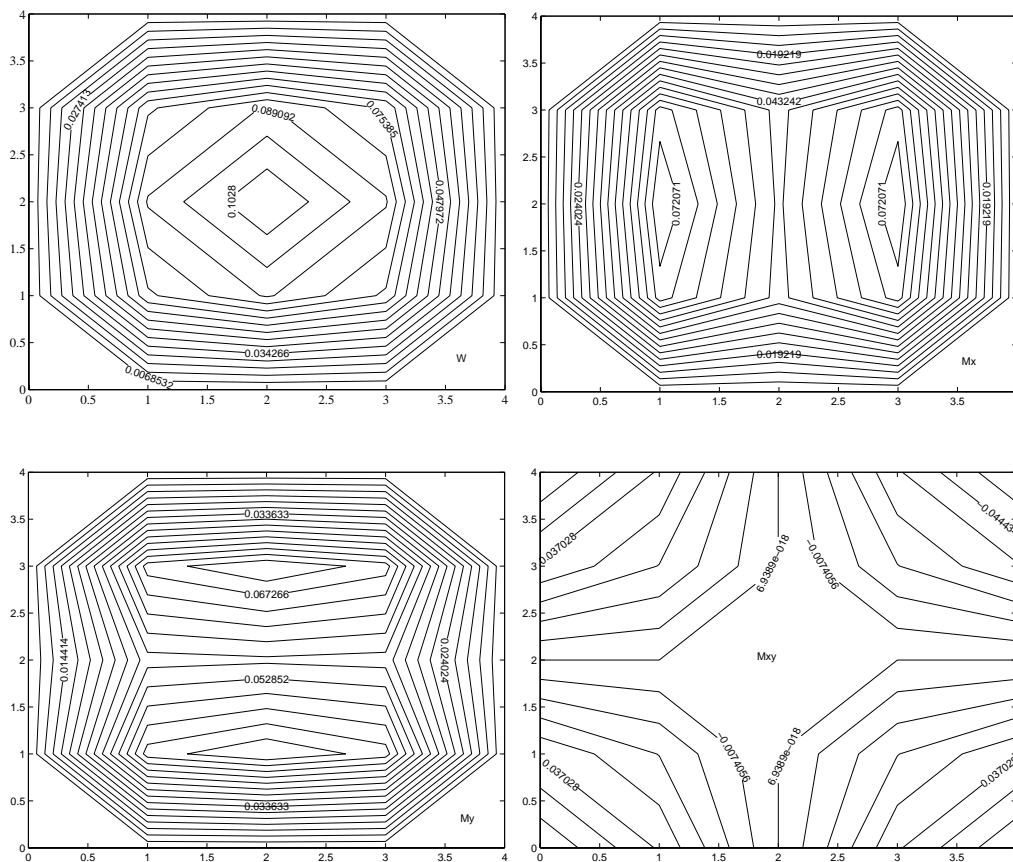


Figura 46: Laje assente sobre fundação elástica; solução com a malha com $h=1$ m

5.3.3 Comparação de soluções

Na figura 47 apresenta-se o campo de deslocamentos transversais e os campos de momentos flectores referentes à solução exacta para o problema. Estes campos foram determinados através da utilização da solução analítica apresentada em anexo.

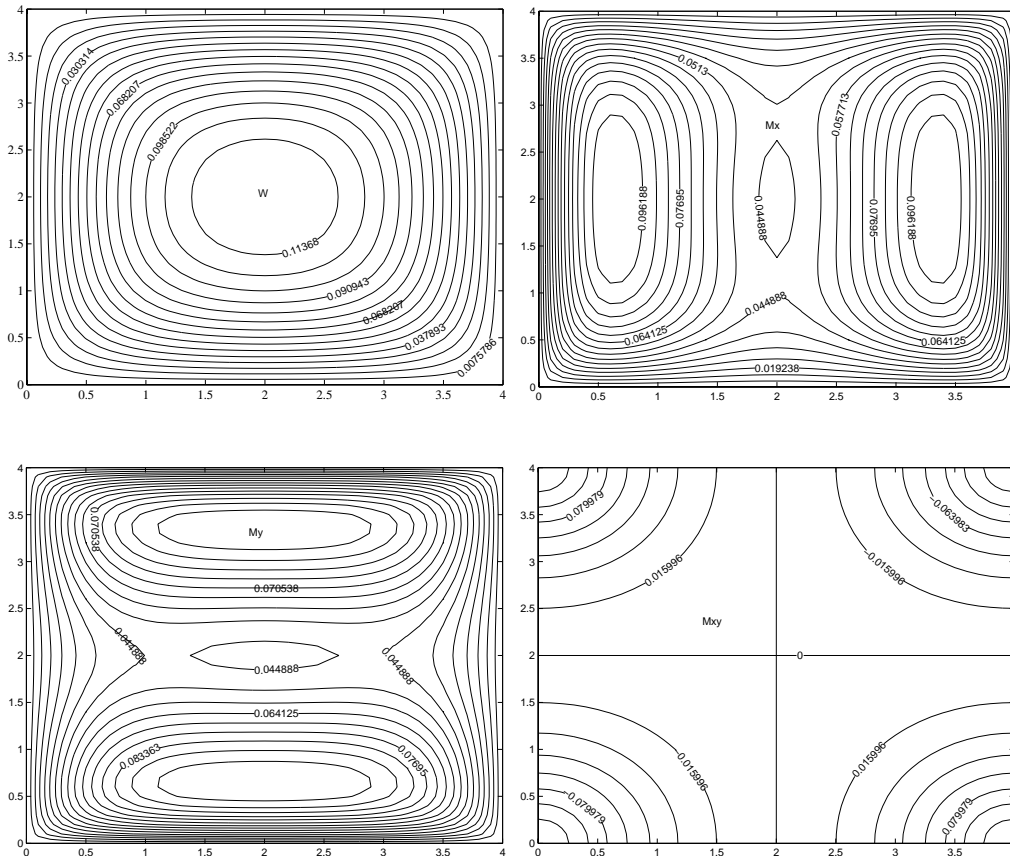


Figura 47: Laje assente sobre fundação elástica; solução exacta

A análise comparativa das figuras 47 e 46 permite desde logo verificar que a solução obtida com a discretização com nove nós interiores ($h = 1\text{ m}$) ainda é bastante pouco refinada.

Na figura 48 compara-se a solução exacta e duas soluções aproximadas obtidas para o campo de deslocamentos transversais ao longo do troço da laje com $y = 2\text{ m}$. A primeira solução aproximada corresponde à discretização anteriormente considerada, e na qual se tomou um espaçamento de $h = 1\text{ m}$. É visível que esta aproximação ainda é bastante pouco precisa. Já a segunda discretização, na qual se considera um espaçamento entre nós de $h = 0,20\text{ m}$, permite recuperar praticamente a solução exacta.

O mesmo tipo de comparação é efectuado agora para os momentos flectores m_x ao longo de $y = 2\text{ m}$ e para os momentos torsores m_{xy} ao longo do bordo inferior da laje, $y = 0\text{ m}$. Os correspondentes diagramas encontram-se representados nas figuras 49 e 50, respectivamente.

Em qualquer um dos casos, é fácil verificar que a solução obtida com a primeira das

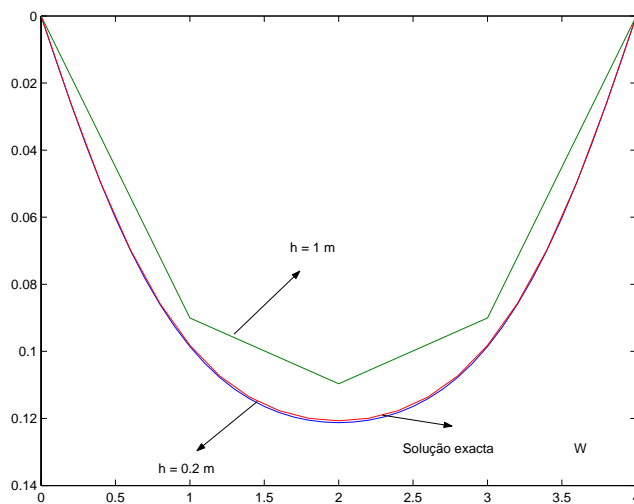


Figura 48: Laje assente sobre fundação elástica; comparação das soluções obtidas para o campo de deslocamentos transversais

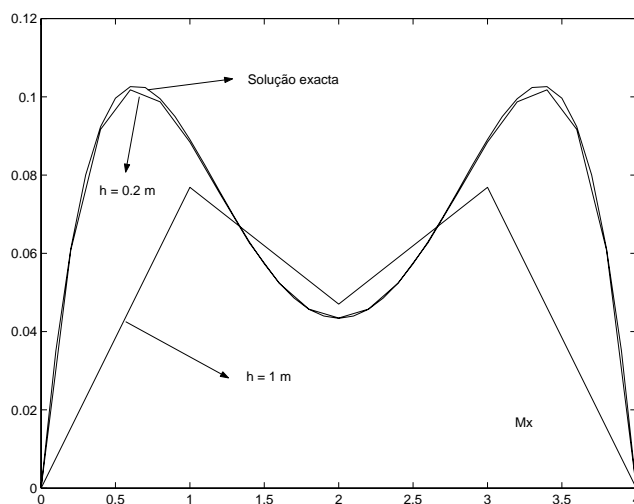


Figura 49: Laje assente sobre fundação elástica; comparação das soluções obtidas para o campo de momentos flectores m_x

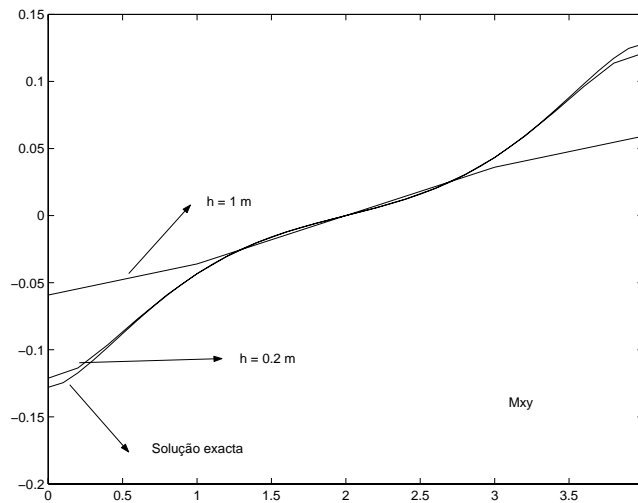


Figura 50: Laje assente sobre fundação elástica; comparação das soluções obtidas para o campo de momentos torsores m_{xy}

malhas de diferenças finitas ($h = 1m$) é muito pouco refinada. A obtenção de uma boa solução em termos de esforços requer a utilização de malhas com espaçamentos inferiores. De novo, verifica-se que a discretização com $h = 0.20m$ já conduz a uma óptima solução. Com esta malha existem 361 graus de liberdade, sendo esta a dimensão do sistema de equações que é necessário resolver para se obter a solução aproximada para o problema.

Anexo

Neste anexo apresentam-se as soluções semi-analíticas para as lajes rectangulares simplesmente apoiadas. Estas soluções, conhecidas na literatura como soluções de Navier [5], são obtidas com base na aplicação da análise de Fourier.

Primeiro são apresentadas as soluções para os campos de deslocamentos transversais e para os campos de momentos em lajes rectangulares e depois são generalizadas as expressões para permitir a consideração de problemas de lajes assentes em fundação elástica.

Laje rectangular simplesmente apoiada

Considere-se uma laje rectangular, simplesmente apoiada em todo o seu contorno, de dimensões $a \times b$, e sujeita à acção de uma carga distribuída, $q(x, y)$.

A solução de Navier permite escrever o campo de deslocamentos transversais na forma:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D_f} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (97)$$

O valor dos coeficientes a_{mn} é obtido tendo em conta que se efectua uma expansão em

série de Fourier do carregamento $q(x, y)$, a qual é dada por:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (98)$$

com

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy dx \quad (99)$$

Para o caso de carga uniformemente distribuída de intensidade q_0 , é possível verificar que os coeficientes da expansão são dados por

$$a_{mn} = \frac{16 q_0}{\pi^2 m n}$$

para m e n inteiros ímpares. Substituindo a igualdade anterior na definição 97, obtém-se a solução para o campo de deslocamentos transversais quando na laje está aplicada uma carga uniformemente distribuída. Pode então escrever-se:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D_f} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 q_0}{\pi^2 m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (100)$$

onde m e n correspondem a inteiros ímpares. O cálculo dos campos de momentos pode ser efectuado se se utilizarem as condições de compatibilidade e as relações de elasticidade. Os campos de curvaturas são dados então pelas seguintes igualdades:

$$\chi_x(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \frac{1}{\pi^4 D_f} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 m q_0}{a^2 n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (101)$$

$$\chi_y(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\pi^4 D_f} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 n q_0}{b^2 m \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (102)$$

$$\chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\pi^4 D_f} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 q_0}{ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (103)$$

Uma vez obtidos os campos de curvaturas, os campos de momentos são definidos pela aplicação das relações de elasticidade:

$$m_x(x, y) = D_f (\chi_x(x, y) + \nu \chi_y(x, y))$$

$$m_y(x, y) = D_f (\nu \chi_x(x, y) + \chi_y(x, y))$$

$$m_{xy}(x, y) = D_f ((1 - \nu) \chi_{xy}(x, y))$$

É possível escrever:

$$m_x = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{16 m q_0}{a^2 n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} + \nu \frac{16 n q_0}{b^2 m \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (104)$$

$$m_y = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu \frac{16 m q_0}{a^2 n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} + \frac{16 n q_0}{b^2 m \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (105)$$

$$m_{xy} = -\frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \nu) \frac{16 q_0}{a b \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (106)$$

Laje rectangular simplesmente apoiada assente em fundação elástica

Considere-se agora que a laje rectangular simplesmente apoiada em todo o seu contorno se encontra assente sobre uma fundação elástica com rigidez k_m . A aplicação de uma metodologia semelhante à utilizada na determinação da solução de Navier (97), permite determinar a seguinte expressão para o campo de deslocamentos transversais:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (107)$$

O valor dos coeficientes a_{mn} continua a ser determinado pela expressão geral (99). É fácil verificar que quando se considera $k_m = 0$, as duas soluções (107) e (97) coincidem.

Quando se considera que a carga aplicada é uniformemente distribuída, a solução para o campo de deslocamentos transversais vem apresentada na forma:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 q_0}{\pi^2 m n \left[k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right]} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (108)$$

onde m e n são inteiros ímpares.

A aplicação das equações de compatibilidade permite agora determinar as seguintes expressões para os campos de curvaturas:

$$\chi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 m q_0}{a^2 n \left[k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right]} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\chi_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 n q_0}{b^2 m \left[k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right]} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\chi_{xy} = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 q_0}{a b \left[k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right]} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Por fim, a aplicação das relações de elasticidade permite obter para os campos de momentos:

$$m_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_f [m_x^{mn}] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$m_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_f [m_y^{mn}] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$m_{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_f [m_{xy}^{mn}] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

com

$$m_x^{mn} = \frac{16 m q_0}{a^2 n \left[k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right]} + \nu \frac{16 n q_0}{b^2 m \left[k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right]}$$

$$m_y^{mn} = \nu \frac{16 m q_0}{a^2 n \left[k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right]} + \frac{16 n q_0}{b^2 m \left[k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right]}$$

$$m_{xy}^{mn} = -(1 - \nu) \frac{16 q_0}{a b \left[k_m + D_f \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \right]}$$

Referências

- [1] Grupo de Análise de Estruturas, “Apontamentos sobre a análise elástica de lajes”, Elementos de estudo da disciplina de Análise de Estruturas I, Instituto Superior Técnico, 2000;
- [2] Sulumine Raúl, “Métodos de Análise Elástica de Lajes de Edifícios”, dissertação submetida para a obtenção do grau de mestre em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Dezembro de 1988;
- [3] Richard Bares, “Tablas para el Calculo de Placas y Vigas Pared”, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1981;
- [4] LMS Castro, “Análise elástica de vigas em fundação elástica”, apontamentos da disciplina de Matemática Aplicada da EST-IPCB, Maio de 2001;
- [5] S. P. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2ª edição, McGraw-Hill International Book Company, Tóquio, (1970);