

Capítulo 6

Cálculo das matrizes estruturais

6.1 Considerações iniciais

Foram apresentados nos capítulos precedentes os modelos híbrido-mistos de elementos finitos e as funções de aproximação seleccionadas para modelar os campos de tensões e de deslocamentos. Este capítulo tem como finalidade especificar a forma através da qual tal aproximação é efectuada e discutir as expressões que permitem realizar o cálculo dos coeficientes de cada um dos operadores estruturais. Por forma a simplificar a apresentação e tornar mais clara a introdução dos conceitos básicos, todas as equações apresentadas e discutidas ao longo deste capítulo encontram-se particularizadas para o caso de problemas de placas (estados planos de tensão e de deformação). Não é contudo difícil generalizar os resultados apresentados a outros tipos de estrutura, como é o caso das lajes espessas.

Uma vez definidas todas as aproximações requeridas pelos modelos híbrido-mistos, apresentam-se as equações que permitem efectuar o cálculo dos operadores estruturais. Quando se utilizam funções ortonormais, verifica-se que é possível obter soluções analíticas para os integrais envolvidos na definição de tais operadores. Este aspecto é importante, pois permite evitar a utilização de quaisquer esquemas de integração numérica. A análise das expressões obtidas permite antever um elevado índice de esparsidade para a matriz dos coeficientes do sistema governativo.

Para definir elementos com uma forma genérica, não-rectangular, aplica-se um procedimento típico das formulações clássicas de elementos finitos. Tal como no caso dos *elementos isoparamétricos* [202], utiliza-se um *elemento mestre* com forma quadrangular. As aproximações são definidas no *referencial local*. Todos os cálculos são efectuados ao nível do elemento mestre, havendo no entanto que ter em conta a *mudança de referencial* que permite *mapear* o elemento mestre e recuperar a definição da geometria do elemento *real* existente na malha. São neste capítulo definidas quais devem ser essas mudanças de variável e os operadores nelas envolvidos. Apresentam-se também as alterações que é necessário introduzir na definição

das diferentes matrizes estruturais e demonstra-se que continua a ser possível obter soluções analíticas para os integrais sempre que se utilizam funções de aproximação ortonormais.

A rapidez com que o cálculo dos elementos das matrizes estruturais pode ser efectuado é comprovada através da análise de um exemplo bastante simples. O mesmo exemplo é ainda utilizado para ilustrar a dimensão e esparsidade dos diferentes operadores estruturais e da matriz dos coeficientes do sistema governativo global.

6.2 Aproximação dos campos de tensão e de deslocamento

6.2.1 Aproximação dos campos no domínio dos elementos

Para aproximar os campos de tensões e de deslocamentos no domínio, são utilizadas séries completas de funções de Walsh ou wavelets bidimensionais, denotadas genericamente por $W(i, x)W(j, y)$. Importa sublinhar que as aproximações com sistemas de wavelets envolvem apenas a utilização de *funções de escala* com um determinado grau de *refinamento*.

Para assegurar que a série seja completa, devem utilizar-se todas as funções até uma certa ordem. Esta selecção de funções pode ser efectuada segundo dois critérios distintos [30]. No primeiro impõe-se que $i \leq n \wedge j \leq n$, enquanto que no segundo se garante que $i + j \leq n$, correspondendo à utilização de todas as funções situadas no interior dos losangos definidos pelo grau máximo n , e de todas as funções situadas no interior dos triângulos definidos pelo mesmo valor de n , respectivamente. Em [30] comparam-se os méritos relativos da *aproximação em losango* e da *aproximação em triângulo*. Conclui-se nesse trabalho que é o primeiro daqueles critérios que conduz a melhores resultados e a uma maior estabilidade do processo numérico, sendo por isso o que aqui é adoptado para obter as séries de funções a utilizar nas aproximações no domínio.

Cada componente do campo de tensões é aproximada de forma independente. Seja n_x o grau mais elevado que as funções unidimensionais $W(m, s)$ podem tomar. A aproximação do campo de tensões pode ser escrita na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_x} \mathbf{S}_{v_{ij}} \mathbf{X}_{ij} + \boldsymbol{\sigma}_p, \quad (6.1)$$

com

$$\mathbf{S}_{v_{ij}} = \mathbf{I}_3 W(i, x)W(j, y), \quad (6.2)$$

$$\mathbf{X}_{ij} = \begin{bmatrix} X_{xx} \\ X_{yy} \\ X_{xy} \end{bmatrix}_{ij},$$

e onde \mathbf{I}_n denota a matriz identidade de dimensão n . A constituição do vector $\boldsymbol{\sigma}_p$ depende da solução particular que se pretenda considerar. Apresentam-se, em apêndice, as componentes deste vector quando se considera a acção de uma carga concentrada.

O número de graus de liberdade associado ao campo de tensões, usualmente designados por *parâmetros de tensão no domínio*, é dado por:

$$\alpha_v = 3 \times n_x^2 .$$

A matriz \mathbf{S}_v tem 3 linhas e α_v colunas.

Cada componente do campo de deslocamentos é aproximada de forma independente no domínio de cada elemento. Sendo n_v o grau mais elevado considerado na aproximação deste campo, pode escrever-se

$$\mathbf{u}(V) = \sum_{m=1}^{n_v} \sum_{n=1}^{n_v} \mathbf{U}_{v_{mn}} \mathbf{q}_{v_{mn}} + \mathbf{u}_p , \quad (6.3)$$

$$\mathbf{U}_{v_{mn}} = \mathbf{I}_2 W(m, x)W(n, y) , \quad (6.4)$$

$$\mathbf{q}_{v_{mn}} = \begin{bmatrix} q_{v_x} \\ q_{v_y} \end{bmatrix}_{mn} .$$

Apresentam-se em apêndice as componentes a considerar na definição do vector \mathbf{u}_p quando se considera para solução particular o campo de deslocamentos associado à acção de uma carga concentrada.

O número de deslocamentos de domínio generalizados, também aqui designados por *parâmetros de deslocamento no domínio*, é dado por

$$\beta_v = 2 \times n_v^2 .$$

A matriz \mathbf{U}_v tem 2 linhas e β_v colunas.

6.2.2 Aproximação dos campos na fronteira

Nos modelos de equilíbrio, cada componente do campo de deslocamentos é aproximada de forma independente ao longo da fronteira estática. Seja $n_{v\gamma}$ o grau mais elevado que se considera para as funções unidimensionais utilizadas na aproximação e n_e o número de troços em que se considera subdividida a fronteira estática. A aproximação do campo de deslocamentos em Γ_σ pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{u}(\Gamma_\sigma) = \sum_{s=1}^{n_e} \sum_{k=1}^{n_{v\gamma}} \mathbf{U}_{\gamma_{ks}} \mathbf{q}_{\gamma_{ks}} , \quad (6.5)$$

com,

$$\mathbf{U}_{\gamma_{ks}} = \mathbf{I}_2 W(k, s) , \quad (6.6)$$

$$\mathbf{q}_{\gamma_{ks}} = \begin{bmatrix} q_{\gamma_{xs}} \\ q_{\gamma_{ys}} \end{bmatrix}_{ks} .$$

A expressão (6.5) é válida quando se admite que em cada troço da fronteira estática estão livres os deslocamentos segundo duas direcções ortogonais (x e y , por exemplo). Esta contudo não é uma situação geral. Em muitas circunstâncias existem troços nos quais o deslocamento segundo uma das direcções está impedido. É o caso dos encastramentos deslizantes que surgem, por exemplo, sempre que se efectua uma simplificação de simetria na análise de uma dada estrutura.

Para escrever a aproximação (6.5) numa forma mais geral, considera-se que n_{dl} representa o número total de translações independentes existentes. Para o caso em que as translações segundo x e y se encontram livres em cada troço de Γ_σ , verifica-se de imediato que $n_{dl} = 2 \times n_e$. A aproximação do campo de deslocamentos pode ser representada na forma,

$$\mathbf{u}(\Gamma_\sigma) = \sum_{s=1}^{n_{dl}} \sum_{k=1}^{n_{v\gamma}} \mathbf{U}_{\gamma_{ks}} \mathbf{q}_{\gamma_{ks}} , \quad (6.7)$$

onde agora se define,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\gamma_{ks}} &= [W(k, s)] , \\ \mathbf{q}_{\gamma_{ks}} &= [q_{\gamma_{ds}}]_{ks} . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Os parâmetros $q_{\gamma_{ds}}$ representam as variáveis generalizadas em função das quais se representa o campo de deslocamentos segundo a direcção d , ao longo do troço s da fronteira estática. O número de deslocamentos de fronteira generalizados, também aqui designados por *parâmetros de deslocamento na fronteira*, é dado por

$$\beta_\gamma = n_{dl} \times n_{v\gamma} .$$

Nos modelos de compatibilidade, são aproximadas de forma independente as componentes do campo de tracções ao longo da fronteira cinemática. Seja $n_{x\gamma}$ o grau mais elevado que se considera para as funções unidimensionais utilizadas e n_c o número de troços em que se considera subdividida a fronteira Γ_u . Define-se:

$$\mathbf{t}(\Gamma_u) = \sum_{s=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n_{x\gamma}} \mathbf{S}_{\gamma_{ks}} \mathbf{p}_{\gamma_{ks}} , \quad (6.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\gamma_{ks}} &= \mathbf{I}_2 W(k, s) , \\ \mathbf{p}_{\gamma_{ks}} &= \begin{bmatrix} p_{\gamma_{xs}} \\ p_{\gamma_{ys}} \end{bmatrix}_{ks} . \end{aligned} \quad (6.10)$$

A aproximação (6.9) só é válida quando, para cada um dos troços em que se considera dividida a fronteira cinemática, se encontram especificados os deslocamentos segundo duas direcções ortogonais. Para reformular a definição (6.9) e possibilitar a consideração de casos mais gerais, introduz-se o parâmetro n_{cl} , que representa o

número total de translações restringidas. Não é difícil verificar que para uma mesma malha de elementos finitos se tem,

$$n_{dl} + n_{cl} = 2 \times n_t ,$$

onde n_t representa o número total de troços em que se considera dividida a fronteira do domínio em estudo.

A aproximação das tracções ao longo de Γ_u pode ser escrita na forma mais geral,

$$\mathbf{t}(\Gamma_u) = \sum_{s=1}^{n_{cl}} \sum_{k=1}^{n_{x\gamma}} \mathbf{S}_{\gamma_{ks}} \mathbf{p}_{\gamma_{ks}} , \quad (6.11)$$

onde agora se define,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\gamma_{ks}} &= [W(k, s)] , \\ \mathbf{p}_{\gamma_{ks}} &= [p_{\gamma_{ds}}]_{ks} . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Os parâmetros $p_{\gamma_{ds}}$ representam as variáveis generalizadas em função das quais se representa o campo de tracções segundo a direcção d , ao longo do troço s da fronteira cinemática. O número de tracções generalizadas, também designadas por *parâmetros de tracção na fronteira*, é dado por

$$\alpha_\gamma = n_{cl} \times n_{x\gamma} .$$

6.3 Aproximação dos parâmetros plásticos

Os incrementos dos parâmetros plásticos são aproximados em cada uma das células críticas em que se considera subdividido cada elemento finito. Para garantir que a condição de escoamento (2.37) seja verificada localmente, as funções polinomiais utilizadas na aproximação devem tomar valores não-negativos em todo o seu intervalo de definição.

As funções utilizadas para aproximar os incrementos dos parâmetros plásticos são definidas com base numa *célula plástica tipo*, tal como a que se apresenta na figura 6.1. Para facilitar a geração das funções de aproximação pretendidas, é definido à partida o seguinte conjunto de funções polinomiais auxiliares:

$$\begin{aligned} f_*^{(1)} &= (1 - \xi)(1 - \eta) ; & f_*^{(5)} &= 4\xi(\xi - 1)(\eta - 1) ; \\ f_*^{(2)} &= \xi(1 - \eta) ; & f_*^{(6)} &= 4\xi\eta(1 - \eta) ; \\ f_*^{(3)} &= \xi\eta ; & f_*^{(7)} &= 4\xi\eta(1 - \xi) ; \\ f_*^{(4)} &= (1 - \xi)\eta ; & f_*^{(8)} &= 4\eta(\xi - 1)(\eta - 1) . \end{aligned} \quad (6.13)$$

As quatro primeiras funções encontram-se representadas na figura 6.2 e correspondem às funções de interpolação usualmente utilizadas na formulação dos elementos

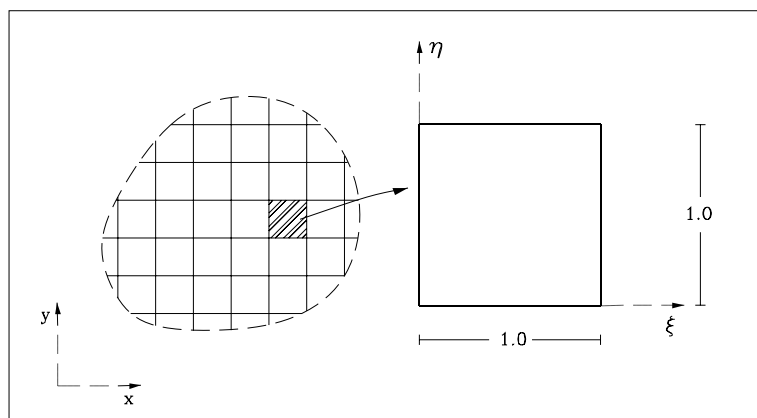


Figura 6.1: *Célula plástica tipo.*

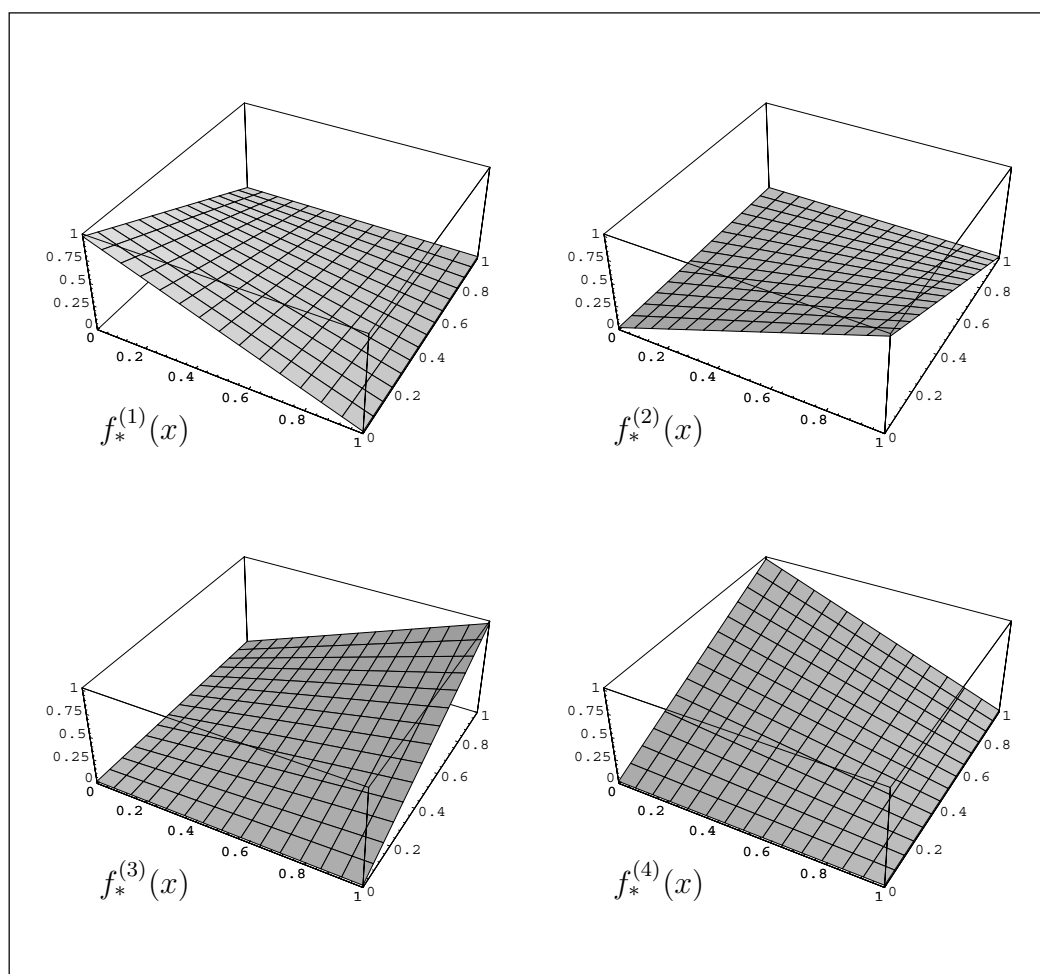


Figura 6.2: *Funções polinomiais utilizadas na aproximação dos parâmetros plásticos.*

finitos rectangulares de quatro nós [202], as quais nunca tomam valores negativos qualquer que seja o ponto considerado na célula crítica. As quatro funções restantes são obtidas por forma a que o seu valor se anule em três bordos diferentes da célula crítica. O valor máximo de tais funções naquele intervalo ocorre no ponto médio do lado onde existem valores diferentes de zero. As funções são escaladas por forma a garantir que tal valor máximo seja unitário. Estas quatro funções encontram-se representadas na figura 6.3.

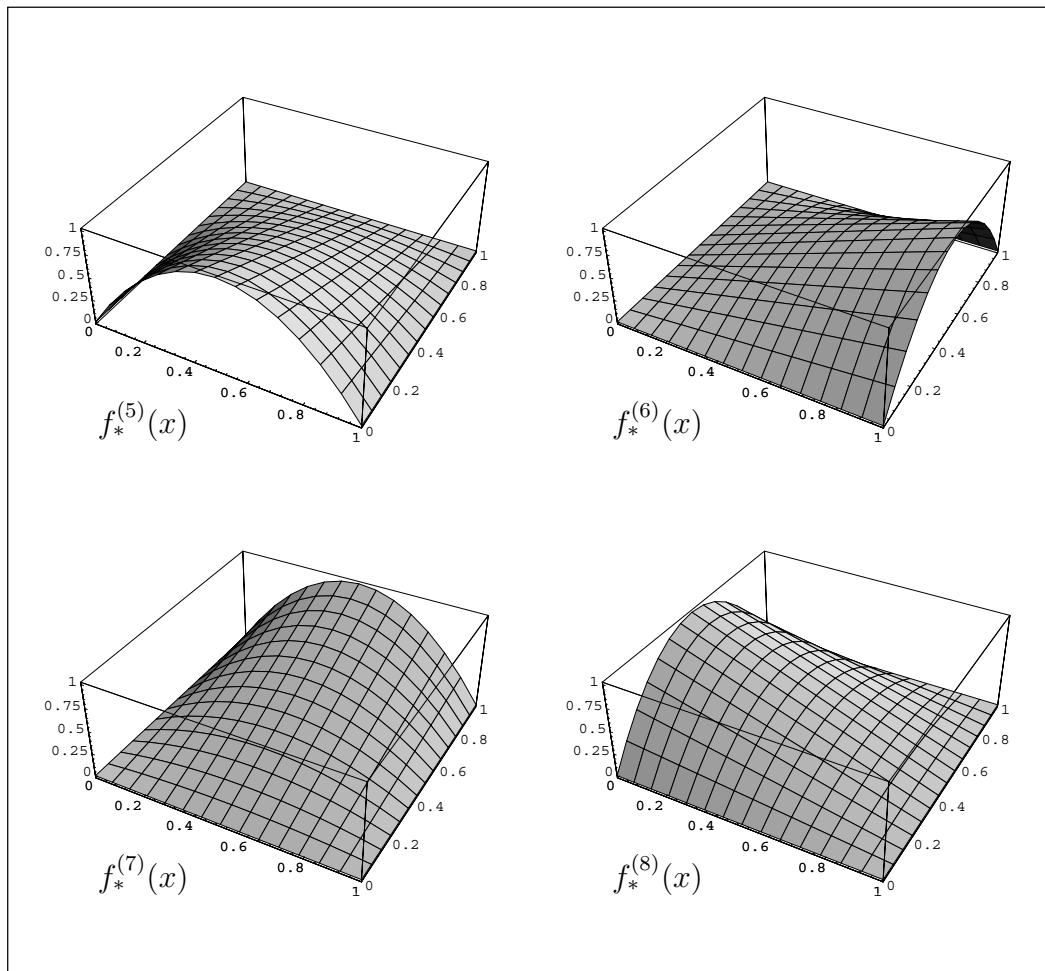


Figura 6.3: *Funções polinomiais utilizadas na aproximação dos parâmetros plásticos.*

A aproximação mais simples corresponde a considerar um valor constante para o incremento dos parâmetros plásticos em cada célula crítica, V_{cel} . Define-se neste caso:

$$P_*^{(1)} = 1.0 (V_{cel}) .$$

As funções de aproximação de grau superior podem ser geradas a partir de produtos das funções definidas em (6.13). Como estas possuem valores não-negativos em todo o seu intervalo de definição, o mesmo se passará com as funções assim obtidas.

As diferentes funções de aproximação são geradas de forma a *ponderar* a distribuição

das deformações plásticas no interior de cada célula plástica. Para que tal seja de facto assegurado, as diferentes funções devem ter um valor máximo numa zona diferente do intervalo de definição.

As expressões que permitem obter as funções de aproximação utilizadas na aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos são apresentadas no apêndice D.

6.4 Cálculo dos elementos das matrizes

6.4.1 Matriz de flexibilidade generalizada

Os elementos da matriz de flexibilidade generalizada, \mathbf{F} , são obtidos quando se substitui na equação (3.35) a definição apresentada para a matriz de aproximação \mathbf{S}_v . Obtém-se desta forma uma matriz simétrica, com α_v linhas e α_v colunas, e constituída por $n_x^2 \times n_x^2$ blocos de dimensão (3×3) . A equação genérica que permite calcular cada um destes blocos pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{F}_{ij,mn} = \mathbf{f} \iint W(i, x)W(m, x)W(j, y)W(n, y) dy dx . \quad (6.14)$$

Quando as funções utilizadas na aproximação do campo de tensões são ortogonais, torna-se imediato o cálculo do integral (6.14). Os coeficientes da matriz de flexibilidade generalizada podem ser obtidos directamente a partir da igualdade,

$$\mathbf{F}_{ij,mn} = l_x l_y \mathbf{f} \delta_{im} \delta_{jn} , \quad (6.15)$$

sem que haja a necessidade de se utilizarem quaisquer esquemas de integração numérica. É a situação que surge quando se utilizam séries de Walsh nas aproximações. Na definição (6.15), $l_x \{l_y\}$ representa o comprimento, segundo $x\{y\}$, do elemento finito em causa.

A equação (6.15) permite verificar que a matriz \mathbf{F} é uma matriz diagonal por blocos, pelo que a sua inversão é imediata. Os blocos constituintes de \mathbf{F}^{-1} podem ser obtidos através da igualdade,

$$\mathbf{F}_{ij,mn}^{-1} = \frac{1}{l_x l_y} \mathbf{f}^{-1} \delta_{im} \delta_{jn} . \quad (6.16)$$

Quando se utilizam sistemas de wavelets na aproximação do campo de tensões, a obtenção dos elementos da matriz de flexibilidade generalizada passa pelo cálculo numérico do integral definido em (6.14). Tal sucede porque, tal como foi explicado no capítulo 5, quando se restringe a análise a um determinado intervalo limitado, perde-se a condição de ortogonalidade entre as diferentes wavelets. Para efectuar a integração numérica utiliza-se um dos *métodos de quadratura* de Newton-Côtes, o *método dos trapézios* [103] ou o *método de Simpson* [103].

6.4.2 Operadores de compatibilidade

Para se estabelecerem as equações que permitem determinar os coeficientes do operador de compatibilidade no domínio, \mathbf{A}_v , substituem-se em (3.12) as definições dadas para as matrizes de aproximação \mathbf{S}_v e \mathbf{U}_v . Verifica-se que \mathbf{A}_v é uma matriz com α_v linhas e β_v colunas, sendo constituída por $n_x^2 \times n_v^2$ blocos de dimensão (3×2) .

Antes de se apresentarem as equações que permitem determinar explicitamente cada um destes blocos, convém verificar que o campo de forças induzido pela interpolação do campo de tensões no domínio é definido pela igualdade,

$$\mathbf{D} \mathbf{S}_{v_{ij}} = \partial(i, x)W(j, y)\mathbf{N}_x + W(i, x)\partial(j, y)\mathbf{N}_y, \quad (6.17)$$

onde \mathbf{N}_s denota uma matriz onde se reúnem as componentes, segundo a direcção s , do versor da normal exterior associada ao operador diferencial de equilíbrio \mathbf{D} , e onde

$$\partial(m, s) = \frac{\partial W(m, s)}{\partial s}.$$

Cada um dos blocos constituintes da matriz \mathbf{A}_v pode ser obtido através da igualdade:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{v_{ij, mn}} &= \mathbf{N}_x^t \iint \partial(i, x)W(m, x)W(j, y)W(n, y) dy dx \\ &+ \mathbf{N}_y^t \iint W(i, x)W(m, x)\partial(j, y)W(n, y) dy dx, \end{aligned} \quad (6.18)$$

obtida substituindo (6.17) em (3.12) e tendo em conta a definição (6.4).

Quando se utilizam funções de Walsh, o operador $\partial(m, s)$ representa a sequência de funções de Dirac obtida a partir da diferenciação de $W(m, s)$. Tirando partido da ortogonalidade das funções de aproximação, torna-se possível obter uma solução analítica para as integrações definidas em (6.18). Pode escrever-se:

$$\mathbf{A}_{v_{ij, mn}} = l_y \mathbf{N}_x^t \Delta_{im}^x \delta_{jn} + l_x \mathbf{N}_y^t \Delta_{jn}^y \delta_{im}, \quad (6.19)$$

onde

$$\Delta_{pq}^s = \int \partial(p, s)W(q, s) ds. \quad (6.20)$$

O cálculo do integral presente na definição (6.20) pode ser efectuado analiticamente, tal como se indica no apêndice D.

Substituindo as definições (6.2) e (6.7) na igualdade (3.15), obtém-se a expressão que permite calcular os elementos do operador de compatibilidade na fronteira, a matriz \mathbf{A}_γ . De acordo com o número de parâmetros de tensão no domínio e de deslocamentos na fronteira, \mathbf{A}_γ é uma matriz com α_v linhas e $n_{v\gamma}$ colunas, formada por $n_x^2 \times n_{v\gamma}$ blocos de dimensão (3×1) . Cada um destes blocos pode ser escrito na forma,

$$\mathbf{A}_{\gamma_{ij, k}}^{(s)} = \int \mathbf{N}_{dir}^t W(i, x)W(j, y)W(k, s) ds, \quad (6.21)$$

onde $W(k, s)$ representa, de uma forma genérica, as funções utilizadas para aproximar o campo de deslocamentos segundo a direcção dir ao longo do troço s da fronteira estática. Se $dir = 1\{2\}$, \mathbf{N}_{dir} corresponde à primeira{segunda} linha da matriz \mathbf{N}_s , que por seu lado reúne as componentes da normal unitária exterior ao troço de fronteira em causa.

Quando as funções de aproximação são ortogonais, a integração presente em (6.21) pode ser efectuada de uma forma simples e imediata. Obtém-se desta forma a equação

$$\mathbf{A}_{\gamma_{ij,k}}^{(s)} = l_s \delta_{mk} \mathbf{N}_{dir}^t \text{sign}(W(n, z))_s, \quad (6.22)$$

que permite calcular analiticamente cada uma das componentes da matriz \mathbf{A}_γ . Em (6.22), l_s representa o comprimento do lado, e $\text{sign}(W(n, z))_s$ corresponde ao sinal que a função $W(n, z)$ toma naquele mesmo troço de Γ_σ . Quando este último é perpendicular ao eixo $x\{y\}$, então $m = j\{i\}$, $n = i\{j\}$ e $z = x\{y\}$.

6.4.3 Operadores de equilíbrio

Para se conseguirem determinar as equações que permitem calcular os coeficientes do operador de equilíbrio no domínio, \mathbf{B}_v , devem substituir-se em (3.21) as definições dadas para as matrizes de aproximação \mathbf{U}_v e \mathbf{S}_v . Verifica-se que \mathbf{B}_v é uma matriz com β_v linhas e α_v colunas, formada por $n_v^2 \times n_x^2$ blocos de dimensão (2×3) .

O campo de deformações induzido pela aproximação do campo de deslocamentos no domínio é definido pela igualdade,

$$\mathbf{D}^* \mathbf{U}_{v_{ij}} = \partial(i, x) W(j, y) \mathbf{N}_x^t + W(i, x) \partial(j, y) \mathbf{N}_y^t. \quad (6.23)$$

Cada um dos blocos constituintes da matriz \mathbf{B}_v é obtido através da igualdade:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{v_{ij,mn}} &= \mathbf{N}_x \iint \partial(i, x) W(m, x) W(j, y) W(n, y) dy dx \\ &+ \mathbf{N}_y \iint W(i, x) W(m, x) \partial(j, y) W(n, y) dy dx, \end{aligned} \quad (6.24)$$

obtida substituindo (6.23) em (3.21) e tendo em conta a definição (6.2).

Quando se utilizam nas aproximações séries de Walsh torna-se possível obter uma solução analítica para as integrações definidas em (6.24). Utilizando a mesma notação que anteriormente, pode escrever-se:

$$\mathbf{B}_{v_{ij,mn}} = l_y \mathbf{N}_x \Delta_{im}^x \delta_{jn} + l_x \mathbf{N}_y \Delta_{jn}^y \delta_{im}. \quad (6.25)$$

A expressão que permite calcular os elementos do operador de equilíbrio na fronteira, a matriz \mathbf{B}_γ , é obtida substituindo as definições (6.4) e (6.12) na igualdade (3.22). De acordo com o número de parâmetros de deslocamentos no domínio e de tracções

na fronteira, \mathbf{B}_γ é uma matriz com β_v linhas e $n_{x\gamma}$ colunas, com $n_v^2 \times n_{x\gamma}$ blocos de dimensão (2×1) . Cada um destes blocos pode ser escrito na forma,

$$\mathbf{B}_{\gamma_{ij,k}}^{(s)} = \int \mathbf{I}_{dir}^t W(i, x)W(j, y)W(k, s) ds, \quad (6.26)$$

onde $W(k, s)$ representa, de uma forma genérica, as funções utilizadas para aproximar o campo de tracções segundo a direcção *dir* ao longo do troço s da fronteira cinemática. Na definição (6.26), o vector \mathbf{I}_{dir}^t corresponde à coluna *dir* da matriz identidade, \mathbf{I}_2 .

Quando as funções de aproximação são ortogonais, a integração presente em (6.26) pode ser efectuada de uma forma simples e imediata, obtendo-se a equação

$$\mathbf{B}_{\gamma_{ij,k}}^{(s)} = l_s \delta_{mk} \mathbf{I}_{dir}^t \text{sign}(W(n, z))_s, \quad (6.27)$$

que permite calcular analiticamente cada uma das componentes da matriz \mathbf{B}_γ . Em (6.27), l_s representa o comprimento do lado. Quando o troço da fronteira é perpendicular ao eixo $x\{y\}$, então $m = j\{i\}$, $n = i\{j\}$ e $z = x\{y\}$.

6.4.4 Matriz das normais

No cálculo da matriz das normais à superfície de cedência, \mathbf{N}_* , é necessário utilizar um esquema numérico para efectuar as integrações definidas em (3.40), qualquer que seja o tipo de função (wavelets ou funções de Walsh) seleccionado para modelar os campos estático e cinemático.

Há no entanto um caso particular em que se torna possível obter directamente o valor dos integrais envolvidos no cálculo dos coeficientes de \mathbf{N}_* . É quando se utilizam séries de Walsh e se consideram como críticas todas as células definidas de uma forma automática pelo grau das funções de aproximação.

As integrações numéricas podem ser efectuada através da aplicação do método dos trapézios ou, em alternativa, do método de Simpson.

6.4.5 Matriz de endurecimento plástico

Como as funções integrandas envolvidas na definição dos coeficientes da matriz de endurecimento plástico, \mathbf{H}_* , resultam de produtos envolvendo apenas funções polinomiais, torna-se possível obter soluções analíticas que permitem o cálculo directo dos integrais presentes em (3.44).

Em alternativa, o cálculo de tais coeficientes pode ser efectuada numericamente, utilizando-se para o efeito o método de integração de Gauss [103].

6.5 Definição de elementos com forma genérica

Até aqui apenas apenas têm sido considerados elementos retangulares, tanto na definição das funções de aproximação, quanto na obtenção das expressões que possibilitam o cálculo dos elementos das matrizes estruturais. Para definir elementos com forma mais geral, é seguido um procedimento semelhante ao utilizado na definição dos *elementos isoparamétricos* [202].

Define-se um *elemento mestre* quadrado onde são realizadas todas as aproximações. Na figura 6.4 encontra-se representado o elemento mestre utilizado, assim como o *referencial local* a ele associado.

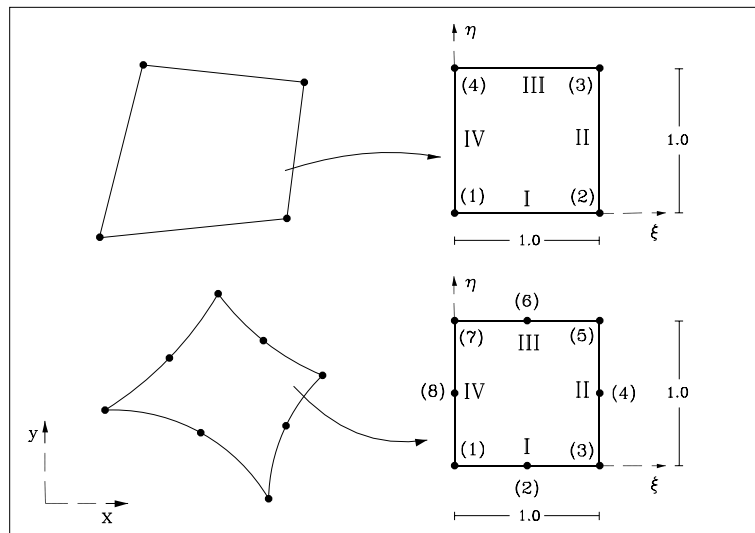


Figura 6.4: *Elemento mestre utilizado na definição de elementos com forma não-retangular.*

A geometria do elemento finito é aproximada utilizando-se para o efeito as funções de forma geralmente utilizadas na definição de elementos isoparamétricos de 4 nós e *serendipianos* de 8 nós [202]. A forma dos elementos *trapezoidais* e dos elementos *parabólicos* pode ser definida através da igualdade,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_{nos}} \Psi_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{Bmatrix}, \quad (6.28)$$

onde $x_{d,i}$ representa a coordenada do nó i segundo a direção d do referencial global. Em (6.28), N_{nos} representa o número de nós utilizado na definição da geometria do elemento. Quando $N_{nos} = 4\{8\}$, define-se um elemento *trapezoidal*{*parabólico*}, representando $\Psi_i(\xi, \eta)$ a *função de forma* associada ao nó i . Encontram-se apresentadas em anexo as expressões das funções de forma para os dois valores considerados de N_{nos} .

Todos os cálculos são efectuados ao nível do elemento mestre, havendo no entanto que ter em conta a *mudança de coordenadas* que permite relacionar os referenciais global e local. Todos os parâmetros e operadores que permitem caracterizar esta mudança de coordenadas podem ser encontrados no apêndice D. A notação utilizada segue de perto o disposto em [147].

É de referir que o elemento mestre indicado na figura 6.4 não é o que usualmente se considera nas formulações clássicas de elementos finitos [202]. Esta escolha baseia-se no facto das funções de Walsh e séries de wavelets unidimensionais se encontrarem definidas no intervalo $[0, 1]$. É no entanto possível reformular ligeiramente a forma através da qual são geradas as funções de aproximação e passar a basear a definição de elementos não-rectangulares na utilização do elemento mestre utilizado usualmente nas formulações de elementos finitos. Neste caso, a definição da mudança de referencial e os respectivos operadores podem ser encontrados na tese de Pereira [147].

A matriz jacobiana associada à mudança de referencial pode ser apresentada genericamente na forma,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Com base nesta transformação de coordenadas, é possível passar a escrever no referencial local as integrações presentes na definição dos elementos dos diferentes operadores estruturais. Todas as integrações no domínio podem ser reescritas na forma:

$$\iint f(x_1, x_2) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1(\xi, \eta), x_2(\xi, \eta)) |\mathbf{J}| d\eta d\xi.$$

Como exemplo, refira-se que a matriz de flexibilidade generalizada passa a ser escrita na forma

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{f} \mathbf{S}_v dV = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{S}_v^t \mathbf{f} \mathbf{S}_v |\mathbf{J}| d\eta d\xi. \quad (6.30)$$

A equação (D.9), apresentada no apêndice D, define o jacobiano da transformação para o caso de elementos com forma trapezoidal. A substituição de (D.9) em (6.30) permite obter a equação que define cada um dos blocos constituintes da matriz \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}_{ij,mn} = \mathbf{f} \int_0^1 \int_0^1 W(i, \xi) W(m, \xi) W(j, \eta) W(n, \eta) (J_0 + J_\xi \xi + J_\eta \eta) d\eta d\xi. \quad (6.31)$$

Quando se utilizam funções de Walsh, continua a ser possível obter uma expressão analítica que possibilita o cálculo directo de cada um dos elementos da matriz de flexibilidade. Para tal, há que decompor a integração presente em (6.31) em três parcelas. Obtém-se,

$$\mathbf{F}_{ij,mn} = J_0 \mathbf{f} \int_0^1 \int_0^1 W(i, \xi) W(m, \xi) W(j, \eta) W(n, \eta) d\eta d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + J_\xi \mathbf{f} \int_0^1 \int_0^1 W(i, \xi) W(m, \xi) W(j, \eta) W(n, \eta) \left(\sum_{k=1}^{n_x} c_{k\xi} W(k, \xi) \right) d\eta d\xi \\
& + \mathbf{f} J_\eta \int_0^1 \int_0^1 W(i, \xi) W(m, \xi) W(j, \eta) W(n, \eta) \left(\sum_{o=1}^{n_x} c_{o\eta} W(o, \eta) \right) d\eta d\xi,
\end{aligned}$$

onde $c_{k\xi}$ e $c_{o\eta}$ representam os coeficientes da expansão em série de Walsh das funções ξ e η , respectivamente. Escrevendo $\bar{m} = m \oplus k$ e $\bar{n} = n \oplus o$, a equação anterior pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{F}_{ij,mn} = J_0 \mathbf{f} \delta_{im} \delta_{jn} + \sum_{k=1}^{n_x} c_{k\xi} J_\xi \mathbf{f} \delta_{i\bar{m}} \delta_{jn} + \sum_{o=1}^{n_x} c_{o\eta} J_\eta \mathbf{f} \delta_{im} \delta_{j\bar{n}}. \quad (6.32)$$

Esta igualdade permite verificar que quando se consideram elementos não rectangulares, a matriz de flexibilidade perde esparsidade. Este aspecto será salientado quando da apresentação de exemplos numéricos.

Embora não se apresentem aqui as expressões, este raciocínio pode ser facilmente generalizado para o caso em que se utilizam elementos curvos, para os quais o jacobiano se define através da equação (D.11). Neste caso, o cálculo da matriz \mathbf{F} passa pela decomposição da função integranda de (6.30) em onze parcelas diferentes.

Também o operador diferencial de equilíbrio, \mathbf{D} , pode ser escrito no referencial local. Tem-se [147]:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{D}', \quad (6.33)$$

onde, para o caso particular das placas, se pode escrever:

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} x_{2,\eta} & 0 & -x_{1,\eta} \\ 0 & -x_{1,\eta} & x_{2,\eta} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} x_{2,\xi} & 0 & -x_{1,\xi} \\ 0 & -x_{1,\xi} & x_{2,\xi} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

O cálculo dos elementos das matrizes em cuja definição intervem o operador diferencial de equilíbrio pode ser efectuado no referencial local, desde que se tenha em conta a definição (6.33). Como exemplo, refira-se o caso do operador de compatibilidade no domínio, que pode passar a ser escrito na forma,

$$\mathbf{A}_v = \int (\mathbf{D}\mathbf{S}_v)^t \mathbf{U}_v dV = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{|\mathbf{J}|} (\mathbf{D}'\mathbf{S}_v)^t \mathbf{U}_v |\mathbf{J}| d\eta d\xi. \quad (6.34)$$

O campo de tracções induzido pela aproximação das tensões no domínio pode ser calculado através de:

$$\mathbf{D}' \mathbf{S}_{v_{ij}} = \partial(i, \xi) W(j, \eta) \mathbf{N}'_\xi - W(i, \xi) \partial(j, \eta) \mathbf{N}'_\eta, \quad (6.35)$$

onde se tem, para o caso dos elementos trapezoidais,

$$\mathbf{N}'_\xi = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \gamma_2 \xi & 0 & -(\alpha_1 + \gamma_1 \xi) \\ 0 & -(\alpha_1 + \gamma_1 \xi) & \alpha_2 + \gamma_2 \xi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}'_{\eta} = \begin{bmatrix} \beta_2 + \gamma_2\eta & 0 & -(\beta_1 + \gamma_1\eta) \\ 0 & -(\beta_1 + \gamma_1\eta) & \beta_2 + \gamma_2\eta \end{bmatrix}.$$

Cada um dos blocos constituintes da matriz \mathbf{A}_v pode ser então obtido através da igualdade (6.36), obtida substituindo (6.35) e (6.4) em (6.34):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{v_{ij,mn}} &= \int_0^1 \int_0^1 \partial(i, \xi)W(j, \eta)W(m, \xi)W(n, \eta)\mathbf{N}'_{\xi} d\eta d\xi \\ &- \int_0^1 \int_0^1 W(i, \xi)\partial(j, \eta)W(m, \xi)W(n, \eta)\mathbf{N}'_{\eta} d\eta d\xi, \end{aligned} \quad (6.36)$$

Para facilitar a apresentação da expressão que permite obter directamente cada um dos elementos do operador de compatibilidade no domínio, considera-se que cada uma das matrizes \mathbf{N}'_{ξ} e \mathbf{N}'_{η} se encontra subdividida numa parcela constante e numa outra linear. Define-se, deste modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'_{\xi} &= \mathbf{N}'_{c\xi} + \mathbf{N}'_{l\xi}\xi = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & -\gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \xi, \\ \mathbf{N}'_{\eta} &= \mathbf{N}'_{c\eta} + \mathbf{N}'_{l\eta}\eta = \begin{bmatrix} \beta_2 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & -\beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & -\gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \eta. \end{aligned}$$

Considerando de novo a expansão em série de Walsh das funções ξ e η , as igualdades $\bar{m} = m \oplus k$ e $\bar{n} = n \oplus o$ e tendo em conta a definição (6.20), a equação (6.36) pode ser escrita na forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{v_{ij,mn}} &= (\mathbf{N}'_{c\xi})^t \Delta_{im}^{\xi} \delta_{jn} + (\mathbf{N}'_{l\xi})^t \sum_{k=1}^{n_x} c_{k\xi} \Delta_{i\bar{m}}^{\xi} \delta_{jn} \\ &- (\mathbf{N}'_{c\eta})^t \Delta_{jn}^{\xi} \delta_{im} + (\mathbf{N}'_{l\eta})^t \sum_{o=1}^{n_x} c_{o\eta} \Delta_{j\bar{n}}^{\xi} \delta_{im}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Falta apenas redefinir os operadores obtidos a partir de integrações efectuadas ao longo da fronteira de cada elemento. As normais exteriores a cada um dos troços que compõem a fronteira podem ser definidas a partir da igualdade:

$$\begin{Bmatrix} n_{x1} \\ n_{x2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} |\mathbf{J}| \begin{Bmatrix} n_{\xi} \\ n_{\eta} \end{Bmatrix}, \quad (6.38)$$

onde n_{ξ} e n_{η} representam as componentes da normal exterior unitária de cada um dos quatro troços em que considera dividida a fronteira do elemento mestre. A definição destas normais pode ser encontrada no apêndice D.

Como exemplo, verifica-se agora que o operador de compatibilidade na fronteira, matriz \mathbf{A}_{γ} , se pode escrever na forma:

$$\mathbf{A}_{\gamma} = \int (\mathbf{N}\mathbf{S}_v)^t \mathbf{U}_{\gamma} d\Gamma_{\sigma} = \int_0^1 (\mathbf{N}_{sg}\mathbf{S}_v)^t \mathbf{U}_{\gamma} d\zeta, \quad (6.39)$$

onde,

$$\mathbf{N}_{sg} = \begin{bmatrix} n_{x1} & 0 & n_{x2} \\ 0 & n_{x2} & n_{x1} \end{bmatrix}.$$

Cada um dos blocos constituintes de \mathbf{A}_γ pode ser escrito na forma,

$$\mathbf{A}_{\gamma_{ij,k}}^{(s)} = \int \mathbf{N}_{sg,dir}^t W(i, x) W(j, y) W(k, \zeta) d\zeta, \quad (6.40)$$

onde $W(k, \zeta)$ representa, de uma forma genérica, as funções utilizadas para aproximar o campo de deslocamentos segundo a direcção *dir* ao longo do troço *s* da fronteira estática. Se $dir = 1\{2\}$, $\mathbf{N}_{sg,dir}$ corresponde à primeira{segunda} linha da matriz \mathbf{N}_{sg} .

No caso em que os elementos são trapezoidais, as componentes de \mathbf{N}_{sg} são constantes para cada troço da fronteira, pelo que se pode escrever a igualdade

$$\mathbf{A}_{\gamma_{ij,k}}^{(s)} = \delta_{mk} \mathbf{N}_{sg,dir}^t \text{sign}(W(n, z))_s, \quad (6.41)$$

que permite calcular analiticamente cada uma das componentes da matriz \mathbf{A}_γ , sempre que se utilizem séries de Walsh. Quando o troço da fronteira estática é perpendicular ao eixo $\xi\{\eta\}$, $m = j\{i\}$, $n = i\{j\}$ e $z = \xi\{\eta\}$.

Se se utilizarem elementos curvos, as componentes da normal exterior deixam de ser constantes, passando a variar ao longo de cada troço. Para se poder então obter uma fórmula directa para o cálculo dos elementos de \mathbf{A}_γ , deve utilizar-se um procedimento em tudo análogo ao descrito anteriormente e que passa primeiro pela expansão da função ξ (ou η) em série e depois pela exploração da ortogonalidade das funções de Walsh.

6.6 Dimensão e esparsidade das matrizes

Uma vez definidas as equações que permitem calcular os elementos de cada uma das matrizes estruturais, importa agora ilustrar a sua aplicação na obtenção dos sistemas governativos dos modelos híbrido-mistos. Importante será verificar a dimensão e estrutura destes sistemas, assim como a eficiência com que podem ser obtidos.

Para simplificar a apresentação e destacar alguns dos aspectos essenciais, considera-se a aplicação do modelo de equilíbrio ao estudo de problemas de placas em regime elástico. É analisada a consola quadrada representada na figura 6.5. As discretizações testadas envolvem a utilização das três malhas de elementos finitos representadas na figura 6.6. Assume-se que se trata de um estado plano de tensão e considera-se $E = 1$ e $\nu = 0.3$.

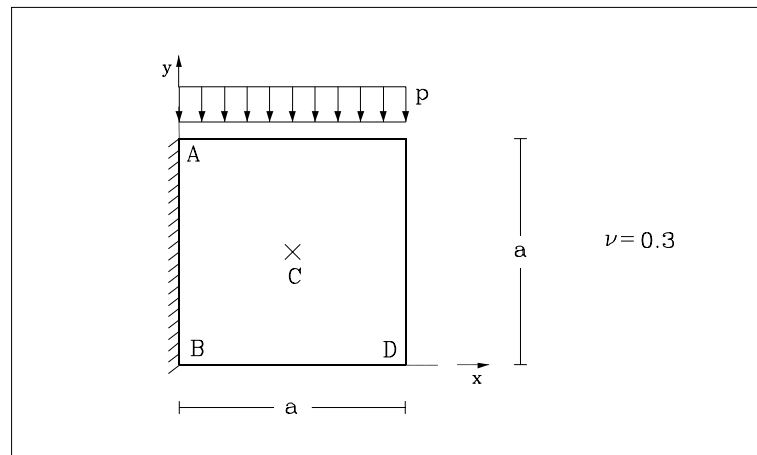


Figura 6.5: *Consola quadrada.*

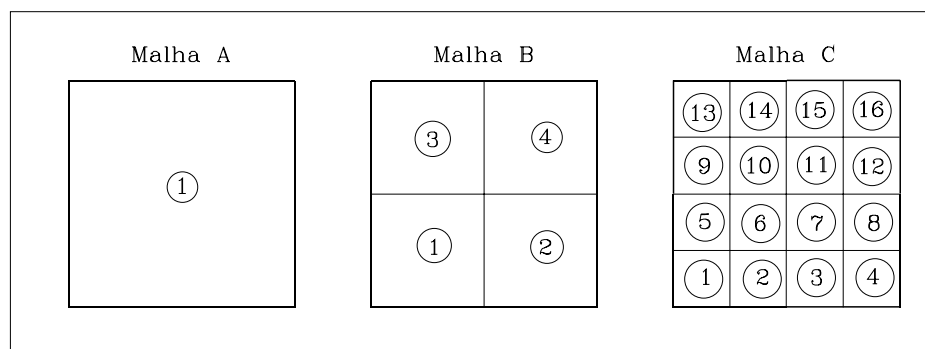


Figura 6.6: *Malhas utilizadas na análise.*

6.6.1 Aproximação com funções de Walsh

As igualdades (6.15), (6.19) e (6.22) permitem prever que as diferentes matrizes estruturais sejam muito esparsas. Por outro lado, o facto de tais equações se basearem na definição de operações muito simples, permite antever um tempo de montagem muito reduzido.

A natureza das funções de Walsh obriga a que se tenha que utilizar um número elevado de funções (graus de liberdade) nas aproximações dos diferentes campos. É de esperar que a dimensão dos sistemas governativos cresça rapidamente à medida que se refina a solução através da utilização de um número crescente de termos nas séries consideradas.

O grau das funções de Walsh é aqui definido em função do parâmetro p . Considera-se que:

$$\begin{aligned}n_x &= 2^p, \\n_v &= 2^{p-1}, \\n_{v\gamma} &= 2^p - 1.\end{aligned}$$

Como se verá nos capítulos seguintes, esta é a combinação que se considera usualmente na selecção do grau das funções de Walsh a utilizar nas aproximações. Esta escolha é condicionada pelo desejo de se evitarem modos espúrios e, por consequência, de se obterem sistemas governativos sem equações linearmente dependentes.

Na tabela 6.1 são apresentados, para o caso da discretização A e para os diferentes valores de p , o número de graus de liberdade, n_{gl} , e o tempo de CPU (em segundos) necessário à montagem do sistema governativo, escrito na forma não-condensada (3.53). É apresentado ainda para cada caso o número de coeficientes não-nulos armazenados, n_{nz} , e o índice de esparsidade, η , definido como o quociente entre o número de elementos nulos e o número total de elementos na matriz. Como o sistema é simétrico, apenas se armazenam os elementos pertencentes ao triângulo superior da matriz.

A análise da tabela 6.1 permite verificar a rapidez com que é formado o sistema de equações. Os tempos aí apresentados englobam as operações de pré-processamento, a geração das funções de Walsh e o cálculo dos elementos de cada um dos operadores estruturais. Observa-se por outro lado que o número de graus de liberdade cresce muito rapidamente, atingindo mesmo valores significativamente elevados. É no entanto importante verificar que o índice de esparsidade toma sempre valores extremamente elevados. Este facto permite uma economia significativa em termos de memória necessária para efectuar o armazenamento e possibilita a utilização de algoritmos bastante eficientes na resolução dos sistemas de equações lineares, como se verá no capítulo seguinte.

Nas tabelas 6.2 e 6.3 apresenta-se a mesma informação, obtida agora para o caso das discretizações envolvendo a utilização das malhas B e C, respectivamente. Continua

p	2	3	4	5	6
$T(s)$	0.02	0.02	0.03	0.05	0.30
n_{gl}	74	266	986	3770	14714
n_{nz}	160	768	3840	20992	128000
η	0.950328	0.981005	0.992890	0.997262	0.998874

Tabela 6.1: *Caracterização do sistema não-condensado; malha A.*

a ser evidente a rapidez com que é montado o sistema de equações na forma (3.53), mesmo quando o número de graus de liberdade atinge valores muito elevados, como é por exemplo o caso da discretização C com $p = 6$.

p	2	3	4	5	6
$T(s)$	0.02	0.03	0.07	0.19	1.18
n_{gl}	284	1036	3884	14956	58604
n_{nz}	688	3296	16320	87936	528128
η	0.985320	0.994574	0.998040	0.999269	0.999707

Tabela 6.2: *Caracterização do sistema não-condensado; malha B.*

p	2	3	4	5	6
$T(s)$	0.05	0.08	0.16	0.74	4.70
n_{gl}	1112	4088	15416	59576	233912
n_{nz}	2848	13632	67200	359680	2144768
η	0.996015	0.998552	0.999486	0.999811	0.999925

Tabela 6.3: *Caracterização do sistema não-condensado; malha C.*

Observa-se por outro lado que o índice de esparsidade continua a apresentar valores muito próximos da unidade, qualquer que seja o caso considerado. Na figura 6.7 encontra-se representada, para cada uma das discretizações testadas, a variação do índice de esparsidade com o valor do parâmetro p . É interessante verificar que para um mesmo valor de p , o valor de η vai aumentando à medida que aumenta o número de elementos finitos considerado. Este facto é facilmente explicável se se tiver em conta que quando existe na malha mais do que um elemento há a considerar, para além dos coeficientes nulos que resultam da aplicação das definições (6.15), (6.19) e (6.22), os valores nulos que advêm da quase total independência entre os operadores estruturais de elementos diferentes.

Na figura 6.8 representa-se a distribuição dos coeficientes não-nulos da matriz dos coeficientes quando se considera a discretização B com $p = 2$. Esta figura foi obtida através da utilização do *package* SMMS (*Sparse Matrix Manipulation System*) desenvolvido por Alvarado [2]. Zonas a negro correspondem a elementos não nulos, enquanto que a região a branco denota coeficientes nulos. É bem visível o bloco diagonal que corresponde à matriz de flexibilidade generalizada, \mathbf{F} .

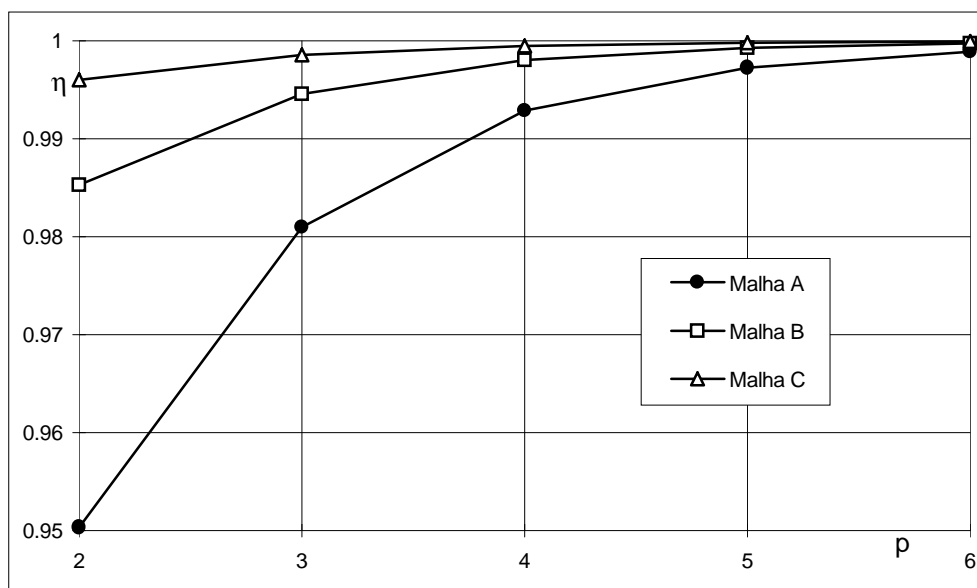


Figura 6.7: *Evolução do índice de esparsidade.*

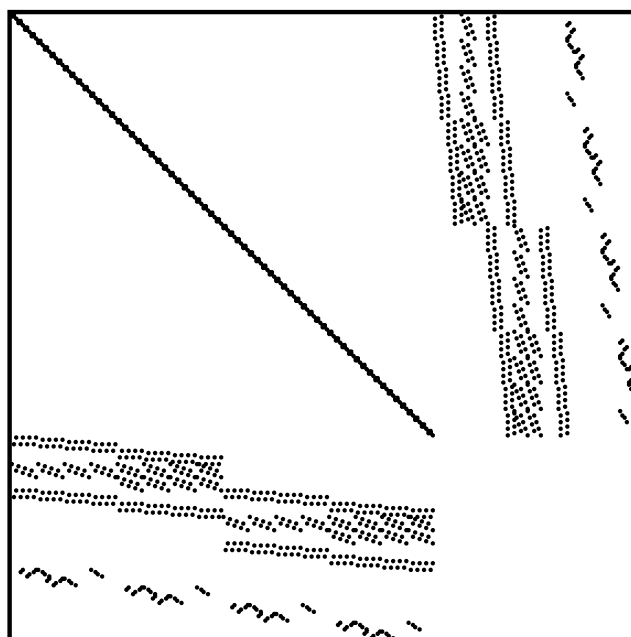


Figura 6.8: *Forma não-condensada da matriz do sistema; malha B e $p = 2$.*

p	2	3	4	5	6
$n_{nz}(\mathbf{F})$	64	256	1024	4096	16384
$n_{nz}(\mathbf{A}_\gamma)$	72	336	1440	5952	24192
$n_{nz}(\mathbf{A}_v)$	24	176	1376	10944	87424

Tabela 6.4: *Coefficientes não nulos em cada operador estrutural; malha A.*

Interessa agora verificar qual dos operadores estruturais é o maior responsável pelo aumento do número de coeficientes não-nulos no sistema governativo. Para o determinar, basta analisar o conteúdo da tabela 6.4 onde, para a malha A e para cada um dos valores de p , se apresenta o número de coeficientes não-nulos existentes em cada uma das matrizes \mathbf{F} , \mathbf{A}_γ e \mathbf{A}_v . Verifica-se que o número de coeficientes existentes no operador de compatibilidade no domínio aumenta muito rapidamente à medida que se incrementa o valor de p . Observa-se mesmo que a partir de um determinado grau ($p = 5$), é o número de coeficientes em \mathbf{A}_v que condiciona fortemente o número total de elementos armazenados. Como consequência deste facto, verifica-se que de entre um conjunto de discretizações envolvendo um número aproximadamente igual de graus de liberdade, a que conduz a um menor número de coeficientes a armazenar é a que está associada a um grau p menor. Para ilustrar esta afirmação, considerem-se de entre os exemplos apresentados nas tabelas 6.1, 6.2 e 6.3 aqueles cujo número de graus de liberdade se aproxima de 15000. Na tabela 6.5 listam-se os três casos assim obtidos, o primeiro respeitante à malha A com $p = 6$ e os restantes à malhas B e C, com $p = 5$ e $p = 4$, respectivamente. É imediato verificar que é a discretização que corresponde à utilização de $p = 4$ aquela que conduz a um menor número de coeficientes não-nulos.

	A	B	C
p	6	5	4
n_{gl}	14714	14956	15416
n_{nz}	128000	87936	67200

Tabela 6.5: *Influência do valor de p no número de coeficientes não-nulos.*

Quando se escreve o sistema governativo na forma condensada (3.57), a dimensão da matriz dos coeficientes vem substancialmente reduzida, mas em contrapartida o índice de esparsidade é também significativamente menor. Estas ideias são confirmadas pela análise das tabelas 6.6, 6.7e 6.8 onde se apresenta, para cada uma das discretizações testadas, o número de graus de liberdade envolvido na análise, n_{gl} , a dimensão do sistema de equações escrito na forma condensada, N , e o respectivo índice de esparsidade, η .

p	2	3	4	5	6
n_{gl}	74	266	986	3770	14714
N	18	42	90	186	378
η	0.327160	0.277778	0.277778	0.278125	0.280647

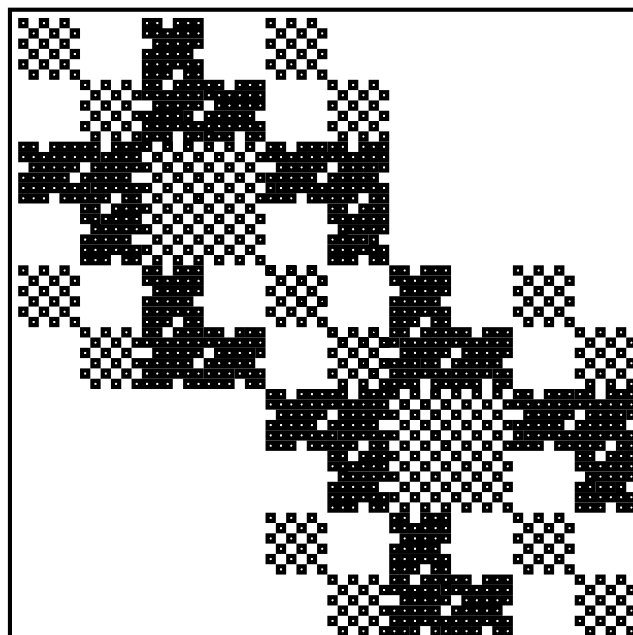
Tabela 6.6: *Caracterização do sistema condensado; malha A.*

Na figura 6.9 representa-se a distribuição dos coeficientes não-nulos na matriz dos coeficientes que se obtém quando se escreve a forma condensada do sistema governativo para a malha B e se considera $p = 2$. Comparando com a figura 6.8, resulta bem visível a alteração introduzida na estrutura da matriz dos coeficientes. É no

p	2	3	4	5	6
n_{gl}	284	1036	3884	14956	58604
N	60	140	300	620	1260
η	0.676667	0.650000	0.650000	0.650187	0.655314

Tabela 6.7: *Caracterização do sistema condensado; malha B.*

p	2	3	4	5	6
n_{gl}	1112	4088	15416	59576	233912
N	216	504	1080	2232	4536
η	0.887688	0.878064	0.878086	0.878154	0.880005

Tabela 6.8: *Caracterização do sistema condensado; malha C.*Figura 6.9: *Forma condensada da matriz do sistema; malha B e $p = 2$.*

entanto importante não esquecer que a eficiência dos algoritmos utilizados no armazenamento e resolução dos sistemas esparsos depende fundamentalmente do número de coeficientes armazenados e não da dimensão da matriz. Por tal motivo, não é possível garantir *a priori* que a forma condensada do sistema de equações conduza a tempos de resolução inferiores aos tempos obtidos com a forma não-condensada.

Para verificar o que sucede em termos de estrutura e esparsidade do sistema de equações e tempo de cálculo dos operadores estruturais quando os elementos finitos deixam de ser retangulares, considerem-se as duas malhas de elementos finitos representadas na figura 6.10.

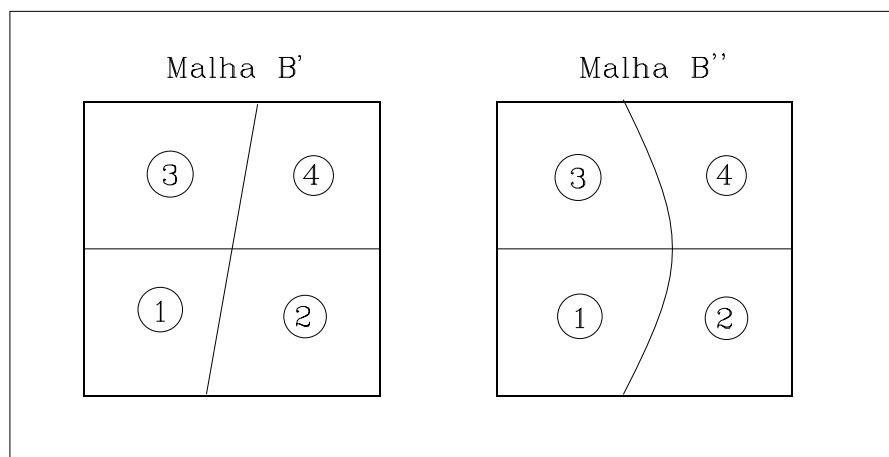


Figura 6.10: Malhas envolvendo a utilização de elementos não retangulares.

Uma vez que o número de elementos considerado é o mesmo que no caso da malha B, o número de graus de liberdade será exactamente o mesmo. As expressões (6.30), (6.34) e (6.39) deixam antever no entanto que o número de coeficientes não nulos aumente significativamente. Também o processo de determinação das matrizes estruturais deverá ser mais moroso, uma vez que a aplicação destas definições envolve um volume de cálculo bastante superior. Tendo em conta as mudanças de variáveis definidas atrás e cujos detalhes se apresentam no apêndice D, é de prever que o aumento do número dos coeficientes e do tempo de cálculo seja ainda mais gravoso no caso dos elementos parabólicos.

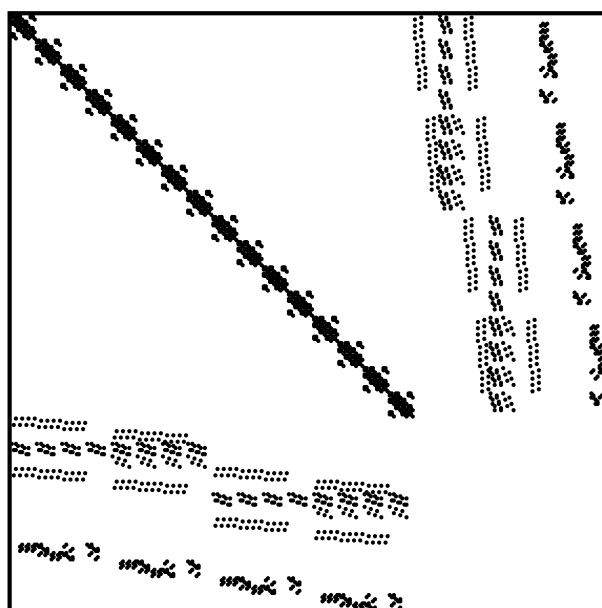
Estas ideias são de imediato confirmadas pela análise das tabelas 6.9 e 6.10, onde se listam os tempos de cálculo, os índices de esparsidade e o número de coeficientes armazenados referentes à utilização das malhas B' e B'', respectivamente.

Estas tabelas permitem constatar que a eficiência com que é calculada a matriz do sistema é fortemente condicionada pela existência de elementos não-retangulares. Veja-se o que acontece nos casos em que se tem $p = 5$ e $n_{gl} = 14956$. Quando a malha é constituída apenas por elementos retangulares, o tempo de montagem do sistema é de 0.19 segundos, passando a ser igual a 16.04s e 170.38s quando existem elementos com forma trapezoidal e parabólica, respectivamente.

p	2	3	4	5	6
$T(s)$	0.02	0.10	0.91	16.04	281.57
n_{gl}	284	1036	3884	14956	58604
n_{nz}	1232	6816	38080	225408	1439488
η	0.971831	0.988014	0.995155	0.998040	0.999176

Tabela 6.9: Caracterização do sistema; elementos com forma trapezoidal; malha B' .

p	2	3	4	5
$T(s)$	0.09	0.43	7.10	170.38
n_{gl}	284	1036	3884	14956
n_{nz}	3000	22920	164872	1190848
η	0.927990	0.958006	0.978345	0.989407

Tabela 6.10: Caracterização do sistema; elementos curvos; malha B'' .Figura 6.11: Forma não-condensada da matriz do sistema; malha B' e $p = 2$.

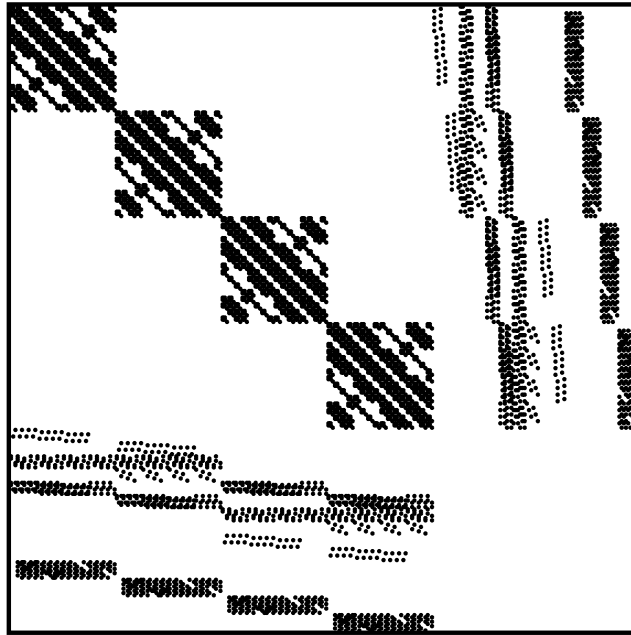


Figura 6.12: *Forma não-condensada da matriz do sistema; malha B'' e $p = 2$.*

Também o índice de esparsidade é afectado pela alteração da forma dos elementos finitos. Para os mesmos casos referidos no parágrafo anterior, o número de coeficientes não-nulos a armazenar passa de 87936, quando se consideram apenas elementos rectangulares, para 225408 e 1190848 quando se tomam elementos trapezoidais e parabólicos, respectivamente.

As figuras 6.11 e 6.12 ilustram a estrutura das matrizes dos coeficientes, quando para as malhas B' e B'' se utilizam funções de Walsh de grau $p = 2$. A comparação com a figura 6.8 permite realçar a visível diminuição de esparsidade, em especial nas matrizes \mathbf{A}_v e \mathbf{A}_γ .

6.6.2 Aproximação com wavelets

Existem duas diferenças essenciais que distinguem as aproximações com séries de Walsh e wavelets. Por um lado, a natureza e propriedades das wavelets fazem com que o número de graus de liberdade que é necessário considerar para obter um nível de precisão semelhante, seja significativamente inferior. Este facto leva a que a dimensão dos sistemas governativos seja muito menor. Por outro lado, o desaparecimento da condição de ortogonalidade implica uma diminuição da esparsidade do sistema governativo. É também de esperar um aumento do tempo de cálculo dos coeficientes das matrizes estruturais, uma vez que a sua determinação passa necessariamente pela aplicação de procedimentos numéricos nas integrações.

Para avaliar a influência destes factores, são testadas duas famílias de wavelets, a primeira com $N = 5$ e a segunda com $N = 10$. O grau das funções de aproximação

é definido pelo parâmetro $p_N^{(w)}$, igual ao *parâmetro de escala* das funções de escala, ${}_N\phi_{j,k}(x)$, utilizadas na aproximação do campo de tensões no domínio. Os campos de deslocamentos no domínio e na fronteira estática são aproximados com a utilização de funções de escala com um *parâmetro de refinamento* igual a $p_N^{(w)} - 1$. O número de funções utilizado na aproximação está definido na tabela 6.11.

$p_5^{(w)}$	1	2	3	$p_{10}^{(w)}$	1	2	3
n_x	6	8	12	n_x	8	10	14
n_v	5	6	8	n_v	7	8	10
$n_{v\gamma}$	5	6	8	$n_{v\gamma}$	7	8	10

Tabela 6.11: *Número de wavelets envolvido nas aproximações.*

Nas tabelas 6.12, 6.13 e 6.14 apresentam-se os tempos de montagem, a dimensão e a esparsidade dos sistemas governativos obtidos quando se utilizam na análise da consola da figura 6.5 as malhas representadas na figura 6.6. Em relação aos valores obtidos com a utilização de funções de Walsh, observa-se uma diminuição do número de graus de liberdade, acompanhada por um significativo decréscimo no valor do índice de esparsidade. Esta ideia é reforçada pela análise da figura 6.13, onde se representa a estrutura da matriz dos coeficientes obtida quando se considera a malha B com $p_5^{(w)} = 1$.

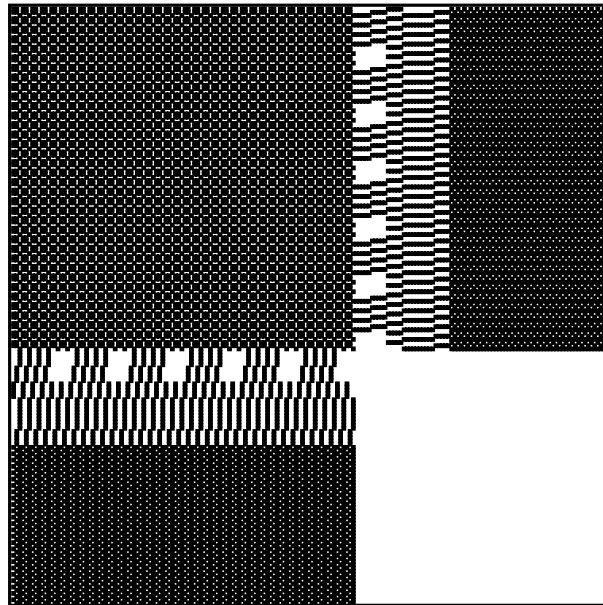


Figura 6.13: *Forma não-condensada da matriz do sistema; malha B e $p_5^{(w)} = 1$.*

O valor de T engloba os tempos necessários para efectuar as operações de pré-processamento, para gerar as wavelets e calcular os valores dos elementos dos operadores estruturais. Refira-se que em qualquer um dos casos se geram as wavelets em $2^{14} = 16384$ pontos diádicos situados no intervalo $[0, 1]$. As integrações são efectuadas com recurso ao método dos trapézios onde se utilizam nos cálculos os mesmos 16384 pontos.

$p_5^{(w)}$	1	2	3	$p_{10}^{(w)}$	1	2	3
$T(s)$	1.01	1.07	1.19	$T(s)$	3.37	3.15	3.34
n_{gl}	188	300	608	n_{gl}	332	476	848
n_{nz}	7854	21162	56170	n_{nz}	25344	54910	180080
η	0.558624	0.531867	0.697271	η	0.541878	0.516630	0.499972

Tabela 6.12: *Caracterização do sistema não-condensado; malha A.*

$p_5^{(w)}$	1	2	3	$p_{10}^{(w)}$	1	2	3
$T(s)$	1.05	1.07	1.30	$T(s)$	3.74	3.38	3.88
n_{gl}	732	1176	2400	n_{gl}	1300	1872	3352
n_{nz}	31896	85016	219448	n_{nz}	102720	221560	717296
η	0.881752	0.877609	0.924103	η	0.878892	0.873895	0.872530

Tabela 6.13: *Caracterização do sistema não-condensado; malha B.*

Tal como no caso dos modelos baseados na utilização de séries de Walsh, a dimensão da matriz dos coeficientes diminui substancialmente quando se escreve o sistema governativo na forma condensada (3.57). Nas tabelas 6.15, 6.16 e 6.17 apresentam-se, para cada uma das discretizações consideradas, o número total de graus de liberdade e a dimensão do sistema condensado.

Verifica-se que o índice de esparsidade diminui drasticamente. Para o caso da malha A, a matriz dos coeficientes do sistema governativo é mesmo uma matriz cheia. A influência negativa deste factor é no entanto atenuada por ser pequena a dimensão do sistema de equações resultante.

Importa por último verificar o que sucede quando se consideram na análise elementos não-rectangulares. As tabelas 6.18 e 6.19 permitem verificar que nos modelos em que se utilizam wavelets, a rapidez com que é estabelecido o sistema governativo e em especial o seu índice de esparsidade não são tão sensíveis à forma dos elementos quanto os modelos baseados na utilização de séries de Walsh. Tome-se, como exemplo, as discretizações em que se considera $p_{10}^{(w)} = 2$. Quando se utilizam apenas elementos rectangulares, são necessários 3.38 segundos para calcular os 221560 coeficientes não nulos presentes na matriz dos coeficientes do sistema governativo. Quando se utilizam elementos trapezoidais (malha B'), o número de coeficientes a armazenar é de 226680, sendo dispendidos 14.63 segundos na sua obtenção. Fi-

$p_5^{(w)}$	1	2	3	$p_{10}^{(w)}$	1	2	3
$T(s)$	1.20	1.52	2.31	$T(s)$	3.82	4.01	19.12
n_{gl}	2888	4656	9536	n_{gl}	5144	7424	13328
n_{nz}	128544	343200	907264	n_{nz}	413568	890080	2901824
η	0.969383	0.968479	0.980122	η	0.968857	0.967789	0.967381

Tabela 6.14: *Caracterização do sistema não-condensado; malha C.*

$p_5^{(w)}$	1	2	3	$p_{10}^{(w)}$	1	2	3
n_{gl}	188	300	608	n_{gl}	332	476	848
N	30	36	48	N	42	48	60
η	0.0000	0.0000	0.0000	η	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 6.15: *Caracterização do sistema condensado; malha A.*

$p_5^{(w)}$	1	2	3	$p_{10}^{(w)}$	1	2	3
n_{gl}	732	1176	2400	n_{gl}	1300	1872	3352
N	100	120	160	N	140	160	200
η	0.5400	0.5400	0.5400	η	0.5400	0.5400	0.5400

Tabela 6.16: *Caracterização do sistema condensado; malha B.*

nalmente, quando se utilizam elementos parabólicos para efectuar exactamente a mesma análise, são necessários apenas 16.31 segundos para determinar os 226710 coeficientes não-nulos.

6.7 Observações finais

Antes de se concluir este capítulo, convém resumir e sistematizar algumas das observações e comentários feitos ao longo da apresentação.

A utilização de funções ortogonais de Walsh permite obter soluções analíticas para os integrais presentes nas definições dos operadores estruturais que regem a resposta do modelo discreto. Como consequência, o processo de cálculo e montagem do sistema governativo é muito eficaz, estando associado a tempos de CPU bastante reduzidos.

A natureza das funções de Walsh implica que seja necessário utilizar um número elevado de graus de liberdade nas aproximações. No entanto, graças à ortogonalidade, é possível verificar que em cada operador estrutural é reduzido o número de coeficientes não-nulos. As aproximações com séries de Walsh são então caracterizadas por sistemas governativos de grandes dimensões, mas sempre altamente esparsos. Torna-se desta forma essencial a utilização de algoritmos especialmente desenvolvidos para permitir o armazenamento e o tratamento eficaz deste tipo de matrizes.

$p_5^{(w)}$	1	2	3	$p_{10}^{(w)}$	1	2	3
n_{gl}	2888	4656	9536	n_{gl}	5144	7424	13328
N	360	432	576	N	504	576	720
η	0.842593	0.842593	0.842593	η	0.842593	0.842593	0.842593

Tabela 6.17: *Caracterização do sistema condensado; malha C.*

$p_5^{(w)}$	1	2	3	$p_{10}^{(w)}$	1	2	3
$T(s)$	4.59	4.83	6.54	$T(s)$	14.14	14.63	16.37
n_{gl}	732	1176	2400	n_{gl}	1300	1872	3352
n_{nz}	33096	88402	275958	n_{nz}	105856	226680	741970
η	0.877273	0.872712	0.904481	η	0.875181	0.870973	0.868138

Tabela 6.18: *Caracterização do sistema; elementos com forma trapezoidal; malha B'.*

$p_5^{(w)}$	1	2	3	$p_{10}^{(w)}$	1	2	3
$T(s)$	5.33	6.01	9.54	$T(s)$	15.79	16.31	20.77
n_{gl}	732	1176	2400	n_{gl}	1300	1872	3352
n_{nz}	33102	88940	316810	n_{nz}	105864	226710	748642
η	0.877251	0.871934	0.890297	η	0.875172	0.870956	0.866950

Tabela 6.19: *Caracterização do sistema; elementos curvos; malha B''.*

Ainda para o caso das séries de Walsh, a eficiência com que pode ser obtido o sistema governativo e a respectiva esparsidade são bastante sensíveis à forma dos elementos utilizados na análise. A rapidez com que os cálculos são efectuados degrada-se rapidamente quando se incluem elementos com forma mais geral, como os elementos trapezoidais e parabólicos.

A utilização de séries de wavelets permite obter sistemas de equações de menores dimensões, mas também muito menos esparsos. O cálculo dos elementos dos diferentes operadores estruturais passa necessariamente pela aplicação de algoritmos de integração numérica, o que leva a que o tempo envolvido no estabelecimento do sistema de equações final seja superior (para o caso dos elementos rectangulares) ao que se tem quando se utilizam os modelos baseados em aproximações com séries de Walsh.

É importante notar por último que a degradação da eficiência do processo de montagem do sistema governativo quando se utilizam elementos não rectangulares é menos notória quando se utilizam wavelets. O mesmo acontece com o número de coeficientes a armazenar, cujo acréscimo induzido pela utilização de elementos de forma genérica é praticamente insignificante.

