

# Capítulo 9

## Análise de Placas

### 9.1 Introdução

Os modelos híbrido-mistos de elementos finitos anteriormente apresentados são aqui utilizados na resolução de problemas de placas. Os problemas de *estados planos de tensão* surgem quando se efectua a análise de placas planas, pouco espessas, carregadas no seu próprio plano. Quando se estudam meios contínuos com forma e propriedades constantes segundo uma dada direcção e sujeitos a um carregamento também constante mas aplicado segundo uma direcção perpendicular à primeira, surgem os problemas de *estados planos de deformação*.

São numa primeira fase apresentados alguns exemplos de análises em regime elástico linear, com os quais se pretendem ilustrar as potencialidades e características dos modelos numéricos na resolução deste tipo de problemas.

A validação dos resultados é efectuada através da comparação das soluções obtidas com soluções de referência apresentadas na literatura. São ainda utilizados na comparação resultados obtidos com outros programas de cálculo automático, uns referentes à aplicação de formulações clássicas de elementos finitos, outros resultantes da implementação de formulações híbridas/mistas não-convencionais.

O conjunto de exemplos apresentado foi seleccionado por forma a permitir a ilustração de vários aspectos e particularidades associados à utilização dos modelos desenvolvidos. Desta forma, é ilustrada a capacidade que os modelos têm para reproduzir campos de tensões com elevados gradientes numa zona muito localizada e a possibilidade de se incorporarem nas aproximações soluções clássicas da Teoria da Elasticidade para modelar o campo de tensões nas regiões onde se sabe *a priori* que existem singularidades. São depois apresentados dois exemplos com a finalidade de ilustrar a utilização de malhas constituídas por elementos não-rectangulares. Por fim, efectua-se o estudo de uma viga simplesmente apoiada sujeita à acção de uma carga concentrada aplicada no meio-vão. Este exemplo tem como finalidade ilustrar

a utilização de uma solução particular para o campo de tensões e a simulação de apoios pontuais.

Numa segunda fase, são apresentados alguns resultados referentes à realização de análises em regime elastoplástico. Mais do que um estudo exaustivo do comportamento deste tipo de estruturas em regime de comportamento fisicamente não linear, pretende-se estudar a forma através da qual se devem modelar os incrementos dos parâmetros plásticos, discutindo não só o número de células críticas a considerar, como também o grau dos polinómios não-negativos a utilizar nas aproximações.

São utilizados nas análises modelos de equilíbrio e programas de carga correspondentes a *forças impostas*. Admite-se que o material constituinte das estruturas apresenta um comportamento elastoplástico perfeito.

## 9.2 Definição dos operadores intervenientes

Antes de se apresentarem os exemplos numéricos, interessa particularizar para o caso dos problemas de placas, as condições e operadores definidos de uma forma genérica no capítulo 2. Neste tipo de estruturas, o deslocamento de cada um dos pontos pertencentes ao domínio  $V$ , pode ser representado por um vector bidimensional,  $\mathbf{u}$ . As componentes deste vector representam as projecções do deslocamento segundo duas direcções ortogonais do plano. As forças de massa e as tracções na fronteira estática são também referidas ao mesmo sistema de eixos cartesianos. Define-se desta forma,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t}_\gamma = \begin{Bmatrix} t_{x\gamma} \\ t_{y\gamma} \end{Bmatrix}.$$

São três as componentes independentes do tensor das tensões e do tensor das deformações. Pode escrever-se,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}.$$

O operador diferencial presente na definição das condições de equilíbrio (2.3) e a matriz das normais envolvida no estabelecimento das condições de fronteira estática (2.4) são dados por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & \cdot & n_y \\ \cdot & n_y & n_x \end{bmatrix},$$

onde  $n_x$  e  $n_y$  representam as componentes segundo  $x$  e segundo  $y$  da normal unitária exterior à fronteira.

O operador diferencial de compatibilidade,  $\mathbf{D}^*$ , é adjunto do operador de equilíbrio  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

A matriz de flexibilidade presente na definição das relações de elasticidade (2.10) toma a forma

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (9.1)$$

no caso dos estados planos de tensão, e é definida por

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) & 0 \\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (9.2)$$

quando se trata de um estado plano de deformação. Nas definições (9.1) e (9.2),  $E$  representa o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material constituinte do domínio considerado.

A matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  é a inversa da matriz  $\mathbf{f}$ , sendo definida por:

$$\mathbf{k} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix},$$

ou

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix},$$

consoante se trate de um estado plano de tensão ou de deformação, respectivamente.

Se se tiver em conta as definições (9.1) e (9.2), pode escrever-se

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

ou

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

consoante se considerem estados planos de tensão ou de deformação, respectivamente.

## 9.3 Análise elástica da consola quadrada

A análise em regime elástico da consola quadrada representada na figura 6.5 vai permitir comparar as soluções obtidas com os resultados fornecidos por outros modelos de elementos finitos. O mesmo exemplo é ainda utilizado para efectuar a comparação entre os resultados fornecidos pelos modelos de equilíbrio e pelos modelos de compatibilidade.

### 9.3.1 Comparação com outros modelos de elementos finitos

São utilizados nas comparações dois modelos híbrido-mistos não convencionais, denotados aqui por *Mix\_F* e *Mix\_L*, e um modelo clássico de elementos finitos de deslocamento.

Os modelos *Mix\_F* [66, 72, 147] e *Mix\_L* [147, 149] são formulações híbridas-mistas de equilíbrio em tudo semelhantes às formulações apresentadas, com a diferença fundamental de utilizarem outro tipo de funções nas aproximações. O modelo *Mix\_F* utiliza séries trigonométricas, enquanto que os elementos *Mix\_L* se baseiam na utilização de séries completas de polinómios ortogonais de Legendre.

Na análise com elementos finitos de deslocamento, utiliza-se o programa COSMOS/M [47]. É considerada uma malha regular constituída por elementos isoparamétricos de 4 nós.

A tabela 9.1 apresenta os parâmetros que permitem caracterizar as discretizações adoptadas na análise da placa representada na figura 6.5. Lista-se o número de elementos,  $n_{elem}$ , o valor dos parâmetros de tensão e de deslocamento,  $\alpha_v$ ,  $\beta_v$  e  $\beta_\gamma$ , e o número total de graus de liberdade,  $N_{gl}$ . São também apresentados os tempos de cálculo (em segundos) associados a cada um dos modelos,  $T_{calc}$ . Não é aqui referido o tempo de execução do programa COSMOS/M, por ter sido apenas possível a utilização de uma versão desenvolvida para computadores pessoais.

Modelo	$n_{elem}$	$N_{gl}$	$\alpha_v$	$\beta_v$	$\beta_\gamma$	$T_{calc}(s)$
Walsh	16	59576	49152	8192	2232	32.23
Wavelet	4	1644	972	512	160	20.64
Mix_F	4	1544	972	392	180	4.00
Mix_L	4	1664	972	512	180	2.17
COSMOS/M	900	1860	-	-	-	-

Tabela 9.1: Caracterização das diferentes discretizações consideradas.

Convém esclarecer qual o critério que esteve na base da selecção das discretizações adoptadas. Para tornar mais eficaz a comparação, houve o cuidado de tentar assegurar que o número de graus de liberdade utilizados fosse aproximadamente o mesmo em todos os casos testados. No entanto, este critério não pode ser seguido

no caso do modelo baseado em aproximações com séries de Walsh. Tendo em conta as características das funções digitais, 1800 graus de liberdade é manifestamente insuficiente para se conseguir obter uma boa solução. Por tal motivo, foi seleccionada para comparação uma discretização que conduz a um tempo de cálculo semelhante ao conseguido pelo modelo baseado em aproximações com wavelets.

Nas figuras 9.1 a 9.5 apresentam-se as distribuições dos campos de tensões e de deslocamentos obtidas para cada um dos casos. A comparação qualitativa da informação contida nessas figuras permite confirmar a existência de uma boa concordância entre as diferentes soluções. Esta ideia é reforçada pela informação contida nas tabelas 9.2 e 9.3.

Na tabela 9.2 apresentam-se os valores obtidos para as tensões nos pontos A, B e C representados na figura 6.5. A selecção destes pontos merece também um comentário. A escolha dos pontos A e B para efectuar uma comparação de valores é discutível, tendo em atenção que é precisamente nesses pontos que existem singularidades no campo de tensões. Permitem no entanto aferir a capacidade dos modelos numéricos para modelar o elevado gradiente de tensões aí existente e para respeitar as condições de fronteira estática nessa região. Quanto a este último aspecto, é bem visível a dificuldade sentida pelo modelo de deslocamento. Já no ponto C, situado numa região onde não existem grandes variações no valor do campo de tensões, todos os modelos fornecem resultados praticamente coincidentes.

Na tabela 9.2 apresentam-se valores obtidos com uma segunda discretização com funções de Walsh (coluna denotada por Walsh\*). Nesta aproximação considera-se  $n_x = n_y$ . Esta pequena alteração em relação ao procedimento usual até aqui seguido tem como única finalidade garantir *a priori* a verificação local das condições de fronteira estática. Este objectivo é plenamente atingido, tal como se comprova através da análise dos valores listados. No entanto, é importante sublinhar que esta discretização origina o aparecimento de equações dependentes (modos espúrios) no sistema governativo global.

P		Walsh	Walsh*	Wavelet	Mix_F	Mix_L	COSMOS
A	$\bar{\sigma}_{xx}$	7.734	7.726	8.493	8.078	9.559	7.623
	$\bar{\sigma}_{yy}$	-0.935	-1.000	-0.998	-1.000	-1.000	2.287
	$\bar{\sigma}_{xy}$	-0.050	0.000	-0.001	0.000	0.000	-1.656
B	$\bar{\sigma}_{xx}$	-5.302	-5.297	-5.391	-5.498	-6.237	-5.281
	$\bar{\sigma}_{yy}$	-0.037	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.584
	$\bar{\sigma}_{xy}$	-0.018	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.814
C	$\bar{\sigma}_{xx}$	0.031	0.031	0.031	0.036	0.028	0.031
	$\bar{\sigma}_{yy}$	-0.474	-0.474	-0.480	-0.476	-0.489	-0.473
	$\bar{\sigma}_{xy}$	-0.747	-0.747	-0.747	-0.745	-0.721	-0.747

Tabela 9.2: Valores das tensões nos pontos A, B e C.

A tabela 9.3 lista o valor dos deslocamentos no canto inferior direito da consola

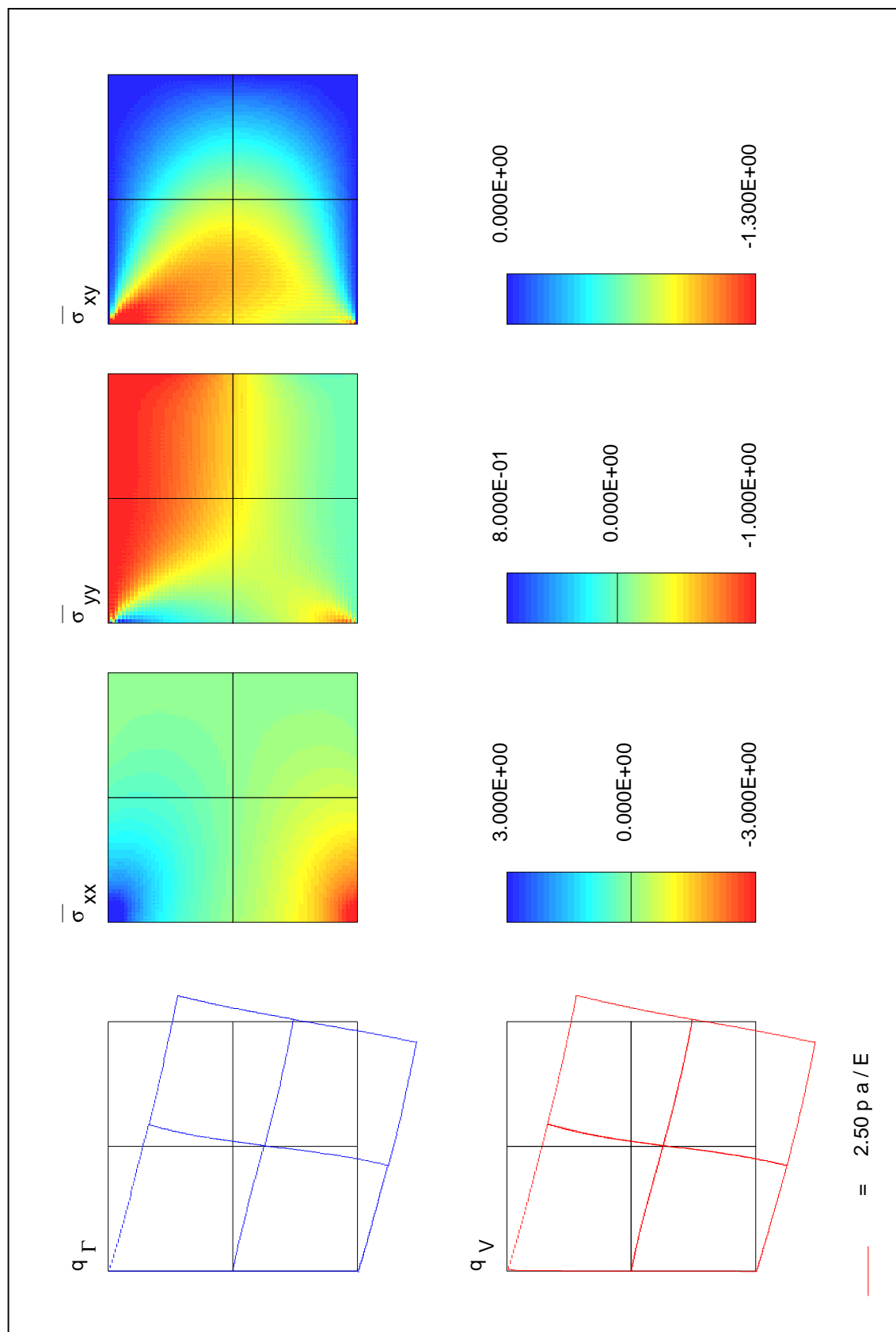


Figura 9.1: Análise da consola quadrada; solução com funções de Walsh.

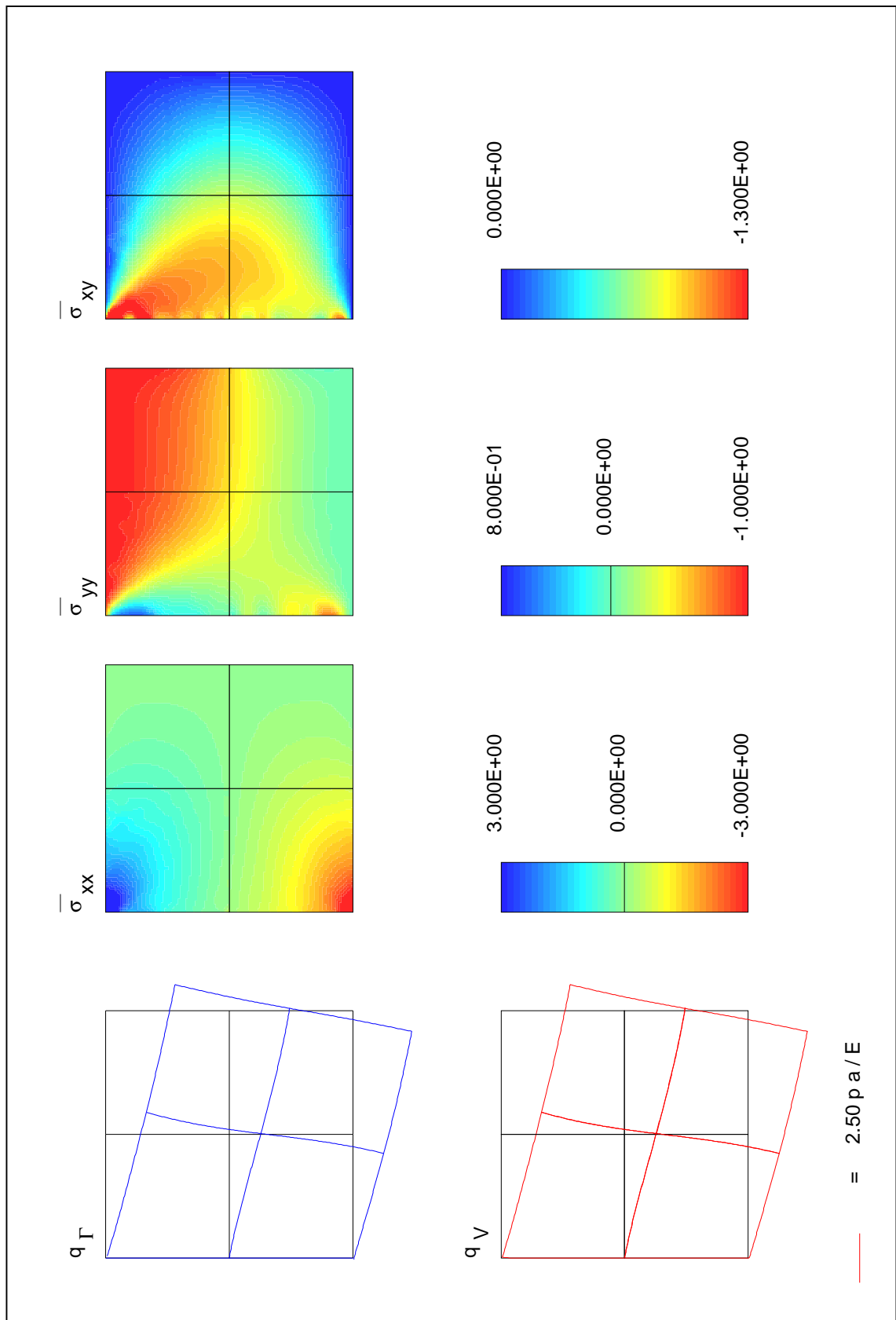


Figura 9.2: Análise da consola quadrada; solução com wavelets.

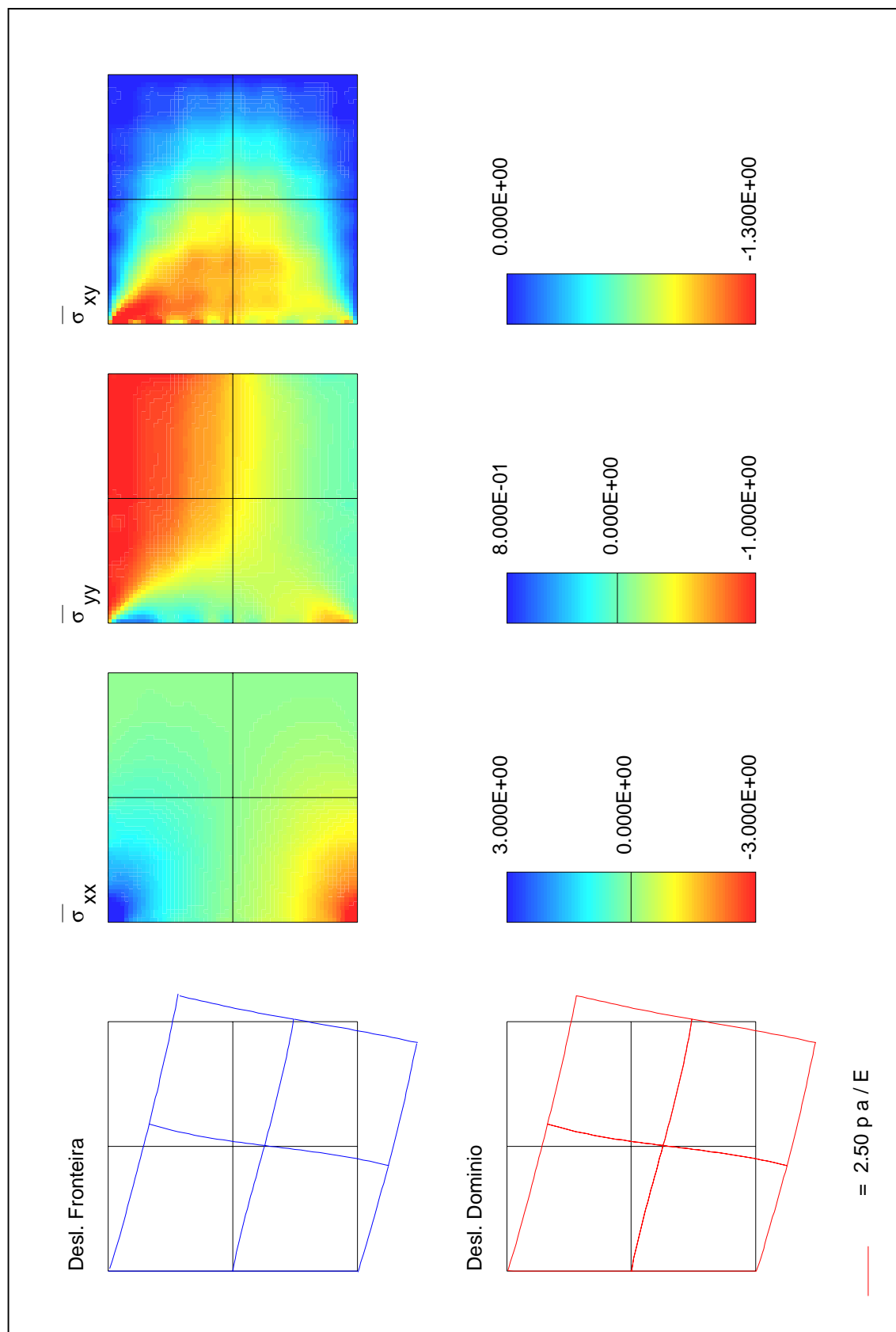


Figura 9.3: Análise da consola quadrada; solução com séries trigonométricas.



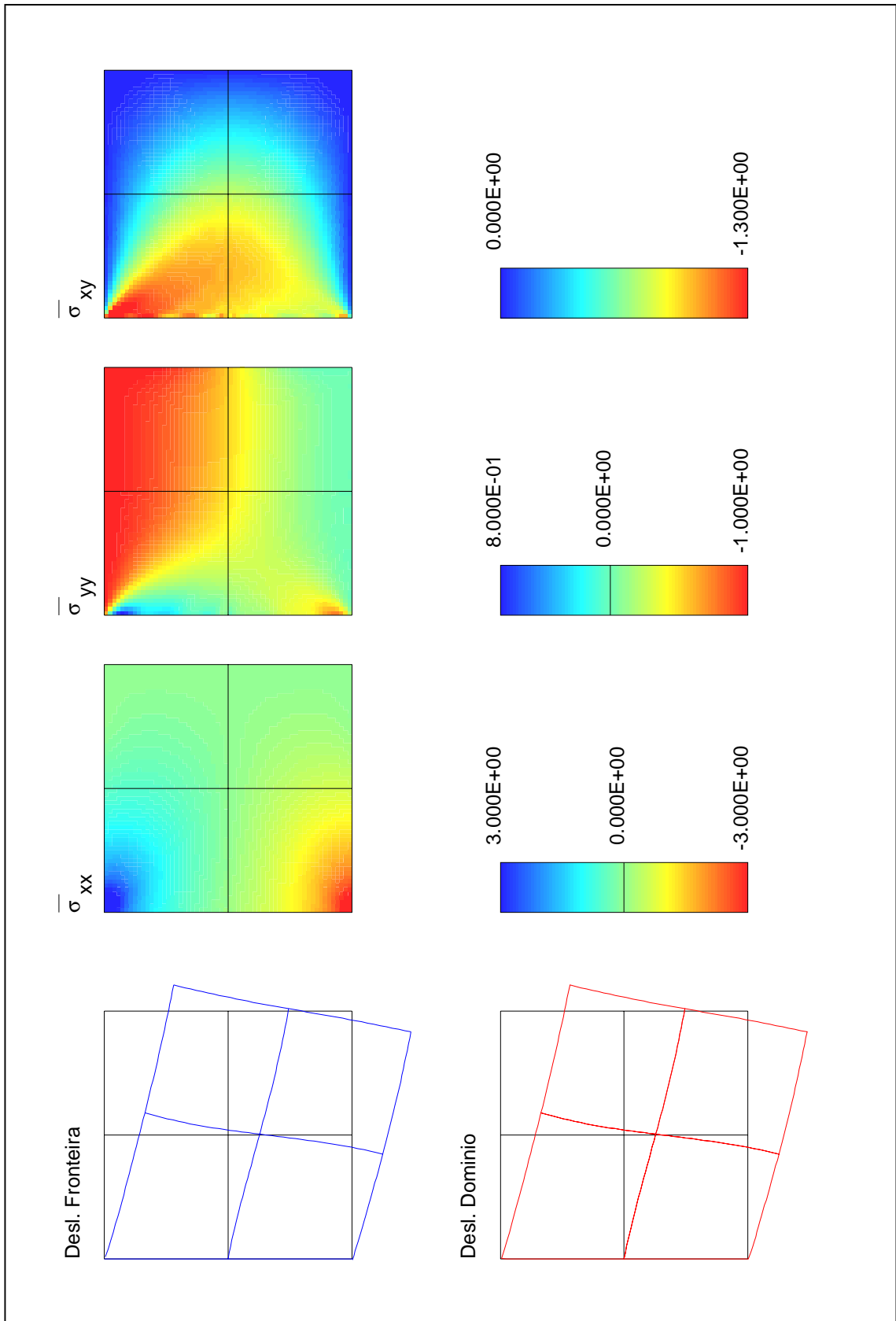


Figura 9.4: Análise da consola quadrada; solução com polinómios de Legendre.

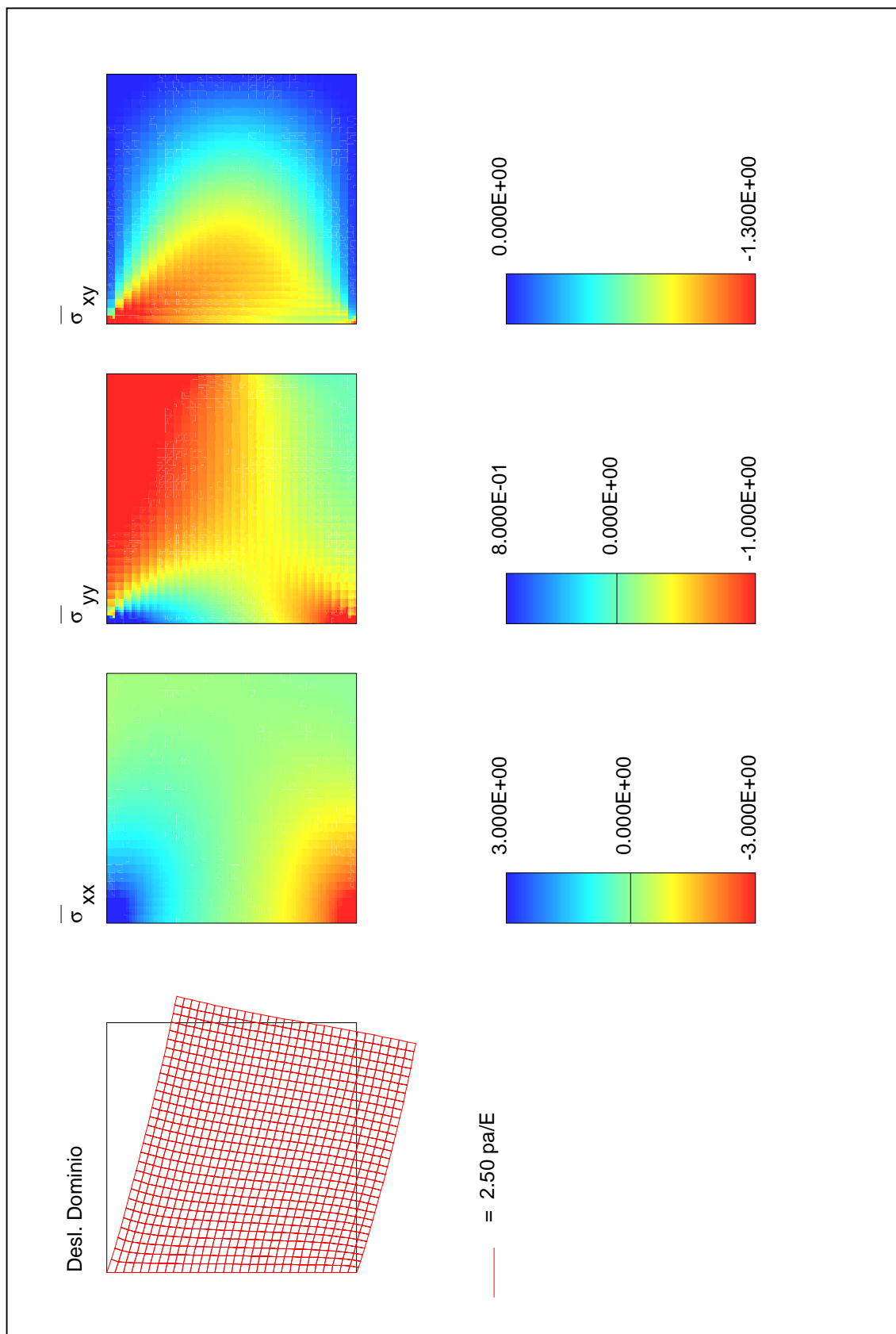


Figura 9.5: Análise da consola quadrada; solução com COSMOS/D.

quadrada (ponto D na figura 6.5). No caso dos modelos híbrido-mistos apresentaram-se os valores obtidos a partir das aproximações efectuadas no domínio e na fronteira. Neste último caso indicam-se em separado os valores obtidos com base na aproximação dos deslocamentos no bordo inferior e no bordo lateral direito da placa,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente. É bem visível a boa concordância dos valores obtidos.

	<i>Walsh</i>	<i>Wavelet</i>	<i>Mix_F</i>	<i>Mix_L</i>	<i>COSMOS</i>
$\bar{d}_x(V)$	-1.021	-1.042	-1.036	-1.041	-1.039
$\bar{d}_y(V)$	-2.970	-2.991	-2.981	-2.988	-2.979
$\bar{d}_x(\Gamma_1)$	-1.042	-1.041	-1.088	-1.041	-
$\bar{d}_y(\Gamma_1)$	-2.970	-2.958	-2.982	-2.988	-
$\bar{d}_x(\Gamma_2)$	-1.021	-1.043	-1.037	-1.041	-
$\bar{d}_y(\Gamma_2)$	-2.993	-2.994	-3.038	-2.987	-

Tabela 9.3: Valores dos deslocamentos no ponto D.

### 9.3.2 Modelo de equilíbrio *vs.* modelo de compatibilidade

São agora utilizados os modelos híbrido-mistos de compatibilidade na análise da consola quadrada. As duas discretizações consideradas são semelhantes às que foram adoptadas na secção anterior, sendo de novo utilizada a malha B. No caso em que se utilizam funções de Walsh nas aproximações, considera-se que  $n_x = n_v = n_{x\gamma} = 2^6$ . A aproximação com wavelets envolve a utilização de funções de escala pertencentes à família com  $N = 10$  e com o grau de refinamento  $j = 1$ .

Na tabela 9.4 apresenta-se, para cada uma destas discretizações, o número de graus de liberdade envolvidos na aproximação, o índice de esparsidade do sistema governativo global e o valor adimensional da energia de deformação associada a cada uma das soluções.

Modelo	$N_{gl}$	$\eta$	$\bar{U}$
<i>Walsh</i>	82688	0.999555	0.983468
<i>Wavelet</i>	1728	0.877279	0.984234

Tabela 9.4: Caracterização das discretizações consideradas; modelo de compatibilidade.

São apresentadas, nas figuras 9.6 e 9.7, as distribuições dos campos de tensões e de deslocamentos obtidas para cada um dos casos. A comparação *qualitativa* destes diagramas com os que foram apresentados na secção anterior permite constatar uma boa concordância geral entre as soluções obtidas com os diferentes modelos testados. No entanto, a análise da tabela 9.5, onde se apresentam os valores do campo de tensões nos pontos A, B e C (ver figura 6.5), permite salientar a dificuldade que

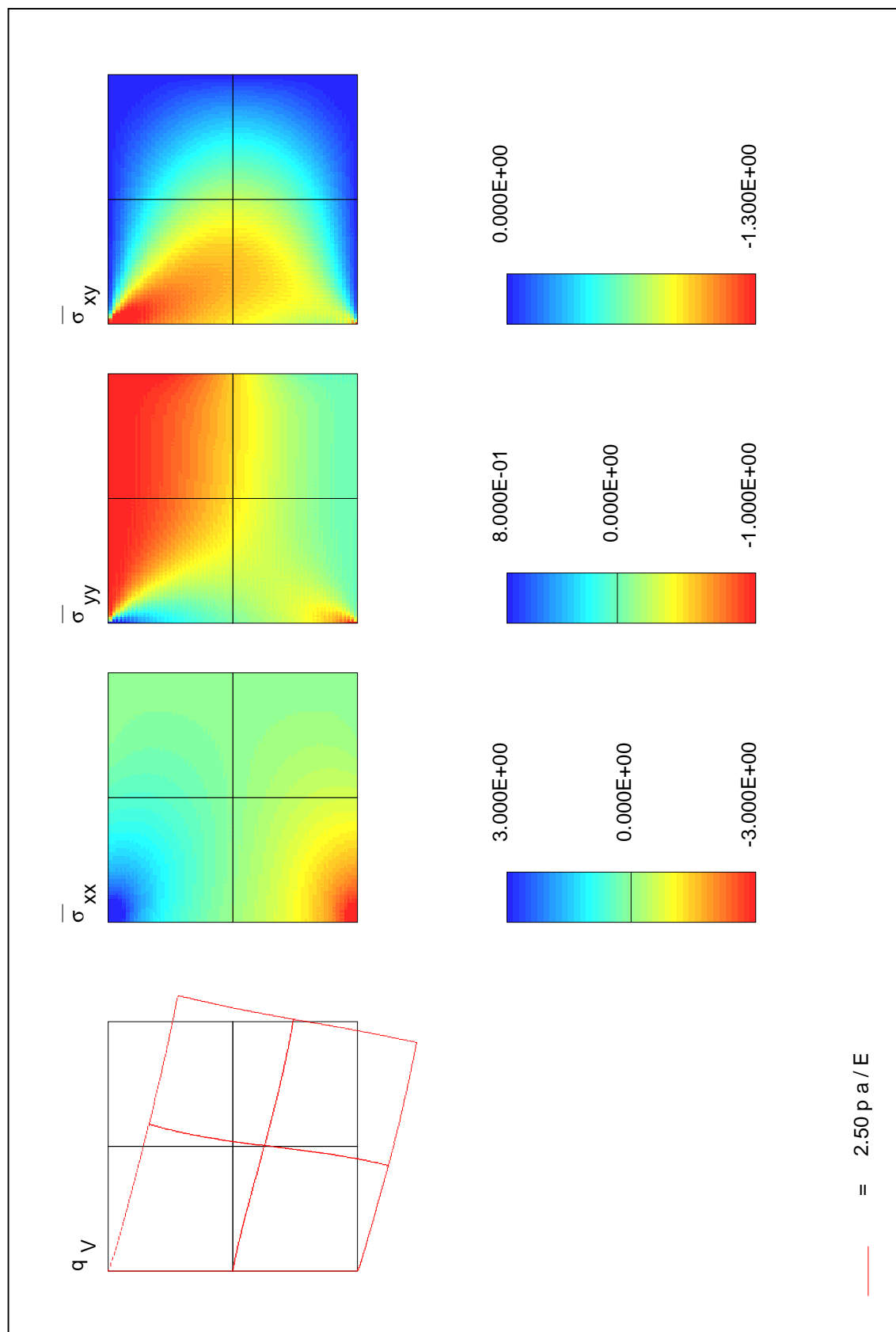


Figura 9.6: Consola quadrada; modelo de compatibilidade com funções de Walsh.

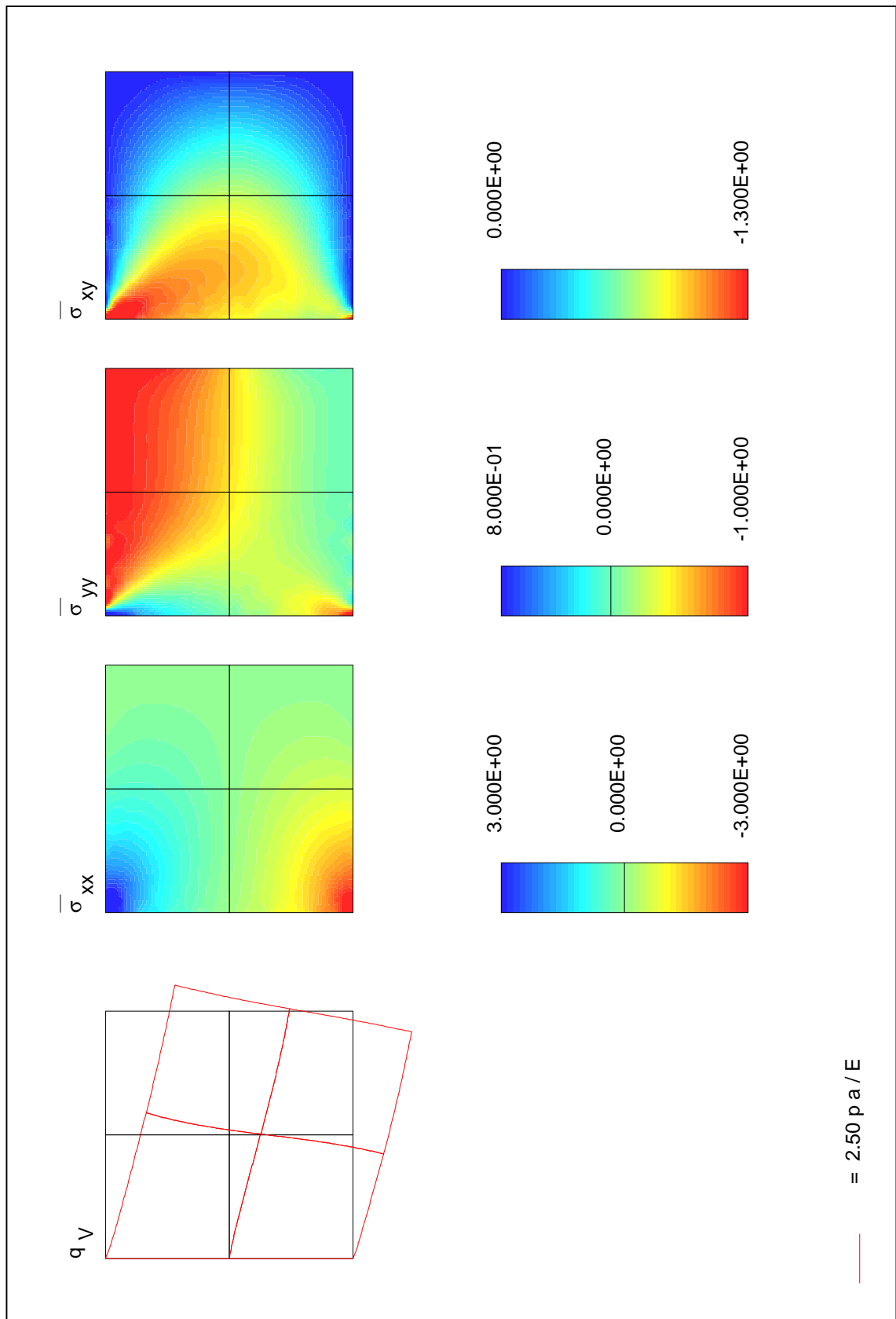


Figura 9.7: Consola quadrada; modelo de compatibilidade com wavelets.

os modelos de compatibilidade têm para tentar conseguir satisfazer as condições de fronteira estática junto ao bordo encastrado. Repare-se que nos pontos A e B, o campo de tensões tem um *comportamento* muito semelhante ao apresentado pelo modelo de elementos finitos de deslocamento (ver solução com programa *COSMOS*). Tal como seria de esperar, os valores obtidos para o campo de tensões no ponto C são praticamente coincidentes com os que resultaram da utilização de todos os modelos testados.

	A			B			C		
Modelo	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$
<i>Walsh</i>	9.113	2.734	-2.927	-5.940	-1.782	-1.429	0.030	-0.473	-0.743
<i>Wavelet</i>	9.531	2.859	-2.957	-5.992	-1.798	-1.423	0.032	-0.474	-0.746

Tabela 9.5: Valores das tensões nos pontos A, B e C; modelos de compatibilidade.

A incapacidade dos modelos de compatibilidade para satisfazer localmente as condições de fronteira estática é salientada de forma clara pelos gráficos apresentados na figura 9.8, nos quais se representa, para os casos envolvendo a utilização de funções de Walsh, a distribuição de tracções ao longo da fronteira da consola quadrada. Verifica-se que a solução associada à utilização do modelo de equilíbrio verifica localmente a condição (2.4). Já a solução correspondente à aplicação do modelo de compatibilidade apresenta uma *perturbação* assinalável junto aos vértices pertencentes ao bordo encastrado. Verifica-se no entanto que fora dessa zona as duas soluções são praticamente coincidentes.

Os valores do campo de deslocamentos no ponto D encontram-se listados na tabela 9.6. Tal como seria de esperar, são praticamente coincidentes com os valores obtidos com os outros modelos.

	D	
Modelo	$\bar{d}_x$	$\bar{d}_y$
<i>Walsh</i>	-1.038	-2.979
<i>Wavelet</i>	-1.039	-2.982

Tabela 9.6: Valor dos deslocamentos no ponto D; modelos de compatibilidade.

## 9.4 Consideração de soluções singulares

A existência de zonas em *cunha*, *entalhes* ou ainda de cantos *reentrantes* em conjugação com mudanças nas condições de apoio faz com que surjam singularidades no campo de tensões. É precisamente nestas regiões que os modelos numéricos maior dificuldade têm em aproximar de uma forma conveniente e eficaz a distribuição das tensões. Para ultrapassar esta dificuldade, é usual considerar uma malha muito

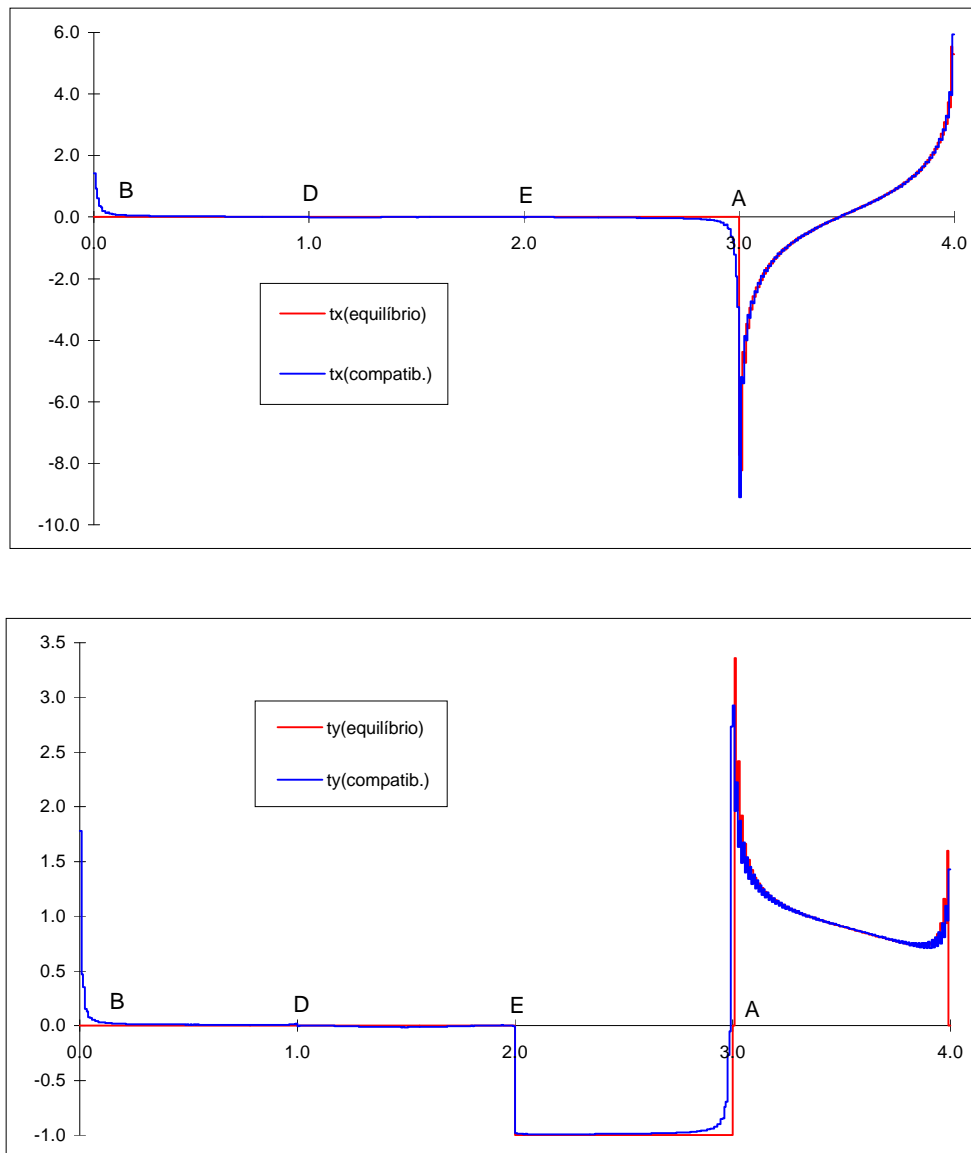


Figura 9.8: Distribuição do campo de tracções na fronteira.

apertada naquela região, sempre que se utilizam modelos tradicionais de elementos finitos. Quando se utilizam formulações híbridas/mistas, o tratamento desta situação passa, regra geral, pelo aumento do número de parâmetros de tensão utilizados na discretização.

Este modo de proceder apresenta duas limitações. A primeira tem a ver com o aumento significativo do número de graus de liberdade considerado. Em geral, as singularidades situam-se numa região muito limitada do domínio em estudo, sendo o *andamento* geral do campo de tensões muito mais suave. Em consequência, se não fosse a singularidade ou a concentração de tensões, o número de graus de liberdade a considerar seria substancialmente inferior ao que é necessário tomar.

O outro aspecto negativo tem a ver com as oscilações e perturbações que a singularidade pode introduzir. Tal como foi verificado nas aproximações com sistemas de wavelets, a existência de uma zona com singularidade no campo de tensões introduz uma perturbação que se propaga a regiões já afastadas dos cantos do bordo encastrado.

Uma forma elegante e eficiente de contornar este problema consiste na incorporação de soluções clássicas da Teoria da Elasticidade [188] na aproximação do campo de tensões. Estas soluções permitem modelar de uma forma muito eficaz e "exacta" os campos singulares na vizinhança do canto ou entalhe que lhes dão origem. As restantes funções de aproximação são então libertadas para aproximar o campo de tensões no resto do domínio.

Para modelar as singularidades é utilizada neste trabalho a metodologia proposta inicialmente por Williams [197] e que se encontra reproduzida, por exemplo, em [188] e [14]. Em anexo apresentam-se as funções que permitem aproximar nestas circunstâncias os campos de tensões e de deslocamentos.

As potencialidades desta metodologia são ilustradas através da análise da placa encastrada estudada na secção anterior. São consideradas duas discretizações, uma sem funções singulares, uma outra em que se utilizam as funções de Williams. Neste último caso é considerada a existência de duas singularidades, localizadas cada uma delas nos cantos do bordo encastrado. São utilizadas na aproximação wavelets da família com  $N = 10$ . Na tabela 9.7 apresentam-se as características gerais das duas discretizações.

Caso	$n_{elem}$	$\alpha_v$	$\beta_v$	$\beta_\gamma$	$N_{gl}$	$T_{calc}$
1	1	108	50	30	188	0.61
2	1	116	50	30	196	287.00

Tabela 9.7: Características das discretizações adoptadas.

As figuras 9.9 e 9.10 representam a solução obtida em cada um dos casos testados. É notória a melhoria que se consegue obter com um aumento mínimo no número de graus de liberdade considerado.



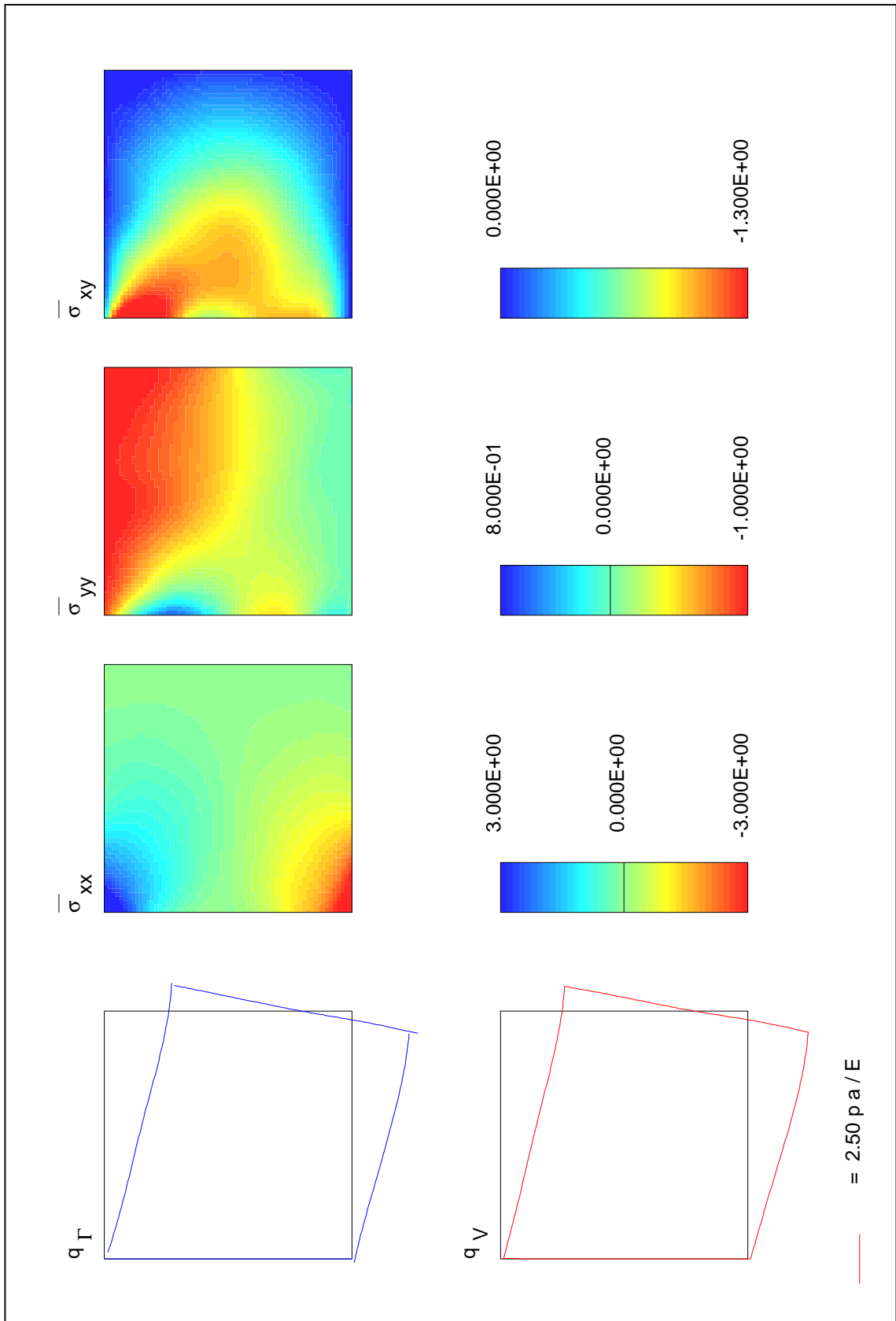


Figura 9.9: Análise da consola encastrada; solução sem funções singulares.

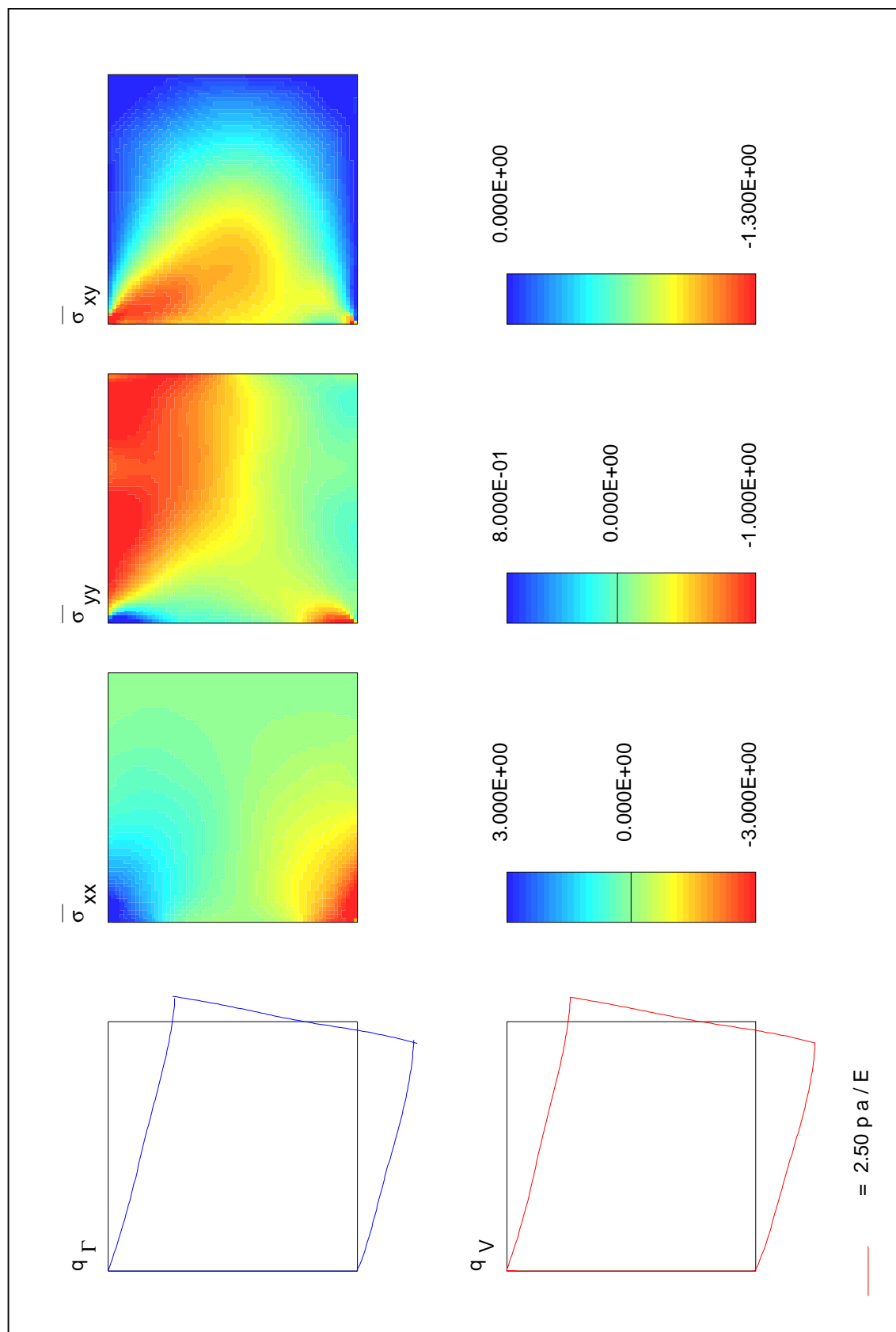


Figura 9.10: Análise da consola encastrada; solução com funções singulares.

## 9.5 Placa traccionada com fenda central

A análise da placa representada na figura 9.11 vai permitir ilustrar a capacidade que os modelos híbrido-mistos baseados em aproximações com séries de Walsh têm para modelar os campos de tensões em regiões onde existem singularidades, mesmo sem se utilizarem nas aproximações as soluções de Williams referidas na secção anterior.

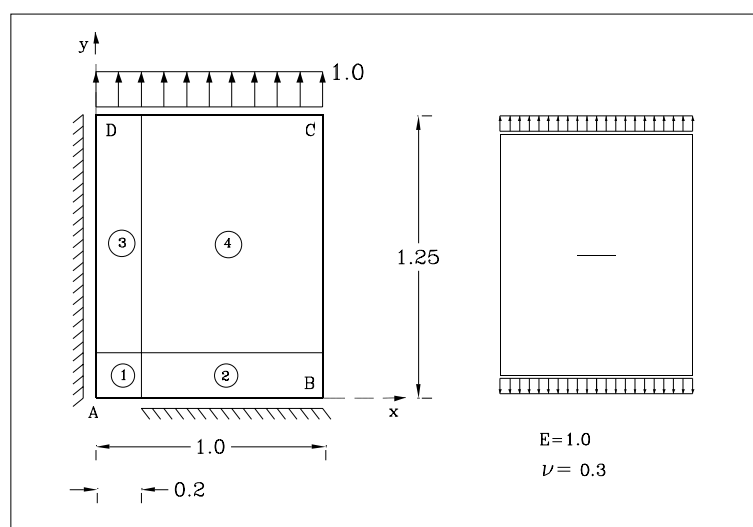


Figura 9.11: *Placa traccionada com fenda central.*

As características da discretização adoptada encontram-se listadas na tabela 9.8. Na resolução do sistema de equações foi utilizado o método iterativo que trabalha com a forma condensada da matriz dos coeficientes (3.57) e utiliza o pré-condicionamento *quase-diagonal*.

Modelo	$n_{elem}$	$n_x$	$n_v$	$n_{v\gamma}$	$\alpha_v$	$\beta_v$	$\beta_\gamma$	$N_{gl}$	$T_{calc}(s)$
Walsh	4	64	32	64	49152	8192	1344	58688	113.91
<i>Mix_L</i>	4	20	19	19	4800	2888	420	8108	69.39

Tabela 9.8: *Características das discretizações utilizadas na análise da placa traccionada.*

Para validar os resultados obtidos com as funções de Walsh, utiliza-se de novo uma solução obtida com o modelo *Mix\_L*. Na figura 9.12 representa-se a evolução das tracções ao longo de toda a fronteira da placa. Da análise da figura ressalta não só a semelhança existente entre ambas as soluções, mas também a forma como é verificada localmente a condição de fronteira estática.

Na figura 9.13 representa-se a solução obtida para o campo de tensões em toda a placa. É de salientar a forma eficaz como o modelo utilizado consegue modelar o campo de tensões na vizinhança da fenda considerada.

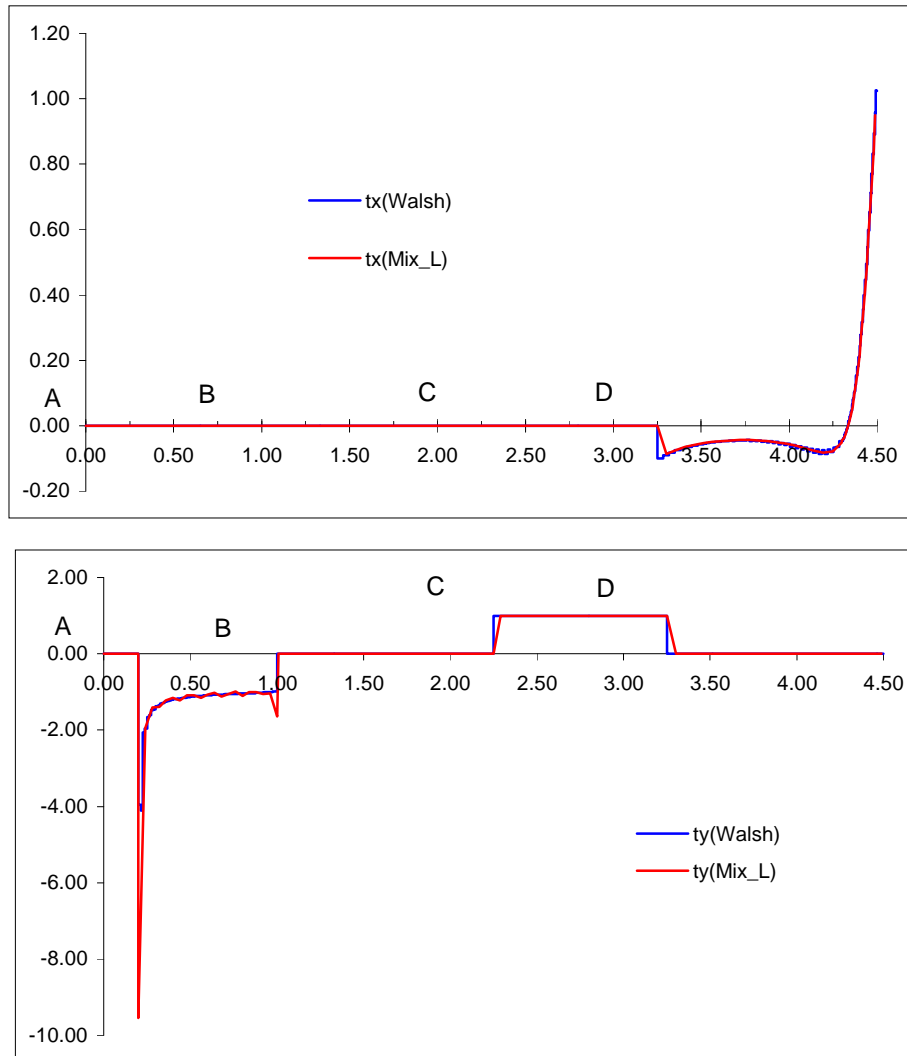


Figura 9.12: Distribuição das trações na fronteira da placa traccionada com fenda central.

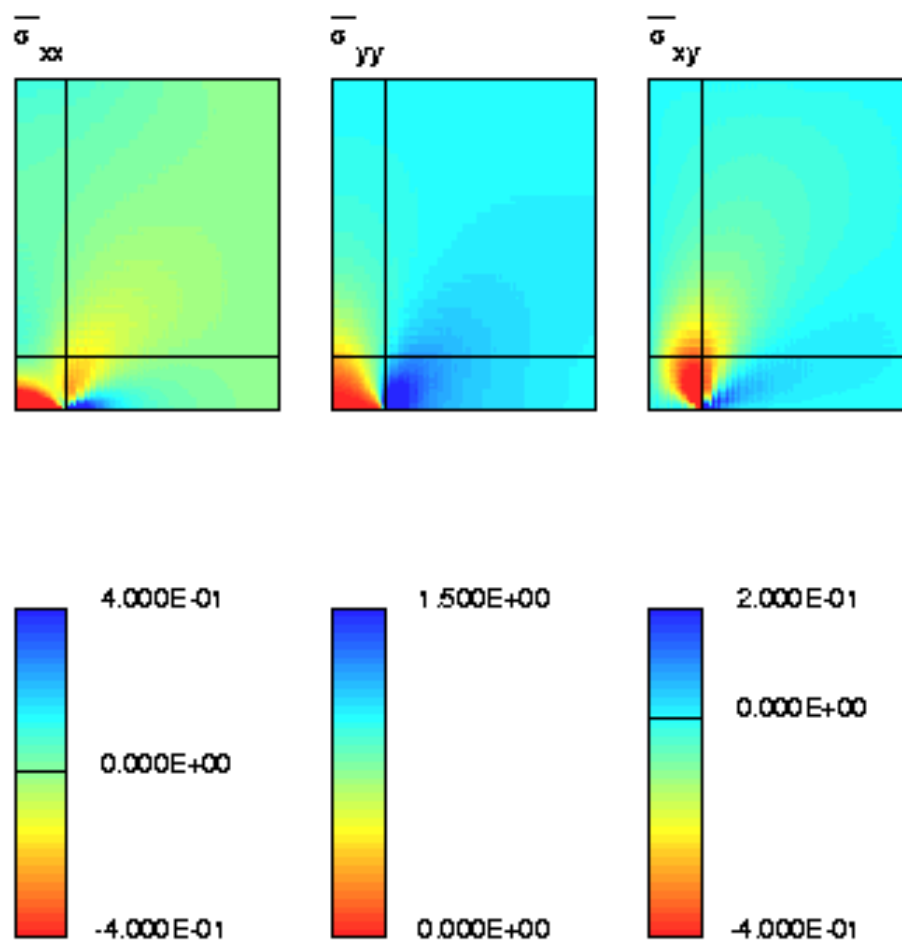


Figura 9.13: Distribuição do campo de tensões na placa traccionada com fenda central.

## 9.6 Consola triangular

Para ilustrar a utilização dos elementos híbrido-mistos na resolução de problemas com domínios não-rectangulares, é efectuada a análise da consola triangular representada na figura 9.14.

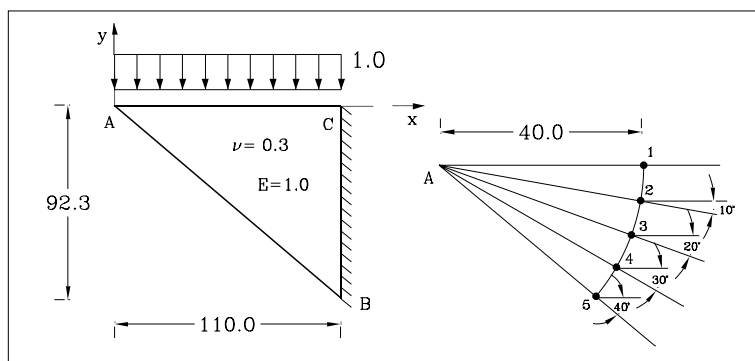


Figura 9.14: *Consola triangular.*

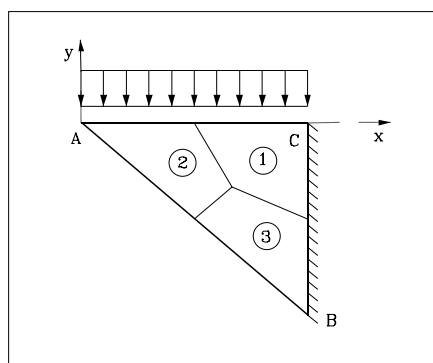


Figura 9.15: *Malha utilizada na análise da consola triangular.*

É utilizada na resolução deste problema uma malha com três elementos finitos. As aproximações são efectuadas com wavelets da família com  $N = 10$ . O campo de tensões é modelado com funções de escala com grau de dilatação  $j = 1$ . Os campos de deslocamentos, tanto no domínio quanto na fronteira estática, são aproximados com funções de escala com  $j = 0$ . Na tabela 9.9 encontram-se indicados os parâmetros que caracterizam a discretização adoptada, o número de elementos, os parâmetros de tensão e de deslocamento e o número total de graus de liberdade envolvidos na análise. Apresenta-se ainda na mesma tabela a caracterização das discretizações efectuadas com outros modelos de elementos finitos. Estes são utilizados para efectuar algumas comparações com os resultados fornecidos pela formulação em estudo.

Caso	$n_{elem}$	$\alpha_v$	$\beta_v$	$\beta_\gamma$	$N_{gl}$
<i>Wavelet</i>	3	729	384	112	1225
<i>Mix_L</i>	3	1089	154	600	1843
<i>Hib_T</i>	1	52	-	50	102
<i>Hib_Q</i>	28	252	-	176	428
$5\beta$	28	140	-	176	316

Tabela 9.9: *Discretizações adoptadas na análise da consola triangular.*

O modelo híbrido-misto baseado em aproximações com polinómios ortogonais de Legendre continua a ser designado por *Mix\_L*. Para obter a solução que aqui se apresenta, foram utilizados polinómios de grau 10 para aproximar os campos de tensões no domínio e de deslocamentos na fronteira estática. A aproximação do campo de deslocamentos no domínio é efectuada com polinómios do 9º grau.

O modelo híbrido-Trefftz [79, 80], *Hib\_T*, utiliza polinómios do terceiro grau para aproximar o campo de deslocamentos na fronteira. As tensões são modeladas à custa da consideração de polinómios de Tchebychev [79] de grau 11. Para além destas aproximações, é considerada ainda a inclusão da solução de Williams [197] que tem como finalidade modelar de uma forma mais eficaz o campo de tensões singular que se desenvolve na vizinhança do ponto C.

Os elementos híbridos de tensão *Hib\_Q* e  $5\beta$  possuem oito modos de deslocamento conformes e quatro modos de deslocamento incompatíveis. Os elementos *Hib\_Q*, utilizados por Dong e Freitas [56], possuem oito parâmetros de tensão, enquanto que os elementos  $5\beta$ , desenvolvidos por Pian e Wu [162], apresentam apenas cinco.

Na tabela 9.10 encontram-se listados os valores das tensões nos cinco pontos identificados na figura 9.14. A localização destes pontos foi escolhida por forma a tornar desprezável a influência do encastramento. A solução *quase-exacta* é conseguida combinando termos constantes com o campo de tensões obtido a partir da função geradora de tensões  $\varphi = r^2\theta$ , onde  $(r, \theta)$  representa um sistema de coordenadas polares [79]. Esta solução seria exacta se se considerasse um domínio triangular semi-infinito. Vai portanto perdendo validade à medida que se consideram zonas cada vez mais próximas do encastramento.

Os resultados obtidos com a utilização de sistemas de wavelets mostram uma boa concordância não só com a *solução exacta*, mas ainda com os resultados fornecidos pelos outros modelos numéricos. É importante sublinhar que devido à forma utilizada na geração das funções de escala, apenas é conhecido o seu valor nos pontos diádicos. Desta forma, os valores listados na tabela 9.10 dizem respeito aos pontos diádicos (são considerados 128 em cada direcção) situados mais próximo dos cinco pontos indicados na figura 9.14. Tendo em atenção a *rápida* variação dos valores das tensões naquela zona do domínio, este facto justifica, em parte, alguns pequenos desvios notados em relação à solução exacta.

P		"Exacto"	Wavelet	Mix_L	Hib_T	Hib_Q	$5\beta$
	$\sigma_{xx}$	4.952	5.117	4.294	4.943	4.94	4.27
1	$\sigma_{yy}$	-1.000	-0.991	-1.000	-1.000	-	-
	$\sigma_{xy}$	0.000	$0.77 \times 10^{-3}$	0.000	0.000	-	-
	$\sigma_{xx}$	2.501	2.531	2.499	2.499	2.51	2.57
2	$\sigma_{yy}$	-1.025	-1.048	-1.027	-1.028	-	-
	$\sigma_{xy}$	0.214	0.231	0.206	0.207	-	-
	$\sigma_{xx}$	0.196	0.222	0.303	0.201	0.17	0.50
3	$\sigma_{yy}$	-1.196	-1.219	-1.205	-1.204	-	-
	$\sigma_{xy}$	0.830	0.804	0.826	0.825	-	-
	$\sigma_{xx}$	-1.834	-1.862	-1.819	-1.830	-1.82	-1.70
4	$\sigma_{yy}$	-1.643	-1.669	-1.663	-1.652	-	-
	$\sigma_{xy}$	1.773	1.770	1.775	1.775	-	-
	$\sigma_{xx}$	-3.493	-3.527	-3.483	-3.499	-3.77	-3.29
5	$\sigma_{yy}$	-2.459	-2.484	-2.429	-2.463	-2.98	-2.86
	$\sigma_{xy}$	2.931	2.954	3.002	2.936	-	-

Tabela 9.10: Comparação dos valores das tensões nos pontos 1,2,3,4 e 5 da consola triangular.

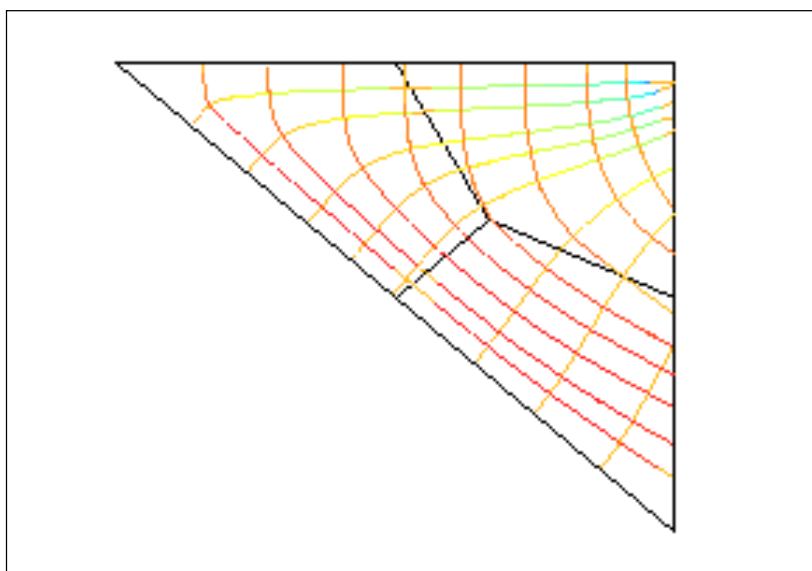


Figura 9.16: Consola triangular; traçado das trajetórias de tensão.



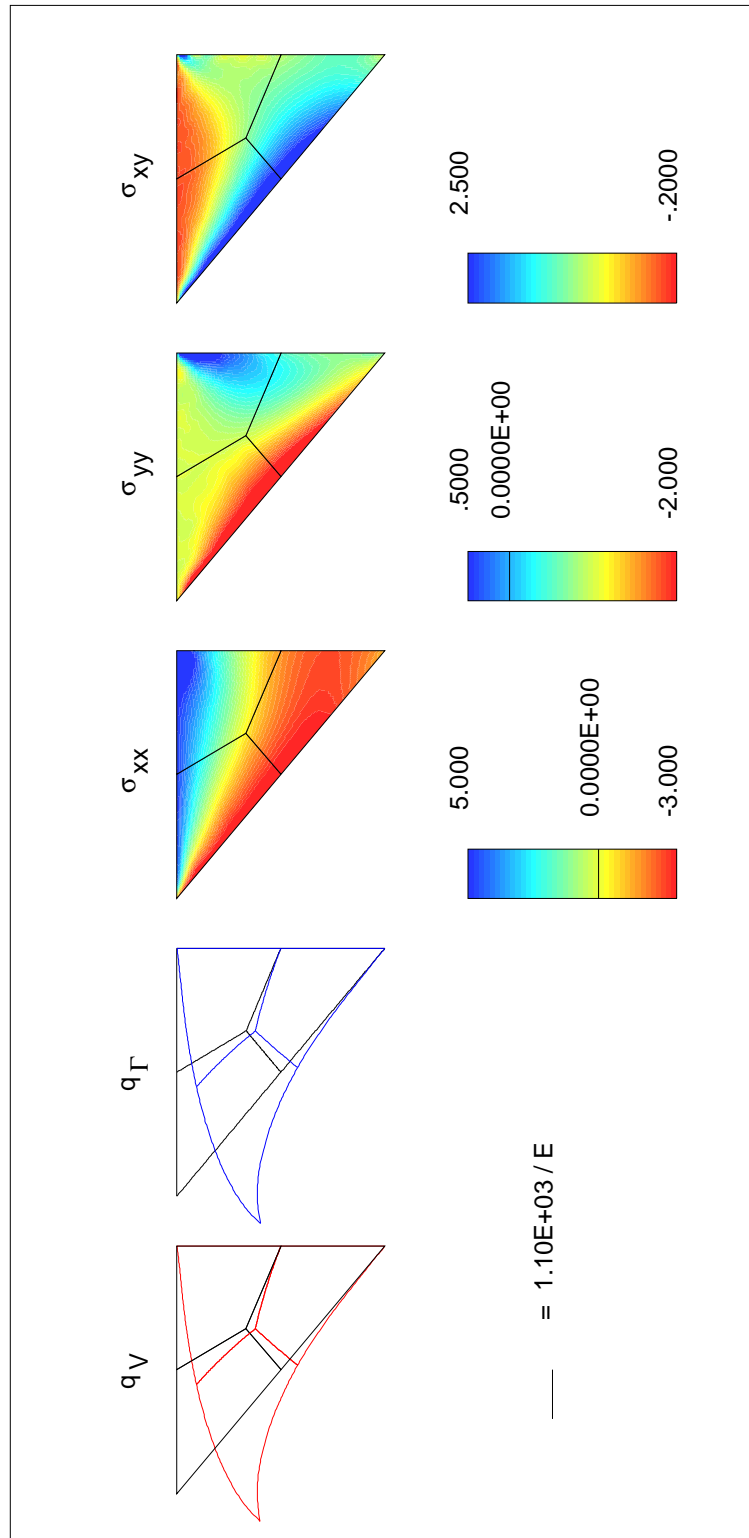


Figura 9.17: Consola triangular; solução obtida através da análise com wavelets.

A solução completa do problema encontra-se representada na figura 9.17. Na figura 9.16 apresenta-se o traçado das trajetórias de tensão [152]. Este traçado permite confirmar que a solução obtida respeita de uma forma assinalável as condições de fronteira estática.

## 9.7 Tubo cilíndrico com pressão interna

A utilização de elementos com forma curva é ilustrada através da análise do tubo cilíndrico de comprimento infinito sujeito a uma pressão interna. Devido às condições de simetria existentes, apenas um quarto da estrutura é analisada, tal como se ilustra na figura 9.18.

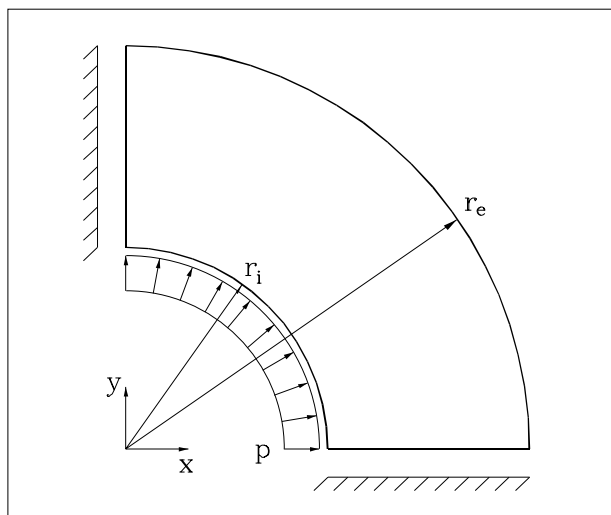


Figura 9.18: *Tubo cilíndrico sujeito a pressão interna.*

A solução analítica para este problema, que pode ser considerado como um estado plano de deformação, foi pela primeira vez obtida por Lamé e encontra-se apresentada em Timoshenko [188]. O campo de tensões (em coordenadas polares) é dado pelas seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2}\right); \\ \sigma_\theta &= p \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2}\right); \\ \sigma_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

A solução analítica para o campo de deslocamentos é definida por:

$$u_r = \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r);$$

$$u_{\theta} = 0.$$

Nas análises efectuadas considera-se um tubo com  $r_e=10$  e  $r_i=5$ . Admite-se ainda o valor  $\nu = 0.2$  para o coeficiente de Poisson do material. De acordo com a informação contida na figura 9.19, são testadas três malhas de elementos finitos.

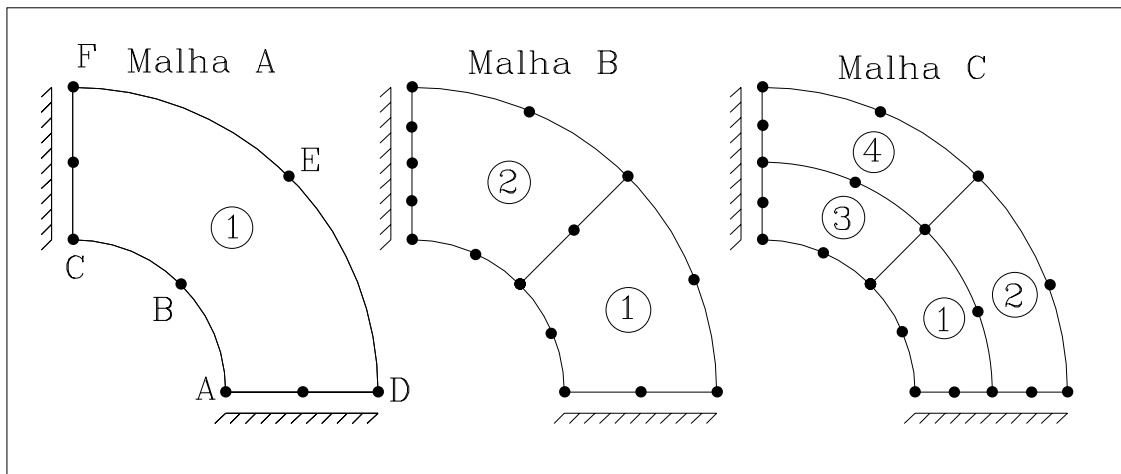


Figura 9.19: Malhas utilizadas na análise do tubo com pressão interna.

As aproximações dos campos estático e cinemático são realizadas com wavelets com  $N=10$ . Para cada malha são testados dois níveis diferentes de aproximação. Obtêm-se desta forma seis casos de teste diferentes. A tabela 9.11 apresenta as características gerais das discretizações adoptadas em cada um destes casos.

Caso	$n_{elem}$	$n_{front}$	$N$	$j$	$N_{gl}$	$T(s)$
1	1	4	10	1	332	17.58
2	1	4	10	2	476	21.32
3	2	7	10	1	664	21.19
4	2	7	10	2	952	29.18
5	4	12	10	1	1300	35.04
6	4	12	10	2	1872	49.93

Tabela 9.11: Discretizações adoptadas para a análise do tubo com pressão interna.

Para além de indicar o número total de graus de liberdade presentes, a tabela 9.11 fornece também o tempo de CPU (em segundos) envolvido na análise. O parâmetro  $j\{j-1\}$  indica o grau de refinamento das funções de escala utilizadas na aproximação do campo de tensões{deslocamentos}.

A tabela 9.12 apresenta os valores exactos do campo de deslocamentos nos pontos indicados na figura 9.19.

Nas tabelas 9.13, 9.14 e 9.15 apresentam-se os valores dos deslocamentos obtidos para cada um dos casos de teste. São apresentados os valores calculados a partir

	A	B	C	D	E	F
$u_x$	9.33(3)	6.5996	0.0	6.66(6)	4.7140	0.000
$u_y$	0.0	6.5996	9.33(3)	0.000	4.7104	6.66(6)

Tabela 9.12: *Tubo com pressão interna; solução exacta para o campo de deslocamentos nos pontos A-F.*

das aproximações do campo de deslocamentos no domínio e na fronteira. Neste último caso é apresentada a média dos valores correspondentes às aproximações independentes efectuadas nos troços convergentes no ponto em causa.

	$u_x(V)$	$u_x(\Gamma)$	$u_y(V)$	$u_y(\Gamma)$	$u_x(V)$	$u_x(\Gamma)$	$u_y(V)$	$u_y(\Gamma)$
A	9.290	5.630	3.715	-	9.299	8.850	0.289	-
B	6.852	6.779	6.079	6.111	6.458	6.412	6.618	6.641
C	1.122	-	8.839	5.238	0.058	-	9.191	8.769
D	6.247	2.749	3.258	-	6.416	6.023	0.244	-
E	4.616	4.572	4.314	4.379	4.464	4.528	4.580	4.509
F	0.879	-	6.283	3.888	0.038	-	6.376	6.115

Tabela 9.13: *Tubo com pressão interna; solução referente aos casos 1 e 3.*

	$u_x(V)$	$u_x(\Gamma)$	$u_y(V)$	$u_y(\Gamma)$	$u_x(V)$	$u_x(\Gamma)$	$u_y(V)$	$u_y(\Gamma)$
A	9.250	9.053	0.115	-	9.093	9.001	0.086	
B	6.485	6.469	6.553	6.548	6.550	6.541	6.233	6.220
C	0.022	-	9.190	8.974	0.040	-	9.066	9.031
D	6.398	6.339	0.034	-	6.377	6.363	-0.052	-
E	4.510	4.520	4.523	4.521	4.534	4.538	4.338	4.341
F	0.010	-	6.379	6.316	-0.039	-	6.335	6.338

Tabela 9.14: *Tubo com pressão interna; solução referente aos casos 5 e 2.*

A análise das tabelas anteriores permite verificar que o caso 1 (malha A com  $j=1$ ) conduz a uma solução bastante fraca. A solução vai sendo melhorada de uma forma consistente à medida que se aumenta o número de elementos na malha. Verifica-se por outro lado que, em termos médios, a solução também melhora quando se incrementa o valor do parâmetro  $j$ , o que corresponde à utilização de funções de escala com um grau de refinamento superior.

O facto de se obter um resultado pouco preciso com apenas um elemento e um grau de aproximação baixo era esperado, uma vez que a informação contida na aproximação é manifestamente insuficiente para permitir modelar convenientemente o comportamento da estrutura.

As figuras 9.20 e 9.21 permitem comparar a evolução do valor exacto dos campos de tensões ao longo do bordo interior do tubo cilíndrico com as soluções aproximadas obtidas para as diferentes discretizações testadas. É bem visível na figura 9.20 a forte

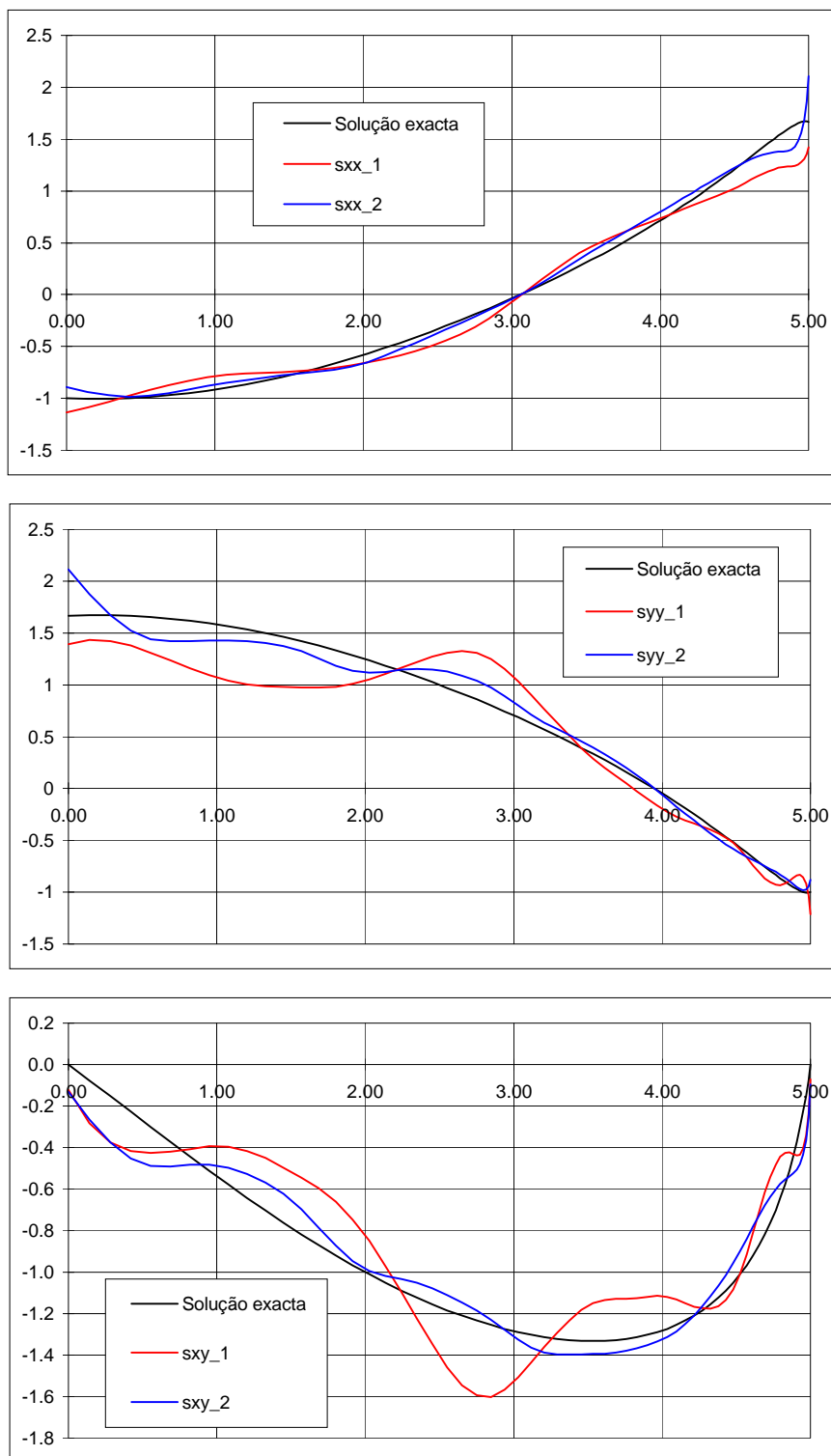


Figura 9.20: Distribuição das tensões ao longo do bordo interior do tubo; solução com 1 elemento.

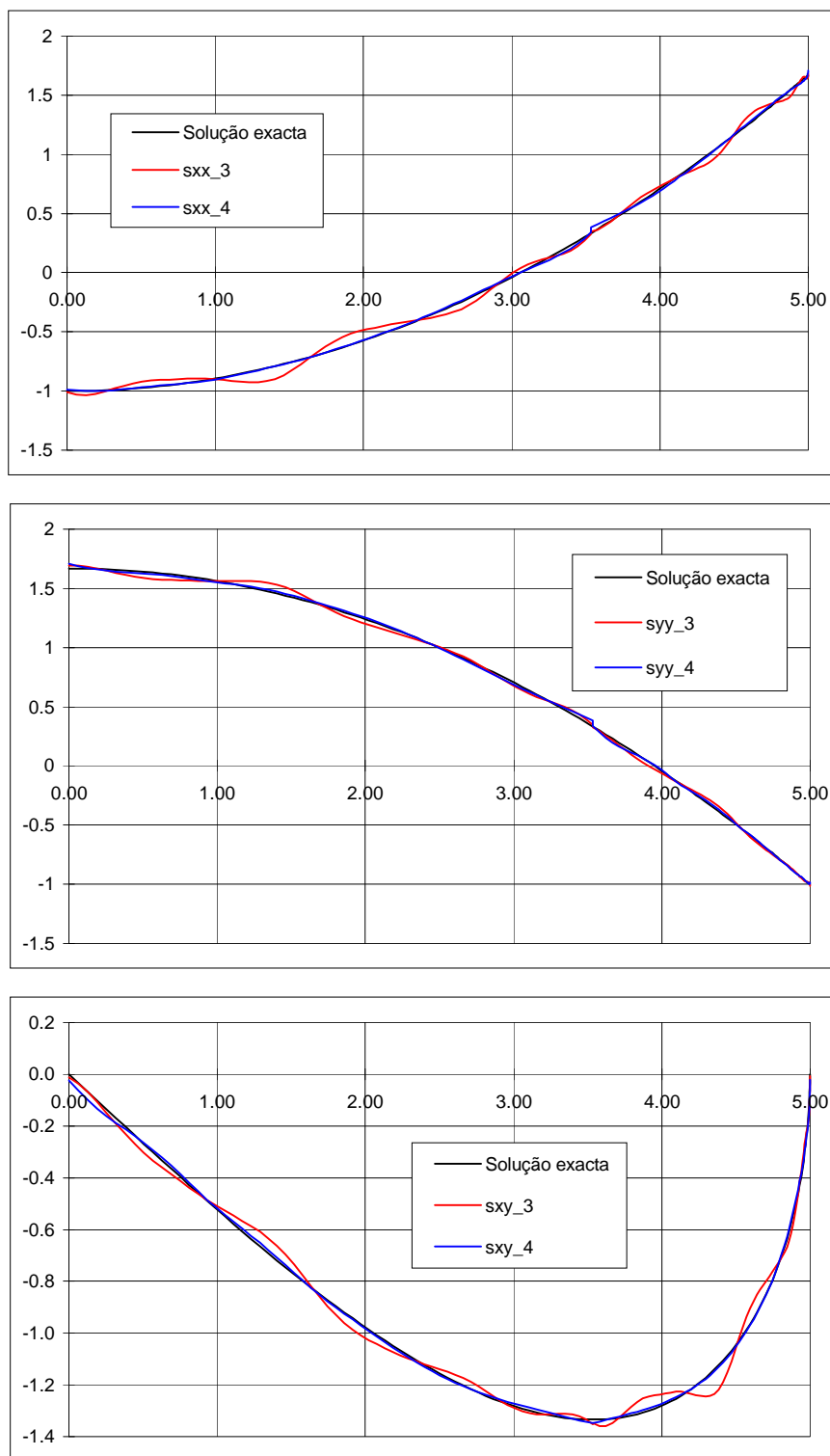


Figura 9.21: Distribuição das tensões ao longo do bordo interior do tubo; solução com 2 elementos.

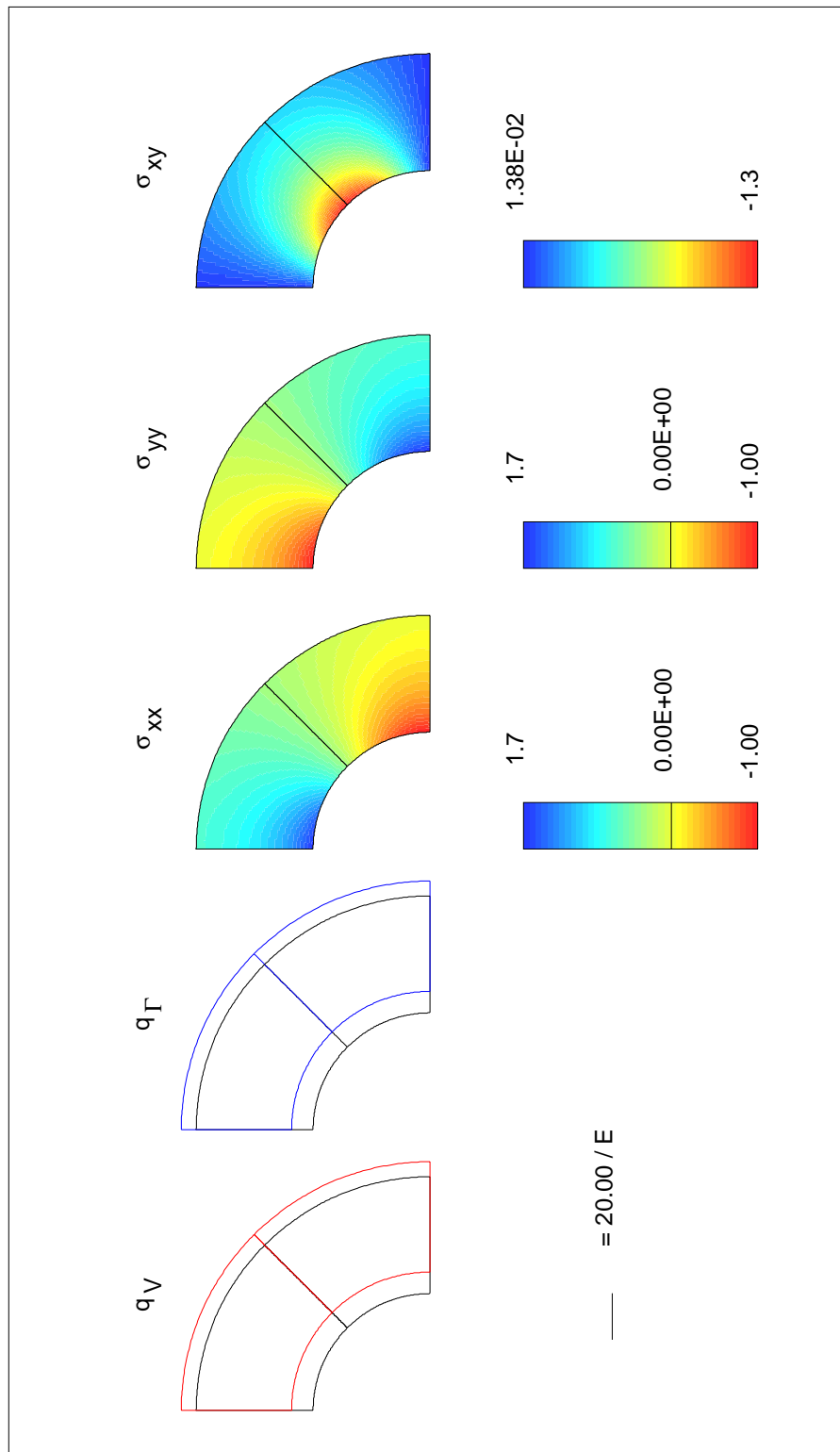


Figura 9.22: *Tubo com pressão interna; solução correspondente ao caso de teste 4.*

	$u_x(V)$	$u_x(\Gamma)$	$u_y(V)$	$u_y(\Gamma)$	$u_x(V)$	$u_x(\Gamma)$	$u_y(V)$	$u_y(\Gamma)$
A	9.214	9.198	0.004	-	9.220	9.200	0.006	-
B	6.504	6.496	6.503	6.496	6.506	6.496	6.505	6.495
C	0.001	-	9.180	9.178	0.004	-	9.186	9.182
D	6.397	6.396	0.000	-	6.397	6.394	-0.001	-
E	4.517	4.522	4.516	4.521	4.518	4.521	4.515	4.521
F	0.000	-	6.378	6.386	-0.002	-	6.377	6.384

Tabela 9.15: *Tubo com pressão interna; solução referente aos casos 4 e 6.*

oscilação que caracteriza a aproximação do campo de tensões obtida para o caso 1. Esta oscilação é já menos notória no caso de teste 2. À medida que se aumenta o número de graus de liberdade, as soluções aproximadas tendem gradualmente para a solução exacta, tal como seria de prever.

Na figura 9.22 apresenta-se a solução completa (campos de tensões e de deslocamentos) referente ao caso de teste 4.

## 9.8 Viga com carga concentrada

A análise da viga simplesmente apoiada representada na figura 9.23 tem como principal finalidade ilustrar a consideração do efeito de cargas concentradas e de apoios pontuais.

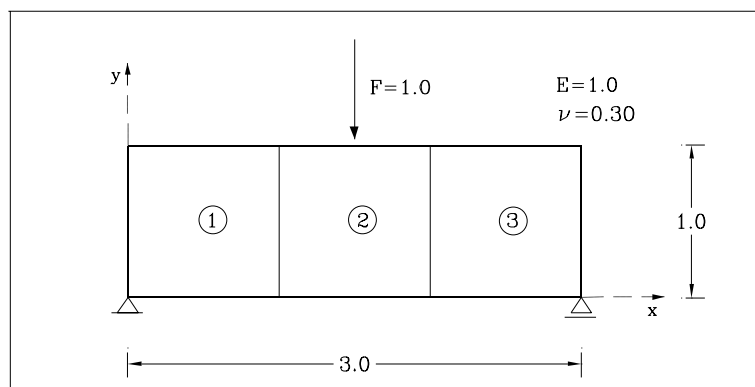


Figura 9.23: *Viga simplesmente apoiada sujeita à acção de uma carga concentrada.*

A acção da carga concentrada é contabilizada através da consideração de uma solução particular na aproximação do campo de tensões. É utilizada para esse efeito a informação apresentada no apêndice D.

A introdução dos apoios pontuais implica o aumento do número de equações no sistema governativo. Na imposição do valor do deslocamento é utilizado um proce-



dimento típico dos *métodos de colocação*. Cada equação adicional é obtida considerando que a combinação linear das funções utilizadas para aproximar o campo de deslocamentos na fronteira deve recuperar, no ponto onde existe o apoio, um valor nulo. Por cada deslocamento restringido, são adicionadas tantas equações quantos forem os troços da fronteira estática que contenham o ponto onde foi considerada a existência do apoio.

Aumentando o número de equações, deve aumentar também o número de graus de liberdade. As incógnitas associadas às novas equações têm um significado físico bem determinado; representam os valores das reacções de apoio.

$n_x$	$n_v$	$n_{v\gamma}$	$N_{gl}$	$T_{calc}(s)$
64	32	63	44274	477.14

Tabela 9.16: *Discretização utilizada na análise da viga simplesmente apoiada.*

Na tabela 9.16 indica-se o grau das funções utilizadas nas aproximações, o número de graus de liberdade e o tempo total de resolução. Uma parcela significativa (129.86 segundos) é consumida no cálculo dos termos independentes, porque no cálculo dos integrais envolvendo a solução particular adoptada não é utilizado um algoritmo de *FWT*. A implementação de um destes algoritmos aceleraria de uma forma significativa a resolução dos integrais.

Na figura 9.24 apresentam-se os campos de tensões e deslocamentos obtidos. A análise desta figura permite realçar a forma eficaz como é modelado o campo de tensões na vizinhança da força concentrada.

O traçado das tracções no bordo superior da placa (ver figura 9.25), permite por outro lado averiguar o modo como são respeitadas as condições de fronteira estática.

## 9.9 Análise elastoplástica da consola quadrada

### 9.9.1 Análise com funções de Walsh

Considere-se a consola quadrada representada na figura 6.5, onde se assume que  $\sigma_0 = 1.0$ . É efectuada a análise elastoplástica incremental da estrutura considerando uma discretização envolvendo apenas um macro-elemento finito. As tensões no domínio e os deslocamentos na fronteira estática são aproximados com funções de Walsh de grau 32, enquanto que os deslocamentos no domínio são modelados com funções de grau 16. A aproximação destes campos envolve um total de 3776 graus de liberdade.

Consideram-se como críticas todas as  $32 \times 32 = 1024$  células *definidas* automaticamente pelo grau das funções de aproximação utilizadas. Em cada uma daquelas células o valor da tensão é constante. Desta forma, a verificação das condições de

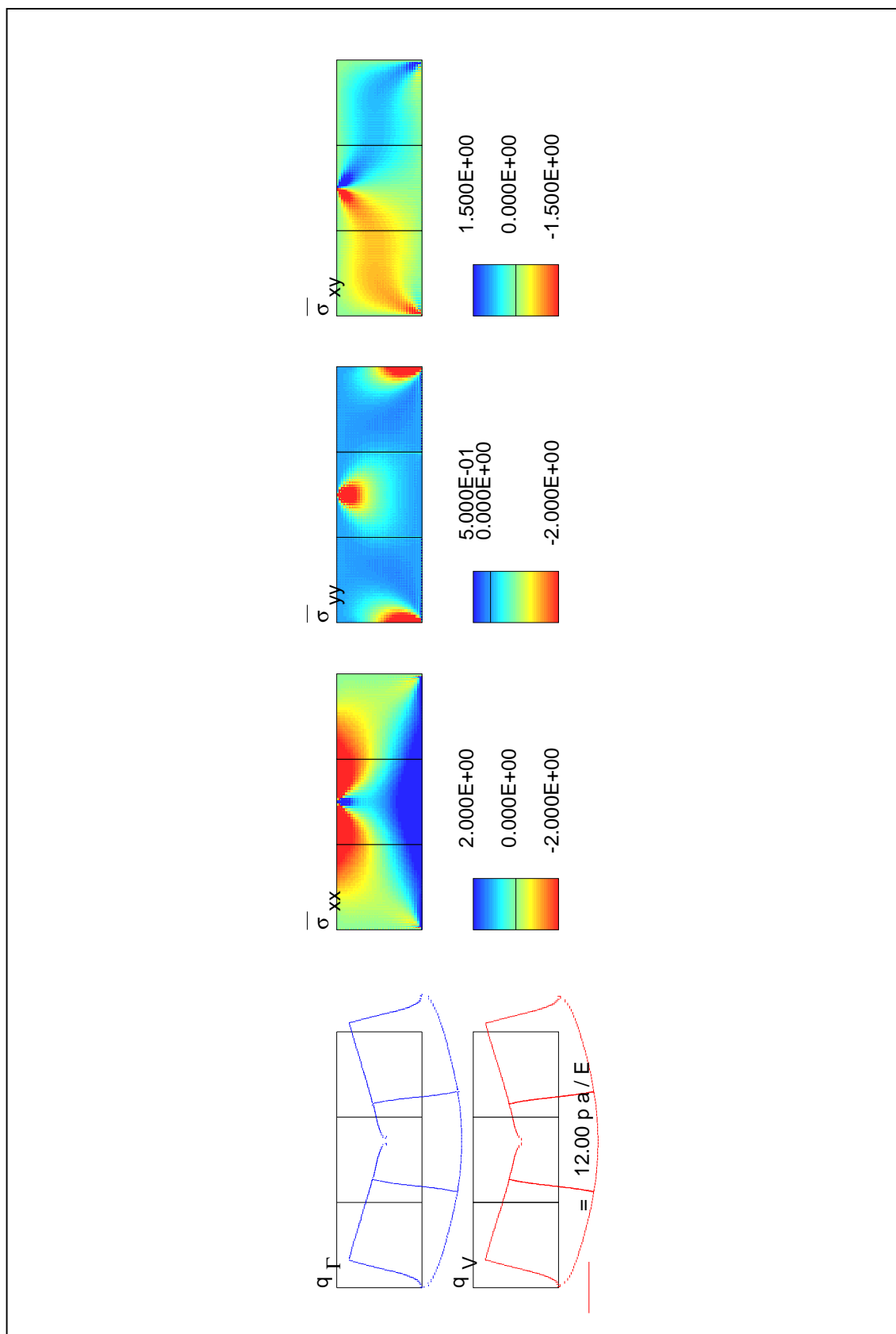


Figura 9.24: Solução obtida para a viga simplesmente apoiada.

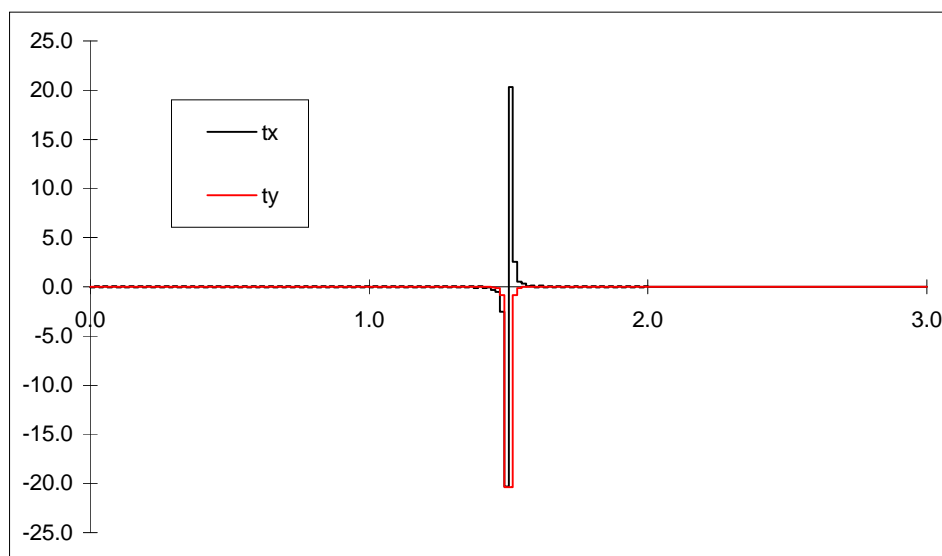


Figura 9.25: *Distribuição das tracções no bordo superior da viga simplesmente apoiada.*

cedência é efectuada localmente, sendo necessário utilizar apenas um polinómio de valor constante na aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos.

O limite da fase elástica representado na figura 9.26 corresponde ao instante em que é activado o primeiro modo de cedência. Para além da distribuição do campo de tensões e do campo de deslocamentos na fronteira, é apresentado nessa mesma figura um diagrama que relaciona o valor do parâmetro de carga com o valor do deslocamento vertical no canto inferior direito da consola. Este diagrama diz respeito a todo o processo de análise incremental. A cruz permite identificar o *instante* a que correspondem as distribuições representadas.

Na figura 9.27 apresentam-se os resultados referentes a uma fase intermédia do processo de cálculo incremental. As células críticas onde já se desenvolveram deformações plásticas encontram-se representadas a negro no diagrama correspondente. Os resultados referentes ao instante de colapso encontram-se por seu lado representados na figura 9.28. O processo de análise incremental envolveu um total de 180 passos de carga.

A qualidade das soluções obtidas com uma análise elastoplástica é directamente condicionada pela qualidade da aproximação conseguida para a distribuição dos campos de tensões em cada uma das etapas do processo de cálculo. Deste ponto de vista, a discretização utilizada na análise anterior é manifestamente insuficiente. A melhoria da solução obtida passa desta forma pelo aumento do grau das funções de Walsh utilizadas para modelar o campo de tensões. No entanto, é preciso não esquecer que se se aumentar o número de termos nas séries utilizadas nas aproximações, também se aumenta o número de células onde os campos estático e cinemático tomam va-

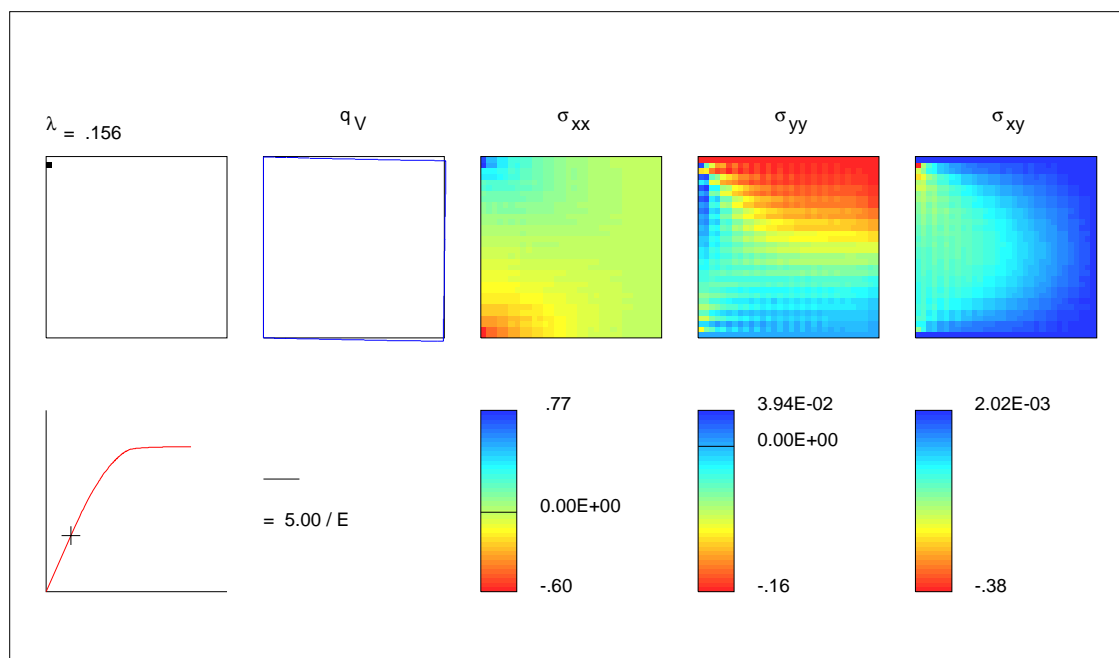


Figura 9.26: Análise da consola com funções de Walsh e  $32 \times 32$  células críticas; limite da fase elástica.

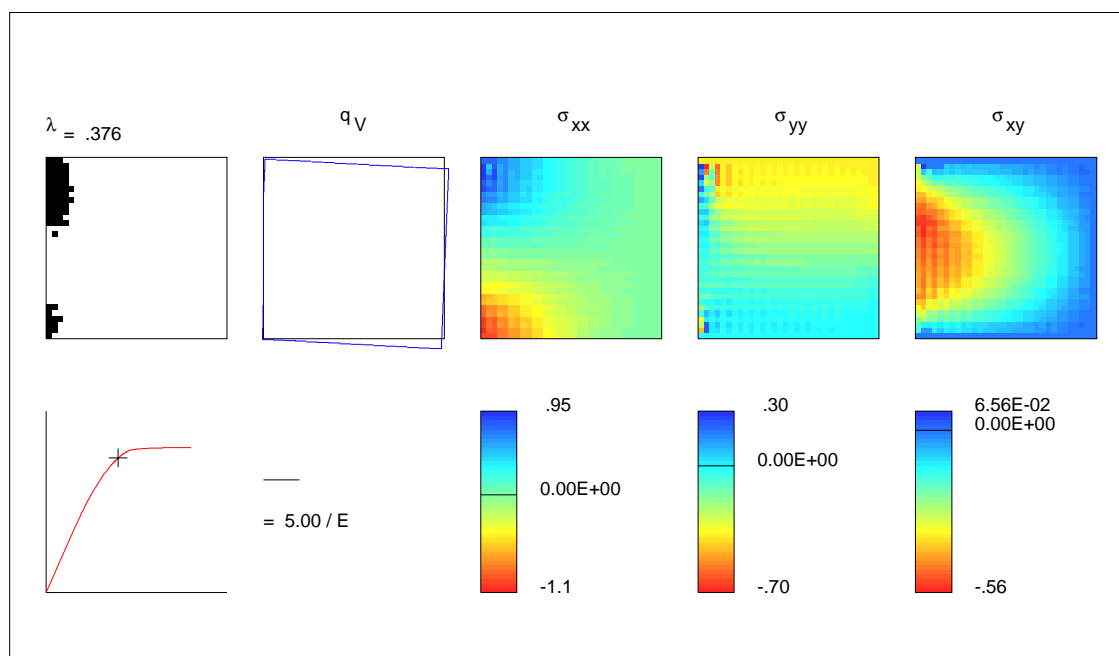


Figura 9.27: Análise da consola com funções de Walsh e  $32 \times 32$  células críticas; fase intermédia.

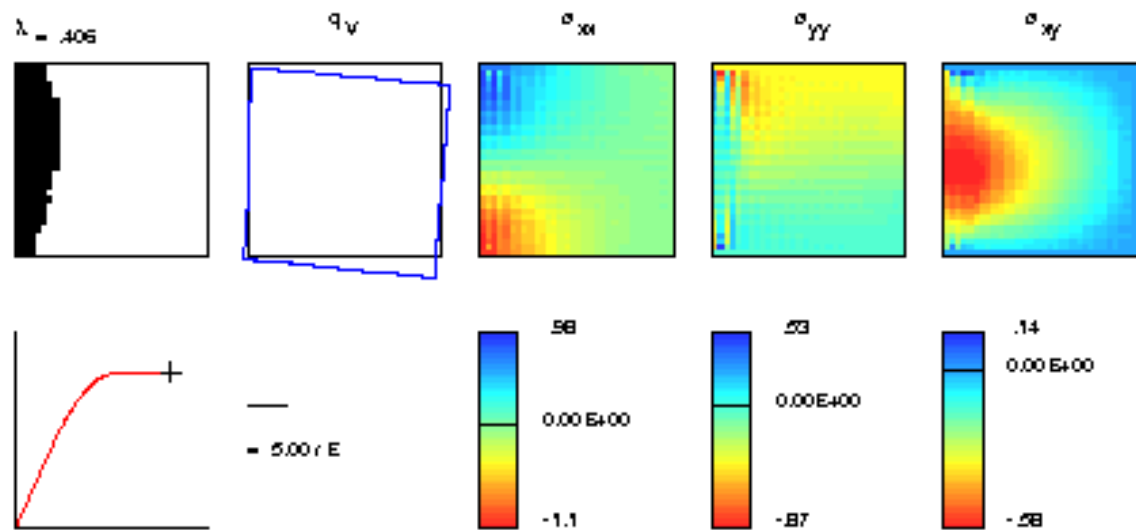


Figura 9.28: Análise da consola com funções de Walsh e  $32 \times 32$  células críticas; colapso.

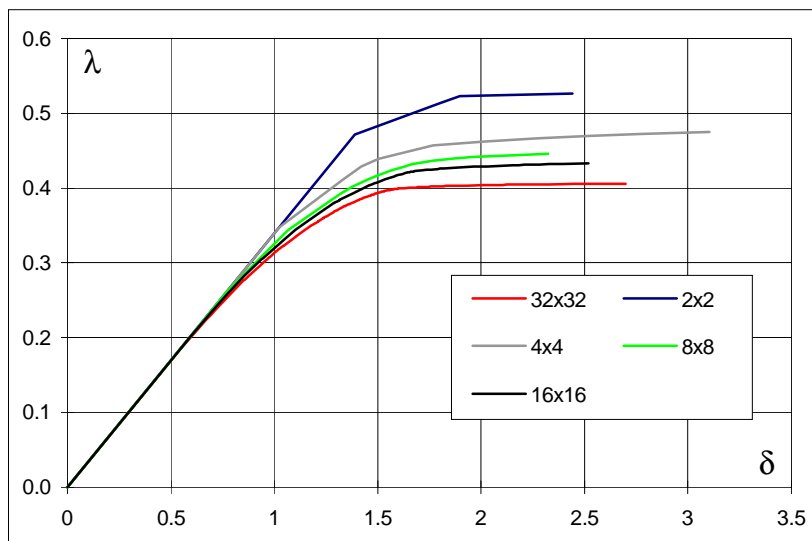
lores constantes. Como consequência, se se considerarem como críticas todas estas células, o número de possíveis modos de cedência cresce de uma forma tal que pode tornar o processo de cálculo incomportavelmente pesado e moroso. A resolução deste problema passa pela redefinição das células críticas. O domínio de definição de cada uma delas deve passar a ser *maior*, contendo várias das células onde o valor das tensões é constante.

Para se estudar o efeito que esta alteração na definição das células críticas tem na qualidade da solução, volta a analisar-se a consola quadrada da figura 6.5. A aproximação para o campo de tensões e de deslocamentos é a mesma e continuam a ser utilizadas apenas funções constantes para modelar os incrementos dos parâmetros plásticos.

Na tabela 9.17 apresenta-se para os diferentes casos de teste considerados o número de células críticas, o número de passos de carga envolvidos no processo de análise e o valor do parâmetro de carga no colapso. Tal como seria de esperar, à medida que diminui o número de células críticas aumenta o valor do parâmetro de colapso, uma vez que o controlo da condição de cedência é efectuado de uma forma mais grosseira; em vez do valor do potencial plástico em cada uma das células automaticamente definidas pela discretização, é utilizado o seu valor médio, numa região tanto maior quanto menor for o número de células críticas.

Os diagramas *carga-deslocamento* representados na figura 9.29 representam, para cada um dos casos de teste anteriores, a evolução do deslocamento vertical do vértice do bordo inferior direito da placa encastrada em função do valor do parâmetro de carga.

$n^\circ$ de células	$n^\circ$ de passos de carga	$\lambda_c$
$2 \times 2$	4	0.527
$4 \times 4$	10	0.475
$8 \times 8$	20	0.446
$16 \times 16$	68	0.433
$32 \times 32$	180	0.406

Tabela 9.17: *Influência da dimensão das células críticas.*Figura 9.29: *Diagramas carga-deslocamento para os diferentes casos de teste.*

A degradação da qualidade da solução à medida que se aumenta o domínio de definição de cada célula crítica é também visível nas figuras 9.30 e 9.31 onde se representam as situações de colapso referentes à utilização de malhas constituídas por  $4 \times 4$  e  $16 \times 16$  células críticas, respectivamente.

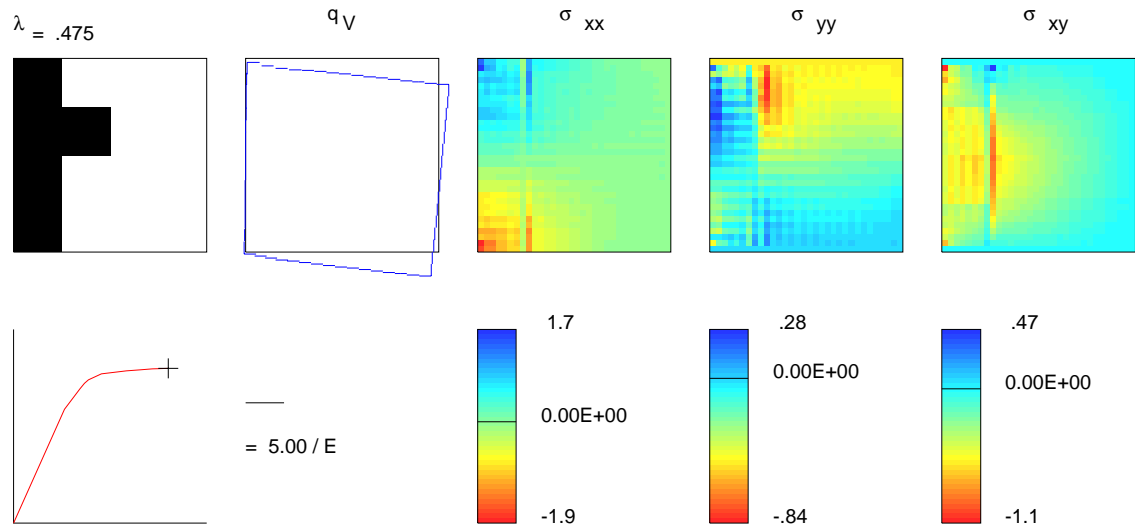


Figura 9.30: *Análise com  $4 \times 4$  células críticas; instante de colapso.*

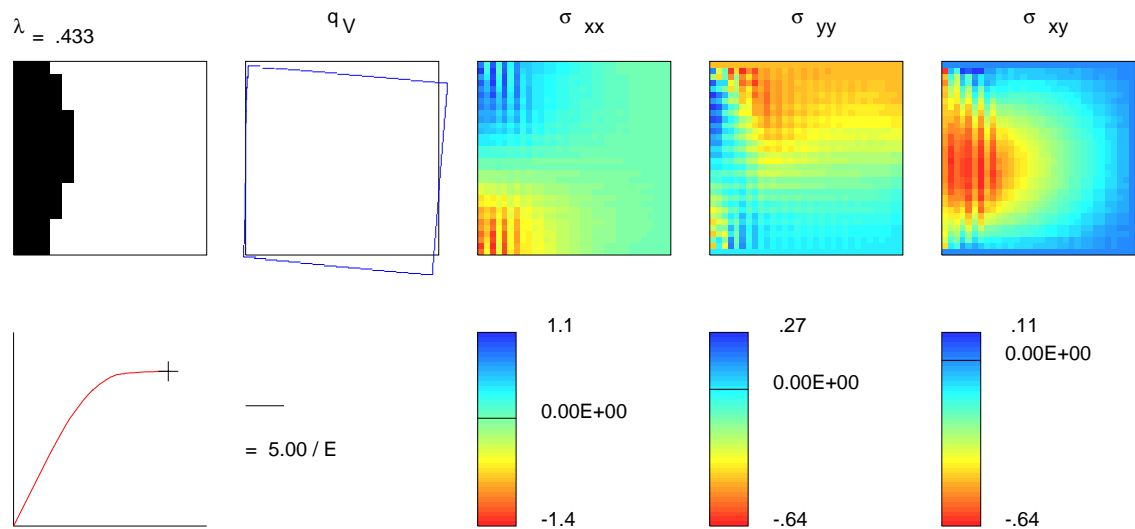


Figura 9.31: *Análise com  $16 \times 16$  células críticas; instante de colapso.*

A análise das figuras anteriores permite observar um fenómeno característico das soluções obtidas com modelos baseados na verificação ponderada das condições de plasticidade. Consiste este no aparecimento de *oscilações* na distribuição do campo de tensões na vizinhança das zonas que marcam a separação entre células críticas onde existem modos de cedência activos e células críticas não *plastificadas*. Isto

<i>Grau</i>	<i>n° de modos</i>	<i>n° de passos de carga</i>	$\lambda_c$
<i>constante</i>	16	10	0.476
<i>linear</i>	64	15	0.437
<i>parabólico (8)</i>	128	20	0.429
<i>parabólico (9)</i>	144	27	0.428
<i>cúbico (12)</i>	192	41	0.423
<i>4° grau</i>	400	39	0.416

Tabela 9.18: *Influência do graus dos polinómios seleccionados para aproximar os parâmetros plásticos.*

acontece porque se de um lado a variação do campo de tensões no passo de carga subsequente é perfeitamente livre, do lado onde existem modos activos a variação do campo de tensões está limitada pela condição que obriga a que, em média, as tensões variem sobre a superfície definida pela lei de cedência seleccionada.

Até aqui apenas têm sido utilizadas funções com valor constante na aproximação dos parâmetros plásticos. Importa agora aferir a influência que pode vir a ter na solução do problema a utilização de polinómios de grau mais elevado. Para o efeito, torna-se a analisar a consola quadrada com a mesma aproximação para os campos de tensões e de deslocamentos e com uma mesma malha de  $4 \times 4$  células críticas. Na tabela 9.18 listam-se, para diferentes graus de aproximação, o número de possíveis modos de cedência considerados, o número de passos envolvidos no processo de análise e o valor do parâmetro de carga no colapso.

Tal como seria de esperar, o aumento do grau das funções polinomiais utilizadas na aproximação dos parâmetros plásticos faz melhorar a solução. Verifica-se mesmo que o parâmetro de carga obtido no caso em que se consideram 400 modos de cedência se aproxima do que se tinha conseguido considerando  $32 \times 32$  células críticas. Esta melhoria nos resultados é confirmada pela análise das figuras 9.32 e 9.33 onde se representam as configurações de colapso para os casos em que se consideram à partida 128 e 400 modos de cedência possíveis, respectivamente.

Discutida a influência que pode ter a selecção das células críticas e o grau dos polinómios utilizados, tanto na qualidade da solução quanto na eficiência do processo de cálculo, apresenta-se agora uma solução obtida com uma discretização *equilibrada*, onde houve o cuidado de conciliar o desejo de se conseguirem resultados de boa qualidade com a necessidade de se manter o esforço computacional dentro de limites razoáveis.

Foi escolhida uma malha constituída por  $2 \times 2$  elementos finitos. Em cada elemento, cada componente do tensor das tensões e do campo de deslocamentos no domínio é aproximada por um conjunto completo de  $32 \times 32$  e  $16 \times 16$  funções de Walsh bidimensionais, respectivamente. Para modelar as componentes do campo de deslocamentos nas fronteiras estáticas, são utilizadas séries de Walsh envolvendo a utilização dos primeiros 32 termos. Ao todo, estão envolvidos na aproximação dos campos estático



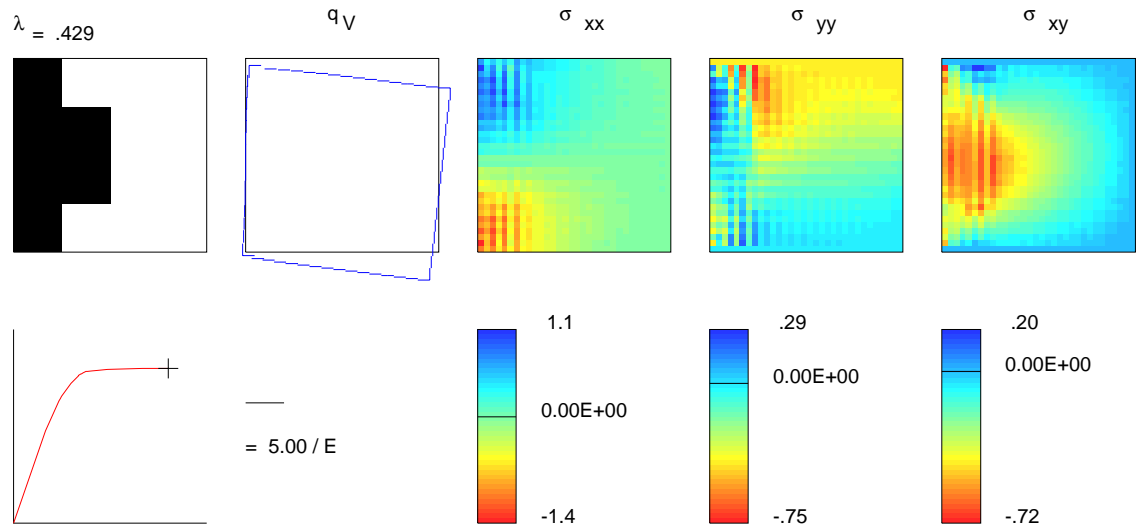


Figura 9.32: Análise com 128 modos de cedência; instante de colapso.

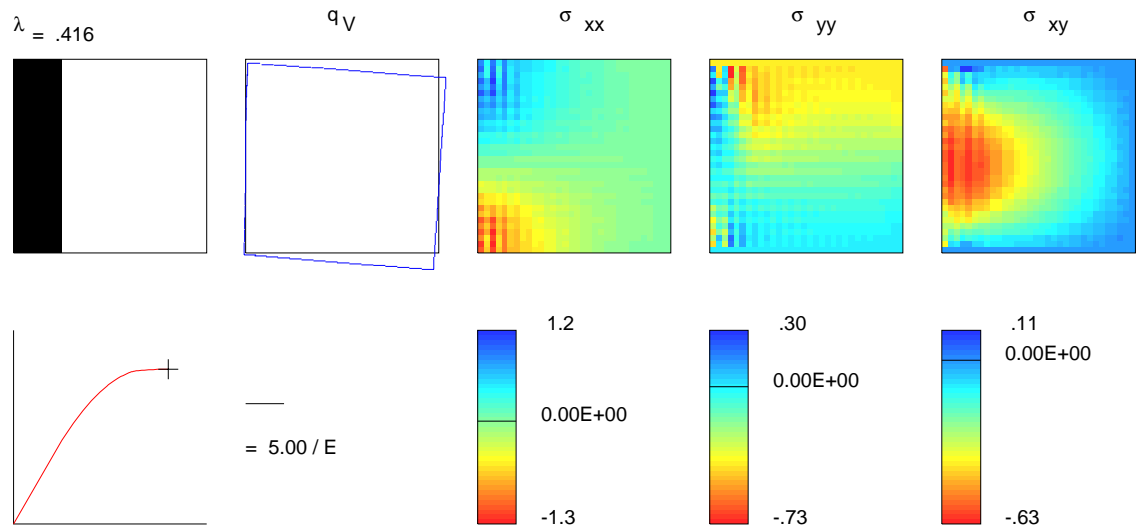


Figura 9.33: Análise com 400 modos de cedência; instante de colapso.

e cinemático um total de 14976 graus de liberdade.

Cada elemento é subdividido em  $8 \times 8$  células críticas nas quais se utilizam polinómios lineares para aproximar os incrementos dos parâmetros plásticos. Desta forma, a discretização adoptada envolve a consideração de um total de 1024 modos de cedência possíveis.

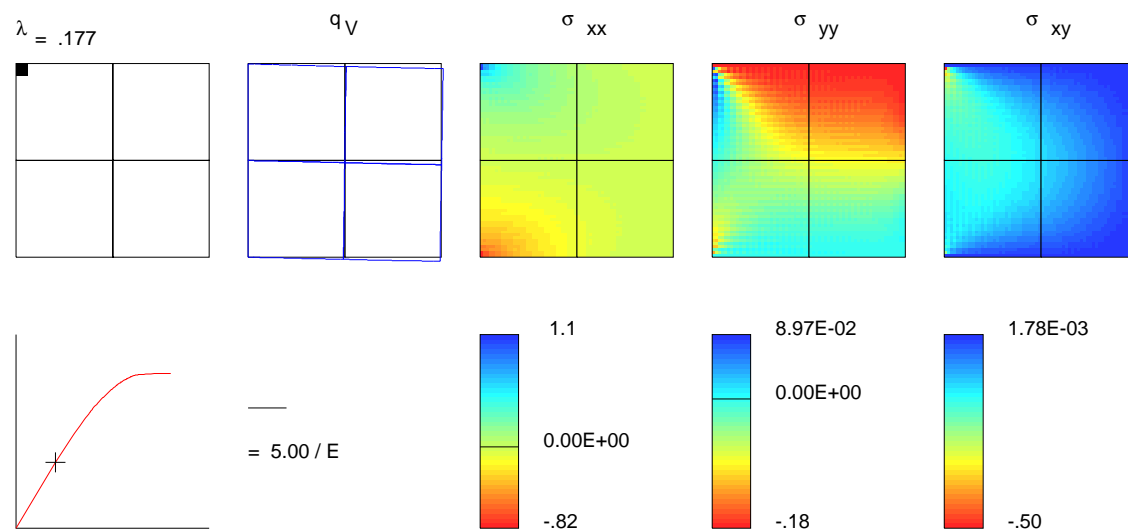


Figura 9.34: *Análise elastoplástica da consola quadrada com funções de Walsh; limite da fase elástica.*

Na figura 9.34 encontra-se representada a solução referente ao limite da fase elástica. Apresenta-se a distribuição das tensões na placa e o campo de deslocamentos na fronteira. Representa-se ainda a negro a célula onde se tornou activo o primeiro dos modos de cedência. O diagrama *carga-deslocamento* continua a representar a relação entre o parâmetro de carga,  $\lambda$ , e o valor do deslocamento vertical do canto inferior direito da consola.

As figuras 9.35 e 9.36 apresentam duas fases intermédias do processo de análise incremental. Os resultados referentes ao instante de colapso encontram-se, por seu lado, representados na figura 9.37.

## 9.9.2 Análise com wavelets

A mesma estrutura é agora analisada com o modelo baseado na utilização de sistemas de wavelets. Utiliza-se de novo a malha uniforme constituída por  $2 \times 2$  elementos quadrangulares. A aproximação do campo de tensões e de deslocamentos envolve neste caso um total de 1644 graus de liberdade. São utilizadas funções de escala pertencentes à família de wavelets com  $N = 10$ .

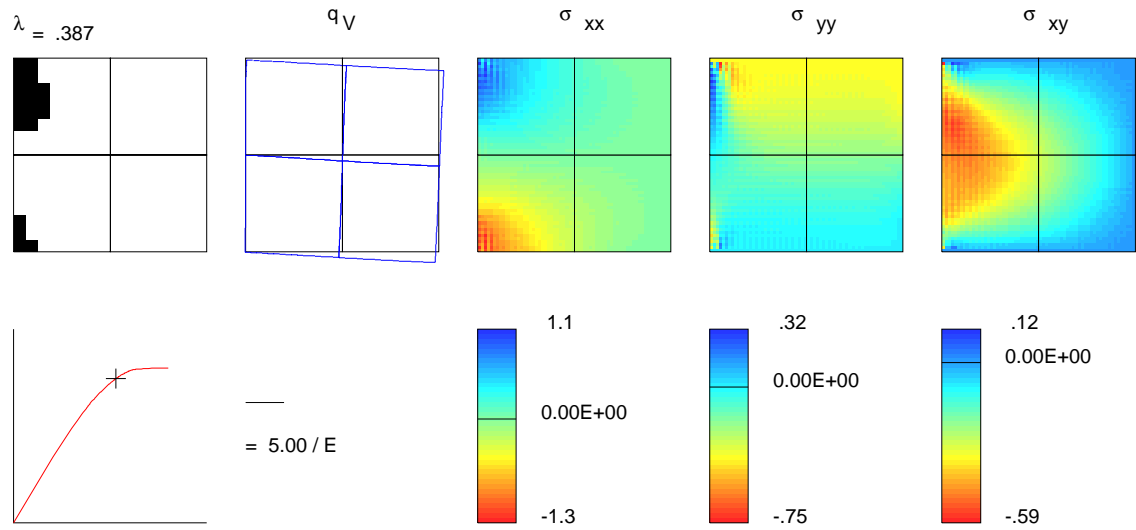


Figura 9.35: Análise elastoplástica da consola quadrada com funções de Walsh; fase intermédia 1.

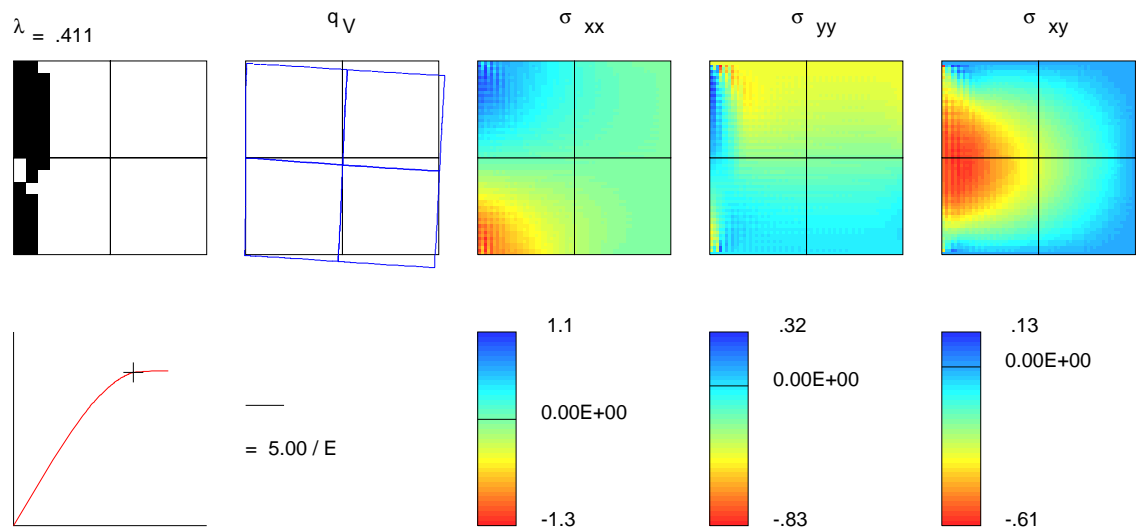


Figura 9.36: Análise elastoplástica da consola quadrada com funções de Walsh; fase intermédia 2.

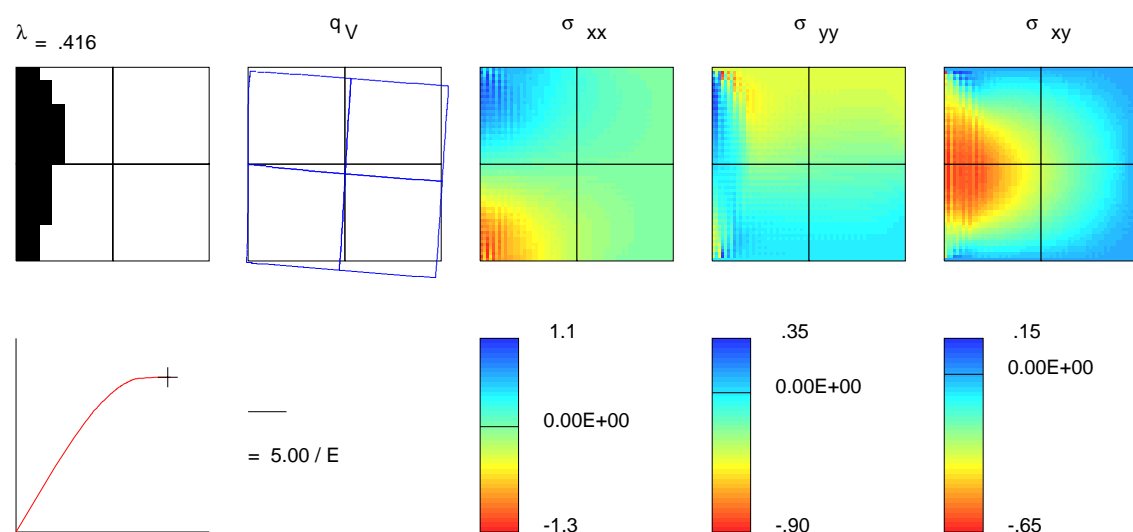


Figura 9.37: Análise elastoplástica da consola quadrada com funções de Walsh; instante de colapso.

$n^\circ$ de células	Grau da aproximação				
	Constante	Linear	Parabólico	Cúbico	Quarto grau
$1 \times 1$	0.529	0.481	0.461	0.448	0.439
$2 \times 2$	0.492	0.437	0.431	0.418	0.418
$4 \times 4$	0.441	0.422	0.415	0.408	0.408

Tabela 9.19: Valor do parâmetro de carga no colapso.

Cada elemento é subdividido num conjunto de  $4 \times 4$  células críticas e é efectuada uma aproximação linear dos incrementos dos parâmetros plásticos. É então considerada na discretização a existência de um total de 256 modos de cedência possíveis.

As figuras 9.38, 9.39, 9.40 e 9.41 apresentam as distribuições do campo de tensões, do campo de deslocamentos na fronteira e das células onde existem modos de cedência activos, referentes respectivamente ao limite da fase elástica, a duas etapas intermédias do processo de análise incremental e ao instante de colapso.

As soluções obtidas assemelham-se bastante às que foram conseguidas com o modelo baseado em funções de Walsh. O facto do parâmetro de carga agora obtido ser ligeiramente superior já seria de esperar à partida, se se tiver em conta que o número de modos de cedência considerado é neste caso inferior, o que torna a verificação da condição de cedência mais *grosseira*.

A tabela 9.19 apresenta os valores obtidos para o parâmetro de carga no colapso quando se utiliza na análise a mesma malha de elementos finitos, mas em que se faz variar o número de células críticas consideradas em cada elemento e o grau dos polinómios não-nulos utilizados para modelar os parâmetros plásticos.

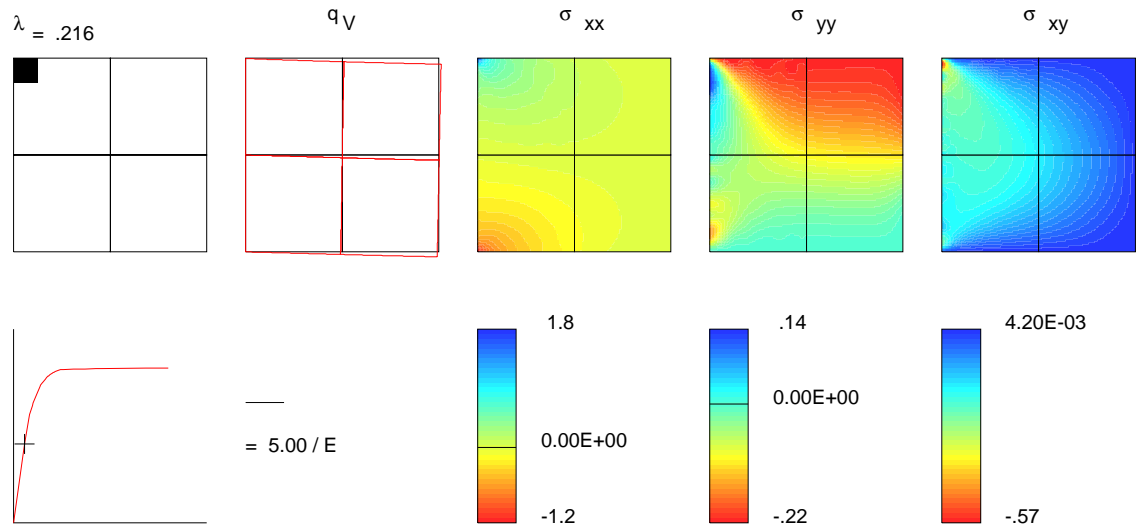


Figura 9.38: *Análise elastoplástica da consola quadrada com wavelets; limite da fase elástica.*

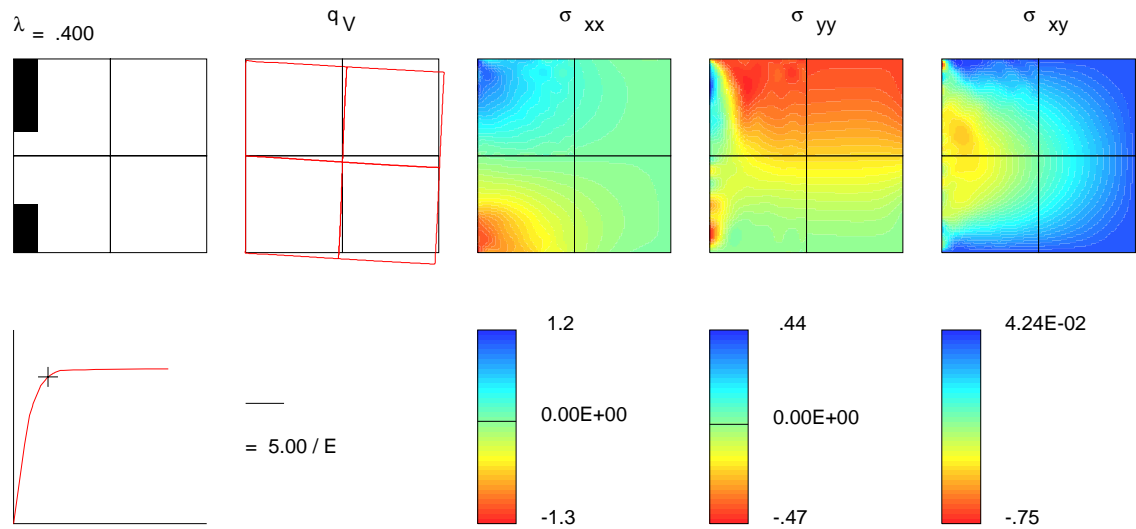


Figura 9.39: *Análise elastoplástica da consola quadrada com wavelets; fase intermédia 1.*

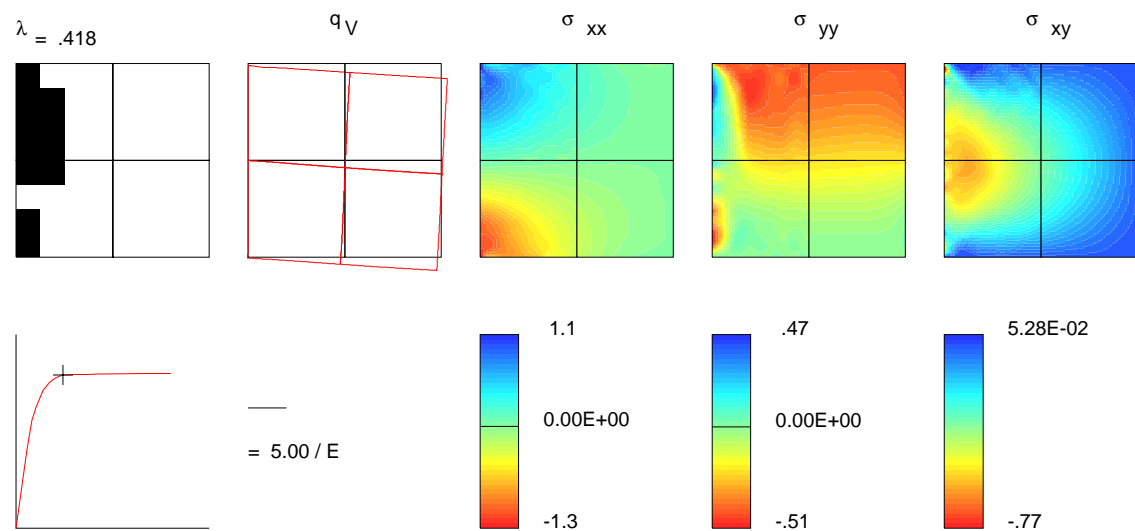


Figura 9.40: *Análise elastoplástica da consola quadrada com wavelets; fase intermédia 2.*

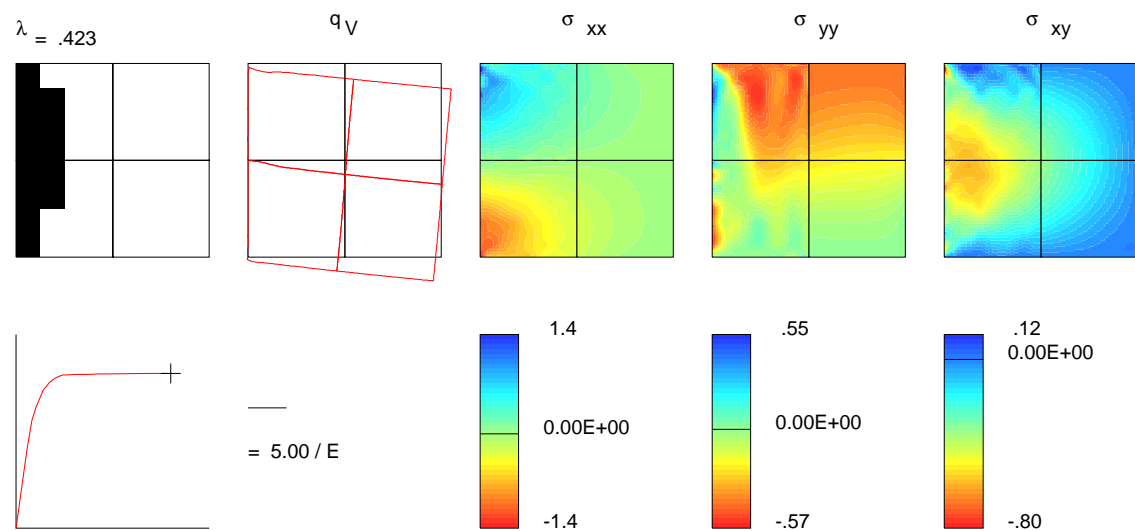


Figura 9.41: *Análise elastoplástica da consola quadrada com wavelets; instante de colapso.*

A análise dos valores listados na tabela 9.19 permite observar que uma diminuição consistente do valor de  $\lambda_c$  é conseguida quer através do aumento do número de células críticas (mantendo o mesmo grau de aproximação), quer através do incremento do grau dos polinómios utilizados (não alterando a malha de células críticas).

