

Capítulo 8

Caracterização do comportamento dos modelos híbrido-mistos

8.1 Introdução

Uma vez apresentados os modelos híbrido-mistos de elementos finitos e discutidos alguns dos aspectos essenciais referentes à sua implementação, é necessário estudar o seu comportamento e caracterizar o tipo de soluções que permitem obter.

São neste capítulo definidas as características gerais dos modelos utilizados, ilustradas as suas potencialidades e sublinhadas algumas das vantagens (e também alguns dos inconvenientes) inerentes à utilização de séries de Walsh e sistemas de wavelets como funções de aproximação. São dois os aspectos estudados com maior detalhe: a aplicação de processos de refinamento p - e h - hierárquicos e a influência que a distorção da malha de elementos finitos pode ter na qualidade da solução obtida.

Para não tornar excessivamente pesada a apresentação e discussão dos resultados, apenas são analisados problemas de placas. Salvo indicação em contrário, são sempre utilizados modelos de equilíbrio.

8.2 Refinamento hierárquico

Para estudar a eficiência com que os refinamentos p - e h - podem ser implementados quando se utilizam os modelos híbrido-mistos de elementos finitos, é efectuada a análise da consola quadrada representada na figura 6.5. São de novo consideradas as três malhas representadas na figura 6.6.

8.2.1 Análise com funções de Walsh

Modelo de equilíbrio

Para cada malha são consideradas 5 discretizações diferentes, correspondendo cada uma delas a um número diferente de termos considerados nas séries que definem as aproximações dos campos estático e cinemático. O grau das funções de Walsh é determinado a partir das igualdades,

$$n_x = 2^p ; n_v = 2^{p-1} ; n_{v\gamma} = 2^p - 1 ,$$

com $p = 2, \dots, 6$. Na tabela 8.1 apresenta-se o número de parâmetros de tensão e de deslocamento utilizados em cada uma das discretizações consideradas.

p	Malha A			Malha B			Malha C		
	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ
2	48	8	18	192	32	60	768	128	216
3	192	32	42	768	128	140	3072	512	504
4	768	128	90	3072	512	300	12288	2048	1080
5	3072	512	186	12288	2048	620	49152	8192	2232
6	12288	2048	378	49152	8192	1260	196608	32768	4536

Tabela 8.1: Caracterização das discretizações adoptadas; solução com funções de Walsh.

p	n_{gl}	$T_{tot}(s)$	$T_{posp}(s)$	\bar{U}
2	74	0.03	0.02	1.725466
3	266	0.12	0.04	1.164038
4	986	0.96	0.13	1.041286
5	3770	14.25	0.62	1.004298
6	14714	278.33	3.70	0.992106

Tabela 8.2: Resultados referentes à utilização da malha A; solução com funções de Walsh.

A tabela 8.2 apresenta a informação respeitante à utilização da malha constituída apenas por um macro-elemento. Para cada valor de p é indicado o número total de graus de liberdade, n_{gl} , o tempo total de resolução, T_{tot} , e o tempo dispendido em operações de pós-processamento, T_{posp} . É ainda indicado o valor adimensional da energia de deformação associado a cada solução,

$$\bar{U} = \frac{E}{p^2 a^2} U .$$

Os sistemas de equações são resolvidos aplicando o método directo sobre a forma condensada do sistema governativo. As operações de pós-processamento englobam

o cálculo do valor do campo de tensões e do campo de deslocamentos no domínio em cada uma das $2^p \times 2^p$ células definidas automaticamente pelo grau das funções de aproximação utilizadas. Inclui ainda o cálculo do campo de deslocamentos em 2^p intervalos para cada um dos troços em que se considera subdividida a fronteira estática. As tabelas 8.3 e 8.4 apresentam a mesma informação, mas agora para as análises associadas à utilização das malhas B e C, respectivamente.

p	n_{gl}	$T_{tot}(s)$	$T_{postp}(s)$	\bar{U}
2	284	0.10	0.04	1.163966
3	1036	0.25	0.13	1.041183
4	3884	1.60	0.57	1.004230
5	14956	16.94	2.33	0.992069
6	58604	297.29	16.15	0.987924

Tabela 8.3: Resultados referentes à utilização da malha B; solução com funções de Walsh.

p	n_{gl}	$T_{tot}(s)$	$T_{postp}(s)$	\bar{U}
2	1112	0.27	0.14	1.042806
3	4088	0.95	0.54	1.004351
4	15416	4.36	2.17	0.992069
5	59576	32.23	9.75	0.987921
6	233912	409.05	62.86	0.986489

Tabela 8.4: Resultados referentes à utilização da malha C; solução com funções de Walsh.

A análise destas tabelas permite verificar a eficiência com que são executadas as operações de pós-processamento, mesmo nos casos em que o número de graus de liberdade é muito elevado. Este facto tem a ver com a utilização, nesta fase, de algoritmos *FWT* que permitem efectuar as combinações lineares definidas em (3.1), (3.2) e (3.7) de uma forma muito eficaz.

Verifica-se por outro lado que a solução é refinada de uma forma gradual e consistente quer se aumente o grau das funções, quer se incremente o número de macro-elementos considerados na malha. Esta ideia é confirmada pela análise do gráfico da figura 8.1, onde se apresenta a evolução do valor da energia de deformação normalizada para cada uma das discretizações adoptadas.

Embora o carácter *monotónico* da convergência das soluções não seja garantido quando se utilizam formulações mistas, não deixa de ser curioso verificar que o valor da energia de deformação apresenta sempre valores decrescentes à medida que se aumenta o número de graus de liberdade. Verifica-se ainda que os valores aproximados são sempre superiores ao *valor exacto*, o que é uma situação típica das formulações de equilíbrio.

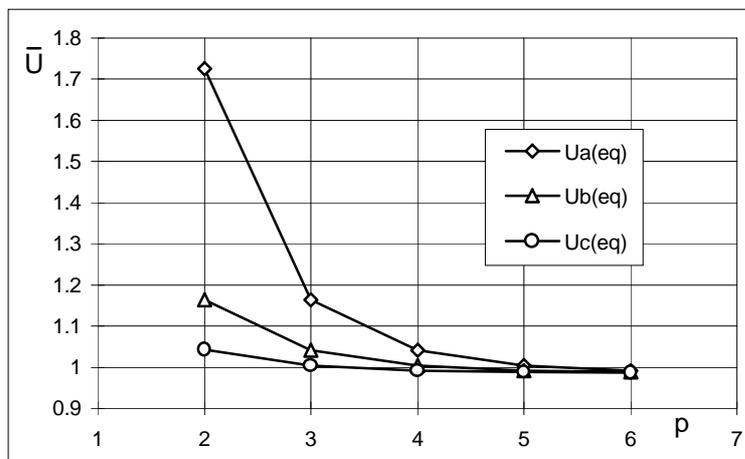


Figura 8.1: *Evolução do valor da energia de deformação; modelo de equilíbrio com funções de Walsh.*

A consistência com que a solução é refinada é confirmada pela análise das figuras 8.2 e 8.4. Na primeira destas figuras encontra-se representada a distribuição de tensões tangenciais, $\bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} / p$, obtida para cada uma das discretizações consideradas. Em cada uma das linhas são apresentadas as soluções obtidas considerando uma mesma malha de elementos finitos. Em cada uma das colunas é constante o valor do parâmetro p utilizado na definição do grau das funções de aproximação.

A representação do campo de tensões apresentada na figura 8.2 foi obtida com recurso à utilização do *package* de rotinas gráficas *Janela* [135]. É importante sublinhar que os valores representados são os que resultam directamente das aproximações efectuadas. Nos traçados que se apresentam ao longo de todo este trabalho não são nunca efectuadas quaisquer operações de *adoçamento* (*smoothing*) da solução.

Para além de reforçar os comentários já efectuados quanto à eficiência dos métodos de refinamento *h*- e *p*-, a análise da figura 8.2 permite também extrair algumas conclusões quanto às características gerais das soluções obtidas com recurso à utilização de séries de Walsh. Não é difícil verificar que a obtenção de uma "boa" solução passa necessariamente pela consideração de um número significativo de graus de liberdade. Observa-se que a utilização de poucos elementos e um valor de p pequeno conduz à obtenção de soluções muito fracas. É no entanto curioso verificar que a *sombra* do *verdadeiro* campo de tensões está sempre presente, mesmo nas situações em que a solução é obtida com um reduzido número de graus de liberdade. Utilizando uma linguagem mais própria do processamento de sinais, poder-se-ia dizer que a *imagem* do campo de tensões está sempre presente, ainda que por vezes muito *desfocada*. A *definição* dessa imagem vai aumentando à medida que se utilizam mais termos nas séries utilizadas na sua representação.

Outro dos aspectos interessantes a reter tem a ver com a verificação das condições de fronteira estática. Muito embora a sua imposição seja efectuada apenas de uma

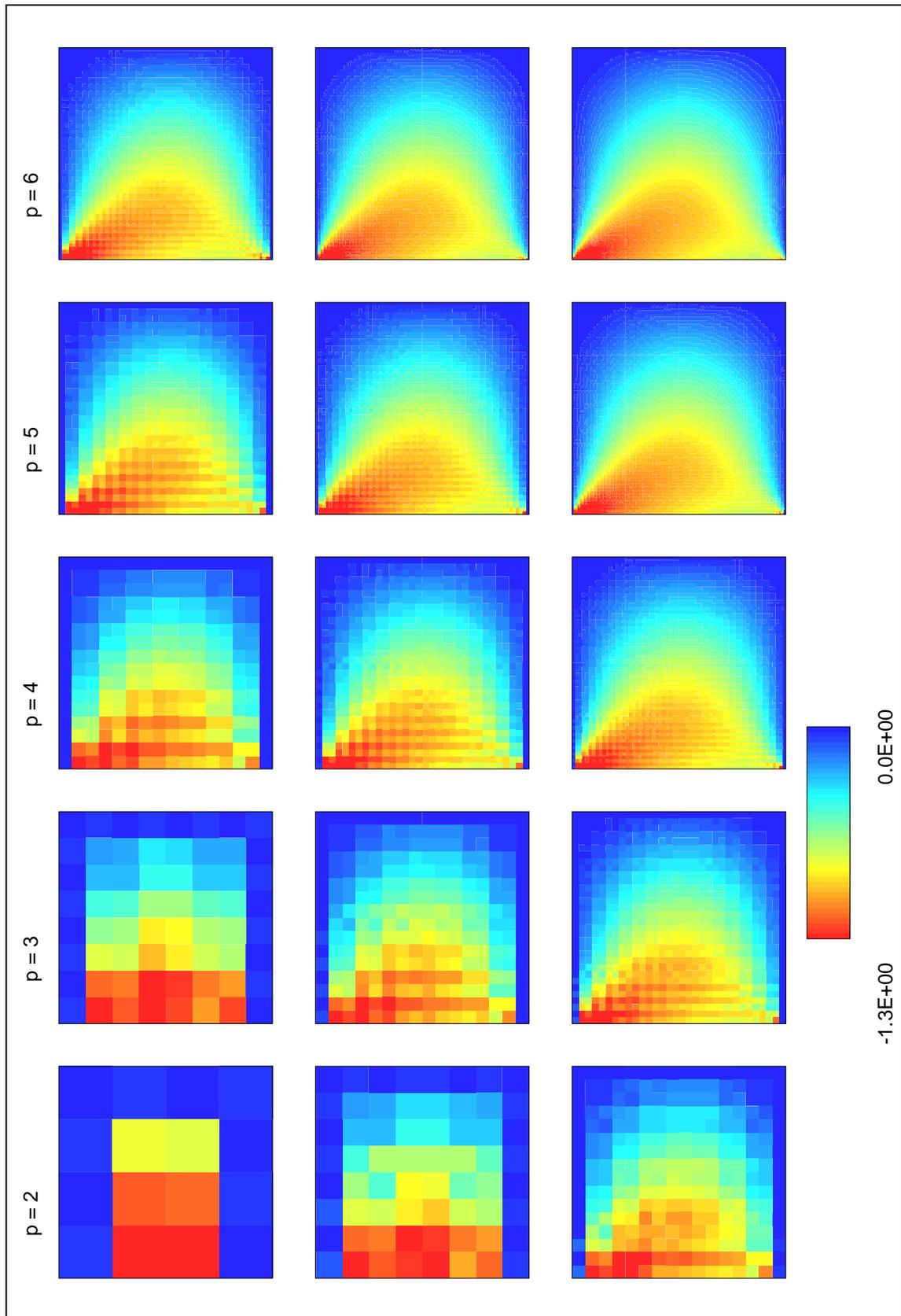


Figura 8.2: Distribuição das tensões tangenciais; modelo de equilíbrio com funções de Walsh.

forma ponderada, verifica-se em todas as soluções que a condição (2.4) é respeitada localmente na quase totalidade da fronteira estática. Refira-se que a escolha do grau das funções utilizadas na aproximação dos deslocamentos em Γ_σ ($n_{v\gamma} = 2^p - 1$) é condicionada pelo desejo de se excluir a hipótese de aparecimento de modos espúrios. Caso se tivesse utilizado na aproximação $n_{v\gamma} = 2^p$, então a condição (2.4) seria localmente verificada ao longo de toda a fronteira Γ_σ .

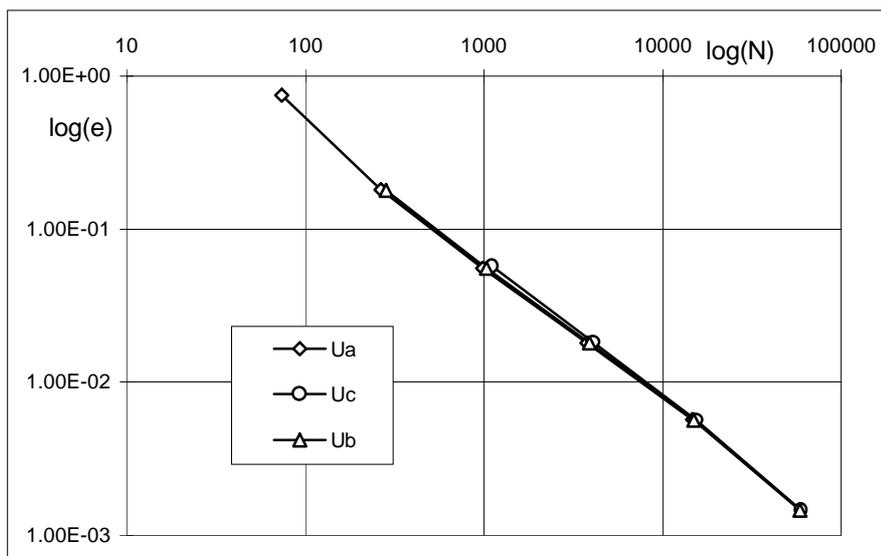


Figura 8.3: *Erro relativo da energia de deformação; modelo de equilíbrio com funções de Walsh.*

A análise da figura 8.2 permite ainda verificar que a qualidade das soluções obtidas considerando discretizações envolvendo um número aproximado de graus de liberdade é bastante semelhante. Esta ideia é reforçada pela análise do gráfico apresentado na figura 8.3, onde se representa o erro relativo associado à energia de deformação obtida para cada discretização. Em abcissas encontra-se representado, em escala logarítmica, o número de graus de liberdade. No traçado deste gráfico considera-se que o valor *exacto* para a energia de deformação é aquele que é obtido com a malha C e o grau de aproximação definido por $p = 6$.

Da análise deste gráfico sobressai a existência de grupos constituídos por três discretizações envolvendo um número semelhante de graus de liberdade e apresentando um valor praticamente coincidente do erro relativo da energia de deformação. Este facto já tinha sido previsto em capítulos anteriores e, como foi então referido, é de grande importância quando se pretende escolher o método de refinamento mais eficaz.

Na figura 8.4 encontram-se representadas as aproximações obtidas para os campos de deslocamentos na fronteira. Tal como no caso das tensões $\bar{\sigma}_{xy}$, também aqui se apresentam em cada linha todas as aproximações obtidas com uma dada malha de macro-elementos, enquanto que nas colunas se traçam as deformadas obtidas com

um determinado valor do parâmetro p . O valor dos deslocamentos apresentados foram escalados na forma,

$$\bar{d}_x = \frac{E}{pa} d_x ; \bar{d}_y = \frac{E}{pa} d_y .$$

Os campos de deslocamentos representados na figura 8.4 foram obtidos a partir da aproximação efectuada no domínio dos elementos. Seria no entanto possível determinar os valores desses mesmos deslocamentos através da aproximação efectuada ao longo da fronteira. É importante sublinhar que como estas duas aproximações são efectuadas de um modo completamente independente, nada obriga a que sejam iguais os valores obtidos por cada uma daquelas duas vias. No entanto, à medida que a solução converge, é natural que esses valores se vão aproximando cada vez mais e que se tornem praticamente iguais a partir de determinado instante.

Como as aproximações do campo de deslocamentos na fronteira são definidas de uma forma independente em cada um dos troços em que esta se encontra subdividida, é de esperar que conduzam a valores diferentes do campo de deslocamentos nos pontos (vértices) que lhes são comuns. Esta diferença tenderá naturalmente a anular-se à medida que se refina a solução.

A análise da tabela 8.5 permite ilustrar as afirmações efectuadas nos dois parágrafos anteriores. Nesta tabela são apresentados os valores dos deslocamentos do ponto D representado na figura 6.5. São apresentados os valores obtidos a partir da aproximação do campo de deslocamentos no domínio, $\bar{d}_s(V)$, e na fronteira estática, $\bar{d}_s(\Gamma)$. O bordo inferior da consola é representado por Γ_1 , enquanto que o bordo lateral direito é representado por Γ_2 . Os valores listados na tabela 8.5 referem-se à utilização da malha A.

p	$\bar{d}_x^{(D)}(V)$	$\bar{d}_x^{(D)}(\Gamma_1)$	$\bar{d}_x^{(D)}(\Gamma_2)$	$\bar{d}_y^{(D)}(V)$	$\bar{d}_y^{(D)}(\Gamma_1)$	$\bar{d}_y^{(D)}(\Gamma_2)$
2	-0.615	-1.881	-0.601	-4.175	-4.164	-5.943
3	-0.765	-1.165	-0.763	-3.101	-3.094	-3.696
4	-0.896	-1.069	-0.896	-2.953	-2.950	-3.243
5	-0.967	-1.049	-0.967	-2.946	-2.945	-3.106
6	-0.910	-0.948	-0.910	-2.856	-2.855	-2.962

Tabela 8.5: Valor dos deslocamentos no ponto D; modelo de equilíbrio com funções de Walsh.

Modelo de compatibilidade

É agora utilizado na análise da consola quadrada o modelo híbrido-misto de compatibilidade. São de novo testadas 5 discretizações diferentes para cada uma das malhas de elementos finitos representadas na figura 6.6, sendo o grau das funções

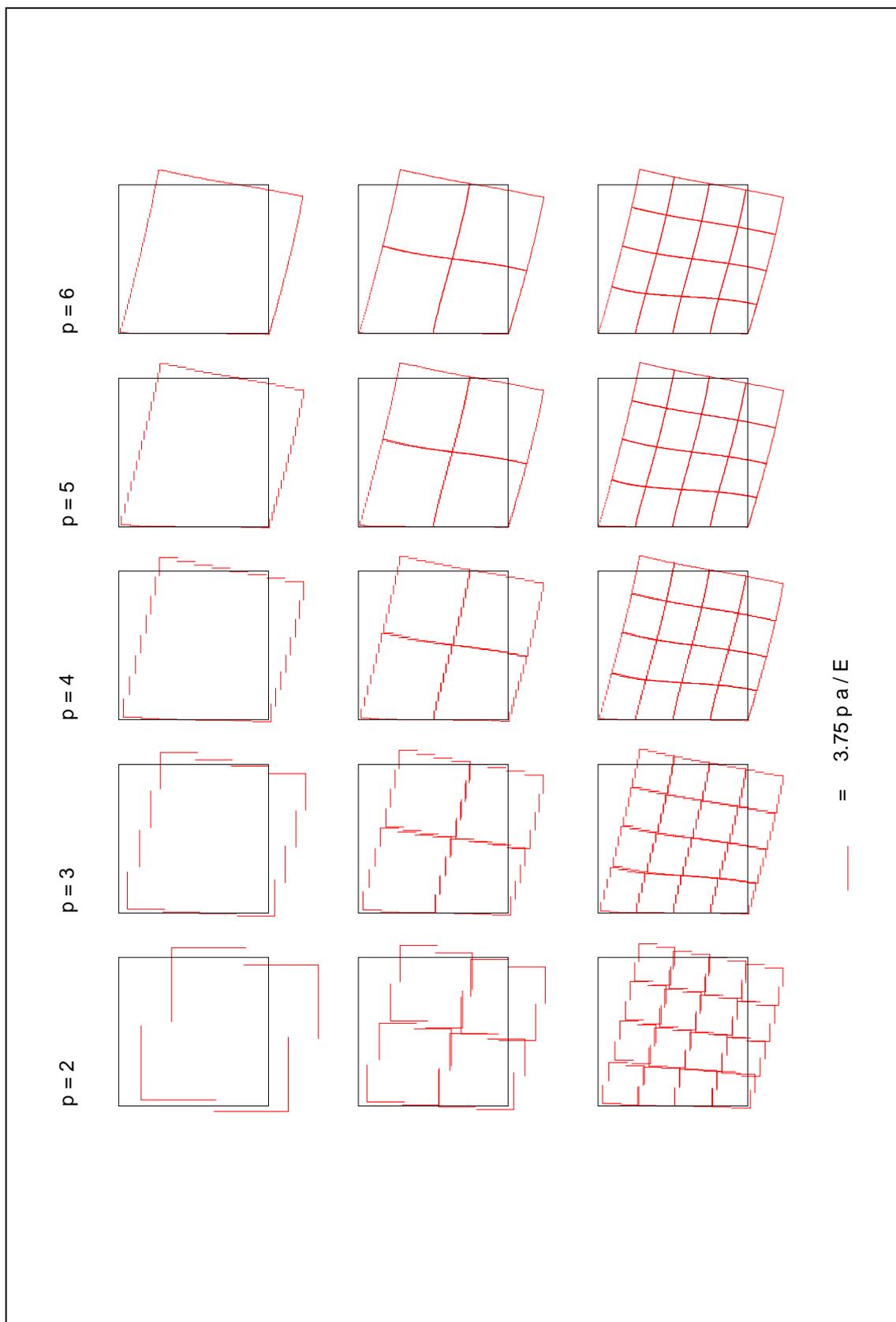


Figura 8.4: *Campo de deslocamentos; modelo de equilíbrio com funções de Walsh.*

de Walsh definido em função do valor do parâmetro p :

$$n_x = n_v = n_{x\gamma} = 2^p .$$

A tabela 8.6 apresenta, para cada um dos casos testados, o número de graus de liber-

p	Malha A		Malha B		Malha C	
	N	\bar{U}	N	\bar{U}	N	\bar{U}
2	88	0.694561	368	0.845650	1504	0.929920
3	336	0.851626	1376	0.932122	5568	0.966164
4	1312	0.934142	5312	0.966788	21376	0.979022
5	5184	0.967342	20864	0.979179	83712	0.983429
6	20608	0.979322	82688	0.983467	-	-

Tabela 8.6: Evolução do valor da energia de deformação; modelo de compatibilidade com funções de Walsh.

dade envolvido na análise e o valor normalizado da energia de deformação associada a cada solução.

O gráfico da figura 8.5 permite confirmar que a solução é refinada de uma forma consistente, quer se utilizem procedimentos p - ou h - hierárquicos. É interessante verificar também que o valor da energia de deformação vai sempre aumentando à medida que se consideram discretizações envolvendo um número crescente de graus de liberdade. Observa-se por outro lado que os valores obtidos são sempre inferiores ao *valor exacto*, situação que é típica dos modelos de compatibilidade.

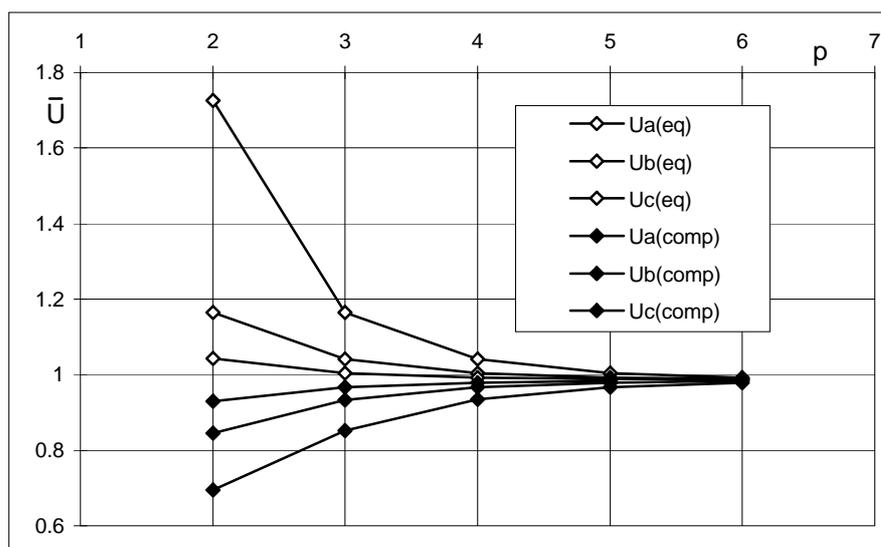


Figura 8.5: Evolução da energia de deformação; modelo de compatibilidade vs. modelo de equilíbrio.

A distribuição de tensões tangenciais referente a cada uma das discretizações adoptadas encontra-se representada na figura 8.6. A análise desta figura, para além de confirmar a forma através da qual a solução é refinada de uma forma gradual e consistente, permite observar algumas das características das soluções obtidas com modelos de compatibilidade. Em relação aos modelos de equilíbrio, é notória uma maior dificuldade na verificação das condições de fronteira estática, sobretudo nas regiões situadas na vizinhança do encastramento.

Na figura 8.7 representam-se as aproximações obtidas para o campo de deslocamentos na fronteira. A tabela 8.7 lista o valor dos deslocamentos no ponto D da consola para os casos em que é utilizada a malha A. Ao contrário do que sucede no caso do modelo de equilíbrio, o valor do deslocamento vertical no ponto D vai aumentando à medida que se refina a solução.

p	2	3	4	5	6
$\bar{d}_x^{(D)}(V)$	-0.512	-0.821	-0.969	-1.018	-1.033
$\bar{d}_y^{(D)}(V)$	-1.969	-2.524	-2.821	-2.931	-2.968

Tabela 8.7: Valor dos deslocamentos no ponto D; modelo de compatibilidade.

8.2.2 Análise com wavelets

Quando se utilizam sistemas de wavelets, o refinamento p - pode ser efectuado de duas formas diferentes. A primeira consiste em manter o *parâmetro de dilatação* das funções de escala utilizadas na aproximação e escolher uma outra família de wavelets com um valor de N superior. A segunda alternativa passa pela manutenção da família de wavelets e pelo aumento do valor do parâmetro de dilatação j considerado. São de seguida exploradas estas duas alternativas.

Utilização de wavelets pertencentes a diferentes famílias

N	Malha A			Malha B			Malha C		
	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ
4	75	32	24	300	128	80	1200	512	288
5	108	50	30	432	200	100	1728	800	360
6	147	72	36	588	288	120	2352	1152	432
8	243	128	48	972	512	160	3888	2048	576
10	243	128	48	972	512	160	3888	2048	576

Tabela 8.8: Caracterização das discretizações adoptadas; solução com wavelets de diferentes famílias.

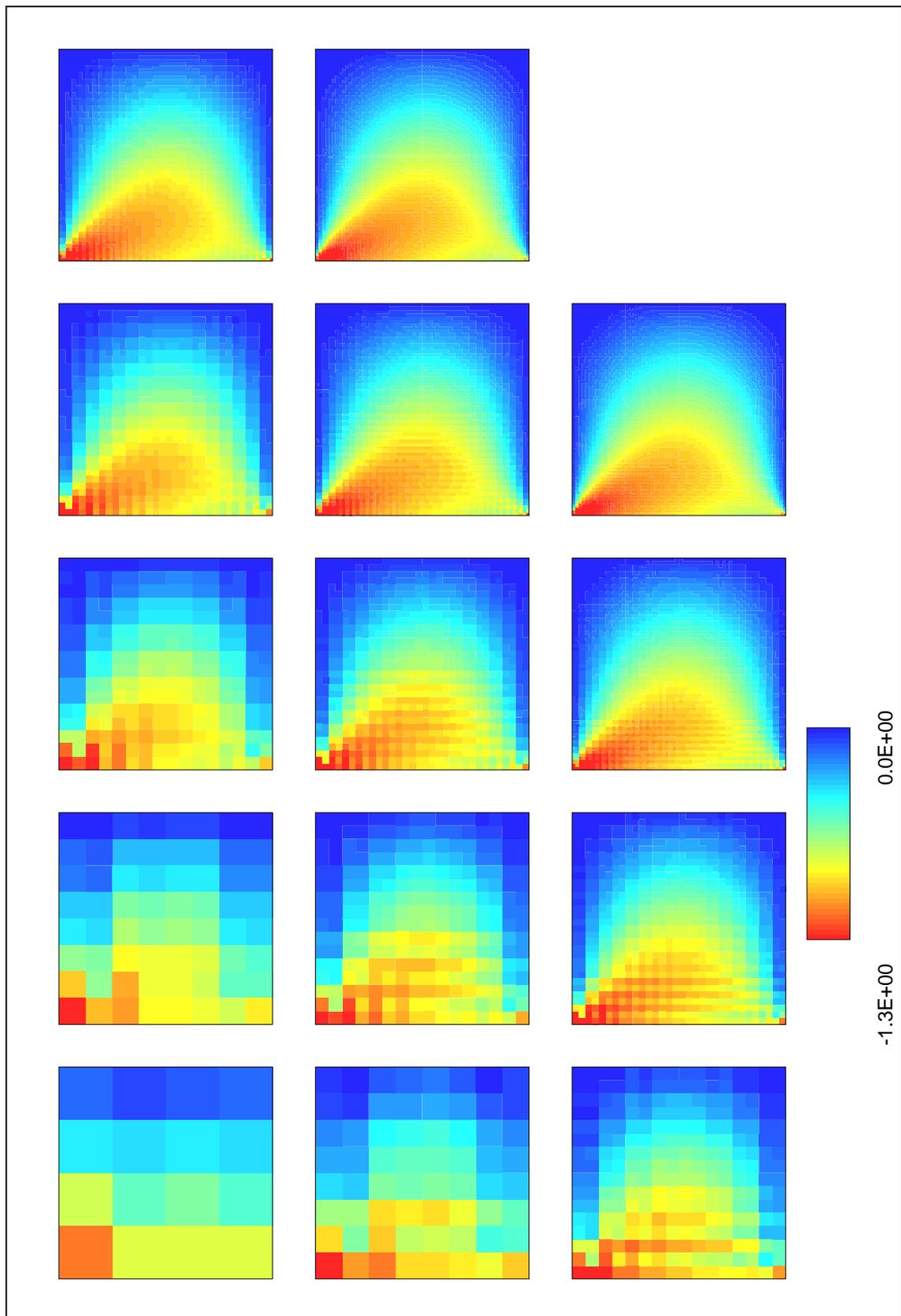


Figura 8.6: Distribuição das tensões tangenciais; modelo de compatibilidade com funções de Walsh.

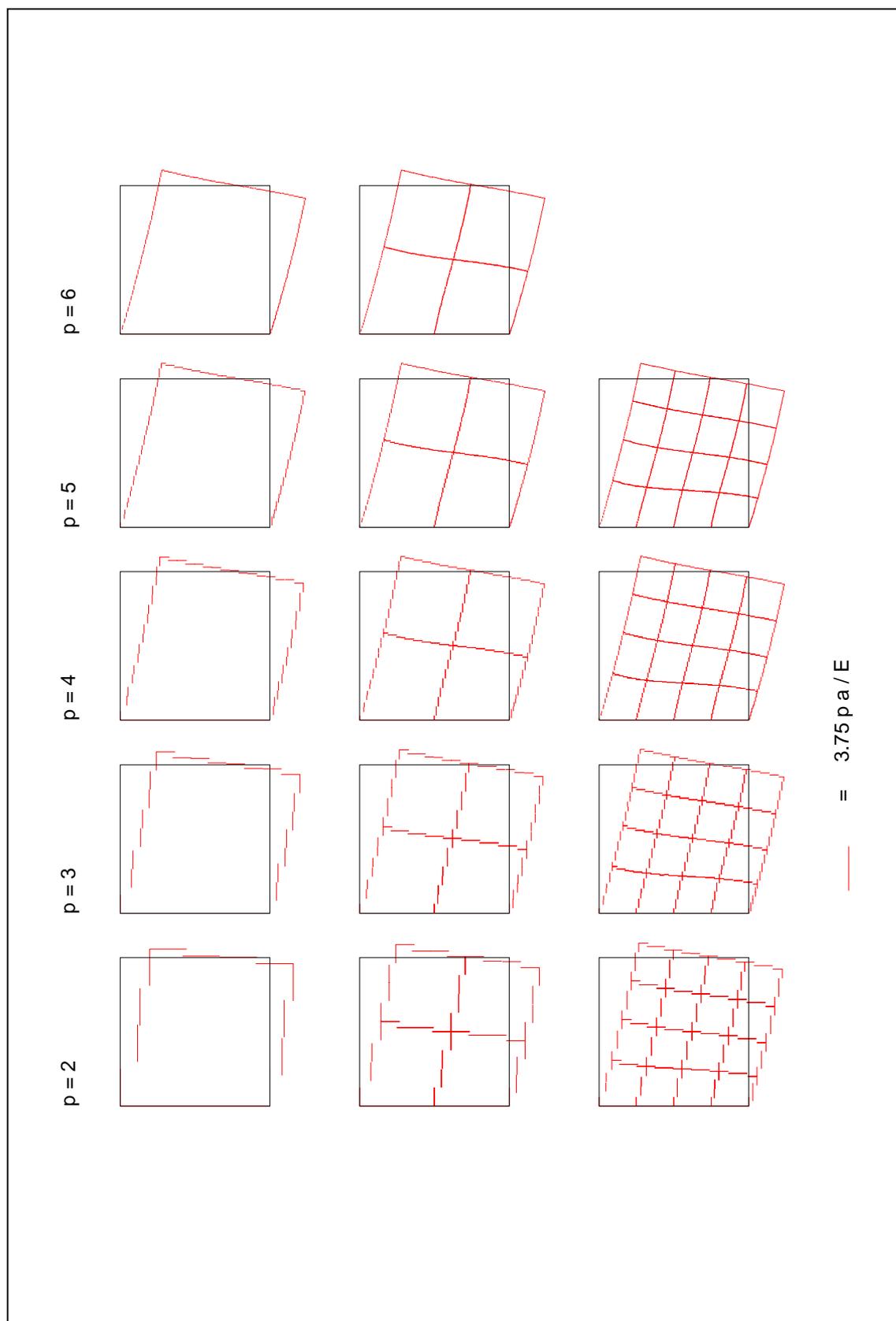


Figura 8.7: Campo de deslocamentos; modelo de compatibilidade com funções de Walsh.

Na análise da consola quadrada representada na figura 6.5 são utilizadas wavelets de Daubechies pertencentes às famílias com $N = 4, 5, 6, 8$ e 10 . As funções de escala com grau de dilatação $j = 1$ são utilizadas na aproximação do campo de tensões. Os campos de deslocamentos no domínio e na fronteira estática são modelados pelas funções de escala com $j = 0$. O número de parâmetros de tensão e de deslocamento utilizado em cada uma das discretizações encontra-se indicado na tabela 8.8.

Os valores listados na tabela 8.9 dizem respeito à utilização da malha A. É para cada caso indicado o número de graus de liberdade, o tempo total dispendido na análise e o valor da energia de deformação normalizada. Apresenta-se ainda a decomposição do tempo de análise, T_{tot} , em três parcelas. A primeira diz respeito às operações de pré-processamento. Engloba o tempo gasto na geração das wavelets e na determinação dos elementos das matrizes estruturais. O tempo associado à resolução directa do sistema de equações escrito na forma condensada (3.57) encontra-se indicado na coluna T_{sol} . Finalmente, os valores de T_{posp} dizem respeito ao tempo dispendido nas operações de pós-processamento, que inclui o cálculo do valor dos campos de tensões e de deslocamentos em cada um dos 64×64 pontos diádicos, em que se considera subdividido o domínio em estudo.

N	n_{gl}	$T_{pre}(s)$	$T_{sol}(s)$	$T_{posp}(s)$	$T_{tot}(s)$	\bar{U}
4	131	2.72	0.12	1.17	4.01	1.019410
5	188	4.10	0.34	1.10	5.54	1.005848
6	255	5.84	0.85	1.06	7.75	1.004067
8	419	10.22	3.69	1.20	15.11	0.992659
10	419	14.32	3.70	1.11	19.13	0.989938

Tabela 8.9: Resultados referentes à utilização da malha A; solução com wavelets de diferentes famílias.

As tabelas 8.10 e 8.11 repetem a mesma informação para as malhas B e C, respectivamente.

N	n_{gl}	$T_{pre}(s)$	$T_{sol}(s)$	$T_{posp}(s)$	$T_{tot}(s)$	\bar{U}
4	508	2.74	0.15	2.16	5.05	1.001257
5	732	4.16	0.37	2.21	6.74	0.993562
6	996	5.84	0.90	2.38	9.12	0.992287
8	1644	10.19	3.79	2.59	16.57	0.987940
10	1644	14.34	3.75	2.55	20.64	0.987289

Tabela 8.10: Resultados referentes à utilização da malha B; solução com wavelets de diferentes famílias.

O refinamento da solução pode ser confirmado pela análise do gráfico da figura 8.8, onde se traça a evolução do valor da energia de deformação normalizada para cada uma das discretizações adoptadas. Mais uma vez se conclui que a melhoria da

N	n_{gl}	$T_{pre}(s)$	$T_{sol}(s)$	$T_{posp}(s)$	$T_{tot}(s)$	\bar{U}
4	2000	2.78	0.23	5.40	8.41	0.991404
5	2888	4.18	0.55	5.80	10.53	0.988488
6	3936	5.90	1.10	6.69	13.69	0.988035
8	6512	10.26	4.50	7.73	22.49	0.986510
10	6512	14.40	4.44	7.85	26.69	0.986278

Tabela 8.11: Resultados referentes à utilização da malha C ; solução com wavelets de diferentes famílias.

solução é gradual, quer se incremente o número de elementos existentes na malha, quer se utilizem funções pertencentes a famílias de wavelets de ordem superior.

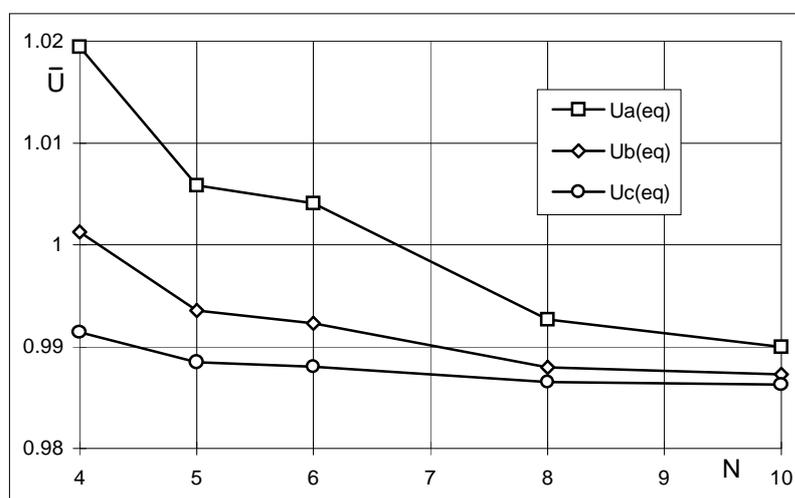


Figura 8.8: Evolução do valor da energia de deformação; solução com wavelets de diferentes famílias.

Encontra-se representada na figura 8.9 a distribuição de tensões tangenciais, $\bar{\sigma}_{xy}$, obtida para cada uma das discretizações consideradas. A análise desta figura permite observar em algumas das soluções uma oscilação do campo de tensões na vizinhança dos cantos da placa no bordo encastrado. Esta oscilação é uma das características habituais das soluções obtidas com a utilização de sistemas de wavelets. Manifesta-se regra geral perto da fronteira dos elementos e em especial em zonas onde existe uma forte variação ou mesmo uma singularidade no campo de tensões.

Esta oscilação é induzida não só por um fenómeno análogo ao chamado efeito de Gibbs, que se encontra geralmente presente nas análises com séries de Fourier, mas também pelo facto de se *truncarem* as funções que possuem valores diferentes de zero fora do intervalo definido pelos limites do elemento. Tal como foi referido anteriormente, a definição de sistemas de wavelets num intervalo fechado pode dar origem a algumas perturbações indesejáveis junto à fronteira dos elementos. Esta perturbação é ainda por vezes *sensível* ao número de funções que se considera na

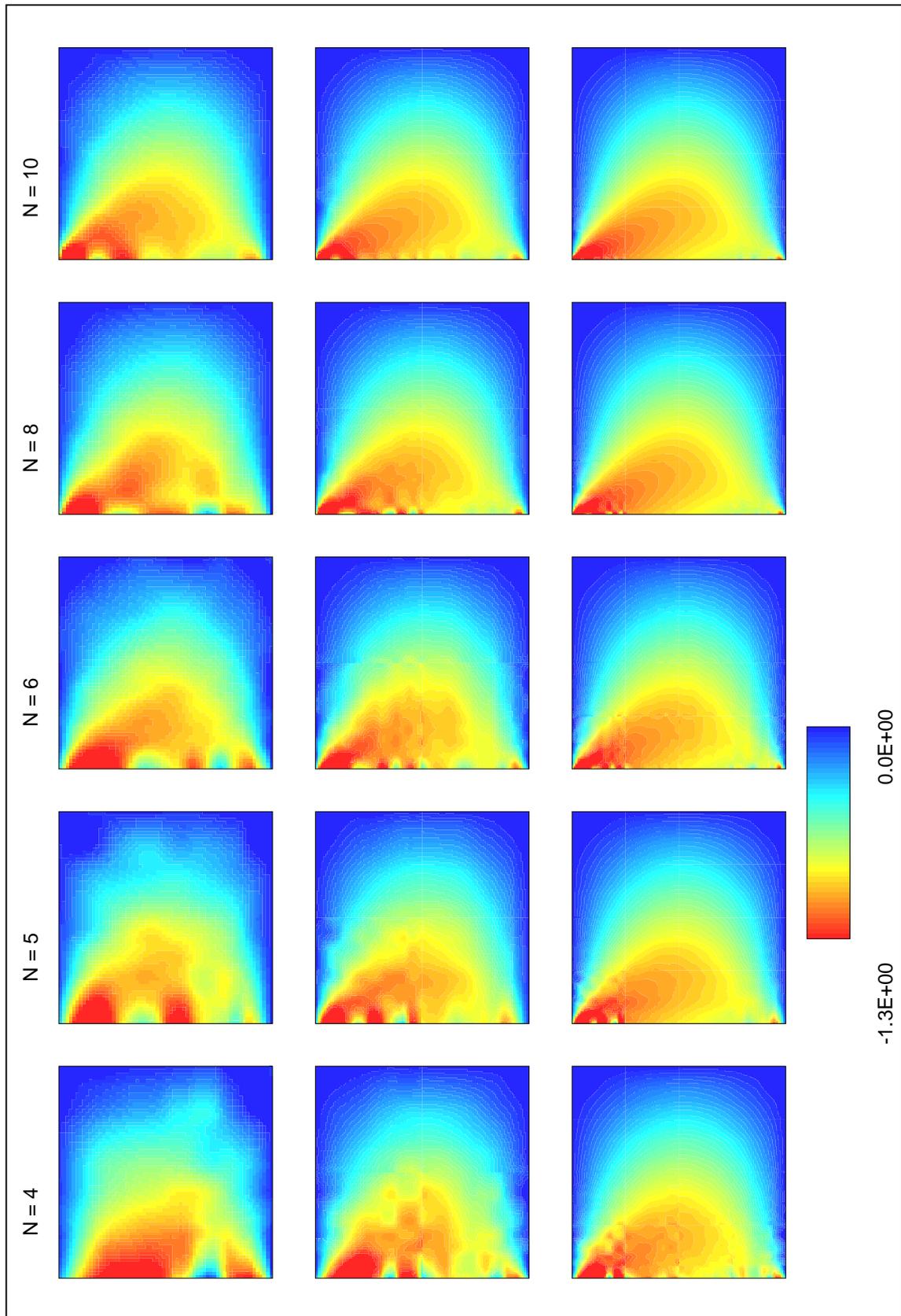


Figura 8.9: *Tensões tangenciais; solução com wavelets de diferentes famílias.*

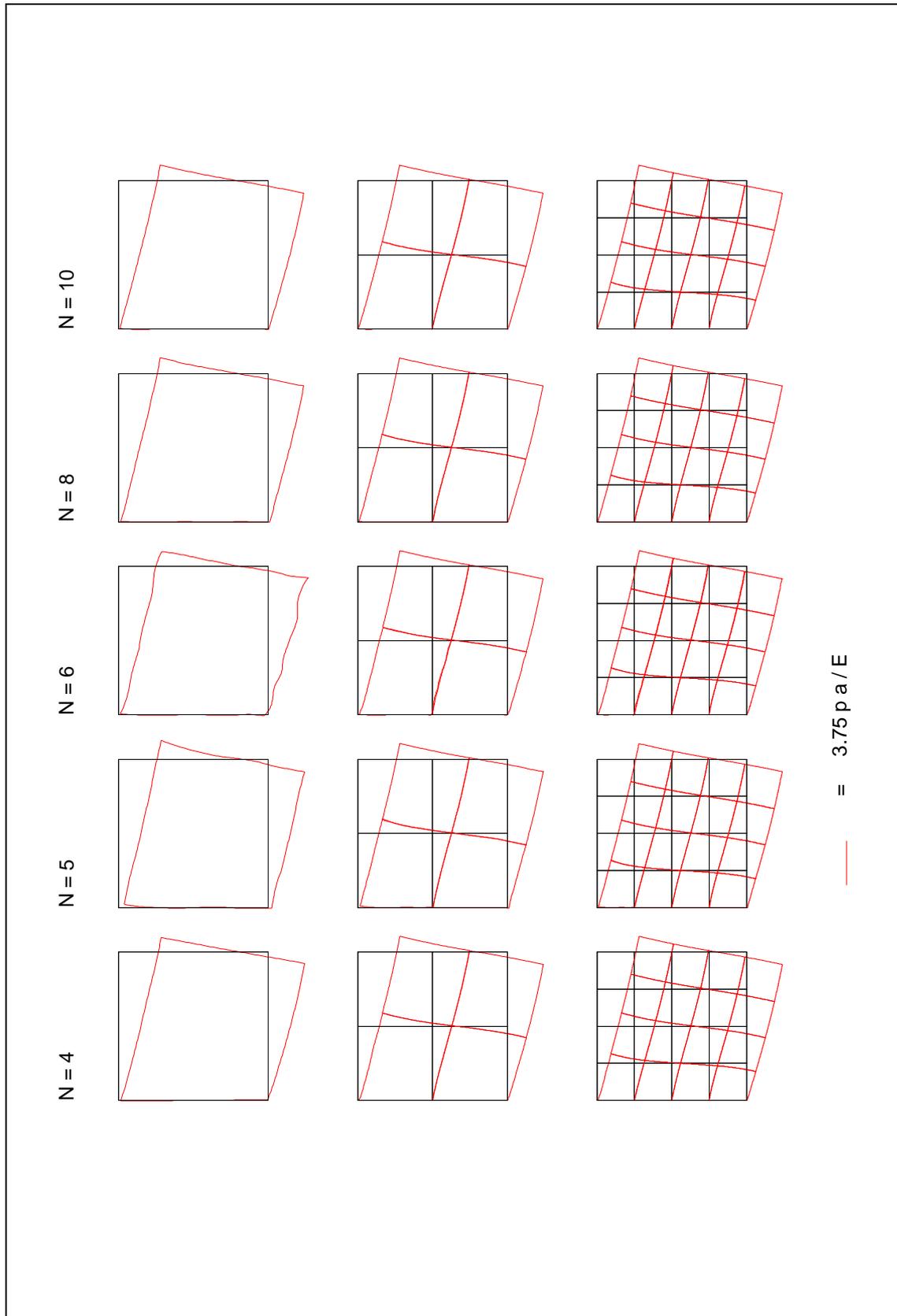


Figura 8.10: *Campo de deslocamentos na fronteira; solução com wavelets de diferentes famílias.*

aproximação.

A oscilação tende a desaparecer quando se aumenta o número de elementos existentes na malha ou quando se utilizam funções de escala com um *grau de dilatação* de valor superior. Para eliminar de uma forma eficiente este fenómeno, deverão utilizar-se sistemas de wavelets definidos especificamente sobre o intervalo em questão. Outro processo consistirá na utilização conjunta de wavelets e soluções clássicas da Teoria da Elasticidade sempre que se pretendam modelar campos de tensões em regiões onde se saiba *a priori* que existe uma singularidade ou pelo menos um gradiente elevado. Este assunto será objecto de um tratamento mais detalhado no capítulo seguinte.

Na figura 8.10 encontram-se representados os campos de deslocamentos obtidos para cada uma das discretizações. Os valores traçados são obtidos a partir da aproximação do campo de deslocamentos no domínio. É bem visível a qualidade da solução obtida, mesmo para os casos em que o número de graus de liberdade é pequeno.

Utilização de wavelets com diferentes *grau de refinamento*

Considere-se agora a família de wavelets com $N = 5$. O refinamento p - é agora efectuado à custa do aumento do valor do parâmetro j , que indica o grau de dilatação das funções utilizadas na aproximação do campo de tensões. Os campos de deslocamentos são aproximados com funções de escala de grau $j-1$. A tabela 8.12 indica o valor dos parâmetros de tensão e de deslocamento associados a cada um dos casos de teste.

j	Malha A			Malha B			Malha C		
	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ
1	108	50	30	432	200	100	1728	800	360
2	192	72	36	768	288	120	3072	1152	432
3	432	128	48	1728	512	160	6912	2048	576
4	1200	288	72	4800	1152	240	19200	4608	864

Tabela 8.12: *Caracterização das discretizações adoptadas; solução com wavelets com diferentes graus de refinamento.*

As tabelas 8.13, 8.14 e 8.15 apresentam, para cada uma das discretizações testadas, o número de graus de liberdade, os tempos de resolução (sempre em segundos) e o valor obtido para a energia de deformação normalizada.

O gráfico da figura 8.13 representa de novo a evolução do valor da energia de deformação. As diferentes aproximações obtidas para as tensões tangenciais e para o campo de deslocamentos na fronteira são representados nas figuras 8.11 e 8.12, respectivamente.

j	n_{gl}	$T_{pre}(s)$	$T_{sol}(s)$	$T_{posp}(s)$	$T_{tot}(s)$	\bar{U}
1	188	4.17	0.37	1.05	5.59	1.005848
2	300	3.91	0.74	1.09	5.74	1.000264
3	608	4.47	5.41	1.15	11.03	0.988422
4	1560	6.64	66.79	1.98	75.41	0.986571

Tabela 8.13: Resultados referentes à utilização da malha A; solução com wavelets com diferentes graus de refinamento.

j	n_{gl}	$T_{pre}(s)$	$T_{sol}(s)$	$T_{posp}(s)$	$T_{tot}(s)$	\bar{U}
1	732	4.12	0.37	2.33	6.82	0.993562
2	1176	3.98	0.78	2.51	7.27	0.990280
3	2400	4.55	5.88	2.88	13.31	0.986513
4	6192	6.71	79.51	6.73	92.95	0.985405

Tabela 8.14: Resultados referentes à utilização da malha B; solução com wavelets com diferentes graus de refinamento.

j	n_{gl}	$T_{pre}(s)$	$T_{sol}(s)$	$T_{posp}(s)$	$T_{tot}(s)$	\bar{U}
1	2888	4.16	0.55	5.91	10.62	0.988488
2	4656	4.08	1.05	7.05	12.18	0.987011
3	9536	4.60	6.48	9.85	20.93	0.985192
4	24672	6.73	101.55	25.57	133.85	0.982991

Tabela 8.15: Resultados referentes à utilização da malha C; solução com wavelets com diferentes graus de refinamento.

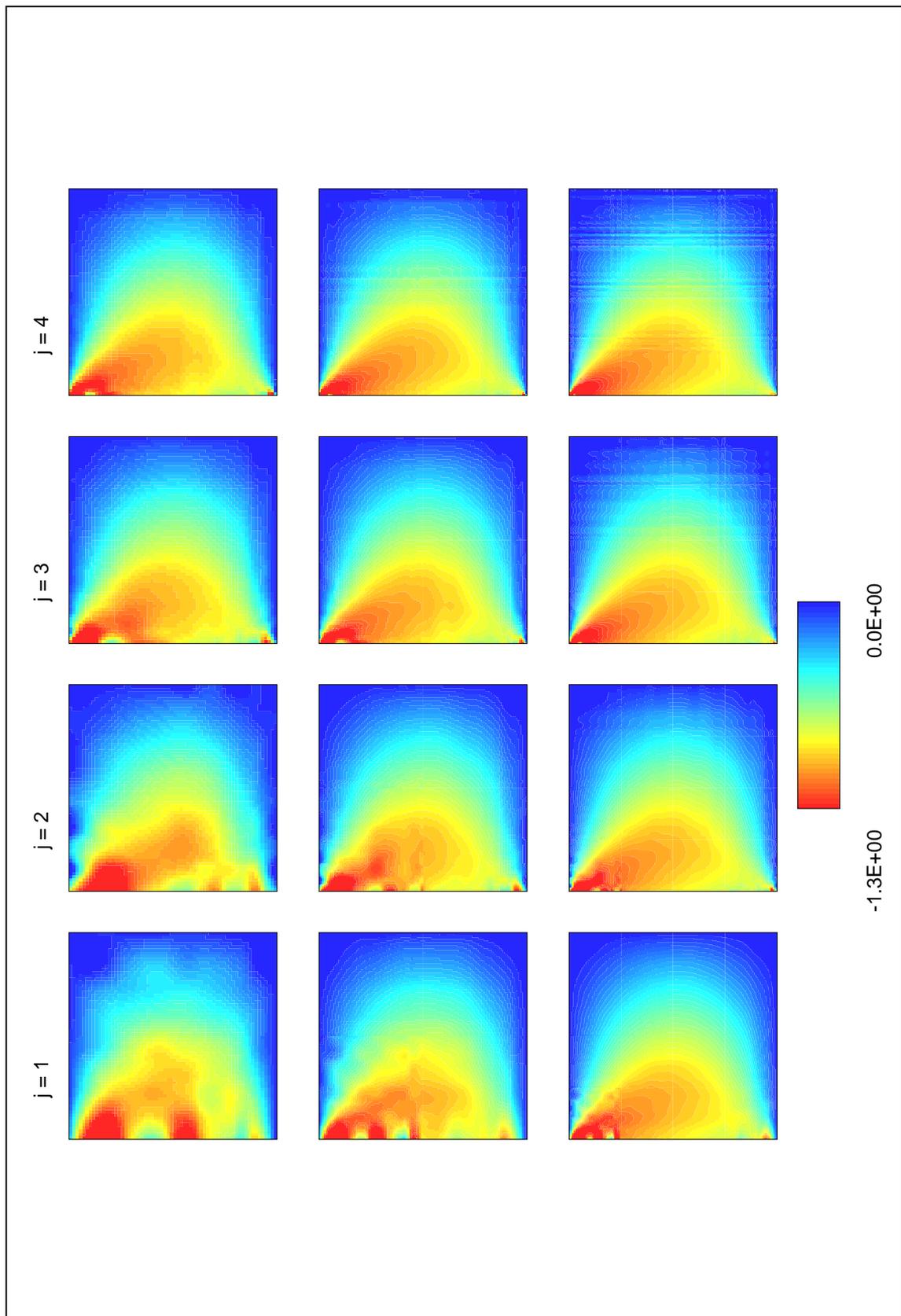


Figura 8.11: *Tensões tangenciais; solução com wavelets com diferentes graus de refinamento.*

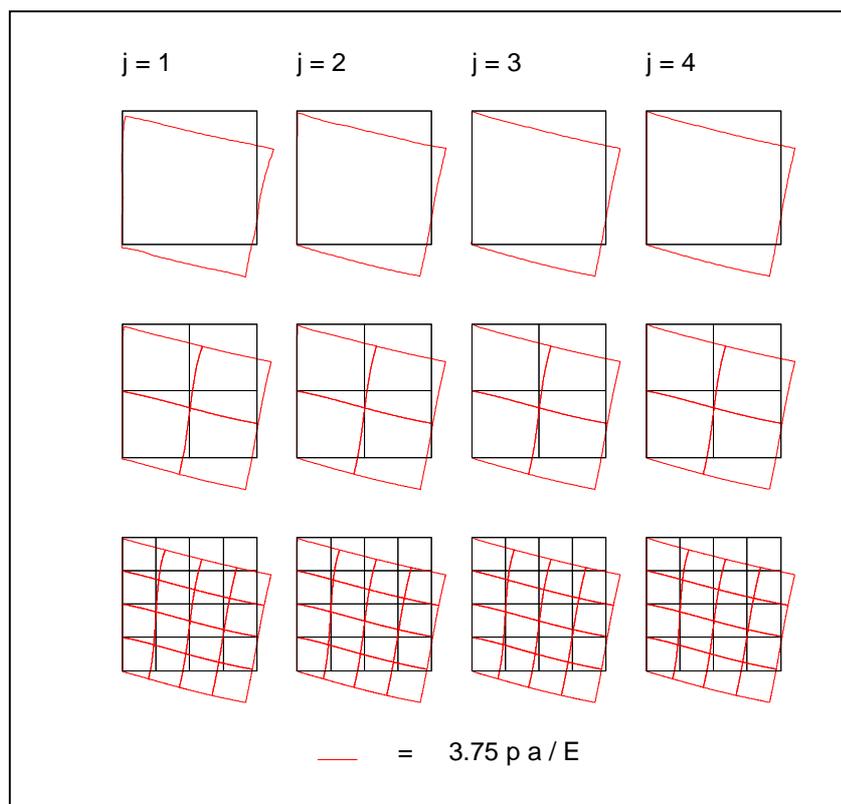


Figura 8.12: *Campo de deslocamentos na fronteira; solução com wavelets com diferentes graus de refinamento.*

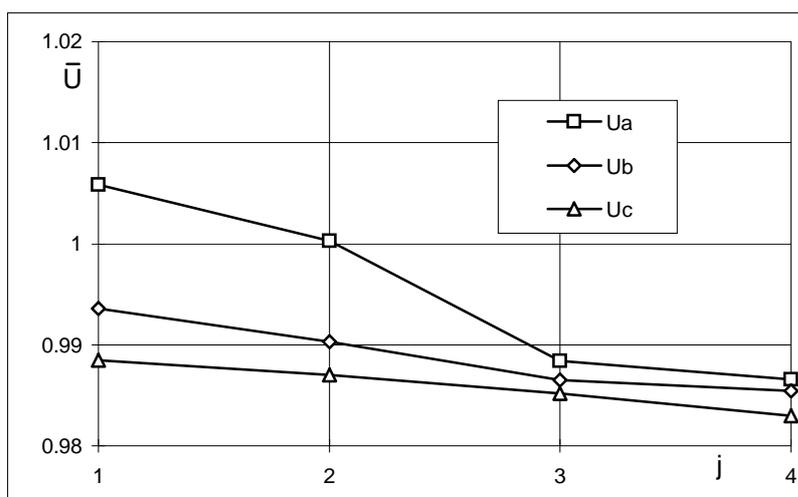


Figura 8.13: *Evolução da energia de deformação; solução com wavelets com diferentes graus de refinamento.*

8.3 Análise do efeito da distorção da malha

Importa agora averiguar qual o efeito que a distorção da malha de elementos finitos pode ter na qualidade das soluções obtidas. Para tal, é efectuada a análise da placa representada na figura 8.14. O carregamento considerado induz na peça um estado de flexão simples.

É utilizada na análise uma malha constituída por quatro macro-elementos. Tal como se encontra ilustrado na figura 8.14, a distorção dos elementos é descrita em função do valor do parâmetro e , o qual pode tomar valores inteiros variando entre $e = 1$ e $e = 7$. Admite-se ainda que o material tem um modo de elasticidade $E = 1500$ e um coeficiente de Poisson com valor igual a $\nu = 0.25$.

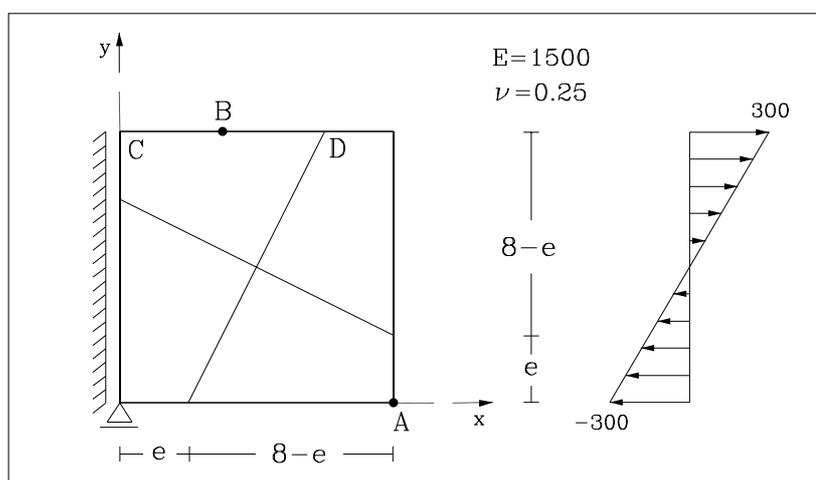


Figura 8.14: Malha utilizada no estudo da distorção.

É testado o comportamento dos modelos baseados na aplicação dos dois tipos de função de aproximação em estudo. A tabela 8.16 apresenta o grau das funções utilizadas, o valor dos parâmetros de tensão e de deslocamento e o número total de graus de liberdade envolvidos nas aproximações.

Modelo	n_x	n_v	$n_{v\gamma}$	α_v	β_v	β_γ	N_{gl}
Walsh	32	16	31	12288	2048	682	15018
Wavelet	8	7	7	768	392	154	1314

Tabela 8.16: Caracterização das discretizações utilizadas no estudo do efeito da distorção.

Na tabela 8.17 apresentam-se os valores do deslocamento vertical do ponto A (ver figura 8.14) e da tensão σ_{xx} no ponto B obtidos com a malha não distorcida. O ponto B encontra-se sempre situado no ponto médio do segmento de recta \overline{CD} , qualquer que seja o valor do parâmetro de distorção e . Para o caso do deslocamento vertical

indicam-se três valores. O primeiro, $d_v(V)$, resulta da aproximação efectuada no domínio, enquanto que os restantes, $d_v(\Gamma_1)$ e $d_v(\Gamma_2)$, são obtidos a partir da aproximação do campo de deslocamentos no bordo inferior e no bordo lateral direito da placa, respectivamente.

Modelo	σ_{xx}	$d_v(V)$	$d_v(\Gamma_1)$	$d_v(\Gamma_2)$
Walsh	290.21	-1.54	-1.55	-1.58
Wavelet	299.69	-1.601	-1.598	-1.603
Analítico	300.0	-1.6	-	-

Tabela 8.17: Comparação das soluções obtidas com a malha não-distorcida.

Modelo	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$	$e = 6$	$e = 7$
<i>Walsh</i>	0.913	0.939	0.957	0.963	0.971	0.970	0.951
<i>Wavelet</i>	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.000	1.000
<i>Mix-L</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Q4	0.692	0.755	0.830	0.896	0.921	0.894	0.823
Q_{M6}	0.849	0.848	0.918	1.000	1.029	0.975	0.866
$P5\beta$	0.860	0.852	0.919	1.000	1.030	0.979	0.866
$O5\beta$	0.852	0.850	0.919	1.000	1.028	0.975	0.866
$F5\beta$	0.851	0.849	0.919	1.000	1.028	0.975	0.866

Tabela 8.18: Efeito da distorção; valores normalizados obtidos para o deslocamento vertical em A.

Apresentam-se ainda na mesma tabela os correspondentes valores analíticos [185]. A análise da tabela 8.17 permite verificar que a solução obtida com a utilização de séries de Walsh apresenta um erro relativo da ordem dos 3%, quer se comparem os valores da tensão em B ou do deslocamento em A. Este facto poderá ser à primeira vista surpreendente, sobretudo se se tiver em conta o elevado número de graus de liberdade envolvidos na aproximação. No entanto, este desvio pode ser justificado de uma forma simples. A sua origem tem a ver fundamentalmente com a forma como o carregamento é tratado. No cálculo dos termos independentes é efectuada uma transformada de Walsh à carga aplicada sobre a estrutura. Obtém-se assim uma *representação* do carregamento no espaço das funções digitais. Esta representação, que é exacta quando a carga é constante, é apenas aproximada quando se aplicam carregamentos lineares. Desta forma, a aproximação da tensão normal aplicada nas fibras superiores não tem um valor igual a 300, mas sim ligeiramente inferior.

O efeito da distorção é quantificado nas tabelas 8.18 e 8.19, onde se apresentam, para cada um dos valores de e considerados, os valores normalizados do deslocamento vertical em A e da tensão normal em B.

As tabelas 8.18 e 8.19 apresentam ainda os resultados obtidos com outros modelos de elementos finitos. O modelo *Mix-L*, desenvolvido por Pereira [147], é também um modelo híbrido-misto de elementos finitos. As aproximações são efectuadas

Modelo	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$	$e = 6$	$e = 7$
<i>Walsh</i>	0.980	0.977	0.972	0.967	0.961	0.955	0.957
<i>Wavelet</i>	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
<i>Mix-L</i>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Q4	0.708	0.810	0.890	0.925	0.908	0.852	0.776
Q_{M6}	0.758	0.869	0.960	1.000	0.971	0.867	0.695
$P5\beta$	0.739	0.859	0.957	1.000	0.970	0.866	0.694
$O5\beta$	0.752	0.867	0.959	1.000	0.971	0.867	0.694
$F5\beta$	0.753	0.867	0.959	1.000	0.971	0.867	0.695

Tabela 8.19: *Efeito da distorção; valores normalizados obtidos para o valor da tensão σ_{xx} em B.*

neste caso com recurso à utilização de séries completas de polinómios ortogonais de Legendre. As tensões no domínio são aproximadas por polinómios do 6º grau, enquanto que o campo de deslocamentos no domínio{fronteira} é modelado com polinómios de Legendre do 5º{6º} grau. A esta discretização correspondem 352 graus de liberdade.

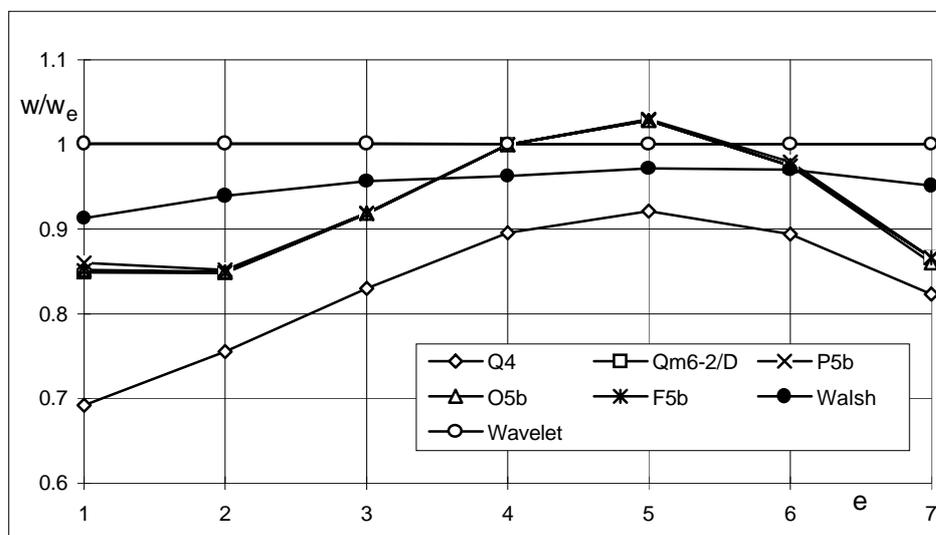


Figura 8.15: *Efeito da distorção; variação do deslocamento vertical em A.*

O modelo Q4 corresponde à utilização de elementos finitos isoparamétricos de quatro nós [202]. O modelo $P5\beta$ aplica os elementos híbridos planos desenvolvidos por Pian e Sumihara [161]. Os elementos não conformes propostos por Taylor *et al.* [186] são utilizados no modelo Q_{M6} . Finalmente, os elementos finitos híbridos desenvolvidos por Sze [185] dão origem aos modelos $O5\beta$ e $F5\beta$. Com a exceção do modelo *Mix-L*, todos os valores de comparação apresentados nas tabelas anteriores foram extraídos de Sze [185].

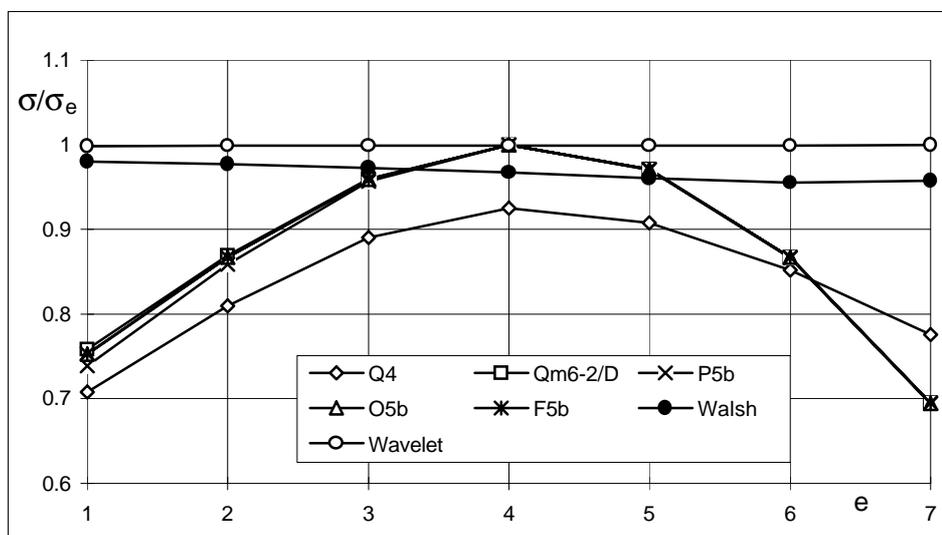


Figura 8.16: Efeito da distorção; variação da tensão σ_{xx} em B .

A informação contida nas tabelas 8.18 e 8.19 encontra-se representada numa forma gráfica nas figuras 8.15 e 8.16, respectivamente. Ressalta da análise destas figuras a grande insensibilidade que os modelos híbrido-mistos apresentam em relação à distorção. A capacidade de adaptação a geometrias irregulares é uma característica geral das formulações não convencionais de elementos finitos híbridos/mistos. Este facto é ilustrado também pelo comportamento do modelo *Mix-L*, que se revela completamente insensível à distorção da malha.

É no entanto importante não esquecer que o número de graus de liberdade considerados na resolução do problema com os modelos híbrido-mistos é substancialmente superior ao número de graus de liberdade associados aos restantes modelos. Será de esperar então que estes últimos apresentem uma sensibilidade à distorção superior. Os modelos híbrido-mistos possuem um número suficiente de graus de liberdade que lhes permite *acomodar* com alguma facilidade as mudanças induzidas pelas variações de geometria dos elementos da malha.

Na figura 8.17 apresenta-se a distribuição do campo de tensões σ_{xx} e o campo de deslocamentos na fronteira obtidos com a utilização de séries de Walsh. A análise desta figura permite observar uma ligeira perturbação induzida no campo de tensões, em especial nos casos em que a distorção é elevada.

A figura 8.18 repete a mesma informação, mas agora para o caso em que se utilizam sistemas de wavelets nas aproximações. Verifica-se de imediato que as aproximações para o campo de tensões obtidas com wavelets são menos sensíveis à distorção que no caso das séries digitais. Já quando se comparam os campos de deslocamentos, esta diferença praticamente não se manifesta.

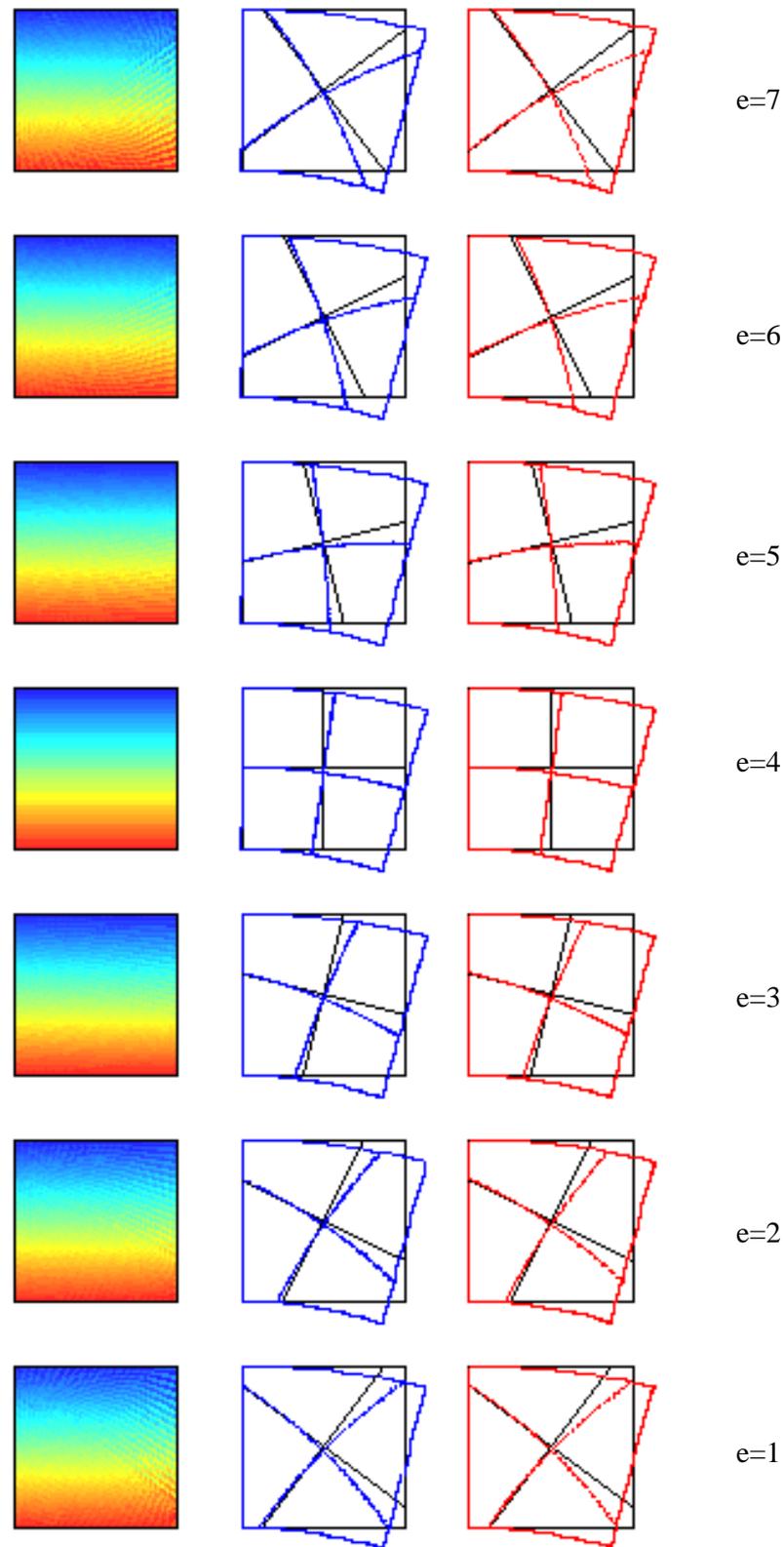


Figura 8.17: *Efeito da distorção; solução com funções de Walsh.*

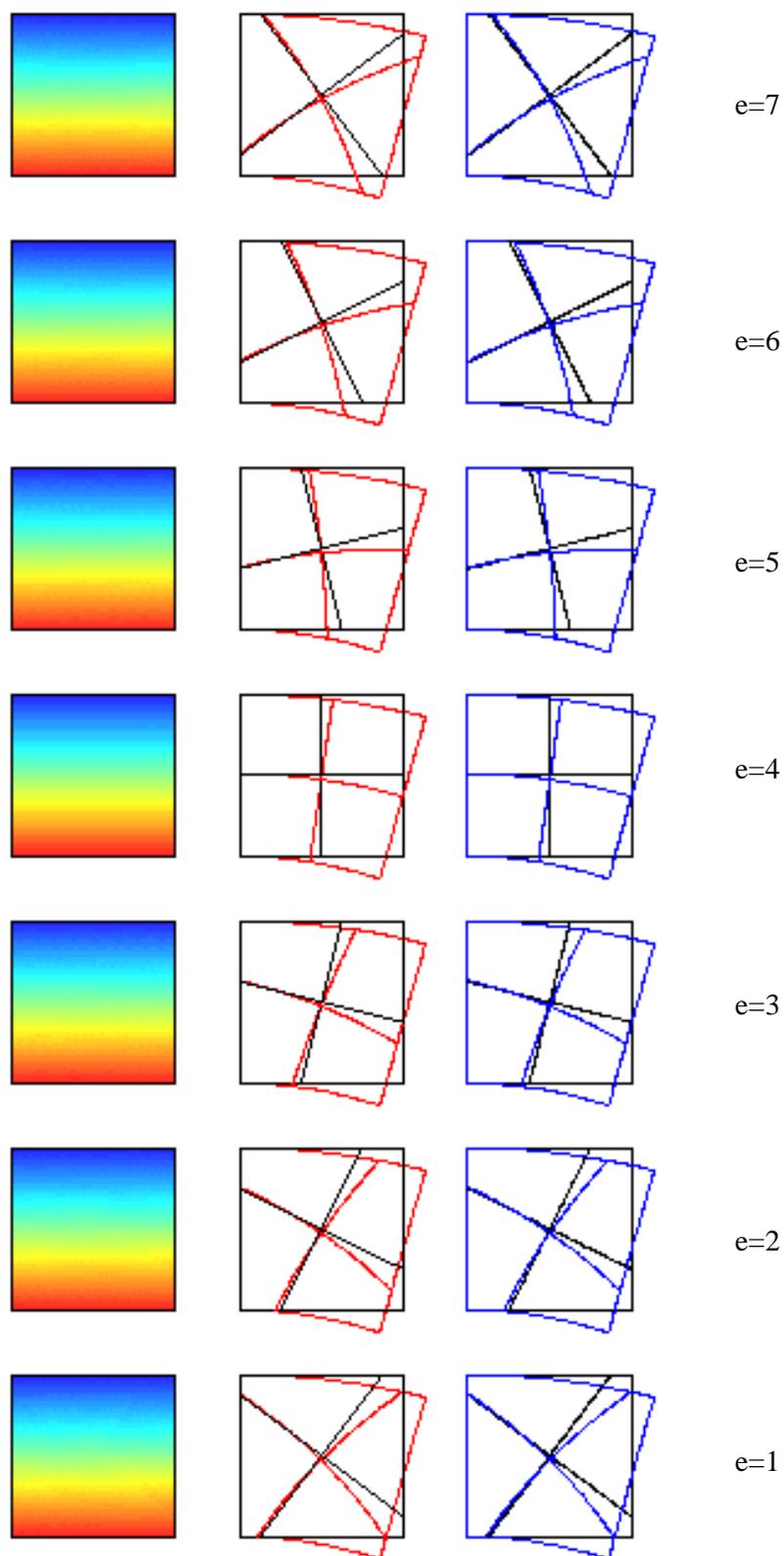


Figura 8.18: *Efeito da distorção; solução com wavelets.*