

## Capítulo 2

# Lajes de Kirchhoff - Formulação do problema

Neste capítulo são apresentadas as grandezas - *deslocamentos, deformações e esforços* - em função das quais se descreve o comportamento dos elementos de laje.

Num sólido elástico tridimensional, esta descrição é efectuada com base na utilização da Teoria da Elasticidade, determinando o vector dos deslocamentos e as componentes dos tensores das deformações e das tensões. Esta metodologia não só é bastante pesada de um ponto de vista matemático, como os resultados que permite obter são de difícil tratamento por parte dos projectistas que pretendam dimensionar a estrutura analisada.

Desta forma, há toda a conveniência em tirar partido do facto das lajes serem estruturas laminares planas. Tendo em conta as particularidades do comportamento deste tipo de elementos estruturais, que advêm do facto da espessura ter uma dimensão muito menor que o menor dos vãos da laje, é possível exprimir o comportamento da laje em função de grandezas definidas apenas sobre o seu plano médio.

Assim, surgem os deslocamentos no plano médio, as curvaturas (que substituem o tensor das deformações) e os campos de esforços (que substituem o tensor das tensões). Para que se possam definir estas grandezas, é necessário admitir como válidas algumas hipóteses sobre o comportamento destes elementos estruturais.

Estas hipóteses simplificativas são apresentadas e discutidas na primeira secção deste capítulo. Depois são apresentadas com detalhe todas as grandezas cinemáticas e estáticas que intervêm na caracterização do comportamento dos elementos de laje.

As equações que permitem relacionar essas grandezas, as condições de *compatibilidade, equilíbrio e elasticidade* são apresentadas de seguida. Conjugando estas três condições obtém-se a equação diferencial que rege o comportamento da laje, a *Equação de Lagrange*. Em simultâneo, são discutidos os tipos de apoio que podem existir e as correspondentes condições de fronteira que as grandezas devem satisfazer ao longo de cada um dos bordos

da laje.

Uma vez apresentadas todas as grandezas e as equações fundamentais do problema, discutem-se as diferenças entre soluções exactas, soluções compatíveis e soluções equilibradas. Tal como se verá no capítulo dedicado à Análise Plástica Limite de Lajes, a obtenção de soluções equilibradas é bastante importante, uma vez que a informação resultante está do lado da segurança. Os conceitos associados à determinação de soluções compatíveis serão recuperados quando se discutir a aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise de Lajes.

Este capítulo termina com a apresentação de alguns exemplos de aplicação e um conjunto de problemas propostos.

## 2.1 Lajes de Kirchhoff - Hipóteses simplificativas

Apresentam-se neste capítulo as hipóteses simplificativas que conduzem à obtenção da teoria de lajes finas. Algumas dessas hipóteses são gerais, semelhantes às que são admitidas para outros tipos de elementos estruturais. Há também hipóteses específicas, que se relacionam directamente com a especificidade do comportamento das lajes e que serão apresentadas e discutidas de forma mais detalhada.

Como hipóteses gerais, assume-se:

- Linearidade física
- Linearidade geométrica
- Homogeneidade e isotropia do material estrutural

A hipótese da linearidade física corresponde a assumir para o material um comportamento elástico linear. Este facto simplifica as relações constitutivas, permitindo o estabelecimento de uma relação linear entre esforços e deformações.

A linearidade geométrica inclui a hipótese dos pequenos deslocamentos e das pequenas deformações. É a hipótese que permite que as condições de equilíbrio possam ser estabelecidas com base na configuração indeformada da estrutura.

Quando se formula uma teoria para elementos de laje, é usual admitir que:

- Fibras rectas inicialmente perpendiculares ao plano médio da laje permanecem rectas após a deformação do elemento estrutural;
- As fibras rectas normais ao plano médio da laje são inextensíveis.

Esta última hipótese corresponde a assumir que se despreza a extensão axial segundo a direcção normal ao plano médio da laje ( $\varepsilon_{zz}$ ). Desta forma, todos os pontos pertencentes a uma dada fibra vão apresentar o mesmo deslocamento transversal.

As hipóteses acima referidas são comuns às teorias de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin. Há portanto uma hipótese adicional que a teoria de Kirchhoff adopta e que está intimamente associada ao facto de se desprezar a deformação por esforço transversal. Esta hipótese pode ser enunciada da seguinte forma:

- As fibras rectas inicialmente perpendiculares ao plano médio da laje, permanecem rectas após a deformação e perpendiculares ao plano médio.

Esta hipótese encontra-se ilustrada na figura 2.1.

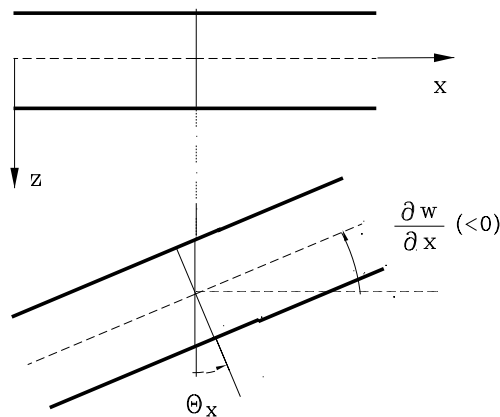


Figura 2.1: Ilustração das hipóteses de Kirchhoff

Para terminar, convém referir que nada é dito sobre as tensões normais segundo a direcção  $z$ ,  $\sigma_{zz}$ . Uma vez que se consideram como nulas as extensões segundo essa direcção, a lei de Hooke permite concluir que aquela componente do tensor das tensões não se poderá anular. No entanto, é razoável admitir-se que os seus valores sejam pouco significativos quando comparados com as restantes componentes desse tensor.

Para simplificar a apresentação, considera-se que não existe qualquer componente do carregamento que actue no plano  $(xy)$ . Como resultado desta restrição, os pontos que se situam sobre o plano médio da laje apenas podem apresentar deslocamentos transversais, ou seja translações com a direcção do eixo normal àquele plano.

## 2.2 Definição das grandezas estáticas e cinemáticas

### 2.2.1 Definição do campo de deslocamentos

A tarefa que se coloca neste instante consiste na determinação de um conjunto de grandezas, definidas apenas sobre o plano médio da laje, que permitam caracterizar de forma única o deslocamento de todos os pontos pertencentes ao sólido tridimensional em análise. Seja dado um ponto  $\mathbf{P}$  da laje, de coordenadas  $(x, y, z)$ . É necessário definir um conjunto de grandezas tal que seja possível obter a posição final desse mesmo ponto depois da estrutura se deformar.

Desta forma, as grandezas que procuramos devem permitir obter as componentes independentes do vector dos deslocamentos,  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$  e  $u_z(x, y, z)$ .

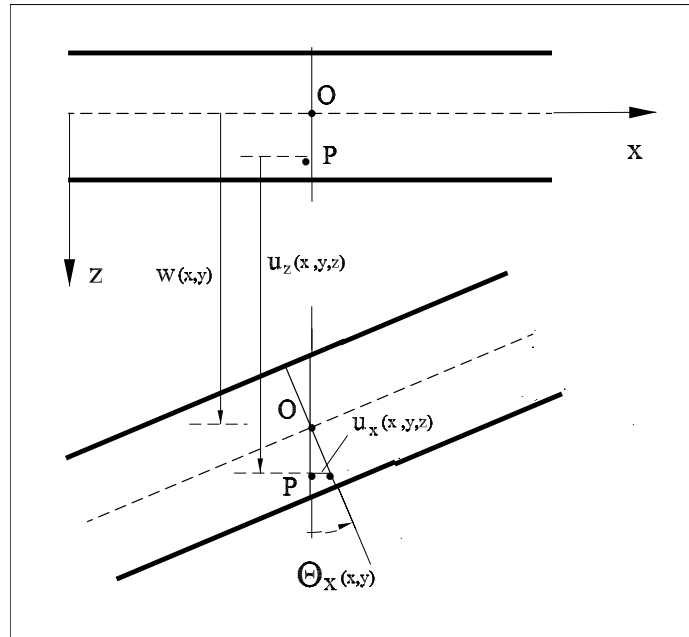


Figura 2.2: Determinação do campo de deslocamentos

Considere-se agora a deformada representada na figura 2.2. Trata-se de um corte efectuado num troço infinitesimal do elemento de laje. Este corte representa o que se passa no plano  $(x, z)$ . Os pontos  $\mathbf{O}$  e  $\mathbf{P}$  estão contidos na mesma fibra perpendicular ao plano médio da laje. O ponto  $\mathbf{O}$  pertence a esse plano, pelo que não possui qualquer translacção segundo a direcção  $x$ . Tendo em conta as hipóteses de Kirchhoff apresentadas na secção anterior, é possível escrever:

$$u_x(x, y, z) = z \times \theta_x(x, y) \quad (2.1)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (2.2)$$

A equação 2.2 tem um significado físico imediato. Permite afirmar que todos os pontos

pertencentes à mesma fibra vertical possuem o mesmo deslocamento transversal. Desta forma, se se quiser determinar a translação segundo a direcção  $z$  de um ponto qualquer do elemento de laje com coordenadas  $(x, y, z)$ , basta apenas conhecer qual o deslocamento transversal do ponto correspondente situado sobre o plano médio da laje, o qual tem por coordenadas  $(x, y)$ .

A equação 2.1 permite caracterizar os deslocamentos segundo  $x$  em função de  $\theta_x(x, y)$ , que corresponde à rotação que a fibra com coordenadas  $(x, y)$  apresenta no plano  $(x, z)$ , tal como se encontra representado na figura 2.2.

Considera-se como positivo para a rotação o sentido indicado nessa figura, pois pretende-se que pontos com coordenada  $z$  positiva apresentem deslocamentos positivos segundo  $x$ .

É fácil adaptar o conteúdo da figura 2.2 para ter em conta o que se passa no plano  $(y, z)$ . Um raciocínio em tudo análogo ao que foi apresentado permite escrever:

$$u_y(x, y, z) = z \times \theta_y(x, y) \quad (2.3)$$

As equações anteriores permitem verificar que o campo de deslocamentos de um ponto qualquer pertencente ao elemento de laje pode ser definido de forma única se se conhecerem as três grandezas  $w(x, y)$ ,  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$ , definidas sobre o plano médio da laje,  $(x, y)$ . Estes deslocamentos generalizados encontram-se representados na figura 2.3. É importante salientar que na convenção utilizada, a rotação  $\theta_x$  não corresponde à rotação em torno do eixo  $x$ . Trata-se isso sim da rotação definida no plano  $(x, z)$ , ou, se se preferir, de uma rotação em torno do eixo  $y$ . O mesmo comentário se pode aplicar em relação à rotação  $\theta_y$ .

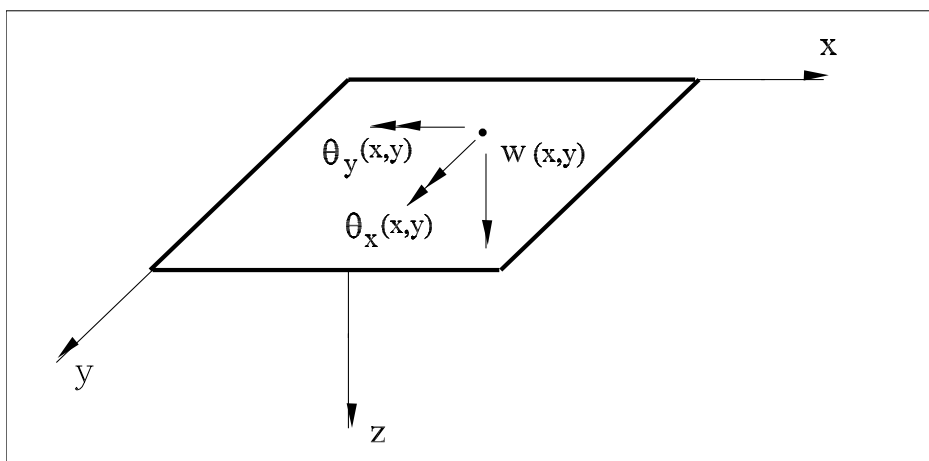


Figura 2.3: Campos de deslocamentos numa laje de Kirchhoff

Serão estas três grandezas independentes? Ou será que, à semelhança do que acontece

nos elementos de viga existe alguma relação entre os campos de rotações e o campo de deslocamentos transversais?

A resposta a esta pergunta é imediata se se tiver em consideração que no caso das lajes de Kirchhoff se despreza a deformação por esforço transversal. Desta forma impõe-se que as componentes  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  do tensor das deformações se deverão anular.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}; \quad (2.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \theta_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Quando se despreza a deformabilidade por corte, as expressões anteriores permitem obter de imediato:

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (2.7)$$

Verifica-se então que os campos  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$  não são independentes do campo de deslocamentos transversais,  $w(x, y)$ . Este é por consequência o único campo de deslocamentos a determinar para se poder caracterizar de forma completa os campos de deslocamentos numa laje fina.

A relação entre o campo de rotações  $\theta_x$  e o campo de deslocamentos transversais  $w$  também pode ser obtida utilizando-se um raciocínio mais intuitivo. Para tal, considere-se de novo a figura 2.1. Geometricamente, é possível verificar que o valor absoluto da rotação  $\theta_x$  é igual ao valor da derivada do campo de deslocamentos transversais,  $\partial w / \partial x$ . Esta igualdade decorre directamente do facto de se ter considerado que as fibras permanecem perpendiculares ao plano médio, mesmo após a deformação do elemento estrutural. Observando de novo a figura em análise, verifica-se que a rotação é positiva (de acordo com a convenção adoptada), mas o valor dos deslocamentos transversais está a diminuir, pelo que a sua derivada assume valores negativos. Este facto justifica o sinal negativo que existe nas definições 2.6 e 2.7.

## 2.2.2 Definição do campo de deformações

O campo de deformações generalizadas é obtido quando se substitui o tensor das deformações por grandezas definidas sobre o plano médio da laje. As hipóteses admitidas implicam que as deformações de corte,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , e as extensões segundo a espessura,  $\varepsilon_{zz}$ , se anulam. As restantes deformações podem ser determinadas a partir das condições de compatibilidade da elasticidade tridimensional:

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial x} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial y} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{xy}(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial x} \right) \quad (2.10)$$

Tendo em conta as definições (2.1) e (2.3), as extensões axiais podem ser escritas na forma:

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = z \times \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = z \times \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} \quad (2.12)$$

Desta forma, é possível determinar as extensões axiais em todos os pontos da laje em função apenas da taxa de variação dos campos de rotações e da distância da fibra ao plano médio da laje.

O significado físico da equação (2.11) é claro. Indica que as fibras dispostas segundo a direcção  $x$  sofrem uma extensão axial que é directamente proporcional à sua distância ao plano médio da laje. Tal como seria de esperar, as fibras situadas sobre esse plano ( $z = 0$ ) não sofrem qualquer deformação.

A constante de proporcionalidade referida acima é o parâmetro que se utiliza para caracterizar o estado de deformação axial dessas fibras e costuma designar-se por curvatura de flexão ao longo de  $x$ ,  $\chi_x(x, y)$ . A substituição de (2.6) em (2.11) permite obter

$$\chi_x(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

A definição (2.11) permite concluir que para que haja deformação axial das fibras dispostas segundo  $x$  é necessário que o campo de rotações  $\theta_x(x, y)$  varie ao longo de  $x$ . Caso contrário, ou seja, quando o campo de deslocamentos transversais ao longo de  $x$  for constante ou variar linearmente, a curvatura de flexão  $\chi_x$  é nula. Neste caso, a laje apresenta ao longo desta direcção apenas um deslocamento de corpo rígido, tal como se encontra ilustrado na figura 2.4.

Para caracterizar a extensão axial das fibras dispostas segundo  $y$ , surge a necessidade de se definir uma outra curvatura de flexão. A substituição de (2.7) na igualdade (2.12) conduz de imediato a:

$$\chi_y(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \quad (2.14)$$

O significado físico desta nova grandeza é idêntico ao que foi discutido para a curvatura de flexão ao longo de  $x$ .

Se se pretender obter um campo de deslocamentos transversais que apresente um campo de curvaturas  $\chi_x(x, y) = 1.0$  e  $\chi_y(x, y) = 0.0$ , qual é a resposta mais simples? Tendo em conta as definições (2.13) e (2.14), não é complicado concluir que uma resposta possível será:

$$w(x, y) = -\frac{1}{2} x^2$$

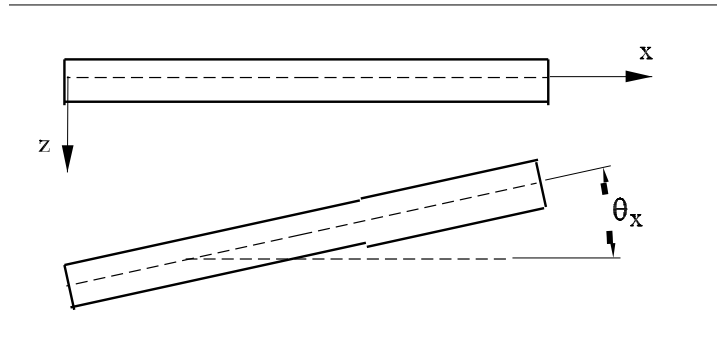


Figura 2.4: Deslocamento de corpo rígido

Este campo de deslocamentos encontra-se representado na figura 2.5.

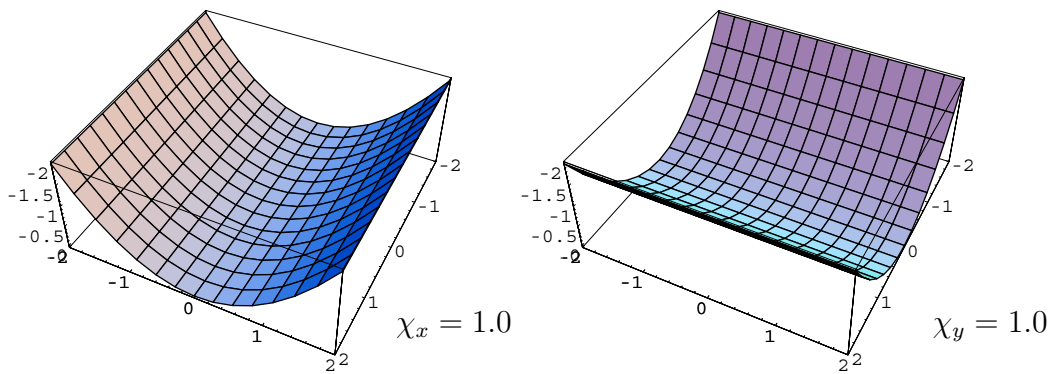


Figura 2.5: Campos de deslocamentos com curvaturas de flexão unitárias

Na figura 2.5 encontra-se também representado o campo de deslocamentos

$$w(x, y) = -\frac{1}{2} y^2$$

ao qual está associado o campo de curvaturas  $\chi_x(x, y) = 0.0$  e  $\chi_y(x, y) = 1.0$ .

Para caracterizar de forma completa a deformação por flexão do elemento de laje são então necessárias duas grandezas definidas sobre o plano médio da laje. São essas grandezas as curvaturas de flexão de segundo  $x$  e  $y$ ,  $\chi_x(x, y)$  e  $\chi_y(x, y)$ , respectivamente.

Será que estas grandezas são suficientes para caracterizar de forma completa todos os estados de deformação possíveis em elementos de laje? A resposta negativa aparece por intuição, uma vez que as deformações generalizadas até aqui apresentadas apenas permitem caracterizar as deformações por flexão, não conseguindo caracterizar as deformações quando a laje apresenta torção.



Um raciocínio um pouco mais rigoroso também permite chegar à mesma conclusão. Da tarefa inicialmente enunciada, ainda falta verificar qual a grandeza que nos vai permitir substituir as distorções no plano da laje,  $\varepsilon_{xy}(x, y, z)$ . Substituindo na equação (2.10) as equações (2.6) e (2.7), obtém-se de imediato

$$\varepsilon_{xy}(x, y, z) = \frac{1}{2} \times z \times \left( \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \right) \quad (2.15)$$

Surge desta forma a definição de curvatura de torção,  $\chi_{xy}(x, y)$ ,

$$\chi_{xy}(x, y) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

Esta equação permite verificar que existe deformação por torção num determinado ponto da laje sempre que a rotação  $\theta_x$  varie ao longo de  $y$  e a rotação  $\theta_y$  varie ao longo de  $x$ .

A curvatura de torção pode também ser expressa em função do campo de deslocamentos transversais,  $w(x, y)$ . Basta para tal substituir na equação anterior as definições (2.6) e (2.7). Obtém-se

$$\chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

A figura 2.6 mostra a deformada de uma laje caracterizada pela existência de uma curvatura de torção unitária e na qual ambas as curvaturas de flexão se anulam. A equação do campo de deslocamentos transversais nessa deformada é dada por:

$$w(x, y) = -x y$$

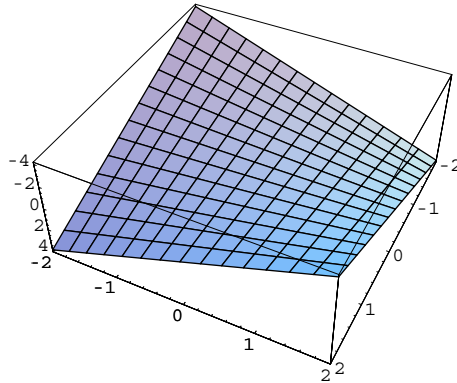


Figura 2.6: Campo de deslocamentos com curvatura de torção unitária

Por fim, convém salientar que as três curvaturas definidas neste capítulo correspondem às três componentes independentes de um tensor simétrico de segunda ordem, que se pode designar por tensor das curvaturas. Desta forma, as leis de transformação tensorial devem ser aplicadas sempre que se pretender caracterizar o estado de deformação numa laje referido a um outro sistema de eixos  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

### 2.2.3 Definição do campo de esforços

Falta agora definir quais os esforços que se torna necessário conhecer para que se consiga caracterizar o estado de tensão existente numa laje de Kirchhoff.

Tendo em atenção os campos de deformações generalizadas - curvaturas - definidos na secção anterior, é possível intuir que se deverão definir dois campos independentes de momentos flectores e um campo de momentos torsores. A existência de momentos flectores faz prever ainda a necessidade de se definirem dois campos de esforços transversos.

Este raciocínio intuitivo pode ser confirmado se se utilizar um processo de definição mais rigoroso, que nos permita representar, num ponto qualquer do elemento de laje, as componentes independentes do tensor das tensões em função de um conjunto de grandezas definidas apenas sobre o plano médio.

Para se obter a definição rigorosa dos diferentes campos de esforços envolvidos na análise da laje, considere-se o bordo com normal exterior com a direcção do eixo  $x$ .

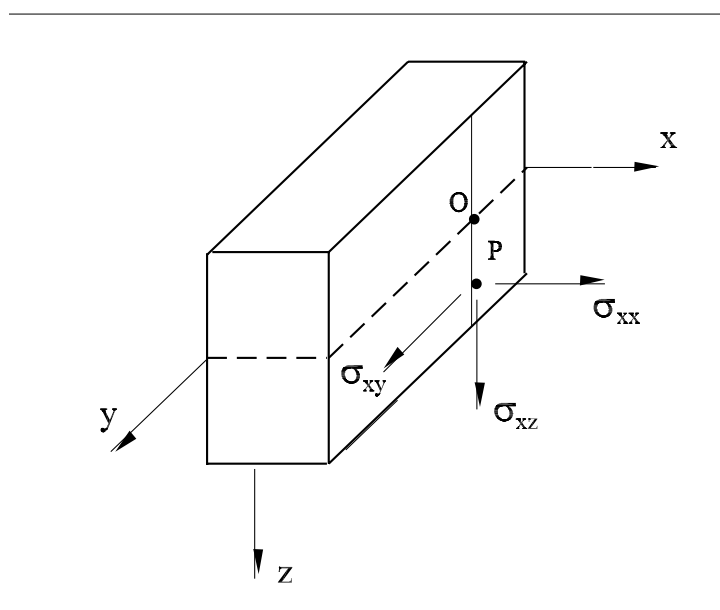


Figura 2.7: Componentes do tensor das tensões aplicadas no bordo normal ao eixo  $x$

Tal como se encontra representado na figura 2.7, os pontos  $O$  e  $P$  pertencem a uma mesma fibra normal ao plano médio da laje. As componentes independentes do tensor das tensões no ponto  $P$  também se encontram representadas na mesma figura. É o cálculo de resultantes dessas distribuições de tensões que conduz à determinação de alguns dos esforços intervenientes na caracterização do estado de tensão no elemento de laje.

A integração na espessura da componente  $\sigma_{xz}(x, y, z)$  dá origem ao esforço transversal

$v_x(x, y)$ . Define-se:

$$v_x(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}(x, y, z) dz \quad (2.18)$$

O momento flector  $m_x(x, y)$  e o momento torsor  $m_{xy}(x, y)$  correspondem à resultante dos momentos (em relação ao ponto  $O$ ) provocados pelas componentes  $\sigma_{xx}(x, y, z)$  e  $\sigma_{xy}(x, y, z)$ . Pode então escrever-se:

$$m_x(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx}(x, y, z) dz \quad (2.19)$$

$$m_{xy}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy}(x, y, z) dz \quad (2.20)$$

Qual o sentido que se deve considerar como positivo para os esforços definidos nas equações (2.18), (2.19) e (2.20)? A resposta tem em conta o sentido positivo do tensor das tensões. Assim, o esforço transverso positivo resultará da integração de tensões  $\sigma_{xz}$  positivas. Os momentos (flector e torsor) serão positivos quando causados por componentes positivas do tensor das tensões ( $\sigma_{xx}(x, y, z)$  e  $\sigma_{xy}(x, y, z)$ ) actuando em pontos da laje com coordenadas  $z$  positivas. Desta forma, os sentidos positivos para os esforços que actuam neste bordo da laje são os que se encontram representados na figura 2.8. Em bordos nos quais a normal exterior aponta no sentido negativo do eixo  $x$ , os esforços positivos  $m_x(x, y)$ ,  $m_{xy}(x, y)$  e  $v_x(x, y)$  têm o sinal contrário, tal como se encontra indicado na mesma figura.

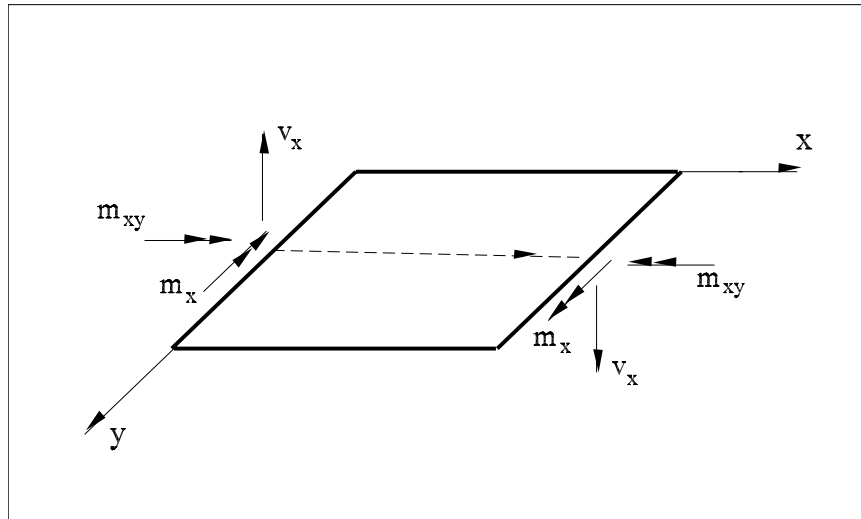


Figura 2.8: Esforços  $m_x, m_{xy}$  e  $v_x$  positivos

É importante salientar desde já que o momento flector  $m_x(x, y)$  não é um momento em torno do eixo  $x$ . Trata-se na realidade do momento flector associado à deformação por flexão no plano  $(x, z)$ . De um ponto de vista de comportamento físico, pode considerar-se que se trata do momento flector que surge se se considerar o comportamento à flexão de

um conjunto de vigas com o eixo paralelo a  $x$ . Pode ainda considerar-se que o momento  $m_x(x, y)$  é o que condiciona directamente o dimensionamento das armaduras longitudinais com a direcção  $x$  em lajes de betão armado.

De um ponto de vista um pouco mais formal, os índices nos campos de momentos  $m_x$  e  $m_{xy}$  indicam directamente quais as componentes do tensor das tensões ( $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{xy}$ ) que se consideraram na sua definição.

Outro aspecto importante na definição dos campos de esforços nas lajes está também presente nas definições (2.18), (2.19) e (2.20). Ao contrário do que se acontece no caso da teoria das peças lineares, a integração envolvida na definição dos diferentes campos de esforços é efectuada apenas ao longo da espessura. Como consequência, os esforços transversos têm a dimensão física de força por unidade de comprimento, ( $F L^{-1}$ ), e os momentos flectores e torsor têm a dimensão física de momento por unidade de comprimento, ( $F L L^{-1}$ ).

Para se definirem os campos de esforços que ainda estão em falta (da intuição inicial falta surgir ainda um momento flector e um esforço transverso), considere-se agora um bordo da laje com a normal exterior segundo o eixo  $y$ . Na figura 2.9 estão representadas as componentes do tensor das tensões que actuam num ponto  $Q$  existente numa fibra recta perpendicular ao plano médio da laje. Seguindo um raciocínio em tudo análogo

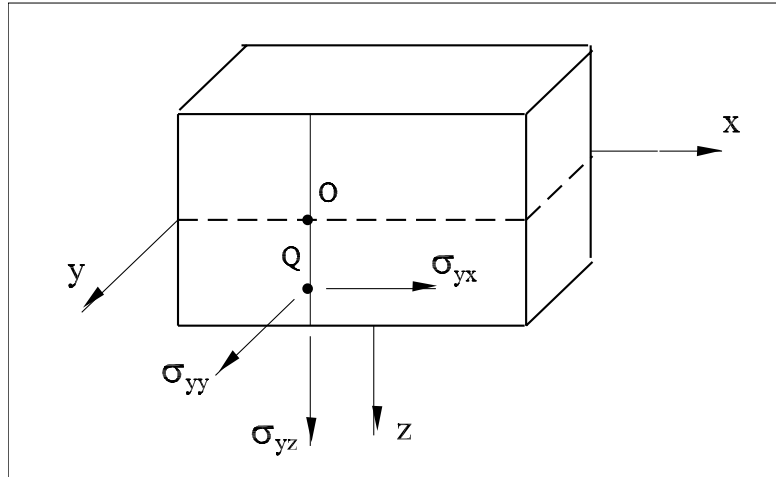
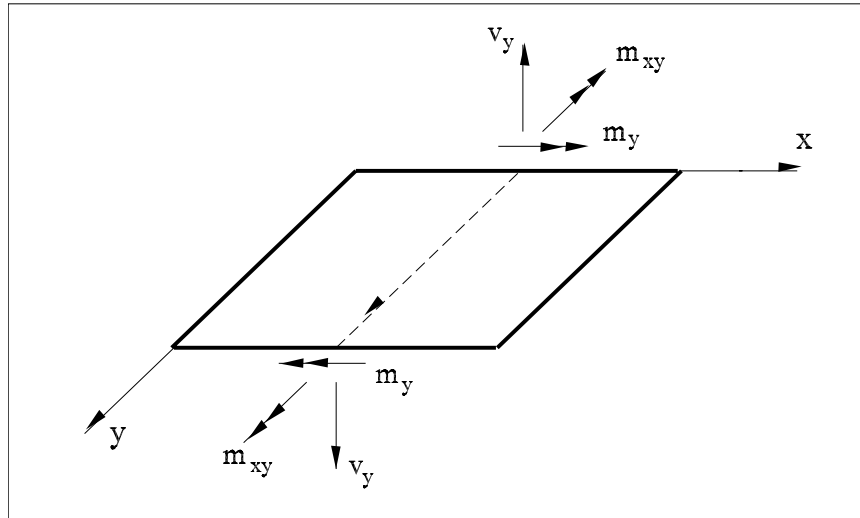


Figura 2.9: Componentes do tensor das tensões aplicadas no bordo normal ao eixo  $y$

ao considerado atrás, o esforço transverso  $v_y(x, y)$  é definido como sendo a resultante, ao longo da espessura da laje, da distribuição de tensões tangenciais,  $\sigma_{yz}(x, y, z)$ . Escreve-se desta forma:

$$v_y(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}(x, y, z) dz \quad (2.21)$$

O esforço transverso  $v_y(x, y)$  positivo nesse bordo terá o sentido indicado na figura 2.10. O momento flector  $m_y(x, y)$  e o momento torsor  $m_{yx}(x, y) = m_{xy}(x, y)$  são definidos por:

Figura 2.10: Esforços  $m_y, m_{xy}$  e  $v_y$  positivos

$$m_y(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy}(x, y, z) dz \quad (2.22)$$

$$m_{yx}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yx}(x, y, z) dz \quad (2.23)$$

O sentido positivo desses momentos encontra-se representado na figura 2.10. De novo, considera-se que tensões  $\sigma_{yy}(x, y, z)$  e  $\sigma_{yx}(x, y, z)$  positivas, actuando em pontos com coordenada  $z$  positiva têm que originar momentos positivos. Nos bordos da laje com normal exterior paralela a  $y$  mas com sentido negativo, os esforços serão positivos se tiverem o sentido indicado na figura 2.10.

De novo, são válidos os comentários efectuados acima quanto ao significado físico destas duas grandezas e quanto à sua dimensão física.

Na figura 2.11 representam-se finalmente todos os esforços que intervêm na caracterização do comportamento de uma laje de Kirchhoff.

Repare-se que se pode considerar, de uma forma muito simplificada, que o comportamento da laje pode ser representado pela consideração de um conjunto de barras com eixo paralelo a  $x$  e por um outro conjunto de barras com eixo paralelo a  $y$ . Os esforços  $m_x$ ,  $v_x$  e  $m_{xy}$  são aqueles que se relacionam directamente com o comportamento das primeiras, enquanto que  $m_y$ ,  $v_y$  e  $m_{xy}$  são os esforços necessários à caracterização do segundo conjunto de elementos de viga.

Esta interpretação é bastante simplista. No entanto, será utilizada em capítulos subsequentes, muito em especial quando se discutir a modelação de lajes com elementos de grelha.

Por fim, convém salientar que os campos de momentos flectores e de momentos torso-

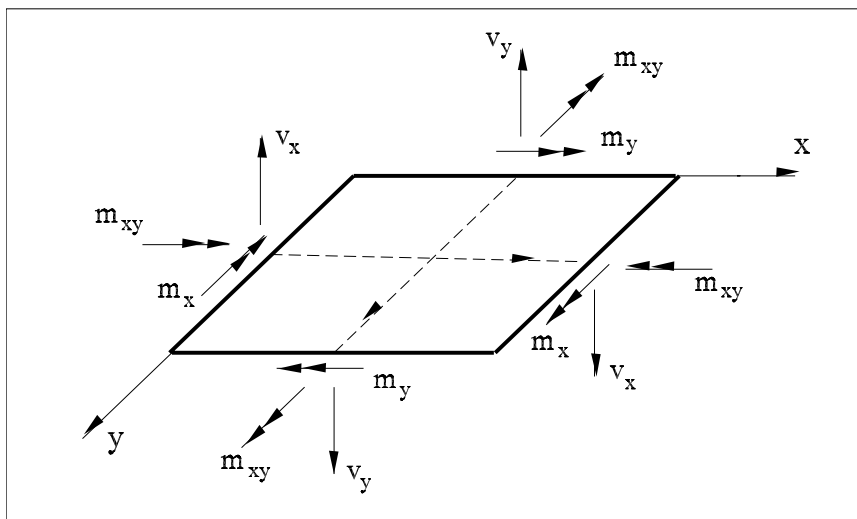


Figura 2.11: Campos de esforços numa laje de Kirchhoff

res constituem um tensor simétrico de segunda ordem. Como tal, quando se tratam as grandezas  $m_{\alpha\beta}$ , devem utilizar-se todas as regras utilizadas no tratamento de entidades tensoriais. Nomeadamente, quando há a necessidade de se efectuar uma mudança de coordenadas, é sempre necessário ter em conta a lei de transformação tensorial, que pode ser escrita no formato:

$$\begin{bmatrix} m_{x'} & m_{x'y'} \\ m_{x'y'} & m_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre os dois referenciais (ver figura 2.12) e  $m_{x'}$ ,  $m_{y'}$  e  $m_{x'y'}$  correspondem aos campos de momentos flectores e torsores expressos no novo sistema de eixos  $(x', y')$ .

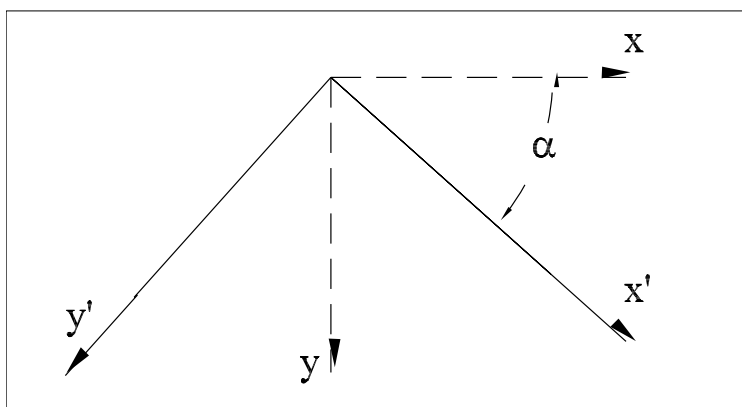


Figura 2.12: Definição da mudança de coordenadas

Quem tiver em conta que a definição de esforços tem por finalidade substituir a utilização do tensor das tensões na análise de lajes, facilmente verificará que em nenhuma das

definições apresentadas nesta secção surgiu a componente  $\sigma_{zz}(x, y, z)$ . Importa salientar que essa componente do tensor das tensões não é nula. Aliás, a lei de Hooke tridimensional permite assegurar que nunca se podem anular em simultâneo as tensões  $\sigma_{zz}(x, y, z)$  e as extensões axiais  $\varepsilon_{zz}(x, y, z)$ .

No desenvolvimento da teoria de Kirchhoff é no entanto normal admitir-se que o valor de  $\sigma_{zz}$  é substancialmente inferior aos das restantes componentes do tensor das tensões e por tal motivo pode ser desprezada. Está fora do âmbito deste texto detalhar este aspecto, mas pode demonstrar-se [9] que no desenvolvimento da teoria de Kirchhoff basta garantir que:

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{zz}(x, y, z) dz = 0$$

## 2.2.4 Recuperação das grandezas tridimensionais\*

Uma vez conhecidas as grandezas generalizadas definidas nas secções anteriores, é possível efectuar o trajecto inverso e calcular-se o valor das grandezas tridimensionais habituais na teoria da elasticidade. No entanto, este raciocínio não é regnal geral aplicado, uma vez que para o dimensionamento corrente dos elementos de laje a informação relevante está contida nas grandezas definidas sobre o plano médio.

A relação entre as componentes do vector dos deslocamentos,  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$  e  $u_z(x, y, z)$ , e os campos de deslocamentos generalizados  $w(x, y)$ ,  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$ , está descrita pelas equações (2.1), (2.2) e (2.3). Se forem conhecidos estes três campos em todos os pontos do plano médio da laje, é então possível recuperar:

$$u_x(x, y, z) = z \times \theta_x(x, y)$$

$$u_y(x, y, z) = z \times \theta_y(x, y)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y)$$

Todas as componentes do tensor das deformações podem ser expressas em função dos campos de curvaturas  $\chi_x(x, y)$ ,  $\chi_y(x, y)$  e  $\chi_{xy}(x, y)$ . É assumido à partida que as componentes  $\varepsilon_{xz}(x, y, z)$  e  $\varepsilon_{yz}(x, y, z)$  são nulas, uma vez que se despreza a deformação por corte. Também a hipótese da inextensibilidade axial das fibras rectas paralelas ao eixo  $z$  implica que a componente  $\varepsilon_{zz}(x, y, z)$  se anule.

As restantes componentes do tensor das deformações podem ser obtidas tendo em conta as definições (2.11), (2.12) e (2.16):

$$\varepsilon_{xx}(x, y, z) = z \times \chi_x(x, y) \tag{2.25}$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y, z) = z \times \chi_y(x, y) \tag{2.26}$$

$$\varepsilon_{xy}(x, y, z) = z \times \chi_{xy}(x, y) \tag{2.27}$$

Até aqui não surgiram quaisquer novidades, tendo sido apenas necessário recuperar informação já anteriormente apresentada e discutida.

O mesmo já não se passa quando se pretende obter o valor das componentes do tensor das tensões a partir do conhecimento do valor dos campos de esforços. Na secção anterior apenas se definiram os esforços como resultantes (ou momentos resultantes) de distribuições de tensões ao longo da espessura da laje. Neste instante, o problema é o inverso, ou seja, é preciso determinar a distribuição de tensões na espessura da laje a partir do conhecimento do valor dessas resultantes.

O primeiro aspecto a ter em conta na resolução deste problema relaciona-se com o facto das hipóteses de Kirchhoff conduzirem a uma distribuição de deformações  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{xy}$  que variam linearmente ao longo da espessura, tal como se encontra patente nas equações (2.25), (2.26) e (2.27).

Ao desprezarem-se as tensões  $\sigma_{zz}$ , a lei de Hooke permite escrever:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy}(x, y, z) &= \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{xy}\end{aligned}$$

Substituindo as igualdades (2.25), (2.26) e (2.27) nas expressões anteriores vem:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y, z) &= z \left[ \frac{E}{1 - \nu^2} \chi_x + \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \chi_y \right] \\ \sigma_{yy}(x, y, z) &= z \left[ \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \chi_x + \frac{E}{1 - \nu^2} \chi_y \right] \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= z \frac{E}{1 + \nu} \chi_{xy}\end{aligned}$$

Daqui resulta que também as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  apresentam uma variação linear ao longo da espessura, anulando-se em pontos pertencentes ao plano médio. Na figura 2.13 encontram-se representadas as distribuições de tensões normais,  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ , e de tensões tangenciais,  $\sigma_{xy}$ , que resultam directamente das hipóteses de Kirchhoff.

Considere-se a distribuição do campo de tensões  $\sigma_{xx}(x, y, z)$ . A definição (2.19) permite obter:

$$m_x(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx}(x, y, z) dz = \frac{h^2}{6} \sigma_{xx}^{max}$$

Desta forma, poder-se-à escrever:

$$|\sigma_{xx}^{max}| = \frac{6}{h^2} |m_x|$$



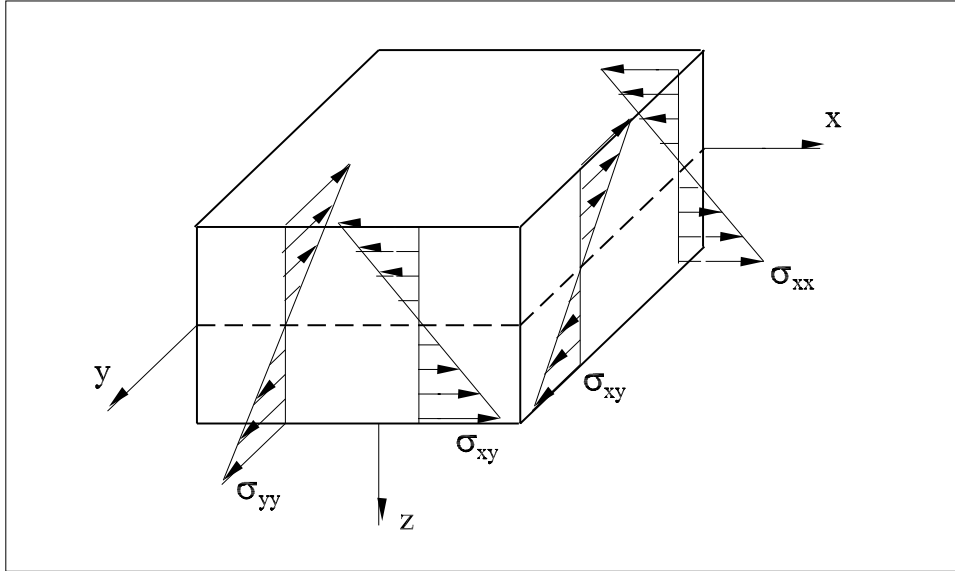


Figura 2.13: Distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  na espessura

A *inclinação* do diagrama de tensões será dada por

$$2 \frac{|\sigma_{xx}^{max}|}{h} = \frac{2}{h} \left( \frac{6}{h^2} \right) |m_x|$$

o que permite obter

$$\sigma_{xx} = \frac{12}{h^3} z m_x \quad (2.28)$$

A aplicação de um raciocínio análogo para as outras duas componentes do tensor das tensões permite escrever:

$$\sigma_{yy} = \frac{12}{h^3} z m_y \quad (2.29)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{12}{h^3} z m_{xy} \quad (2.30)$$

Os valores extremos destas tensões encontram-se instaladas em pontos pertencentes aos planos superior e inferior da laje. O módulo desses valores extremos pode ser determinado a partir das igualdades:

$$|\sigma_{yy}^{max}| = \frac{6}{h^2} |m_y| \quad ; \quad |\sigma_{xy}^{max}| = \frac{6}{h^2} |m_{xy}|$$

Mais complicada é a determinação da distribuição de tensões tangenciais,  $\sigma_{xz}(x, y, z)$  e  $\sigma_{yz}(x, y, z)$ . Neste caso, a utilização das relações constitutivas

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{xz} \quad (2.31)$$

$$\sigma_{yz}(x, y, z) = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{yz} \quad (2.32)$$

não é válida por se ter admitido que o material é rígido ao corte e não elástico.

Se por absurdo se se utilizassem essas equações, a conclusão seria que sendo nulas as distorções também seriam nulas as tensões tangenciais, pelo que por sua vez resultariam nulos os esforços transversos  $v_x(x, y)$  e  $v_y(x, y)$  em todos os pontos do plano médio da laje. Ora tal não faz sentido, como é fácil concluir.

Para se conseguir recuperar o andamento das tensões tangenciais  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ , torna-se desta forma necessário desenvolver um raciocínio baseado em considerações de equilíbrio.

Recorde-se que as condições de equilíbrio da elasticidade tridimensional são [10]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0\end{aligned}$$

Considerando  $f_x = 0$ , a primeira destas equações pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$$

Substituindo nesta equação (2.28) e (2.30), obtém-se

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\frac{12}{h^3} z \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2.33)$$

ou ainda, tendo em atenção (2.36),

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\frac{12}{h^3} z v_x \quad (2.34)$$

Admitindo que nas faces superior e inferior não existem quaisquer tensões tangenciais aplicadas,

$$(\sigma_{xz})_{z=\pm h/2} = 0 \quad ; \quad (\sigma_{yz})_{z=\pm h/2} = 0$$

e integrando a equação (2.34) entre  $z = -h/2$  e a coordenada genérica  $z$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= -\frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^z z \, dz \, v_x \\ &= \frac{v_x}{h} \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

A mesma técnica aplicada agora à segunda equação de equilíbrio permite obter:

$$\sigma_{yz} = \frac{v_y}{h} \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right]$$

As tensões tangenciais  $\sigma_{xz}(x, y, z)$  e  $\sigma_{yz}(x, y, z)$  associadas aos esforços transversos  $v_x(x, y)$  e  $v_y(x, y)$  apresentam na espessura da laje uma distribuição parabólica. Anulam-se nos pontos das faces superior e inferior e apresentam o valor máximo ao nível do plano médio. Estes valores máximos são dados por:

$$|\sigma_{xz}|^{max} = \frac{3}{2} \frac{|v_x|}{h}$$

$$|\sigma_{yz}|^{max} = \frac{3}{2} \frac{|v_y|}{h}$$

Na figura 2.14 representam-se as distribuições obtidas para as tensões tangenciais  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ .

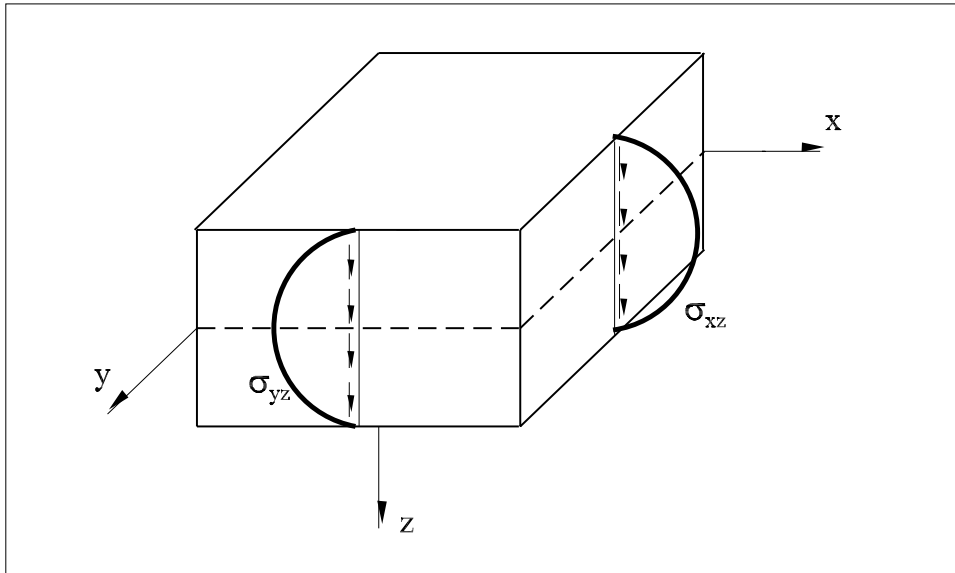


Figura 2.14: Distribuição das tensões tangenciais  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  na espessura

## 2.3 Relações Fundamentais

Neste instante estão definidas com rigor as grandezas generalizadas em função das quais se descreve o comportamento das lajes finas. Estas grandezas encontram-se representadas de forma esquemática no diagrama representado na figura 2.15. Falta agora definir as equações de compatibilidade que permitem determinar a relação entre as grandezas cinemáticas, deslocamentos generalizados e curvaturas. As grandezas estáticas, esforços e cargas aplicadas, devem respeitar as condições de equilíbrio. Por fim, as condições de elasticidade permitem estabelecer a relação entre esforços e curvaturas.

A obtenção deste conjunto de equações e a identificação do seu significado físico é tratada em detalhe nesta secção.

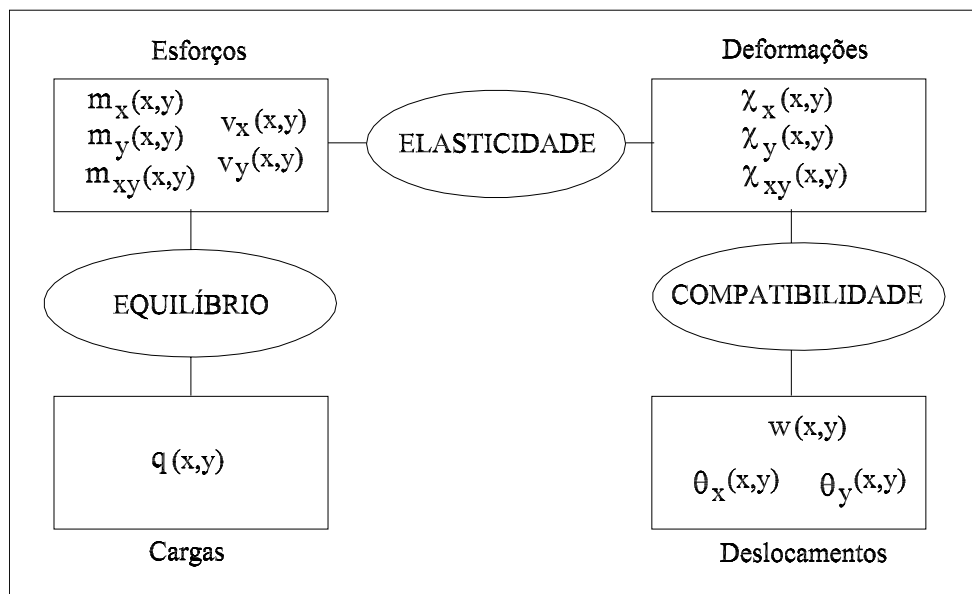


Figura 2.15: Grandezas a conhecer para se caracterizar o comportamento de lajes finas

### 2.3.1 Condições de compatibilidade

As condições de compatibilidade permitem relacionar os campos de curvaturas  $\chi_x(x, y)$ ,  $\chi_y(x, y)$  e  $\chi_{xy}(x, y)$  com o campo de deslocamentos transversais,  $w(x, y)$ . Estas equações foram já obtidas na secção 2.2.2. As equações (2.13) e (2.14) definem as duas curvaturas de flexão, e a condição (2.17) permite obter a curvatura de torção.

CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE	
$\chi_x(x, y)$	$= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$
$\chi_y(x, y)$	$= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$
$\chi_{xy}(x, y)$	$= -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$

Tabela 2.1: Condições de compatibilidade

Recorde-se que as curvaturas medem as taxas de variação das rotações

$$\chi_x(x, y) = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\chi_y(x, y) = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$\chi_x(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

as quais dependem dos deslocamentos transversais em consequência das hipóteses de Kirchhoff

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

A analogia com as condições de compatibilidade em elementos de viga é imediata. Neste tipo de estruturas, a condição de compatibilidade no domínio pode ser expressa na forma:

$$\chi(x) = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (2.35)$$

### 2.3.2 Condições de equilíbrio

As condições de equilíbrio relacionam os campos de esforços na laje,  $m_x(x, y)$ ,  $m_y(x, y)$ ,  $m_{xy}$ ,  $v_x(x, y)$  e  $v_y(x, y)$ , com a carga aplicada,  $q(x, y)$ . Como se demonstrará na secção seguinte, as condições de equilíbrio podem ser expressas da seguinte forma:

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO	
$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = v_x$	(2.36)
$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = v_y$	(2.37)
$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q(x, y) = 0$	(2.38)

Tabela 2.2: Condições de equilíbrio

Frequentes vezes, as três condições de equilíbrio acima indicadas são transformadas numa equação apenas. Basta para tal substituir (2.36) e (2.37) na condição (2.38). Obtém-se uma única equação que relaciona os dois campos de momentos flectores,  $m_x(x, y)$  e  $m_y(x, y)$ , o campo de momentos torsores,  $m_{xy}(x, y)$ , e a carga distribuída aplicada,  $q(x, y)$ .

CONDICÕES DE EQUILÍBRIO
$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0 \quad (2.39)$

Tabela 2.3: Condições de equilíbrio; formato condensado

Este é o formato mais usual para as condições de equilíbrio. A semelhança com os elementos de viga é mais uma vez quase imediata. Neste tipo de elementos, as condições de equilíbrio podem ser escritas na forma:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (2.40)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} + p(x) = 0 \quad (2.41)$$

ou, reunindo as duas condições numa só,

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + p(x) = 0 \quad (2.42)$$

### 2.3.3 Obtenção das condições de equilíbrio\*

As condições de equilíbrio acima enunciadas podem ser obtidas utilizando um raciocínio semelhante ao seguido na determinação das equações de equilíbrio em elementos de viga. Para tal, é necessário estabelecer as equações de equilíbrio global num elemento infinitesimal de laje. Na figura 2.16 representa-se o correspondente diagrama de corpo livre.

Como se analisa um troço infinitesimal da laje, pode considerar-se que a carga distribuída é constante e que a variação dos esforços ao longo de  $x$  e de  $y$  é linear. A imposição das três condições de equilíbrio global conduz directamente à obtenção das equações (2.36), (2.37) e (2.38).

A equação de equilíbrio de forças verticais permite desta forma estabelecer que:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -v_x dy + \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy - v_y dx + \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0$$

Simplificando a expressão anterior vem

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0$$

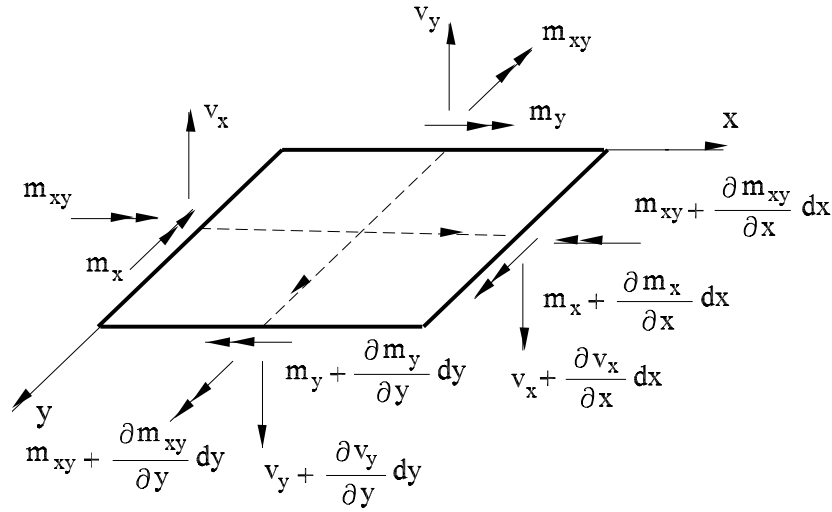


Figura 2.16: Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de laje

Tendo em conta que esta equação se deve verificar para qualquer valor de  $dx$  e de  $dy$  não nulos, recupera-se a equação de equilíbrio (2.38),

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0$$

Considere-se agora a resultante de momentos em torno do eixo  $y$  calculada em relação ao ponto  $A$ , de coordenadas  $(0, 0)$ . Pode escrever-se:

$$\begin{aligned} \sum M_y^A = 0 \Rightarrow & -m_x dy + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx\right) dy - m_{xy} dx + \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy\right) dx \\ & + v_y dx \frac{dx}{2} - \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy\right) dx \frac{dx}{2} - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right) dy dx \\ & - q dx dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

Simplificando a expressão anterior e desprezando os infinitésimos de ordem superior, obtém-se a equação

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = v_x$$

Finalmente, a terceira equação de equilíbrio é obtida quando se impõe que a resultante dos momentos em torno do eixo  $x$ , e calculada em relação ao ponto  $A$  se deve anular também. A análise do diagrama de corpo livre apresentado na figura 2.16 permite escrever que:

$$\sum M_x^A = 0 \Rightarrow -m_y dx + \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy\right) dx - m_{xy} dy + \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx\right) dy$$

$$+v_x dy \frac{dy}{2} - \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} - \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right) dx dy$$

$$-q dx dy \frac{dy}{2} = 0$$

Deprezoando de novo os infinitésimos de ordem superior e simplificando a expressão, resulta de imediato que

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = v_y$$

### 2.3.4 Relações de elasticidade

A relação entre os campos de momentos e os campos de curvaturas é dependente do tipo de comportamento que se admite para o material constituinte da laje. Tendo sido admitida como válida a hipótese da linearidade física, a relação esforços-deformações é linear e dependente das características geométricas da laje (nomeadamente da sua espessura) e das características mecânicas que permitem caracterizar o comportamento elástico linear do material estrutural (módulo de elasticidade,  $E$ , e coeficiente de Poisson,  $\nu$ ).

As relações de elasticidade podem ser escritas na forma:

RELAÇÕES DE ELASTICIDADE - FORMATO DE RIGIDEZ	
$\begin{bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.43)$	

Tabela 2.4: Relações de elasticidade escritas no formato de rigidez

Este é o formato de rigidez para as relações de elasticidade e é, regra geral, o que mais interessa na resolução dos problemas que se surgirão no seguimento. No entanto, situações há em que é necessário determinar as curvaturas associadas a um determinado campo de momentos. Para tal, é possível inverter a equação (2.43) e obter as relações de elasticidade escritas num formato de flexibilidade, tal como se indica no quadro 2.5.

### 2.3.5 Significado físico das relações constitutivas

Antes de se discutir a forma através da qual se podem deduzir as relações de elasticidade, importa salientar o significado físico da informação contida na equação (2.43).



RELAÇÕES DE ELASTICIDADE - FORMATO DE FLEXIBILIDADE	
$\begin{bmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{12}{E h^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.44)$	

Tabela 2.5: Relações de elasticidade escritas no formato de flexibilidade

Antes de mais, é possível verificar que os comportamentos *flexão/torção* se encontram perfeitamente desacoplados. Desta forma, se na laje apenas estiverem instaladas curvaturas de flexão, apenas existirão momentos flectores, sendo nulos os momentos torsores. Por outro lado, se apenas existirem curvaturas de torção, os campos de momentos flectores resultarão de imediato nulos.

A *leitura* da informação contida no formato de flexibilidade das relações constitutivas permite recuperar exactamente o mesmo comportamento. Para que surjam na laje curvaturas de flexão, é necessário que existam momentos flectores não nulos; para que a curvatura de torção tome valores diferentes de zero, é necessário que exista instalado na laje um campo de momentos torsores.

Outra informação relevante resulta da identificação do significado físico de cada uma das colunas da matriz de rigidez da laje,

$$\frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

A primeira coluna desta matriz corresponde aos esforços que se instalam na laje quando se impõe uma deformada caracterizada por  $\chi_x(x, y) = 1.0$  e  $\chi_y(x, y) = \chi_{xy}(x, y) = 0$ . Recorde-se que na figura 2.5 se encontra representada uma deformada que é caracterizada por apresentar esse campo de deformações. Os esforços que aparecem nesta situação são dados por:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ \nu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

São vários os comentários que se podem efectuar a partir da análise de (2.46). Desde logo, é possível verificar que o parâmetro

$$D_f = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.47)$$

corresponde ao valor do momento  $m_x$  que é necessário aplicar para que na laje surja uma deformação por flexão  $\chi_x$  com valor unitário. A esse parâmetro  $D_f$  é usual chamar *rigidez à flexão* do elemento de laje.

O segundo ponto a ter em conta é algo surpreendente se se tiver em conta apenas o que é conhecido para o caso dos elementos de viga. Se se considerar de forma simplificada a laje como um *somatório* de um conjunto de vigas com eixo paralelo a  $x$  e outro conjunto de barras com eixo paralelo a  $y$ , o campo de deformações imposto faz com que as primeiras barras apresentem deformação por flexão, enquanto que as segundas permanecem indeformadas. Desta forma, seria à primeira vista de esperar que o campo de momentos  $m_x(x, y)$  fosse diferente de zero, enquanto que o campo de momentos  $m_y(x, y)$  se anularia.

Ora a equação (2.46) permite verificar de imediato que esta conclusão está errada. De facto, de (2.46) obtém-se:

$$\begin{aligned} m_x(x, y) &= D_f \\ m_y(x, y) &= \nu D_f \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$m_y(x, y) = \nu m_x(x, y) \quad (2.48)$$

Só quando o coeficiente de Poisson se anula é que o campo de momentos  $m_y$  se anula também.

Existe uma explicação simples física bem simples para este facto. Considere-se que a laje resulta de um somatório de vigas com eixo paralelo a  $x$  colocadas uma ao lado das outras (ver figura 2.17).

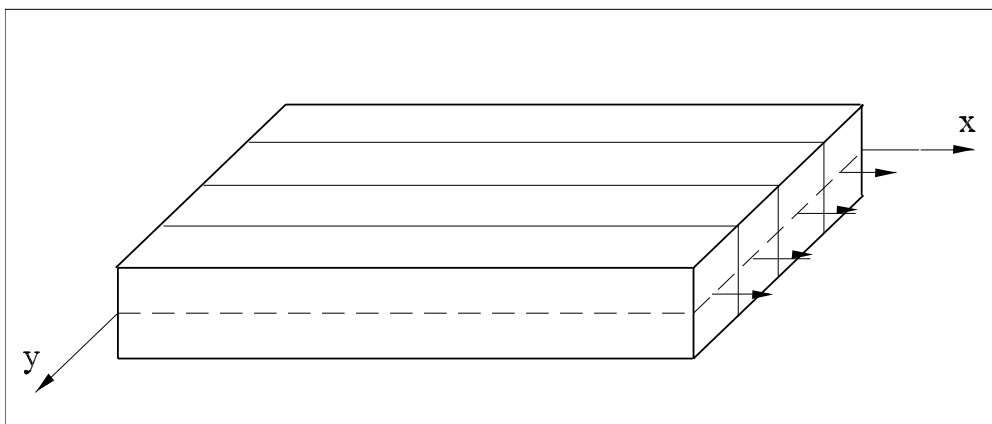


Figura 2.17: Conjunto de vigas com eixo paralelo ao eixo  $x$

Quando se impõe o campo de deformações  $\chi_x(x, y) = 1.0$  e  $\chi_y(x, y) = \chi_{xy}(x, y) = 0$ , estas vigas vão flectir, tal como se encontra representado na figura 2.18.

As fibras longitudinais inferiores encontram-se traccionadas, as superiores comprimidas. O que se passa então ao nível da secção transversal se se tiver em conta o efeito de Poisson? Na figura 2.19 representa-se a deformada da secção transversal de uma das barras em que se considera sub-dividida a laje.

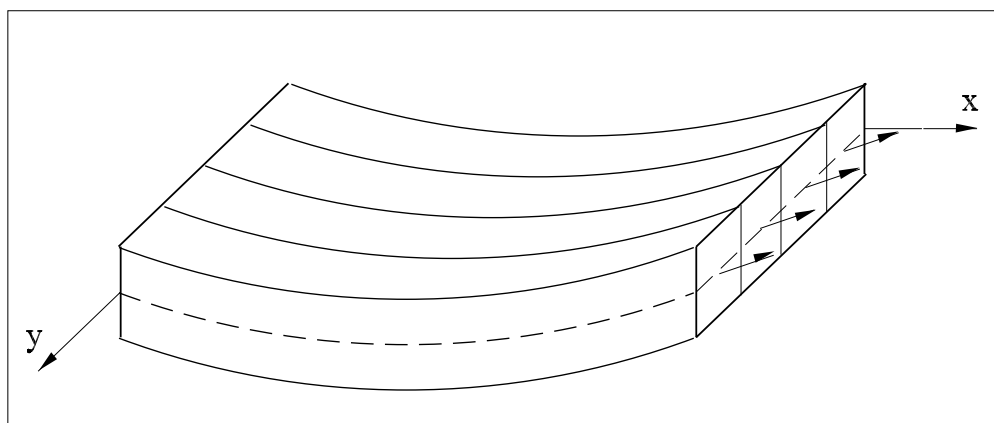


Figura 2.18: Deformação por flexão das vigas com eixo paralelo ao eixo  $x$

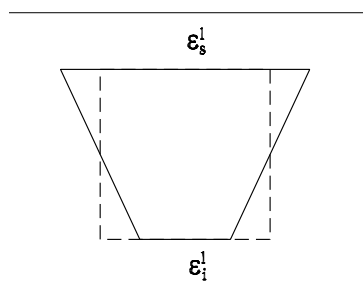


Figura 2.19: Deformação da secção transversal

$\epsilon_s^l$   $\{\epsilon_i^l\}$  representa a extensão axial das fibras longitudinais na face superior {inferior} da viga. O que aconteceria à laje se todas as vigas consideradas anteriormente se deformassem desta forma?

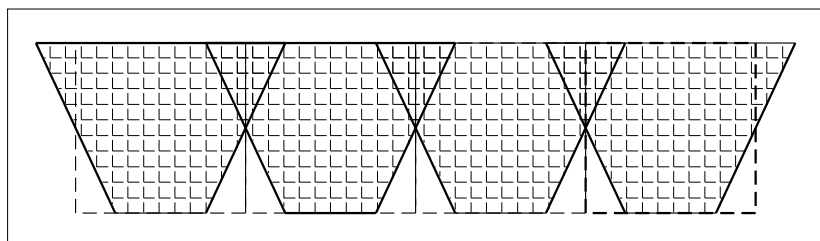


Figura 2.20: Deformada das secções transversais

A figura 2.20 permite verificar que a “soma” das deformadas conduz a uma situação absurda, na qual existem zonas de sobreposição de material e outras onde surgem buracos na deformada. Para que esta situação não ocorra, é necessário que as secções transversais consideradas se mantenham sem deformações, para que a deformada global permaneça compatível. Isto faz com que tenha de existir um momento flector aplicado ao longo da direcção transversal, momento esse que provoque deformações iguais e de sinal contrário às que são induzidas pela deformada de flexão ao longo de  $x$ . Não é difícil verificar que esse momento é dado por  $m_y = \nu m_x$ , tal como se encontra esquematicamente ilustrado na figura 2.21. Encontra-se desta forma justificada de forma intuitiva a equação (2.48).

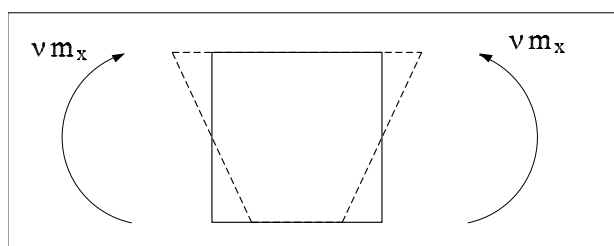


Figura 2.21: Momento a aplicar segundo a direcção transversal

Será agora interessante comparar a rigidez à flexão da laje,  $D_f$ , com a rigidez à flexão de um elemento de viga. Como os esforços na laje são definidos por unidade de comprimento, a comparação deverá ser efectuada com o comportamento de um elemento de viga com secção rectangular onde a altura é igual à altura da laje e a largura é unitária. Na viga tem-se

$$M = EI \chi \quad (2.49)$$

$$M = E \frac{h^3}{12} \chi \quad (2.50)$$

No elemento de laje, a identificação do significado físico dos elementos da matriz de rigidez (2.45) permite recuperar

$$m_x = E \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \chi_x \quad (2.51)$$

Comparando as equações (2.50) e (2.52), verifica-se que há uma ligeira diferença entre as rigidezes à flexão das vigas e das lajes. Estas grandezas serão coincidentes apenas quando se considera como nulo o coeficiente de Poisson ( $\nu = 0$ ). Pode dizer-se que a “inércia equivalente” de uma faixa de laje com um metro de largura é dada por:

$$I_{eq} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.52)$$

Esta informação será retomada no capítulo em que se descreve a modelação de lajes com elementos de grelha.

Interessante ainda é verificar qual apresenta um valor maior, se a rigidez à flexão da viga, ou a rigidez à flexão da laje. Ou seja, o momento  $m_x$  que é necessário aplicar para instalar uma curvatura de flexão unitária ao longo de  $x$  na laje é maior ou mais pequeno que o momento que é necessário aplicar na viga para ter exactamente o mesmo tipo de deformação?

As equações (2.50) e (2.52) permitem verificar que a rigidez de flexão da laje é ligeiramente superior à da viga. Existe uma justificação simples para este facto, que de novo está relacionado com a existência do constrangimento lateral que existe nos elementos de laje e que está ausente no caso dos elementos de viga.

A segunda coluna da matriz de rigidez (2.45), corresponde agora aos esforços que surgem na laje quando se impõe que  $\chi_y(x, y) = 1.0$  e  $\chi_x(x, y) = \chi_{xy}(x, y) = 0$ . Um dos campos de deslocamentos representados na figura 2.5 é caracterizado pelos campos de deformações acima indicados. É possível escrever-se:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = D_f \begin{bmatrix} \nu \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Os comentários que aqui se podem tecer são em tudo semelhantes aos que foram efectuados a propósito da identificação do significado físico da primeira coluna da matriz de rigidez.

Finalmente, a terceira coluna da matriz de rigidez corresponde aos esforços que surgem na laje quando se impõe uma curvatura de torção com valor unitário,  $\chi_{xy} = 1$ , e se garante que as curvaturas de flexão se anulam,  $\chi_x = \chi_y = 0$ . Obtém-se nesta situação:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\nu \end{bmatrix} = D_t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

O parâmetro

$$D_t = \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \quad (2.55)$$

corresponde à rigidez à torção da laje, ou seja, o valor do momento torsor que é necessário aplicar para que se instale na laje uma curvatura de torção com valor unitário.

De novo será interessante efectuar um paralelo com o que se passa na teoria das peças lineares. Qual é a rigidez à torção de uma viga com secção transversal rectangular com  $b = 1\text{ m}$  e  $h = h_{laje}$ ? Recorde-se que se tem

$$M_t = GJ\phi = \frac{E}{2(1+\nu)} J\phi$$

em que  $M_t$  é o momento torsor na viga e  $\phi$  corresponde à deformação por torção. Considerando que se trata de uma secção rectangular e assumindo que  $b \gg h$ , pode escrever-se

$$M_t = GJ\phi = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{h^3}{3} \phi \quad (2.56)$$

As relações constitutivas da laje permitem escrever

$$m_{xy} = \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \chi_{xy} \quad (2.57)$$

$$m_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{h^3}{6} \chi_{xy} \quad (2.58)$$

A comparação entre as igualdades (2.56) e (2.58) permite concluir que a “rigidez à torção equivalente” de uma faixa de laje com um metro de largura é fornecida por

$$J_{eq} = \frac{h^3}{6}$$

Esta informação será de novo relevante quando se discutir mais à frente a modelação de lajes com elementos de grelha.

As igualdades anteriores permitem ainda concluir que a rigidez à torção da laje é igual a metade da rigidez à torção de um elemento de viga com a secção transversal com as dimensões anteriormente indicadas. Mais uma vez, existe uma explicação simples e intuitiva. É que no caso das lajes, e tal como foi discutido na secção 2.2.3, existem dois momentos torsores que actuam em simultâneo. De uma forma um pouco mais rigorosa, pode afirmar-se então que para o aparecimento de uma curvatura de torção unitária contribuem os momentos torsores ao longo de  $x$  ( $m_{xy}$ ) e os momentos torsores ao longo de  $y$  ( $m_{yx} = m_{xy}$ ).

### 2.3.6 Obtenção das relações de elasticidade\*

Para se determinarem as relações de elasticidade, considerem-se as relações tensões-deformações definidas pela lei de Hooke. Se se assumir que as tensões normais  $\sigma_{zz}$  são desprezáveis, é possível escrever-se

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Conhecida a relação tensões-deformações e a relação entre estas grandezas e as correspondentes grandezas generalizadas (esforços e curvaturas), é possível obter-se a relação de elasticidade procurada. Para tal, basta substituir as igualdades (2.25), (2.26) e (2.27) na equação anterior, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} z \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix}$$

Se se considerarem agora as definições (2.19), (2.22) e (2.20), é possível obter-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} &= \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.4 Equação de Lagrange

Nas secções anteriores definiram-se as grandezas em função das quais se descreve o comportamento das lajes finas e obtiveram-se as equações que permitem relacionar essas mesmas grandezas.

O diagrama da figura 2.22 resume toda a informação apresentada e discutida nas secções anteriores.

Para que um dado campo de deslocamentos possa ser considerado como a solução exacta, é necessário que as curvaturas obtidas a partir das condições de compatibilidade permitam dar origem a um campo de esforços que satisfaça as condições de equilíbrio.

Pode desta forma dizer-se que uma dada solução só poderá ser exacta se satisfizer em simultâneo as condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade.

À semelhança do que se passa no elemento de viga, também é possível obter uma equação que resulta da condensação das três equações fundamentais atrás descritas. Recorde-se que no caso do elemento de viga, a junção das condições (2.35), (2.42) e (2.49) permite obter a equação

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI}$$

que relaciona a quarta derivada do campo de deslocamentos transversais com a carga distribuída aplicada e com a rigidez de flexão da viga,  $EI$ . No caso das lajes finas também

$$v_x(x, y) = \frac{\partial m_{xx}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial y}$$

$$v_y(x, y) = \frac{\partial m_{xy}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial m_{yy}(x, y)}{\partial y}$$

$$\begin{matrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = D_f \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx}(x, y) \\ \chi_{yy}(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \chi_{xx}(x, y) \\ \chi_{yy}(x, y) \\ \chi_{xy}(x, y) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$$

$$q(x, y)$$

$$\chi_{xx}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\chi_{yy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$\theta_x(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

$$\theta_y(x, y) = -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$$

$$w(x, y)$$

Figura 2.22: Grandezas e equações fundamentais nas lajes de Kirchhoff



é possível efectuar a junção das condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade na obtenção de uma única equação. Desta forma, se se substituírem as condições de compatibilidade nas relações constitutivas obtém-se:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Se se substituírem estes campos de momentos na equação de equilíbrio (2.39), resulta após a execução de algumas simplificações:

EQUAÇÃO DA LAJE (EQUAÇÃO DE LAGRANGE)	
$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D_f} \quad (2.60)$	

Tabela 2.6: Equação de Lagrange

Esta é a equação diferencial que rege o comportamento da laje e é geralmente conhecida como Equação de Lagrange. A analogia com o que se passa nos elementos de viga é mais uma vez notória. A equação de Lagrange também relaciona quartas derivadas dos campos de deslocamentos transversais com a carga distribuída aplicada e com a rigidez à flexão da laje,  $D_f$ .

A semelhança entre as equações da viga e da laje ainda é maior se se escrever a equação de Lagrange na forma:

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D_f} \quad (2.61)$$

onde

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$$

Para se conseguir determinar a solução para uma dada laje será suficiente a utilização da equação de Lagrange? Tal como no caso das peças lineares, a consideração da equação diferencial no domínio não permite, por si só, que se consiga determinar a solução para o problema que se coloca. Para que a análise se possa efectuar, torna-se indispensável que se especifiquem as condições de fronteira para o problema. As condições de fronteira podem ser de dois tipos: as condições de fronteira cinemáticas, nas quais se especifica qual o valor dos deslocamentos num determinado bordo, e as condições de fronteira estáticas, que passam pela imposição de um determinado valor para as cargas directamente aplicadas nesse bordo.

## 2.5 Definição das condições de fronteira

Discutem-se nesta secção quais as condições de fronteira mais usuais em problemas de lajes. Considera-se que os troços da fronteira de uma laje, aos quais se costuma chamar bordos, se podem encontrar encastrados, simplesmente apoiados ou ainda livres.

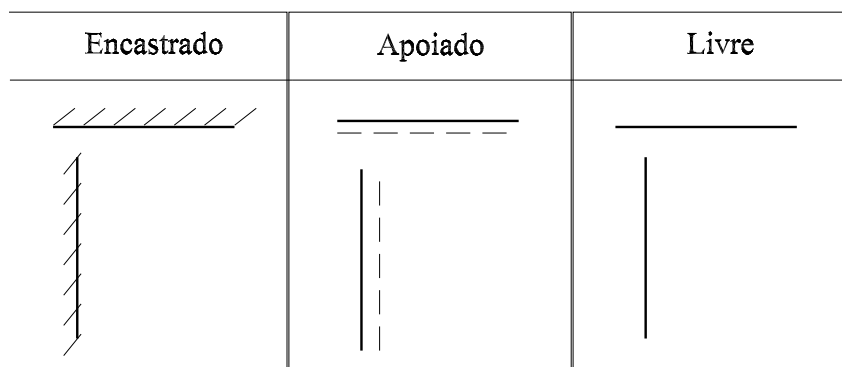


Figura 2.23: Tipos de apoios a considerar

A simbologia adoptada para referenciar cada um desses tipos de apoio encontra-se representada na figura 2.23. Por simplicidade, considera-se na apresentação que se segue que todos os bordos são paralelos a algum dos eixos do sistema de coordenadas,  $(x, y)$ . No entanto, e sempre que tal se justifique, discutir-se-á a generalização dos resultados obtidos para o caso mais geral em que o bordo se encontra inclinado em relação ao referencial adoptado.

### 2.5.1 Bordos encastrados

Considere-se a laje rectangular representada na figura 2.24. Todos os bordos encontram-se encastrados. Quais são então as condições de fronteira a verificar neste caso?

Começemos por analisar o bordo I. Numa primeira abordagem, e sobretudo se se tiver em conta o que se passa nos nós encastrados de um elemento de viga, poder-se-á dizer que as condições a impor são:

$$w(0, y) = 0 \quad (2.62)$$

$$\theta_x(0, y) = 0 \quad (2.63)$$

$$\theta_y(0, y) = 0 \quad (2.64)$$

É importante salientar desde já que para que uma dada condição de fronteira se verifique ao longo de um determinado bordo, é necessário que essa condição seja verdadeira em

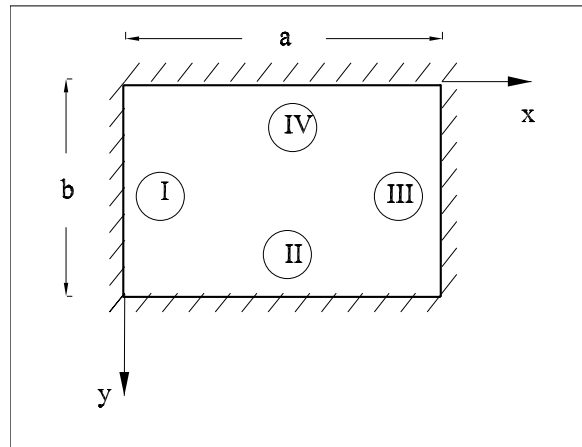


Figura 2.24: Laje rectangular com todos os bordos encastrados

todos os pontos pertencentes a essa fronteira. Basta que haja um só ponto onde a equação em causa não seja verificada, para que se possa dizer de imediato que a condição de fronteira não está satisfeita.

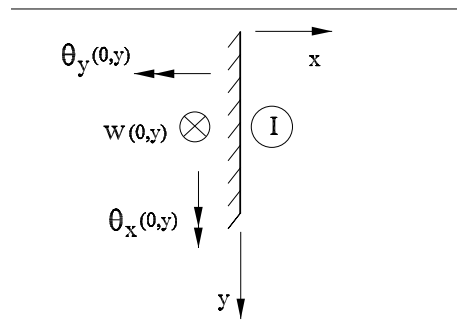


Figura 2.25: Condições de fronteira a considerar ao longo do bordo I

A pergunta que se coloca neste instante é a seguinte: será que no bordo I é necessário impor directamente as três condições indicadas nas equações (2.62), (2.63) e (2.64)? Ou, pelo contrário, há alguma das condições que dependem das restantes?

Tendo em conta a equação (2.7), é possível verificar de imediato que a condição  $w(0, y) = 0$  implica que  $\theta_y(0, y) = 0$ . Desta forma, neste bordo da laje encastrada as condições de fronteira a considerar são:

$$w(0, y) = 0$$

$$\theta_x(0, y) = 0$$

De uma forma geral, pode afirmar-se que num bordo encastrado há sempre duas condições de fronteira a verificar. O deslocamento transversal deve ser nulo, assim como deve ser nula a rotação em torno do bordo em causa. Na laje representada na figura 2.24, essas condições correspondem a

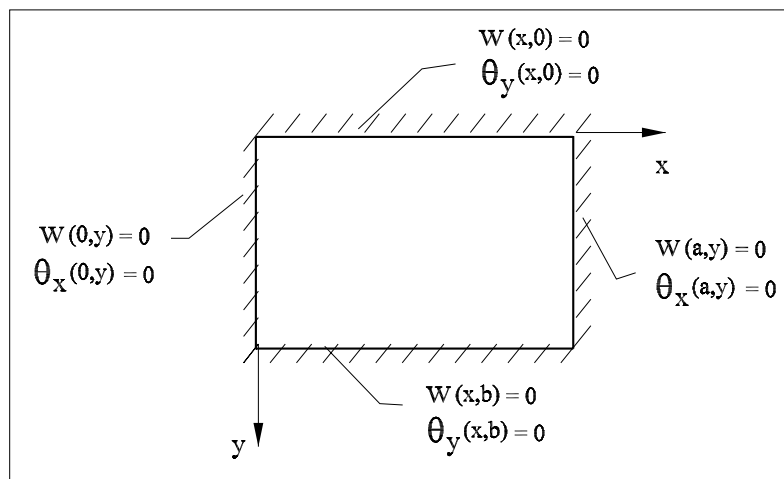


Figura 2.26: Condições de fronteira a considerar na laje com todos os bordos encastrados

Vamos considerar agora que o bordo encastrado se encontra inclinado em relação ao sistema de eixos considerado. Ter-se-à, por exemplo, uma situação semelhante à que se encontra representada na figura 2.27.

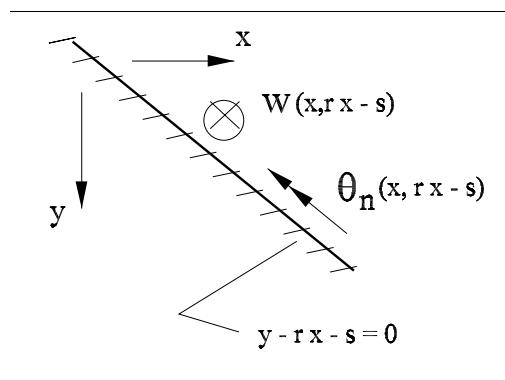


Figura 2.27: Condições de fronteira a considerar num bordo encastrado inclinado

Tratando-se de um bordo encastrado, deverão ser nulos os deslocamentos transversais e as rotações em torno da recta  $y = r x + s$ , representados na figura 2.27 respectivamente por  $w(x, r x + s)$  e  $\theta_n(x, r x + s)$ . Qual a relação entre esta rotação e as rotações  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$ ? A maneira mais fácil de responder a esta pergunta consiste em efectuar a mudança de coordenadas representada na figura 2.28.

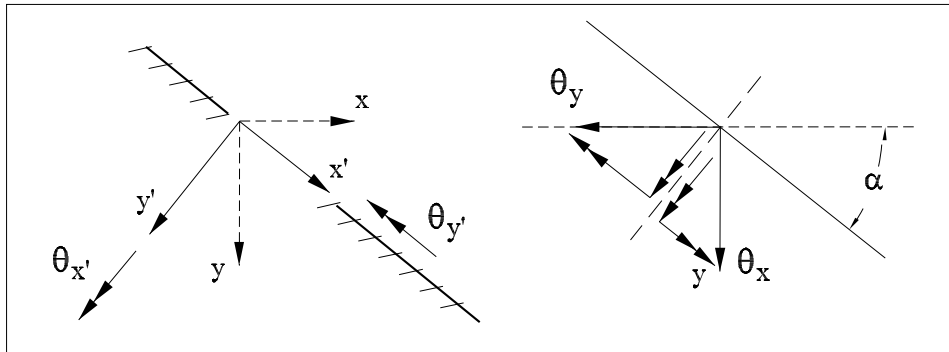


Figura 2.28: Mudança de coordenadas

Podem agora escrever-se as condições de fronteira no formato

$$w(x, r x + s) = 0$$

$$\theta_{y'}(x, r x + s) = 0$$

Tendo em conta que os campos de rotações são grandezas vectoriais, é simples verificar que:

$$\theta_{y'} = -\theta_x \sin(\alpha) + \theta_y \cos(\alpha)$$

A figura 2.29 resume as condições de fronteira a considerar num bordo encastrado, onde  $\theta_n$  representa a rotação em torno de um bordo com normal exterior com a direcção de  $n$ .

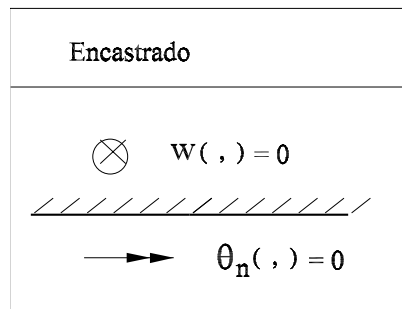


Figura 2.29: Condições de fronteira a considerar num bordo encastrado

A existência de duas condições de fronteira em cada bordo é uma característica que vai estar presente também no caso dos bordos simplesmente apoiados e no caso dos bordos livres.

## 2.5.2 Bordos simplesmente apoiados

Considere-se agora a laje rectangular simplesmente apoiada em todo o seu contorno e que se encontra representada na figura 2.30. Neste tipo de apoio, e à semelhança do que

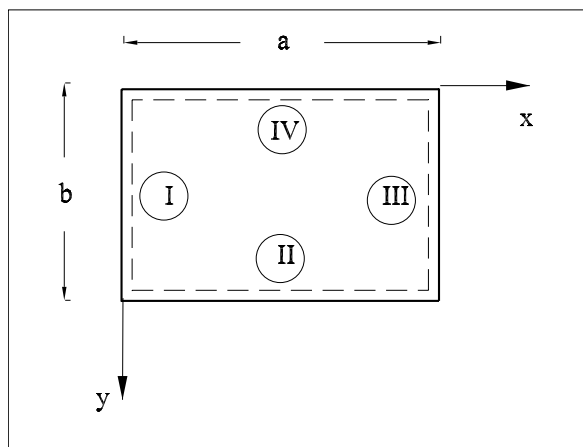


Figura 2.30: Laje rectangular simplesmente apoiada em todo o seu contorno

acontece nos nós simplesmente apoiados dos elementos de viga, as condições de fronteira passam pela imposição do valor de uma grandeza cinemática (campo de deslocamentos transversais) e de uma grandeza estática (campo de momento flector ao longo da direcção da normal exterior ao bordo). Na figura 2.31 encontram-se todas as condições de fronteira a considerar para a laje apresentada na figura 2.30. Nesta figura,  $\bar{m}_I$ ,  $\bar{m}_{II}$ ,  $\bar{m}_{III}$ , e  $\bar{m}_{IV}$ , correspondem a distribuições de momentos aplicados ao longo do contorno da laje. Caso não existam distribuições de momentos aplicados sobre os bordos em causa, os valores de  $\bar{m}_J$  devem ser considerados como nulos.

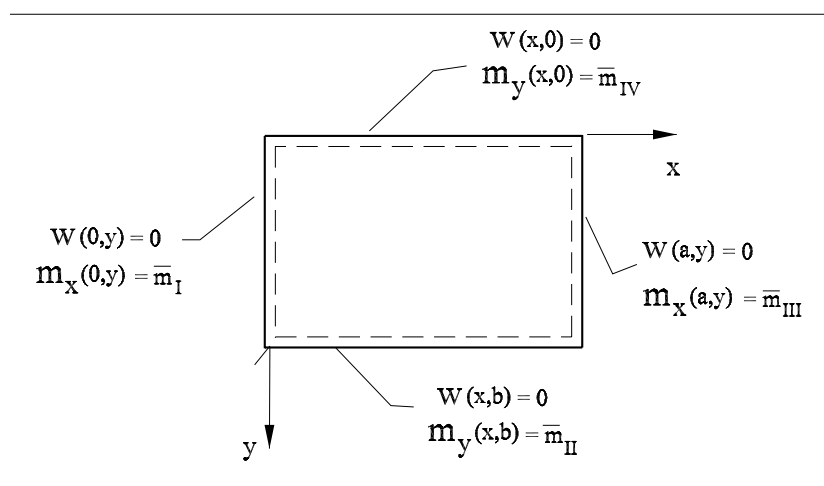


Figura 2.31: Condições de fronteira a verificar numa laje rectangular simplesmente apoiada

A figura 2.32 resume as condições de fronteira a considerar num bordo simplesmente apoiado. Nessa figura,  $m_n(x, y)$  representa o campo de momentos flectores existente ao longo da direcção definida pela normal exterior ao bordo em análise.

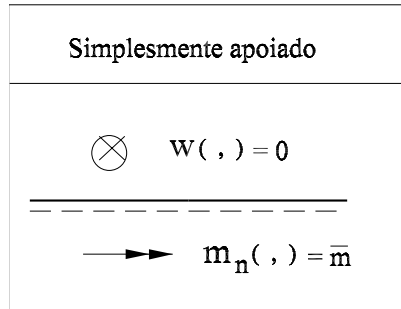


Figura 2.32: Condições de fronteira a verificar num bordo simplesmente apoiado

Para finalizar a discussão deste tipo de apoios, falta apenas verificar o que se passa quando o bordo simplesmente apoiado se encontra inclinado. Tendo em conta a mudança de coor-

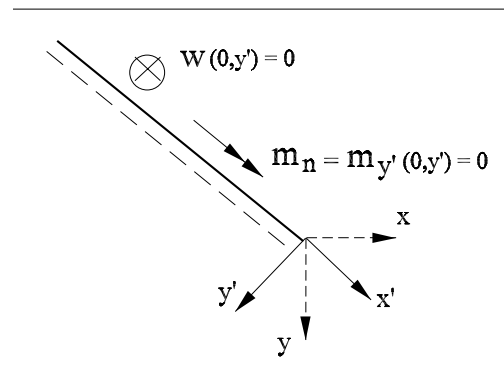


Figura 2.33: Condições de fronteira a verificar num bordo simplesmente apoiado inclinado

denadas referida acima, é possível verificar que o momento que se deve anular ao longo do bordo apoiado é o momento flector  $m_{y'}$ . Tendo em atenção que os campos de momentos flectores e torsões definem um tensor simétrico de segunda ordem, a mudança de coordenadas indicada implica a utilização das leis de transformação tensoriais. Desenvolvendo as equações (2.24), obtém-se:

$$m_{x'} = m_x \cos^2(\alpha) + m_y \sin^2(\alpha) + 2m_{xy} \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$m_{y'} = m_x \sin^2(\alpha) + m_y \cos^2(\alpha) - 2m_{xy} \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$m_{x'y'} = \frac{1}{2}(-m_x \sin(2\alpha) + m_y \sin(2\alpha) + 2m_{xy} \cos(2\alpha))$$

### 2.5.3 Bordos livres

É no tratamento dos bordos livres que surge uma novidade em relação ao que é habitual considerar na teoria de vigas. Considere-se então a laje representada na figura 2.34,

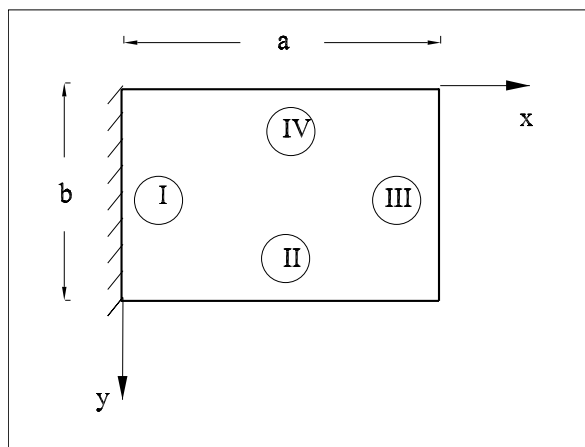


Figura 2.34: Laje com bordos livres

onde todos os bordos se encontram livres, à exceção do bordo  $x = 0$ , que se encontra encastrado.

Quais são as condições a impor no bordo III? Tratando-se de um bordo onde não é imposto qualquer deslocamento, é natural considerar que todos os esforços se devem anular (a menos que existam distribuições de cargas ou momentos aplicados ao longo desse bordo). Numa primeira análise, deverão então considerar-se as condições (ver figura 2.35)

$$v_x(a, y) = 0 \quad (2.65)$$

$$m_x(a, y) = 0 \quad (2.66)$$

$$m_{xy}(a, y) = 0 \quad (2.67)$$

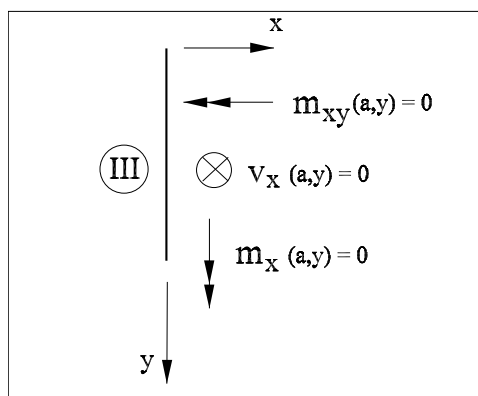


Figura 2.35: Condições a considerar no bordo III

A existência de três condições ao longo de um mesmo bordo contradiz desde logo o que foi dito anteriormente. Recorde-se que se afirmou que independentemente das condições



de apoio, apenas é possível impor duas condições de fronteira independentes por bordo. Esta afirmação tem uma justificação matemática rigorosa. É possível demonstrar-se que as equações diferenciais do tipo da Equação de Lagrange apenas permitem a imposição de duas condições em cada troço em que se considera sub-dividida a fronteira do domínio em estudo.

Tal como no caso do bordo encastrado, há a necessidade de se transformarem duas dessas condições em apenas uma. No bordo encastrado, as dependências existem entre a imposição do deslocamento transversal e a imposição da rotação em torno da normal ao bordo. Transpondo essa informação para o bordo livre, a intuição diz-nos que as duas condições a fundir deverão dizer respeito aos esforços transversos  $v_x$  (força vertical) e ao momento torsor  $m_{xy}$  (momento em torno da normal ao bordo).

Para se definir uma grandeza estaticamente equivalente ao esforço transversal e ao momento torsor, considere-se a informação contida na figura 2.36, onde se encontram representados de forma esquemática esses dois esforços ao longo do bordo III.

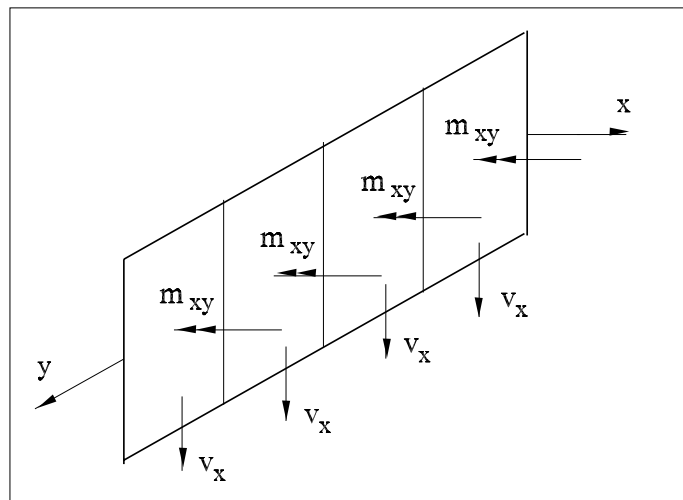


Figura 2.36: Esforços transversos e momentos torses no bordo III

Considere-se que a laje se encontra sub-dividida num conjunto de “fatias”, também indicadas na mesma figura. O número de sub-divisões é arbitrário e pode ser considerado tão grande quanto se queira.

A forma mais fácil de se poder efectuar a “soma” destes dois esforços, consiste em transformar a distribuição de momentos torses numa distribuição de forças verticais estaticamente equivalentes. Para tal efeito, substitui-se em cada uma das fatias consideradas na figura 2.36 o momento torsor resultante por um binário que lhe seja estaticamente equivalente. Obter-se-á então a distribuição de forças verticais representadas na figura 2.37.

O que acontece se o momento torsor for constante ao longo de todo o bordo? Todas as forças verticais que surgem nesta transformação têm o mesmo valor. Desta forma,

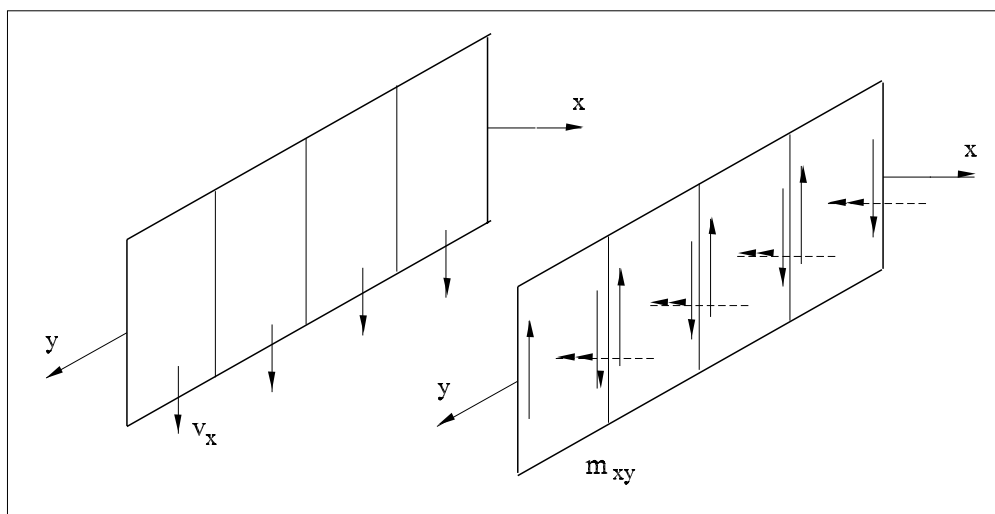


Figura 2.37: Equivalência estática no bordo III

a resultante dessas forças nas fronteiras entre fatias é nula. O momento torsor no lado será então estaticamente equivalente a duas forças concentradas aplicadas nos vértices do bordo considerado.

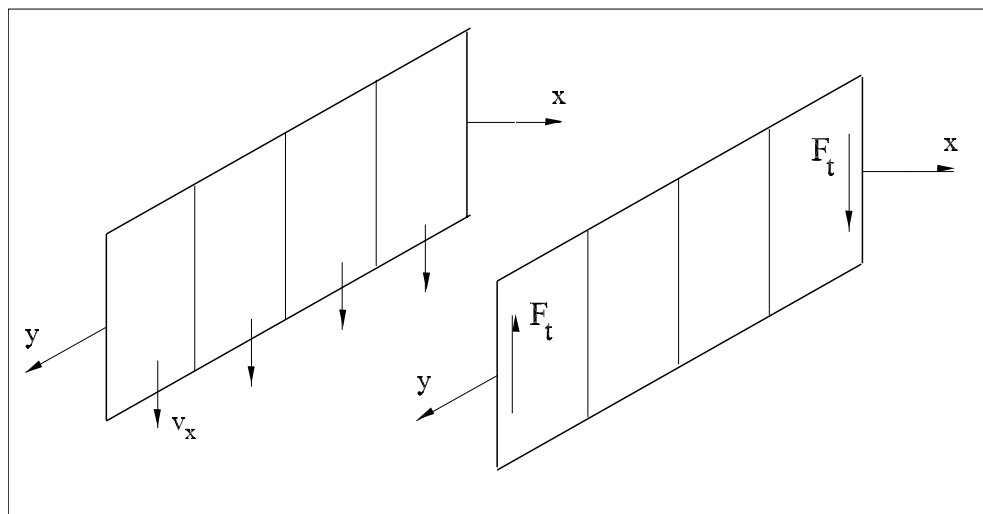


Figura 2.38: Aparecimento de forças de canto no bordo III

O esforço transversal “efectivo” continua a ser idêntico à distribuição  $v_x$ , surgindo apenas a necessidade de se considerar a existência de forças de canto,  $F_t$ . Para verificar quanto valem estas forças, considere-se o que se passa na transformação momento torsor/binário numa fatia de laje de comprimento infinitesimal  $dy$ .

Não esquecendo que nas lajes os momentos têm uma dimensão física de momento por

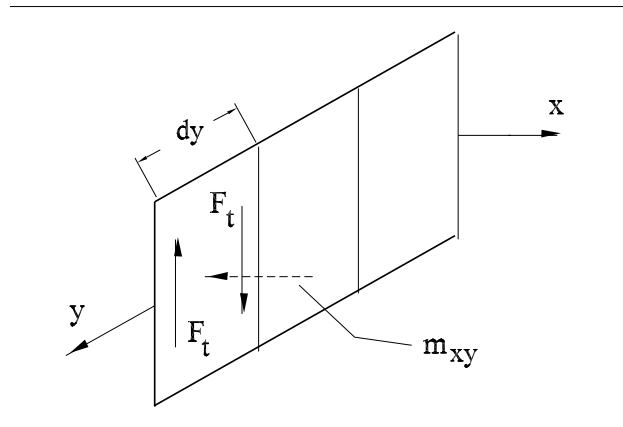


Figura 2.39: Determinação do valor das forças de canto

unidade de comprimento, é possível escrever:

$$m_{xy} \times dy = F_t \times dy \Rightarrow F_t = m_{xy} \quad (2.68)$$

Considere-se agora que toda a laje está sujeita a um campo de momentos torsões constante e com um valor positivo. A transformação destes momentos torsões em binários permite de imediato obter

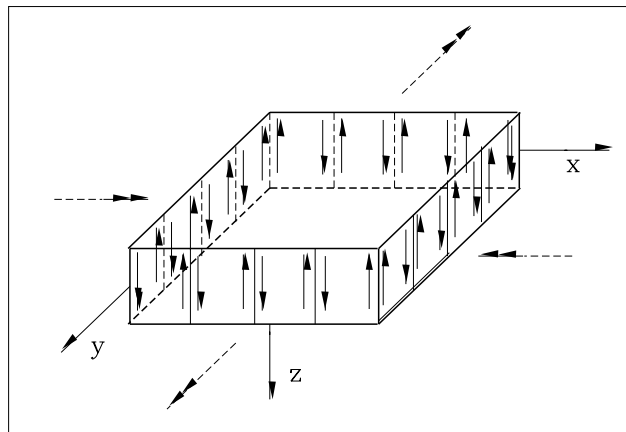


Figura 2.40: Equivalência estática em toda a laje

Sendo  $m_{xy}$  constante, todas as forças na interface entre fatias se anulam e apenas restam as forças concentradas nos cantos, que terão um valor dado por  $2m_{xy}$ , tal como se encontra indicado na figura 2.41.

A construção anterior foi efectuada considerando que a distribuição de momentos torsões é constante. Ora esta situação é pouco frequente, pelo que se torna necessário averiguar quais as alterações a introduzir quando o valor de  $m_{xy}$  varia ao longo do bordo. Considere-

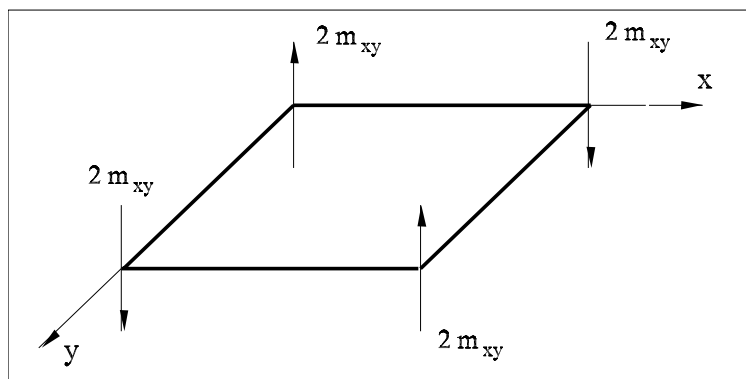


Figura 2.41: Valor das forças de canto em toda a laje

se de novo o que se passa no bordo III, quando se assume que  $m_{xy}$  aumenta ao longo de  $y$ .

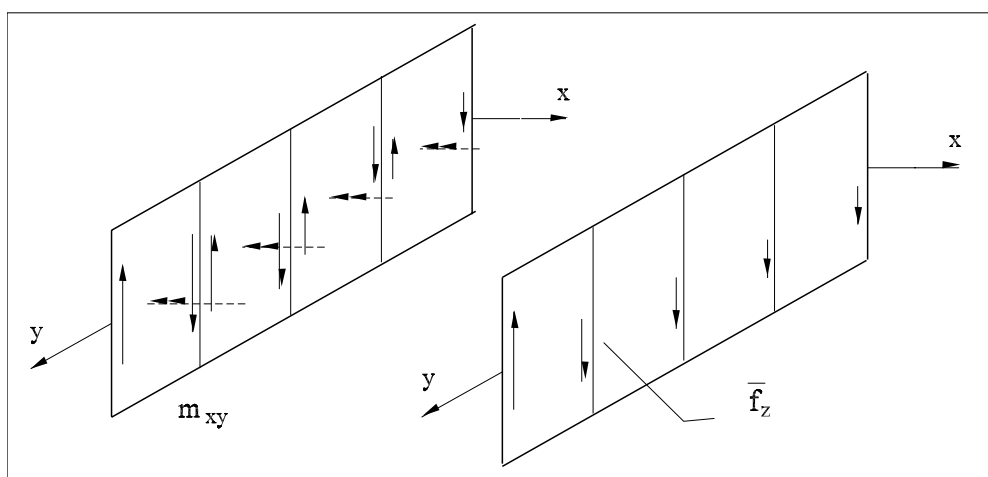


Figura 2.42: Equivalência estática ao longo do bordo III com momento torsor variável

As forças componentes dos binários variam agora de fatia para fatia. Assim, a resultante nas interfaces entre fatias deixa de ser nula, surgindo um conjunto de forças verticais distribuídas que é possível somar à distribuição de forças verticais correspondendo ao esforço transversal  $v_x$ .

À soma do esforço transversal  $v_x(x, y)$  com a distribuição de forças  $\bar{f}_z$  que resulta da passagem momentos torsores-binário é usual chamar *esforço transversal efectivo*,  $r_x(x, y)$ . Define-se

$$r_x(x, y) = v_x(x, y) + \bar{f}_z \quad (2.69)$$

É em função dos esforços transversos efectivos que se impõe uma das condições de fronteira nos bordos livres. Para se poder determinar a expressão que define esta nova grandeza, é

necessário obter a relação entre  $\bar{f}_z$  e a variação do campo de momentos torsores que lhe dá origem. Considerem-se para o efeito duas fatias infinitesimais de lajes colocadas uma ao lado da outra.

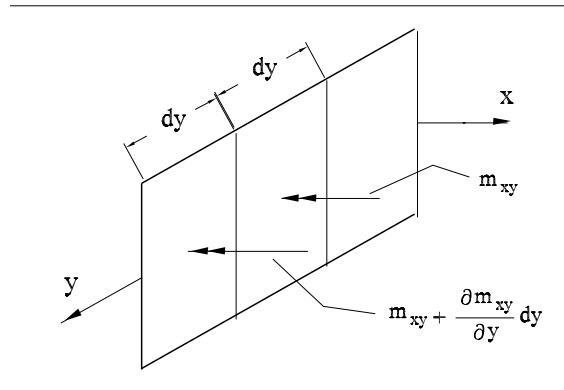


Figura 2.43: Variação do momento torsor entre fatias adjacentes

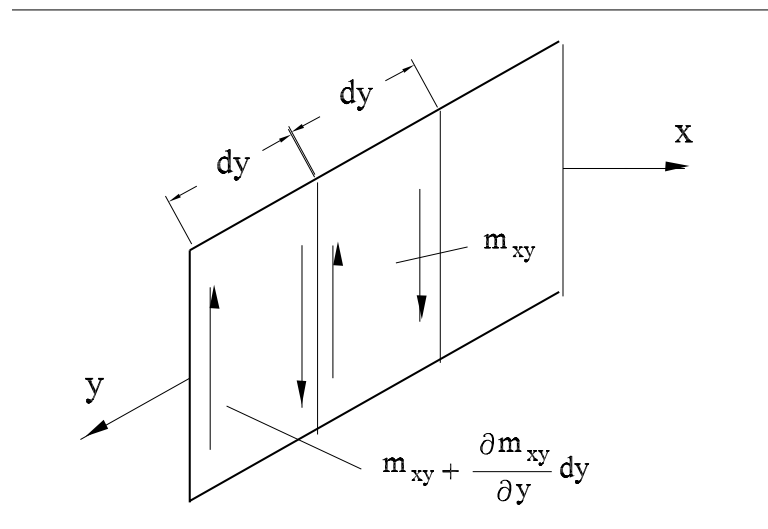


Figura 2.44: Determinação do valor de  $\bar{f}_z$

Na figura 2.43 representa-se a evolução de  $m_{xy}$  ao longo dessas duas fatias. Os correspondentes binários são obtidos tendo em conta (2.68), tal como se encontra representado na figura 2.44. Desta forma, na interface a resultante valerá

$$F_z = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy$$

Se se distribuir esta força concentrada pelo comprimento da fatia, obtém-se finalmente

$$\bar{f}_z = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

Sendo assim, o esforço transverso efectivo  $r_x(x, y)$  será dado pela equação

$$r_x(x, y) = v_x(x, y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (2.70)$$

A análise desta equação permite recuperar o comportamento discutido de forma mais intuitiva. Quando ao longo de bordo com normal exterior segundo  $x$  o momento tursor é constante,

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$$

o esforço transverso efectivo  $r_x$  é igual ao esforço transverso  $v_x$ . Quando esse momento tursor varia, ao campo  $v_x$  é necessário somar uma parcela adicional referente à “transformação” do momento tursor num conjunto de binários.

Tendo em conta a equação de equilíbrio (2.36), é possível escrever

$$r_x(x, y) = \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (2.71)$$

Efectuando um raciocínio semelhante para os bordos com normal exterior segundo  $y$ , é possível verificar que o esforço transverso efectivo ao longo dessa direcção é dado por:

$$r_y(x, y) = v_y(x, y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (2.72)$$

A equação de equilíbrio (2.37) permite agora escrever:

$$r_y(x, y) = \left( \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial m_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (2.73)$$

É importante ter sempre presente que ao longo da fronteira da laje a distribuição de esforços transversos  $v_x(x, y)$  e  $v_y(x, y)$  e o campo de momentos tsores  $m_{xy}(x, y)$  são estaticamente equivalentes às distribuições de esforços transversos efectivos,  $r_x(x, y)$  e  $r_y(x, y)$ , e às forças de canto. Esta equivalência encontra-se ilustrada na figura 2.45.

Os valores das forças de canto continuam a ser dados pelas igualdades

$$\begin{aligned} |R(0, 0)| &= 2 |m_{xy}(0, 0)| & |R(0, b)| &= 2 |m_{xy}(0, b)| \\ |R(a, b)| &= 2 |m_{xy}(a, b)| & |R(a, 0)| &= 2 |m_{xy}(a, 0)| \end{aligned}$$

Como agora os momentos tsores podem tomar valores diferentes em cada canto, as reacções de canto também serão diferentes se tal vier a acontecer. Quanto ao sentido dessas forças, ele será o que se encontra indicado na figura 2.41 se o momento tursor no canto em causa for positivo. Se  $m_{xy}$  for negativo, torna-se necessário trocar o sentido à força correspondente.

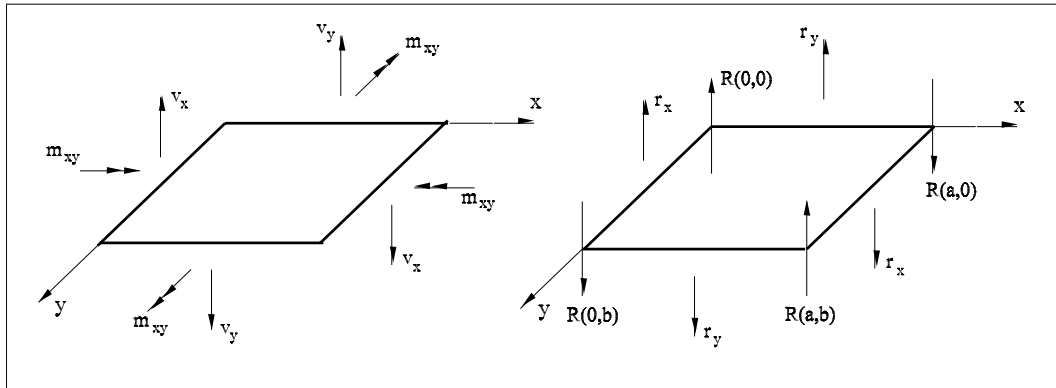


Figura 2.45: Equivalência estática na laje

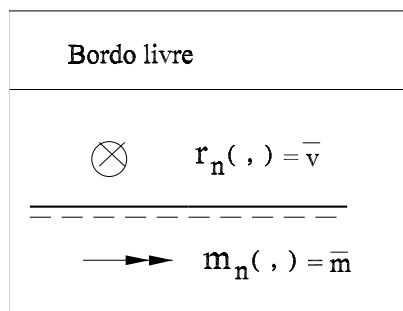


Figura 2.46: Condições de fronteira a verificar em bordos livres

A figura 2.46 resume as condições de fronteira a verificar em bordos livres. Nesta figura,  $n$  indica a direcção da normal exterior ao bordo livre;  $\bar{v}_n$  e  $\bar{m}_n$  são distribuições de forças verticais e momentos aplicadas directamente ao longo do bordo.

No caso da laje representada na figura 2.34, as condições de fronteira a verificar nos bordos II, III e IV, são as que se encontram indicadas na figura 2.47. Por simplicidade, considera-se que neste caso não existem cargas aplicadas nos bordos livres.

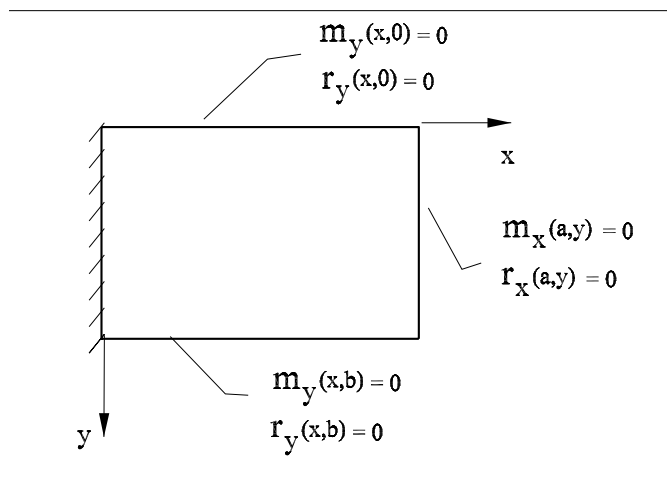


Figura 2.47: Condições de fronteira na laje da figura 2.34

Por fim, é interessante verificar que a imposição da condição

$$r_x(a, y) = v_x(a, y) + \frac{\partial m_{xy}(a, y)}{\partial y} = 0$$

não implica necessariamente o anulamento dos campos de esforços  $v_x$  e  $m_{xy}$  ao longo desse bordo.



## 2.6 Identificação de soluções exactas

Um campo de deslocamentos transversais corresponde à solução exacta se:

1. No domínio se encontra verificada a equação de Lagrange, (A.10);
2. Na fronteira estão satisfeitas todas as condições de fronteira.

Na tabela 2.7 encontram-se sumarizadas estas condições.

SOLUÇÕES EXACTAS											
No domínio  $\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D_f}$											
Na fronteira <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">Bordo encastrado</th> <th style="padding: 5px;">Bordo simplesmente apoiado</th> <th style="padding: 5px;">Bordo livre</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>w = \bar{w}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>w = \bar{w}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>r_n = \bar{r}_n</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_n = \bar{\theta}_n</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>m_n = \bar{m}_n</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>m_n = \bar{m}_n</math></td> </tr> </tbody> </table>			Bordo encastrado	Bordo simplesmente apoiado	Bordo livre	$w = \bar{w}$	$w = \bar{w}$	$r_n = \bar{r}_n$	$\theta_n = \bar{\theta}_n$	$m_n = \bar{m}_n$	$m_n = \bar{m}_n$
Bordo encastrado	Bordo simplesmente apoiado	Bordo livre									
$w = \bar{w}$	$w = \bar{w}$	$r_n = \bar{r}_n$									
$\theta_n = \bar{\theta}_n$	$m_n = \bar{m}_n$	$m_n = \bar{m}_n$									

Tabela 2.7: Condições para que uma solução possa ser considerada como exacta

---

### Problema 2.1

Considere-se a laje simplesmente apoiada representada na figura 2.48.

Para que a função

$$w(x, y) = \frac{1}{8D_f} (4 - x^2) (4 - y^2) \quad (2.74)$$

possa representar a *solução exacta* da laje, qual deverá ser o carregamento a aplicar no vão e nos bordos da laje?

#### Resolução

O campo de deslocamentos transversais fornecido encontra-se representado na figura 2.49. Os valores representados foram escalados na forma  $\bar{w} = -w \times D_f$ .

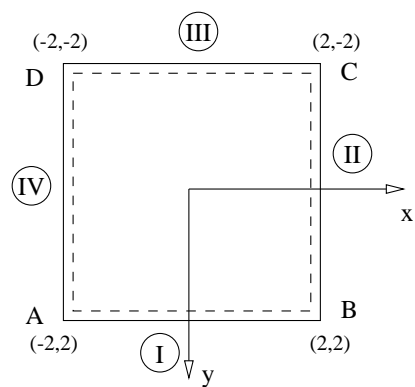


Figura 2.48: Definição da laje a analisar.

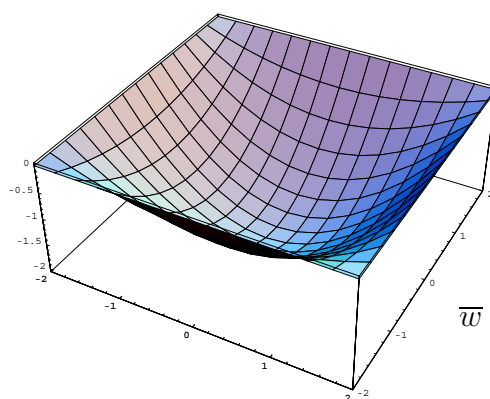


Figura 2.49: Campo de deslocamentos transversais

a) Verificação da equação de Lagrange

Derivando a solução (2.74), podem obter-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= -\frac{1}{4D_f} x (4 - y^2) , \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} &= -\frac{1}{4D_f} (4 - x^2) y ; \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4D_f} (4 - y^2) , \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} &= -\frac{1}{4D_f} (4 - x^2) , \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2D_f} x y ; \\ \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} &= 0 , \\ \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{2D_f} , \\ \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} &= 0 ;\end{aligned}$$

Substituindo as igualdades anteriores na equação de Lagrange, obtém-se a condição:

$$0 + 2 \times \frac{1}{2D_f} + 0 = \frac{q}{2D_f} \Rightarrow q = 1.0 \text{ kN/m}^2$$

Como conclusão, pode dizer-se que para que o campo de deslocamentos apresentado em (2.74) possa ser considerado como a solução exacta do problema, é necessário que esteja aplicada na laje uma carga uniformemente distribuída com valor unitário,  $q(x, y) = 1.0 \text{ kN/m}^2$ .

No entanto, ainda não se pode garantir que a equação dada corresponda *de facto* à solução do problema. Falta ainda averiguar se a solução verifica as diferentes condições de fronteira especificadas.

b) Verificação das condições de fronteira

Como todos os bordos da laje se encontram *simplesmente apoiados*, é preciso verificar se em todos eles o valor dos deslocamentos transversais e dos momentos flectores é nulo.

Nos bordos I e III a coordenada em  $y$  é constante e vale  $y = 2$  e  $y = -2$ , respectivamente. Substituindo estas igualdades em (2.74), obtém-se para ambos os casos:

$$w(x, \pm 2) = \frac{1}{8D_f}(4 - x^2)(4 - 2^2) = 0 .$$

Para os bordos II e IV, onde se tem respectivamente que  $x = 2$  e  $x = -2$ , a situação é semelhante. De facto, verifica-se com facilidade que:

$$w(\pm 2, y) = \frac{1}{8D_f}(4 - 2^2)(4 - y^2) = 0 .$$

Ficam desta forma verificadas as condições de fronteira cinemáticas. Para se determinar o valor dos momentos flectores em cada um dos bordos da laje, é necessário determinar primeiro o campo de momentos através da aplicação das equações de compatibilidade e das relações constitutivas.

Utilizando a equação (2.59), os campos de momentos flectores,  $m_x$  e  $m_y$  resultam

$$m_x = \frac{\nu(4 - x^2)}{4} + \frac{4 - y^2}{4} , \quad (2.75)$$

$$m_y = \frac{4 - x^2}{4} + \frac{\nu(4 - y^2)}{4} . \quad (2.76)$$

Nos bordos II e IV verifica-se que

$$m_x = 1 - y^2/4 ,$$

enquanto que nos bordos I e III se tem

$$m_y = 1 - x^2/4 .$$

Em qualquer um dos casos, o campo de momentos flectores no bordo não é nulo. Conclui-se então que para que o campo de deslocamentos apresentado em (2.74) corresponda à solução do problema, é necessário que o carregamento seja constituído, não só pela carga unitária uniformemente distribuída, mas também por um conjunto de momentos flectores aplicados em cada um dos bordos da laje e cuja distribuição deve ter a seguinte expressão genérica:

$$m_n = 1 - s^2/4 ,$$

onde  $s$  representa  $x\{y\}$  nos bordos II e IV  $\{I$  e  $III\}$ . O carregamento encontra-se representado na figura 2.50.

### c) Caracterização do comportamento da laje

O problema definido inicialmente encontra-se neste instante completamente resolvido. Apenas com o intuito de ilustrar algumas das relações e conceitos que usualmente surgem na análise de lajes finas, calculam-se de seguida os campos de rotações, os campos de curvaturas, os campos de esforços e as reacções de apoio.

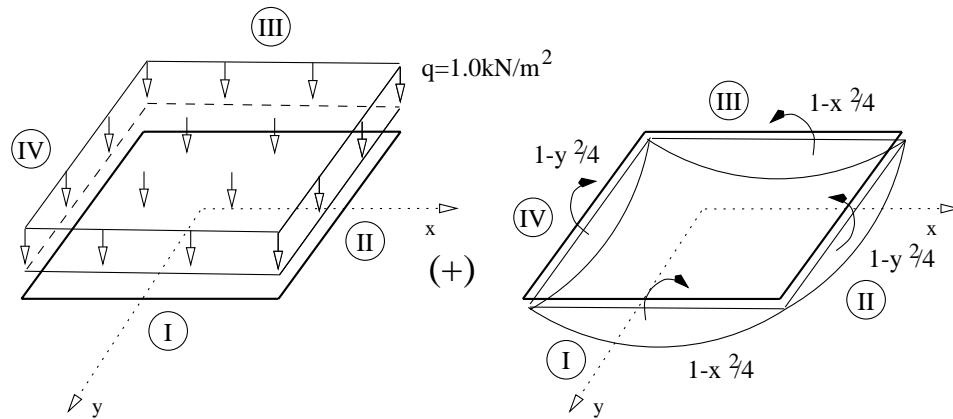


Figura 2.50: Cargas na laje simplesmente apoiada.

### c.1) Cálculo das rotações

Tendo em conta as derivadas apresentadas no ponto anterior, resulta de imediato que:

$$\theta_x = \frac{1}{4D_f} x (4 - y^2)$$

$$\theta_y = \frac{1}{4D_f} (4 - x^2) y$$

Os campos de rotações encontram-se representados na figura 2.51, na qual foi utilizado o factor de escala  $\bar{\theta}_i = \theta_i \times D_f$ .

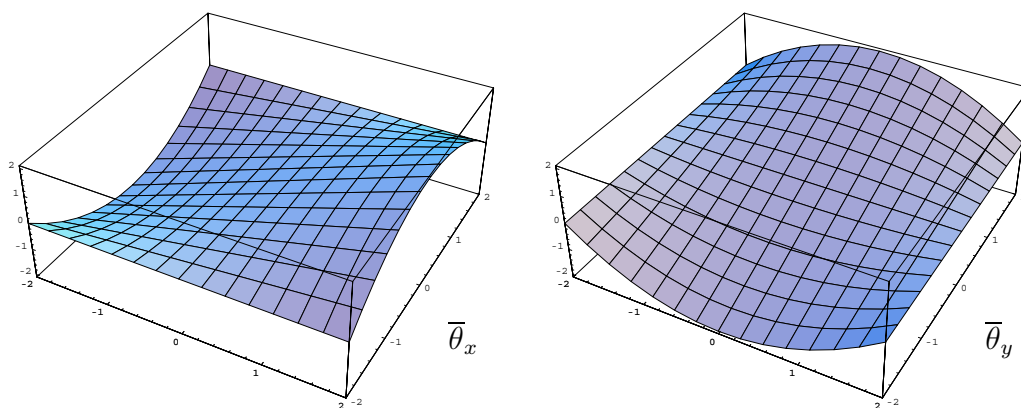


Figura 2.51: Campo de rotações

É interessante verificar agora qual a distribuição das rotações  $\theta_x$  ao longo dos bordos II e IV e das rotações  $\theta_y$  ao longo dos bordos I e III.

Não é difícil verificar que ao longo do lado II, para o qual se tem  $x = 2$ , o valor das rotações *normais* ao bordo são dadas por:

$$\theta_x = \frac{1}{2D_f} (2 - y^2) .$$

Verifica-se desta forma que o campo de rotações  $\theta_n$  toma valores diferentes de zero ao longo deste bordo, sendo nulo apenas nos pontos correspondentes aos *cantos* da laje. Comentários semelhantes podem ser efectuados para os restantes três bordos da laje.

Interessante é ainda verificar que para todos os cantos da laje se verifica que  $w = 0$ ,  $\theta_x = 0$  e  $\theta_y = 0$ . Isto faz com os vértices da laje se encontrem encastrados, efeito esse que é visível na deformada representada na figura 2.49.

### c.2) Cálculo das curvaturas

Os campos de curvaturas são determinados utilizando-se as condições de compatibilidade (2.13), (2.14 e (2.17)

$$\chi_x = \frac{1}{4D_f} (4 - y^2)$$

$$\chi_y = \frac{1}{4D_f} (4 - x^2)$$

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2D_f} x y$$

As curvaturas de flexão encontram-se representadas na figura 2.52, enquanto que o campo de curvaturas de torção se encontra representado na figura 2.53. Os valores estão normalizados na forma  $\bar{\chi}_i = \chi_i \times D_f$ .

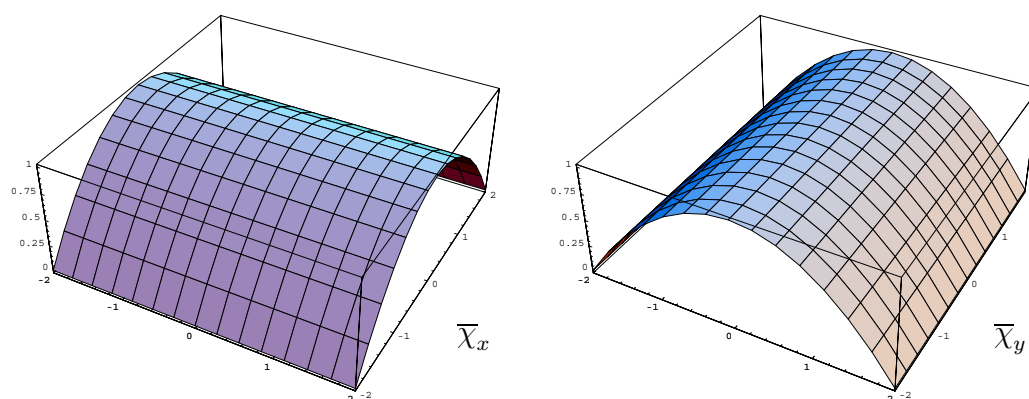


Figura 2.52: Campo de curvaturas de flexão.

### c.3) Cálculo dos momentos

Uma vez determinadas as deformações na laje, os campos de momentos são calculados aplicando as relações constitutivas (2.43). Os campos de momentos flectores,  $m_x$  e  $m_y$ ,

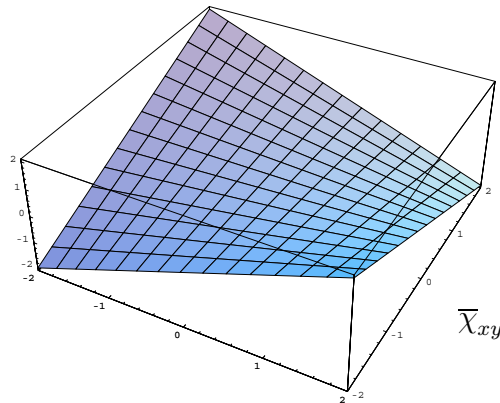


Figura 2.53: Campo de curvaturas de torção

são definidos pelas igualdades

$$m_x = \frac{\nu (4 - x^2)}{4} + \frac{4 - y^2}{4},$$

$$m_y = \frac{4 - x^2}{4} + \frac{\nu (4 - y^2)}{4}.$$

Os respectivos diagramas encontram-se representados na figura 2.54.

O campo de momentos torsores, representado na figura 2.55, tem a seguinte expressão:

$$m_{xy} = -\frac{(1 - \nu) x y}{2}. \quad (2.77)$$

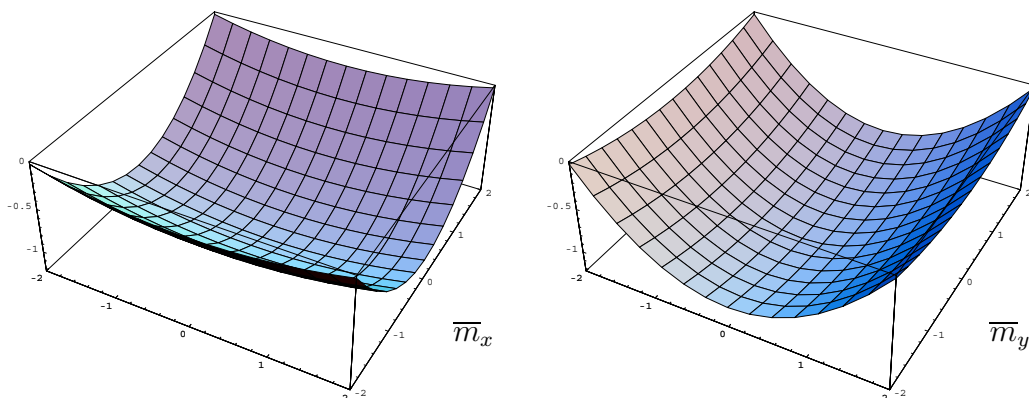


Figura 2.54: Campo de momentos flectores.

c.4) Cálculo dos esforços transversos

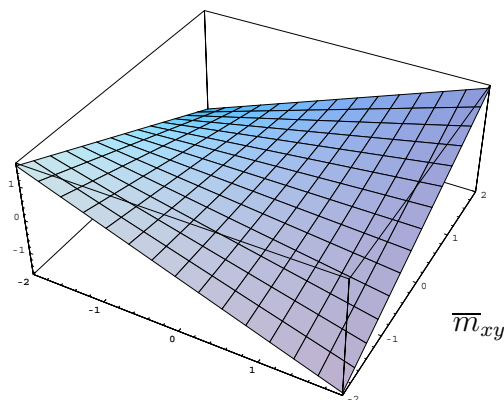


Figura 2.55: Campo de momentos torsores.

Os esforços transversos podem ser obtidos a partir das definições:

$$v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

$$v_y = \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}$$

A substituição nas definições anteriores das expressões obtidas para os campos de momentos permite obter:

$$v_x = \frac{-(1-\nu)x}{2} - \frac{\nu x}{2} = -\frac{x}{2}$$

$$v_y = \frac{-(1-\nu)y}{2} - \frac{\nu y}{2} = -\frac{y}{2}$$

É possível verificar agora que o campo de esforços transversos verifica a equação de equilíbrio de forças transversais:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

Os campos de esforços transversos encontram-se representados na figura 2.56.

#### c.5) Cálculo do esforço transversal efectivo e das forças de canto

Nos bordos perpendiculares ao eixo dos  $x$  (bordos II e IV) o esforço transversal efectivo é definido a partir da igualdade,

$$r_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} .$$

Nos bordos I e III, perpendiculares ao eixo  $y$ , os esforços transversos efectivos são dados por:

$$r_y = v_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} .$$



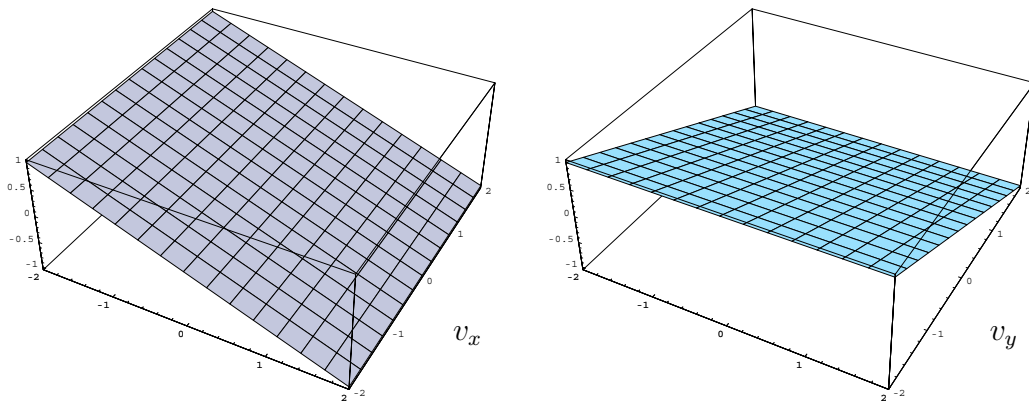


Figura 2.56: Campo de esforços transversos.

No bordo II, a definição anterior permite obter

$$r_x = -\frac{x}{2} - \frac{1-\nu}{2}x = \frac{x}{2}(-2 + \nu),$$

ou ainda, tendo em atenção que naquele lado  $x = 2$ ,

$$r_x = -2 + \nu.$$

A repetição deste cálculo para cada um dos restantes bordos da laje, permitirá verificar que o esforço transverso efectivo em cada um deles é constante. Pode verificar-se também que em qualquer um dos casos o valor absoluto do esforço transverso efectivo é o mesmo,  $|r_e| = 2 - \nu$ .

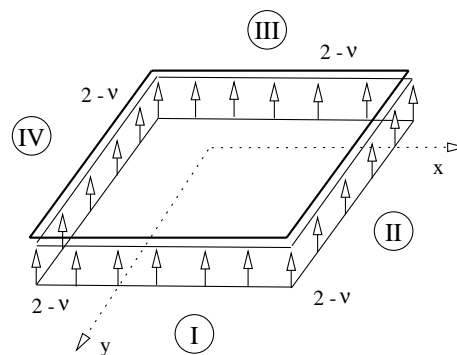


Figura 2.57: Distribuição dos esforços transversos efectivos nos bordos da laje.

Na figura 2.57 encontra-se representada a distribuição dos esforços transversos efectivos nos bordos da laje, esforços esses que podem ser vistos como correspondendo às *reações* de apoio no contorno da laje. É importante verificar que o sentido dessas reacções é sempre negativo (forças verticais aplicadas no sentido negativo do eixo  $z$ ).

A resultante dessas reacções é dada por:

$$R_{\bar{v}_e} = -4 \times \int_0^s (2 - \nu) ds = -4 \times 4 \times (2 - \nu) = -32 + 16\nu kN .$$

Se se verificar que a resultante das cargas verticais aplicadas é dada por:

$$R_{apl} = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 q(x, y) dx dy = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 1.0 dx dy = 16.0 kN ,$$

chega-se à estranha conclusão de que aparentemente não se encontra verificado o equilíbrio global em termos de forças verticais.

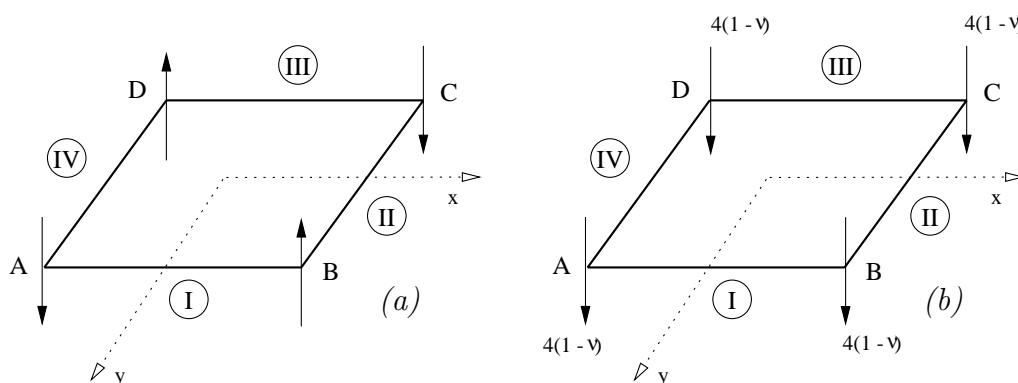


Figura 2.58: Reações de canto no elemento de laje.

Esta conclusão está de facto errada, uma vez que não foram ainda contabilizadas as forças que se desenvolvem nos cantos da laje. Se o valor do momento torsor for positivo em cada um dos cantos da laje, o sentido das forças verticais concentradas que aí surgem é o que se encontra indicado na figura 2.58 a). Como nos cantos B e D (ver figura 2.48) o valor do momento torsor é negativo, as reacções de canto que se desenvolvem na laje têm o sentido apresentado na figura 2.58 b).

O valor de cada força de canto é dado pela igualdade:

$$F_{canto} = 2 \times |m_{xy}| = 2 \times \frac{(1 - \nu)}{2} \times 2 \times 2 = 4 \times (1 - \nu) .$$

A resultante das forças de canto é dada então por:

$$R_{canto} = 4 \times 4 \times (1 - \nu) = 16 - 16\nu kN .$$

Conclui-se então que o equilíbrio de forças verticais, envolvendo cargas aplicadas, esforços transversos efectivos e forças de canto é de facto verificado:

$$R_{\bar{v}_e} + R_{apl} + R_{canto} = -32 + 16\nu + 16 + 16 - 16\nu = 0 kN .$$

## 2.7 Distribuições de esforços equilibradas

Para que uma dada distribuição de esforços possa ser considerada como equilibrada (ou estaticamente admissível) é necessário que:

1. No domínio se encontrem verificadas as condições de equilíbrio, (2.39);
2. Na fronteira estejam satisfeitas todas as condições que envolvem a especificação de uma qualquer componente dos campos de esforços.

Na tabela 2.8 encontram-se sumarizadas estas condições.

ESFORÇOS ESTATICAMENTE ADMISSÍVEIS		
No domínio  $\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$		
Na fronteira		
Bordo encastrado	Bordo simplesmente apoiado	Bordo livre
-	-	$r_n = \bar{r}_n$
-	$m_n = \bar{m}_n$	$m_n = \bar{m}_n$

Tabela 2.8: Condições para que uma distribuição de esforços seja estaticamente admissível

Várias são as questões que se podem colocar neste instante:

- Como identificar distribuições de esforços estaticamente admissíveis?
- Como “construir” distribuições de esforços equilibradas?
- Como verificar se uma dada distribuição de esforços que equilibra um carregamento corresponde à solução exacta para o problema?

A resposta à primeira destas perguntas corresponde à aplicação das verificações sumarizadas no diagrama da tabela 2.8. Já a resposta às duas questões seguintes não é tão imediata. Para facilitar a apresentação, os conceitos envolvidos na resposta a estas questões são apresentados e discutidos com base na resolução de problemas concretos.

**Problema 2.2**

Considere-se a laje rectangular simplesmente apoiada representada na figura 2.59. Esta laje está sujeita à acção de uma carga uniformemente distribuída com valor unitário.

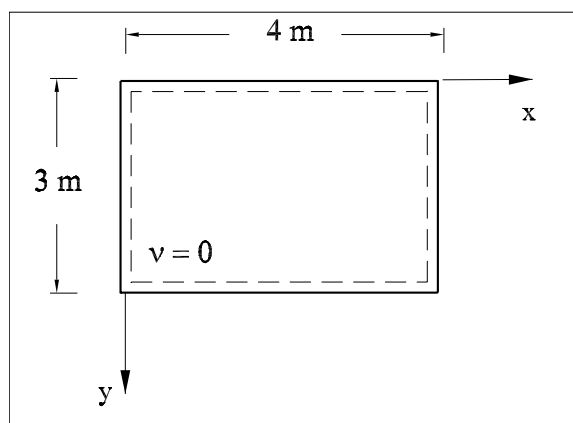


Figura 2.59: Laje rectangular simplesmente apoiada

a) Será que os campos de momentos

$$m_x(x, y) = x - 0.25 x^2$$

$$m_y(x, y) = 0.75 y - 0.25 y^2$$

$$m_{xy}(x, y) = 0$$

equilibram o carregamento?

b) Caso se trate de uma distribuição de esforços equilibrada, será também a solução exacta?

Resolução

a) Para que a distribuição de esforços possa ser considerada como equilibrada, é necessário que:

1.

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = 0$$

(condição no domínio)

2.

$$m_x(0, y) = 0 \quad m_x(4, y) = 0$$

$$m_y(x, 0) = 0 \quad m_y(x, 3) = 0$$

(condições de fronteira)

Dos dados do problema tira-se com facilidade

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -0.5$$

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -0.5$$

$$\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.0$$

pelo que a condição de equilíbrio no domínio (2.39)

$$(-0.5) + (-0.5) + 2(0) + 1.0 = 0$$

se encontra verificada. É também imediato verificar que as condições de fronteira estática também se encontram satisfeitas. Tendo em conta os campos de momentos dados, pode escrever-se,

$$m_x(0, y) = 0 - 0.25 \times 0^2 = 0$$

$$m_x(4, y) = 4 - 0.25 \times 4^2 = 0$$

$$m_y(x, 0) = 0.75 \times 0 - 0.25 \times 0^2 = 0$$

$$m_y(x, 3) = 0.75 \times 3 - 0.25 \times 3^2 = 0$$

como se pretendia verificar.

Conclui-se desta forma que a distribuição de esforços dada é estaticamente admissível (equilibra o carregamento dado). Mas será a distribuição de esforços exacta?

b) Uma análise das expressões dadas para os campos de esforços permite desde logo dizer que só muito dificilmente estes campos de momentos flectores e torsor serão os exactos. Isto porque não é de esperar que numa laje simplesmente apoiada sujeita à acção de uma carga uniformemente distribuída os momentos torsores sejam nulos (o que seria então feito das forças de canto?). Também não é razoável que o campos de momentos  $m_x$  só dependa da coordenada  $x$  enquanto que o campo de momentos  $m_y$  dependa apenas da variável  $y$ .

Trata-se então de uma distribuição de esforços equilibrada, mas que não corresponde à solução exacta. Saliente-se desde já que a laje, como estrutura “hiperstática” que é, permite que se construa uma infinidade de soluções equilibradas. De entre todas as soluções equilibradas possíveis, haverá uma que corresponde à solução exacta, mas a sua obtenção é, regra geral, bem difícil.

Como se pode demonstrar que a solução equilibrada obtida não é de facto a solução exacta? Se o fosse, os campos de esforços dados deveriam dar origem a um campo de curvaturas

(aplicando as relações de elasticidade) que por sua vez deveriam permitir a obtenção de um campo de deslocamentos transversais (aplicando as condições de compatibilidade) que respeitasse todas as condições de fronteira cinemática.

Será que a obtenção de um campo de deslocamentos que respeite estas condições é possível neste caso? Para responder a esta questão, comecemos por calcular as curvaturas de flexão  $\chi_x$  associadas aos campos de esforços dadas. Como se assume que  $\nu = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\chi_x(x, y) &= \frac{1}{D_f} m_x(x, y) \\ \chi_x(x, y) &= \frac{1}{D_f} (x - 0.25 x^2)\end{aligned}$$

Será agora possível determinar um campo de deslocamentos que respeite todas as condições de fronteira

$$w(x, 0) = w(x, b) = w(0, y) = w(a, y) = 0$$

e que respeite a condição de compatibilidade

$$\chi_x(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$$

A resposta é de imediato negativa se se tiver em conta que

$$w(x, 0) = 0 \Rightarrow \chi_x(x, 0) = 0$$

ou seja, a satisfação das condições de fronteira e da condição de compatibilidade impõe que seja nulo o campo de curvaturas de flexão ao longo da fronteira  $y = 0$ . Ora, do campo de curvaturas obtido a partir do campo de momentos dado vem

$$\chi_x(x, 0) = \frac{1}{D_f} (x - 0.25 x^2) \neq 0$$

pelo que a solução não é a exacta, como queríamos demonstrar.

A obtenção de soluções equilibradas desempenha um papel muito importante na análise de lajes, uma vez que a determinação de soluções exactas ou é bem complicada, ou de todo impossível. Tendo em conta o teorema estático da análise plástica limite, o dimensionamento efectuado com base em distribuições de esforços equilibrados está sempre do lado da segurança.

A segunda das perguntas enunciadas logo no início desta secção é então a que de um ponto de vista prático maior importância tem. Como construir/obter distribuições de esforços equilibrados?

A análise dos campos de esforços do problema anterior permite-nos ter uma ideia de como essa construção poderá ser efectuada. Para começar, é importante verificar que se

assume logo à partida que  $m_{xy}(x, y) = 0$ . Isto corresponde a afirmar que o carregamento é equilibrado apenas com recurso a momentos flectores.

Qual é o diagrama de  $m_x$  e de  $m_y$ ?. Tendo em conta as expressões fornecidas, obtêm-se os diagramas representados na figura 2.60

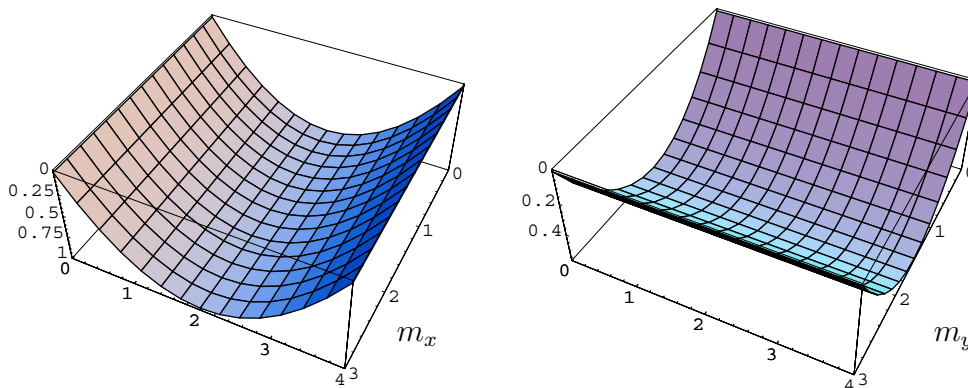


Figura 2.60: Diagramas de momentos  $m_x$  e  $m_y$

É possível verificar que  $m_x(x, y)$  corresponde ao diagrama de momentos flectores que se obtém da análise da viga representada na figura 2.61. Esta viga tem um comprimento igual à dimensão da laje segundo essa direcção e as condições de apoio nos nós inicial e final reflectem o que se passa nos bordos  $x = 0$  e  $x = 4$ . Tratando-se de bordos simplesmente apoiados, também os nós extremos do elemento de viga considerado devem ter o mesmo apoio. Está aplicada uma carga uniformemente distribuída  $q_x = 0.5$ .

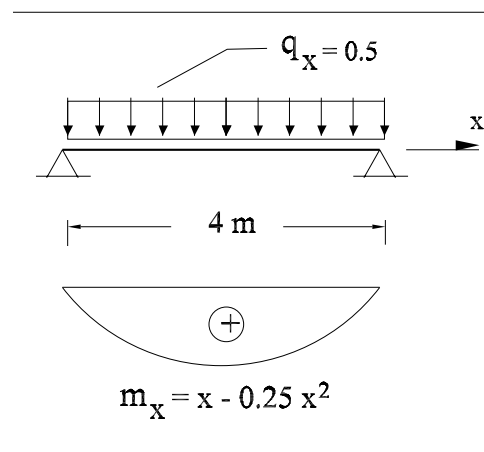


Figura 2.61: Viga para obtenção de  $m_x$

O campo de momentos  $m_y(x, y)$  pode agora ser determinado com base na análise de um elemento de viga com a direcção do eixo  $y$  e com um comprimento de três metros. Tendo

em conta as condições de apoio existentes em  $y = 0$  e  $y = 3$ , a viga a utilizar é a que se encontra representada na figura 2.62.

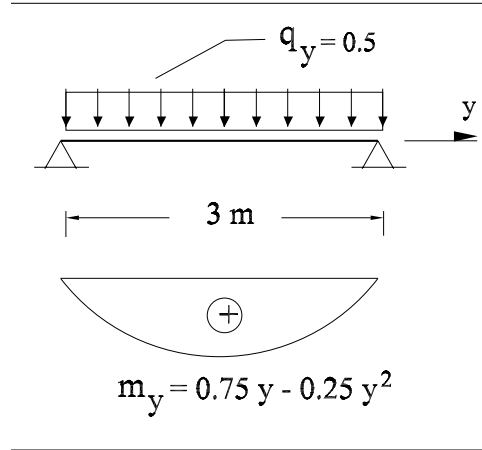


Figura 2.62: Viga para obtenção de  $m_y$

Para se garantir a obtenção de uma distribuição de esforços equilibrada, é necessário garantir que

$$q(x, y) = q_x(x, y) + q_y(x, y) \quad (2.78)$$

ou seja, que a soma da parcela da carga a equilibrar na direcção  $x$ ,  $q_x$ , com a parcela da carga a equilibrar na direcção  $y$ ,  $q_y$ , seja igual à carga distribuída total,  $q(x, y)$ .

Neste problema tem-se  $q_x = 0.5$  e  $q_y = 0.5$ . No entanto, qualquer outra repartição de cargas, desde que satisfazendo a condição (2.78), permite obter uma distribuição de esforços que equilibre o carregamento. No limite, pode considerar-se que  $q_x = q$  e  $q_y = 0$  ou  $q_x = 0$  e  $q_y = q$ . Esta última repartição de cargas permite simplificar a obtenção de diagramas equilibrados, mas os campos obtidos, embora se encontrem do lado da segurança, podem afastar-se significativamente do comportamento real da estrutura.

Esta forma de “construir” distribuições de esforços estaticamente admissíveis em lajes rectangulares de dimensões  $(a \times b)$  encontra-se sumarizada na tabela 2.7.

Para validar este processo, basta verificar que com a repartição de cargas assumida em (2.78) e considerando  $m_{xy} = 0$ , se pode escrever

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q_x + q_y = 0$$

Ora o passo 3 permite obter um campo de momentos que satisfaz

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + q_x = 0$$

e o passo 4 permite a verificação da condição

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q_y = 0$$



## OBTENÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES DE ESFORÇOS EQUILIBRADAS

1. Arbitrar  $m_{xy}(x, y) = 0$
2. Repartir o carregamento em duas direcções, considerando sempre  $q(x, y) = q_x(x, y) + q_y(x, y)$
3. Determinar o campo  $m_x(x, y)$  através da determinação de um campo de momentos que equilibre a carga  $q_x$  numa viga com a direcção  $x$ , comprimento  $L = a$ , e com as condições de apoio ditadas pelas condições de fronteira da laje nos bordos  $x = 0$  e  $x = a$ .
4. Determinar o campo  $m_y(x, y)$  através da determinação de um campo de momentos que equilibre a carga  $q_y$  numa viga com a direcção  $y$ , comprimento  $L = b$ , e com as condições de apoio ditadas pelas condições de fronteira da laje nos bordos  $y = 0$  e  $y = b$ .

Como consequência, a equação de equilíbrio no domínio é verificada. As condições de fronteira estática estão também satisfeitas porque se consideraram nas vigas utilizadas na construção do campo de momentos os apoios correspondentes aos que existem nos bordos da laje.

---

**Problema 2.3**

Considere a laje representada na figura 2.63. Tendo em conta que a laje está subme-

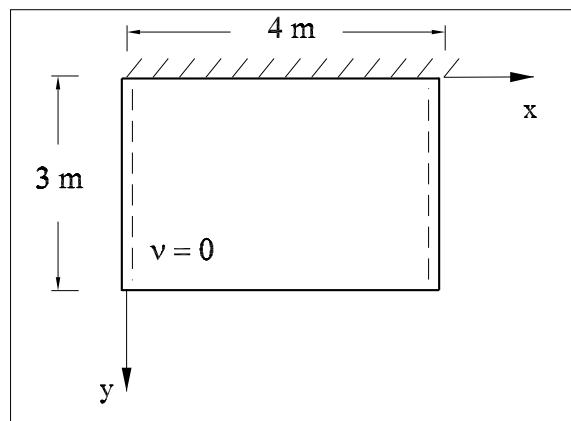


Figura 2.63: Laje rectangular com tipos de apoios diferentes

tida à acção de uma carga uniformemente distribuída com valor unitário, obtenha uma

distribuição de esforços que equilibre o carregamento.

### Resolução

Aplicando um procedimento semelhante ao que foi descrito atrás, poder-se-à construir a distribuição de esforços pretendida. Desta forma, começa-se por considerar  $m_{xy} = 0$ . Os campos de momentos flectores são obtidos considerando o equilíbrio dos elementos de viga representados na figura 2.64.

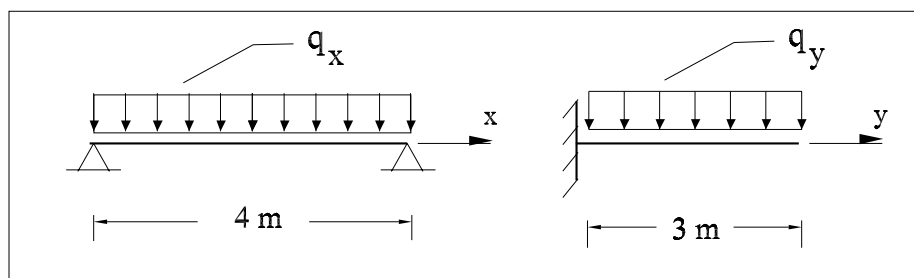


Figura 2.64: Elementos de viga para a determinação dos campos de momentos flectores

Obtém-se:

$$m_x(x, y) = \frac{q_x}{2} (4x - x^2)$$

$$m_y(x, y) = q_y \left( 3y - \frac{y^2}{2} - \frac{9}{2} \right)$$

Para que esta distribuição seja estaticamente admissível, só falta impor que  $q_x + q_y = q$ .

É fácil verificar agora que a distribuição de esforços obtida é equilibrada. Estão satisfeitas a condição de equilíbrio no domínio e todas as condições de fronteira estáticas. De facto,

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q(x, y) = -q_x - q_y + q = 0$$

Na fronteira tem-se:

$$m_x(0, y) = \frac{q_x}{2} (0 - 0) = 0$$

$$m_x(4, y) = \frac{q_x}{2} (4 \times 4 - 4^2) = 0$$

$$m_y(x, 3) = q_y \left( 9 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) = 0$$

$$r_y(x, 3) = \left( \frac{\partial m_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right)_{y=3} = q_y \left( 3 - \frac{2y}{2} \right)_{y=3} = 0$$

---

É importante reforçar que este método de construção não é o único que permite a obtenção de diagramas de esforços estaticamente admissíveis. Um processo alternativo poderá passar pela consideração e tratamento directo das condições indicadas no quadro 2.8.

---

### Problema 2.4

Considere-se de novo a laje representada na figura 2.63. Será possível equilibrar o carregamento considerando agora que  $m_x(x, y) = m_y(x, y) = 0$ ?

#### Resolução

Pretende-se verificar se é possível equilibrar na laje em estudo uma carga uniformemente distribuída com recurso apenas a um campo de momentos torsores. Para que a equação de equilíbrio no domínio venha satisfeita, é necessário considerar que

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + 1.0 = 0$$

o que implica

$$\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{xy} = -\frac{1}{2} x y + f(x) + g(y) + C$$

Qualquer que sejam as funções  $f(x)$ ,  $g(y)$  e o valor da constante  $C$ , o campo de momentos torsores assim determinado permite verificar a condição de equilíbrio no domínio.

O que se passa agora com as condições de fronteira? Tendo em conta que à partida se considerou  $m_x(x, y) = m_y(x, y) = 0$ , apenas falta tratar a condição  $r_y(x, 3) = 0$ .

Como  $m_y(x, y) = 0$ , esforço transversal efectivo  $r_y(x, y)$  pode ser calculado através da igualdade:

$$r_y(x, y) = 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$

Obtém-se então

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{x y}{2} + f(x) + g(y) + C \right]_{y=3} = 0$$

$$2 \left[ -\frac{y}{2} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{y=3} = 0$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} x$$

A carga uniformemente distribuída pode ser então equilibrada pelo seguinte campo de esforços:

$$m_x(x, y) = 0$$

$$m_y(x, y) = 0$$

$$m_{xy}(x, y) = -\frac{1}{2}xy + \frac{3}{2}x$$

Verifique-se agora se o campo de esforços construído desta forma corresponde à solução exacta para o problema. Mais uma vez a resposta intuitiva é imediata, se se tiver em consideração que fisicamente não faz sentido serem nulas as duas distribuições de momentos flectores.

É no entanto necessário demonstrar formalmente que a distribuição de esforços obtida é apenas equilibrada. Se fosse exacta, os campos de curvaturas associados ao campo de esforços deveriam permitir a obtenção de um campo de deslocamentos transversais (através da aplicação das condições de compatibilidade) que respeitasse ainda todas as condições de fronteira cinemática.

Tendo em conta que se considera  $\nu = 0$ , os campos de curvaturas associados ao campo de esforços anteriormente construído são dadas pelas seguintes igualdades:

$$\chi_x(x, y) = 0$$

$$\chi_y(x, y) = 0$$

$$\chi_{xy}(x, y) = \frac{1}{2D_f}(-xy + 3x)$$

Para que possam corresponder à solução exacta, estas curvaturas devem poder ser obtidas a partir de um campo de deslocamentos transversais que satisfaça todas as condições de compatibilidade (tanto no domínio quanto na fronteira).

Tal como referido na resolução da alínea b) do Problema 2.2, a verificação das condições de fronteira implica que:

$$w(x, 0) = 0 \Rightarrow \chi_x(x, 0) = 0$$

$$w(0, y) = 0 \Rightarrow \chi_y(0, y) = 0$$

$$w(4, y) = 0 \Rightarrow \chi_y(4, y) = 0$$

O campo de curvaturas acima obtido permite verificar de imediato este conjunto de condições. Será então possível dizer-se que a solução é exacta? A resposta a esta pergunta tem de ter em consideração que há ainda equações de compatibilidade por verificar. Nomeadamente, falta ainda averiguar se estes campos satisfazem as condições de compatibilidade no domínio. Por outras palavras, pode dizer-se que falta ainda discutir se existe um campo de deslocamentos transversais que permita recuperar, através da aplicação das condições de compatibilidade no domínio, os campos de curvaturas acima indicados. Será pois um erro grosseiro afirmar desde já que a solução obtida corresponde à exacta.

Para que um conjunto curvaturas possa ser compatível, é necessário que se verifiquem as condições seguintes:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\chi_x(x, y)) - \frac{\partial}{\partial x} (\chi_{xy}(x, y)) = 0 \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\chi_y(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y} (\chi_{xy}(x, y)) = 0 \quad (2.80)$$

Para recuperar as condições (2.79) e (2.80) basta ter em conta as definições (2.13), (2.14) e (2.17).

Substituindo agora em (2.79) as curvaturas em questão obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} (0) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2D_f} (-xy + 3x) \right) = 0 + \frac{1}{2D_f} (y - 3) \neq 0$$

A não verificação da condição (2.79) permite desde logo afirmar que os campos de curvaturas apresentados não são compatíveis, pelo que o campo de esforços equilibrado acima construído não corresponde à solução exacta.

Embora tal não fosse já necessário, é possível averiguar se a condição (2.80) se encontra satisfeita. Resulta de imediato que:

$$\frac{\partial}{\partial x} (0) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2D_f} (-xy + 3x) \right) = 0 + \frac{1}{2D_f} (x) \neq 0$$

## 2.8 Campos de deslocamentos compatíveis

Para que um determinado campos de deslocamentos possa ser considerado como compatível (ou cinematicamente admissível), é necessário que

1. No domínio se encontrem verificadas as condições de compatibilidade, (2.13), (2.14) e (2.17);
2. Na fronteira se encontrem satisfeitas todas as condições que envolvem a especificação de um qualquer campo de deslocamentos.

Na tabela 2.9 encontram-se sumarizadas estas condições.

De novo, podem desde já colocar-se as seguintes questões:

- Como identificar campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis?

CAMPOS DE DESLOCAMENTOS COMPATÍVEIS		
No domínio		
$\chi_x(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$		
$\chi_y(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$		
$\chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$		
Na fronteira		
Bordo encastrado	Bordo simplesmente apoiado	Bordo livre
$w = \bar{w}$	$w = \bar{w}$	-
$\theta_n = \bar{\theta}_n$	-	-

Tabela 2.9: Condições para que o campo de deslocamentos seja cinematicamente admissível

- Como construir campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis?
- Como verificar se um dado campos de deslocamentos compatível corresponde também à solução exacta do problema?

À semelhança do que se passa nas soluções equilibradas, também neste caso é possível obter uma infinidade de campos de deslocamentos transversais que satisfaçam as condições de compatibilidade. No entanto, o interesse prático deste exercício já não é tão relevante quanto o era no caso das distribuições de esforços equilibradas. Isto porque tendo em conta o teorema cinemático da análise plástica, campos de deslocamentos compatíveis fornecem soluções contra a segurança.

Tal como na secção anterior, os conceitos serão apresentados através da resolução de problemas.

### Problema 2.5

Considere-se de novo a laje representada na figura 2.59

a) Será que o campo de deslocamentos

$$w(x, y) = (4x - x^2)(3y - y^2)$$

é compatível?

b) Caso se trate de uma solução compatível, será também o campo de deslocamentos exacto?

### Resolução

a) Para que o campo de deslocamentos possa ser considerado como compatível, é necessário que

1.

$$\chi_x(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \quad \chi_y(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \quad \chi_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$

(condição no domínio)

2.

$$w(0, y) = 0 \quad w(4, y) = 0$$

$$w(x, 0) = 0 \quad w(x, 3) = 0$$

(condições de fronteira)

As condições de compatibilidade no domínio impõem apenas que o campo de deslocamentos fornecido permita a determinação dos campos de curvaturas  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  e  $\chi_{xy}$ . De uma forma pouco rigorosa, poder-se-à dizer que as condições no domínio impõem apenas que as segundas derivadas envolvidas nas equações (2.13), (2.14) e (2.17) se possam determinar. Para que tal aconteça, é necessário que a função de deslocamentos dada seja contínua e apresente primeiras derivadas contínuas.

Como no caso em estudo o campo de deslocamentos é dado por uma função polinomial, as condições anteriores resultam satisfeitas de forma imediata. Os campos de curvaturas induzidos pelo campo de deslocamentos são assim dados por

$$\begin{aligned}\chi_x(x, y) &= 2(3y - y^2) \\ \chi_y(x, y) &= 2(4x - x^2) \\ \chi_{xy}(x, y) &= -(4 - 2x)(3 - 2y)\end{aligned}$$

Também é fácil verificar que:

$$\begin{aligned}w(0, y) &= (0 - 0^2)(3y - y^2) = 0 \\ w(4, y) &= (4 \times 4 - 4^2)(3y - y^2) = 0 \\ w(x, 3) &= (4x - x^2)(0 - 0^2) = 0 \\ w(x, 3) &= (4x - x^2)(3 \times 3 - 3^2) = 0\end{aligned}$$

o que permite concluir de imediato que o campo de deslocamentos é de facto compatível.

b) A solução será exacta se o campo de deslocamentos satisfizer todas as condições expressas no diagrama da tabela 2.9. Tendo em conta que  $\nu = 0$ , obtém-se

$$m_x(x, y) = D_f \chi_x = 2 D_f (3y - y^2)$$

o que permite verificar

$$m_x(0, y) = 2 D_f (3y - y^2) \neq 0$$

o que por sua vez implica que a solução não pode ser considerada como exacta, uma vez que uma das condições de fronteira não se encontra verificada.

### Problema 2.6

Considere-se de novo a figura representada na figura 2.63. Pretende-se construir um campo de deslocamentos que satisfaça as condições de compatibilidade.

#### Resolução

Para se construir um campo de deslocamentos compatível, é necessário garantir a verificação de um conjunto de condições no domínio e na fronteira.



Se se utilizar uma função polinomial para definir o campo de deslocamentos transversais em todo o domínio da laje, as condições de compatibilidade no domínio vêm automaticamente verificadas. Isto acontece porque as funções assim construídas são contínuas e apresentam primeiras derivadas contínuas, permitindo sempre a definição dos campos de curvaturas.

Fica desta forma a faltar apenas a verificação das condições de fronteira. Um processo simples para efectuar a construção pretendida passa pela utilização da seguinte função:

$$w(x, y) = f_1(x) \times f_2(x) \times g_1(y) \times g_2(y) \quad (2.81)$$

Em (2.81),  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  representam polinómios que permitem satisfazer as condições de fronteira cinemática nas fronteiras  $x = 0$  e  $x = a$ . Do mesmo modo, os polinómios  $g_1(y)$  e  $g_2(y)$  verificam as condições de admissibilidade cinemática nas fronteiras  $y = 0$  e  $y = b$ .

Se cada uma das funções  $f_i(x)$  e  $g_j(y)$  verifica as condições de fronteira cinemática em cada troço da fronteira da laje, o seu produto, definido em (2.81), permite assegurar a verificação simultânea de todas as condições de admissibilidade cinemática na fronteira.

Na laje em estudo, as condições de fronteira cinemática a considerar são as seguintes:

$$\begin{aligned} w(0, y) &= 0, \text{ em } x = 0 \\ w(4, y) &= 0, \text{ em } x = 4 \\ w(x, 0) &= 0 \text{ e } \theta_y(x, 0) = 0, \text{ em } y = 0 \end{aligned}$$

Quais as funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  a considerar? Ou seja, quais os polinómios que permitem garantir as condições  $w(x, y) = 0$ , para  $x = 0$  e para  $x = 4$ ? É fácil verificar que os polinómios pretendidos são dados pelas igualdades:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \\ f_2(x) &= x - 4 \end{aligned}$$

Dado que no bordo  $y = 3$  não há qualquer condição de fronteira cinemática a verificar (trata-se de um bordo livre), a função  $g_2(y)$  pode ser retirada do produto definido na equação 2.81. Desta forma, fica apenas a faltar a definição da função  $g_1(y)$ .

A consideração de  $g_1(y) = y$  permite verificar de imediato a condição  $w(x, 0) = 0$ . No entanto, a segunda das condições,  $\theta_y(x, 0) = 0$ , não vem verificada. Desta forma (e sempre que surjam bordos encastrados), é necessário utilizar-se um polinómio que se anule ao longo do bordo considerado, mas que tenha também derivada nula. Não é difícil de verificar neste caso que a função  $g_2(y) = y^2$  satisfaz estas condições.

Recorrendo agora à definição (2.81), é possível escrever o seguinte campo de deslocamentos compatíveis para a laje:

$$w(x, y) = x(x - 4)y^2$$

É importante ter em conta que a utilização de funções polinomiais não é condição necessária para que se possam construir campos de deslocamentos compatíveis. Muitos

outros tipos de funções poderiam ser utilizadas. Trata-se, no entanto, do procedimento mais simples.

Considere-se agora um procedimento alternativo (um pouco mais formal) para se resolver este mesmo problema. Para tal, considerem-se de novo as vigas equivalentes utilizadas na construção de distribuições de esforços estaticamente admissíveis.

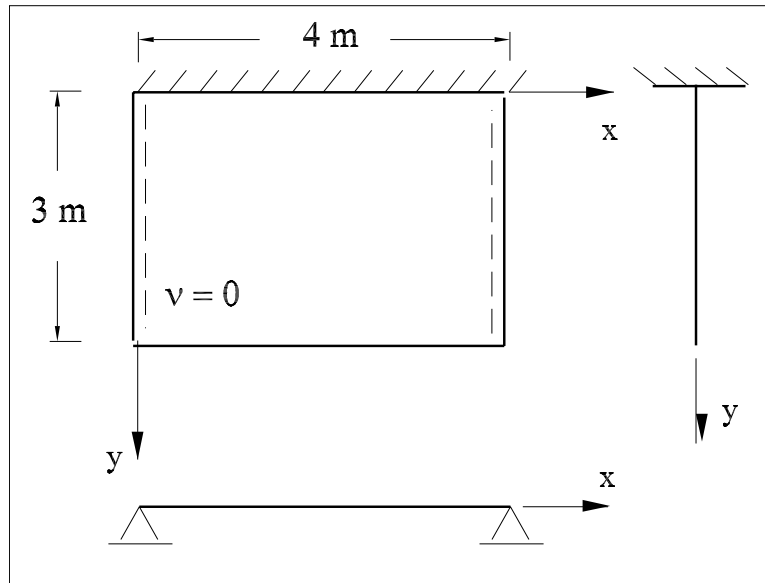


Figura 2.65: Vigas equivalentes

Se se obtiverem campos de deslocamentos compatíveis nas vigas representadas na figura 2.65, a função

$$w(x, y) = w_1(x) \times w_2(y) \quad (2.82)$$

corresponde a um campo de deslocamentos transversais que garantidamente satisfaz as condições de compatibilidade na laje.

Como construir as funções  $w_1(x)$  e  $w_2(y)$ ? Começemos pela primeira. Pretende-se determinar uma função de classe  $C^1$  (função contínua com primeira derivada contínua), para que a existência de segundas derivadas e por consequência a satisfação de compatibilidade no domínio possam ser garantidas à partida. O tipo de função mais simples será uma função do tipo polinomial.

Deve impor-se ainda que a função  $w_1(x)$  satisfaça as condições de fronteira  $w_1(0) = w_1(4) = 0$ . Para satisfazer estas duas condições e apresentar um valor diferente de zero ao longo de  $x$ , o campo de deslocamentos, se for considerado como polinomial, deverá ter pelo menos grau dois. Terá então a seguinte forma geral:

$$w_1(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

Impondo as condições de fronteira obtém-se sucessivamente,

$$w_1(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$w_1(4) = 0 \Rightarrow 16c_1 + 4c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -4c_1$$

O campo de deslocamentos pretendido será então da forma

$$w_1(x) = c_1 x^2 - 4c_1 x$$

Qualquer que seja o valor considerado para  $c_1$ , o campo de deslocamentos na viga é compatível. Por simplicidade, considera-se que  $c_1 = 1.0$ .

Na direcção  $y$ ,  $w_2(y)$  poderá ser uma função polinomial que satisfaça as condições  $w_2(0) = 0$  e  $\theta(0) = -\partial w_2(0)/\partial y = 0$ . A imposição de duas condições implica que de novo o polinómio a utilizar seja pelo menos do segundo grau. Pode então escrever-se:

$$w_2(y) = d_1 y^2 + d_2 y + d_3$$

Tendo em conta as condições de fronteira, conclui-se que

$$w_2(0) = 0 \Rightarrow d_3 = 0$$

$$\theta(0) = -\partial w_2(0)/\partial y = 0 \Rightarrow -2d_1 \times 0 + -d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

O campo pretendido terá a forma geral

$$w_2(y) = d_1 y^2$$

Considera-se de novo  $d_1=1.0$

De (2.82), resulta que o campo de deslocamentos

$$w(x, y) = w_1(x) \times w_2(y) = x(x - 4)y^2$$

é um campo de deslocamentos compatível na laje. É também possível verificar que este campo de deslocamentos não é exacto.

---



# Bibliografia

- [1] Tablas para el cálculo de placas y vigas pared, R. Bareš, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1981;
- [2] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, (1984);
- [3] Teoria Elástica Linear de Placas e Lajes, J.A.C. Martins, IST, 1992;
- [4] Theory of Plates and Shells, S.P. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, McGraw-Hill, 1970;
- [5] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, (1971).
- [6] Betão Armado II - Vol. I, Grupo de Betão Armado e Pré-esforçado, Secção de Folhas da AEIST, 1989;
- [7] Vocabulário da Teoria das Estruturas, LNEC, Norma Portuguesa NP-761, 1969;
- [8] Carlos Tiago Fernandes, “Utlização e Desenvolvimento de uma Formulação Indirecta de Trefftz na Análise de Lajes Finas”, dissertação de mestrado em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, 1998
- [9] Sulumine Raul, “Métodos de Análise Elástica de Lajes de Edifícios”, dissertação de mestrado em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico, 1998;
- [10] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw-Hill International Book Company, Tokyo, 1982;