

Capítulo 5

Wavelets

5.1 Considerações iniciais

Foi há bem poucos anos que foram definidos os primeiros sistemas de Wavelets, ou *Ondelettes*, como lhes chamaram alguns dos investigadores franceses que primeiro trabalharam com este tipo de funções [92]. É no entanto bem curioso verificar que já no início deste século, em 1910, Haar [94] tinha introduzido um sistema completo de funções ortogonais com muitas das propriedades e características que fazem com que as wavelets sejam, hoje em dia, uma das ferramentas matemáticas com grande aplicação num elevado número de domínios [196, 169, 50].

Foi contudo apenas na segunda metade da década de oitenta que foram definidos com rigor os conceitos que permitem compreender de uma forma clara a natureza deste tipo de funções, estabelecer as suas propriedades e permitir a construção e geração de outros sistemas de wavelets. Envolvidos neste trabalho pioneiro estiveram vários investigadores. Destacam-se, entre outros, os trabalhos de Grossman e Morlet [92], Meyer [130], Mallat [124], Daubechies [52] e Battle e Lemarié [130].

A investigação neste campo continua extremamente activa, tanto no que respeita ao aprofundamento dos aspectos teóricos, quanto no que toca ao desenvolvimento de aplicações. É com efeito bastante vasta a lista de domínios nos quais as wavelets têm vindo a ser utilizadas com enorme sucesso. Refira-se, a título de exemplo, a análise e processamento de sinais e de imagens [169, 84, 195], o desenvolvimento de algoritmos que permitem a eficiente definição numérica de um elevado número de operadores (diferenciais e integrais) [1, 22, 50, 102], ou ainda a resolução numérica de equações diferenciais às derivadas parciais [3, 4, 5, 20, 21, 89, 170].

Tal como no caso da série de Fourier, que até há bem poucos anos era sem dúvida a grande ferramenta utilizada neste tipo de análises, os sistemas de wavelets apresentam um comportamento local no domínio da frequência. Em relação às séries trigonométricas possuem no entanto a grande vantagem de apresentarem também

um comportamento local no domínio do espaço (ou do tempo). É então de esperar que a utilização de wavelets permita modelar de uma forma mais eficaz campos ou sinais que apresentem variações acentuadas numa determinada zona do espaço. Será por exemplo o caso das concentrações de tensões quando se estudam problemas de elasticidade, ou o caso da definição de contornos quando se trabalha com processamento de imagens.

As wavelets permitem ainda representar uma dada função segundo diferentes níveis de resolução. Este facto foi convenientemente explorado por Mallat [124] e Meyer [130], o que lhes permitiu sistematizar um conceito fundamental no domínio das wavelets, o da *Análise Multiresolução* (*Multiresolution Analysis*). Como se verá de seguida, este tipo de análise, para além de facilitar a aplicação de algoritmos adaptativos/hierárquicos, constitui o enquadramento ideal para a construção dos sistemas de wavelets [52, 130].

Vários são os sistemas de wavelets ortogonais que têm sido construídos em $L^2(R)$. O que os distingue é fundamentalmente a sua maior ou menor localização no domínio do espaço e da frequência, a sua continuidade e a sua diferenciabilidade.

As wavelets propostas por Meyer [130] apresentam suporte compacto (o que significa que são definidas sobre um intervalo limitado) no domínio da frequência, onde também apresentam continuidade C^k (k toma valores arbitrariamente grandes). Já no domínio do espaço, embora tenham um comportamento acentuadamente local, são definidas sobre toda a recta dos reais. Apresentam no entanto um decaimento mais rápido que qualquer função do tipo $1/x^p$, embora não possuam decaimento exponencial.

As wavelets de Battle e Lemarié [130] são construídas com base em funções *spline*. Estas wavelets apresentam continuidade C^k no domínio do espaço onde apresentam decaimento exponencial. A taxa de decaimento diminui à medida que aumenta o valor do parâmetro k .

O sistema de wavelets proposto por Daubechies em 1988 [52] é o único que consegue definir as funções sobre um intervalo limitado no domínio do espaço (e também no domínio da frequência) e ao mesmo tempo garantir a ortogonalidade. Estas wavelets retêm boas características de localização no domínio da frequência, enquanto que o suporte compacto no domínio do espaço lhes confere aqui um comportamento estritamente local.

A falta de regularidade é o preço pago pelas wavelets de Daubechies para garantir simultaneamente suporte compacto e ortogonalidade. As contrário do que sucede com as wavelets de Meyer e Battle e Lemarié, as wavelets de Daubechies não exibem qualquer tipo de simetria.

Recentemente, têm surgido outros sistemas de wavelets nos quais a condição de ortogonalidade já não é imposta [20]. Estes sistemas têm vindo a ser utilizados fundamentalmente na resolução numérica de equações diferenciais às derivadas par-

ciais [21].

São as famílias de wavelets de Daubechies que se utilizam neste trabalho para modelar os campos de tensões e de deslocamentos. As outras classes de wavelets não serão aqui tratadas, muito embora possam vir a ser testadas como funções de aproximação num futuro próximo. Como consequência, tudo quanto for dito sobre wavelets - sua definição, propriedades, modo de geração - é válido para as wavelets de Daubechies, podendo não o ser quando se trabalha com outros sistemas de wavelets.

Para ilustrar alguns conceitos, utilizar-se-ão as funções de Haar [94]. Como referido anteriormente, este conjunto completo de funções ortogonais é considerado como o primeiro sistema de wavelets a ser *inventado* na história da matemática. Embora com uma definição extremamente simples (as funções são constituídas por ondas rectangulares, tal como as funções de Walsh), as séries de Haar possuem muitas das propriedades e características que hoje em dia definem os sistemas de wavelets. Na figura 5.1 apresentam-se os primeiros termos da série de Haar.

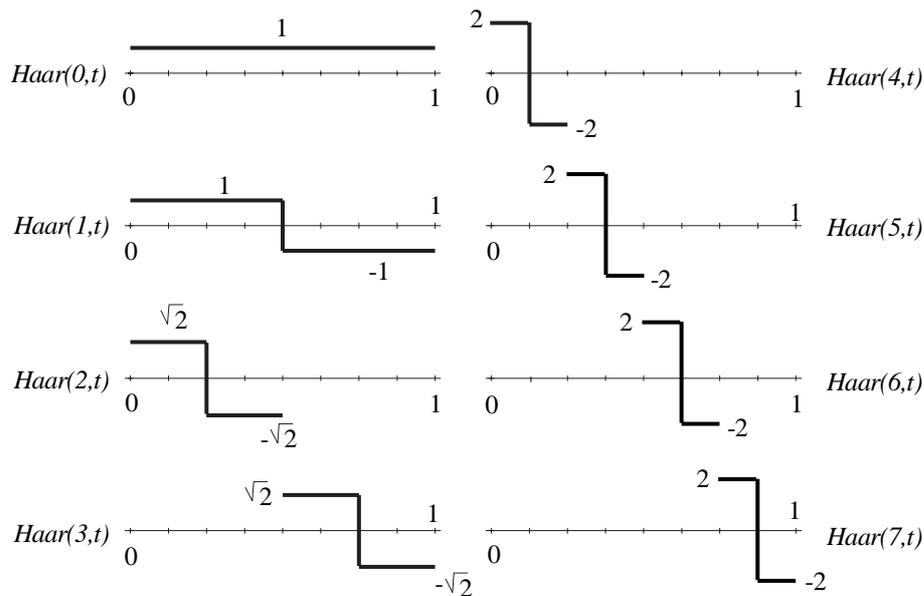


Figura 5.1: Primeiras funções da série de Haar.

É curioso notar a semelhança existente entre as funções de Haar e as funções de Walsh. Com efeito, no artigo em que introduz o seu conjunto de funções ortogonais [192], Walsh começa por referir as séries de Haar. Define depois a relação existente entre os dois sistemas e estabelece de seguida algumas das propriedades das funções de Walsh tendo como ponto de partida as propriedades das funções de Haar.

As séries de Haar permitem representar de um forma exacta apenas funções que tomem valores constantes por troços. Deste ponto de vista, podem então ser consideradas como sendo as wavelets de menor grau. É por este motivo que não são muito utilizadas em aplicações, uma vez que a obtenção de resultados precisos im-

plica, na maioria dos casos, a utilização de um grande número de funções. Contudo, a simplicidade das funções de Haar é muitas vezes aproveitada quando se pretendem ilustrar algumas das características e propriedades dos sistemas de wavelets.

Como curiosidade, é de referir que no final da década de setenta, Vásárhelyi [189] utilizou as funções de Haar na resolução de problemas da Teoria da Elasticidade. Esta investigadora utilizou o método de Ritz na resolução das equações integrais obtidas através da aplicação do teorema do mínimo da energia potencial total ao problema em análise. A função incógnita é aproximada através da combinação linear de um conjunto completo de funções de Haar. Como estas funções não são capazes de satisfazer directamente as condições de fronteira, estas condições são incorporadas no funcional da energia através da introdução de multiplicadores de Lagrange. Embora não se possa neste caso falar em formulação de elementos finitos, será porventura a primeira aplicação de uma série digital e ou, se se preferir, de um sistema de wavelets, na análise de problemas no domínio da Teoria da Elasticidade.

5.2 Análise Multiresolução

As características e propriedades das bases de wavelets podem ser compreendidas mais facilmente se se tiverem em conta os conceitos introduzidos pela definição da análise multiresolução. Esta permite ainda criar o enquadramento ideal que possibilita a obtenção de outros sistemas de wavelets.

A análise multiresolução foi introduzida por Mallat [124] e Meyer [130]. Como o próprio nome indica, tal análise consiste em representar uma dada função (ou sinal) a diferentes níveis de resolução. Permite também obter, de uma forma eficaz, a informação necessária para se poder passar de um nível para outro. É fácil reconhecer os enormes benefícios que podem advir da aplicação destes algoritmos a problemas de análise e processamento de sinais. Considere-se, como exemplo, o caso do processamento de imagens. Os algoritmos propostos por Mallat [124] permitem decompor a imagem inicial numa outra com um nível de resolução inferior (a que corresponderá uma imagem menos nítida). Simultaneamente, são obtidos os detalhes que permitirão recompor a imagem inicial, partindo da informação contida na imagem decomposta. Saliente-se ainda que a informação necessária para definir a imagem no seu nível de resolução mais baixo e os detalhes que permitirão a sua reconstrução, é menor que a informação necessária para a definição da imagem inicial. Este facto pode ser importante quando se trata da transmissão de sinais.

Embora a análise multiresolução seja bastante importante, não só pela sua relevância no tratamento teórico das questões envolvendo bases de wavelets, mas também pelo enorme potencial que encerra em termos de desenvolvimento de aplicações, não cabe neste trabalho fazer um tratamento exaustivo do tema. Introduzem-se apenas, sem grande formalismo matemático, alguns conceitos que serão bastante úteis na compreensão das famílias de bases de wavelets propostas por Daubechies.

Para efectuar a representação multiresolução de uma função em $L^2(R)$, há que obter primeiro uma sequência de sub-espacos verificando:

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots .$$

Os sub-espacos V_j ($j \in Z$) devem ter uma intersecção trivial e uma união que é densa em $L^2(R)$. Quer isto dizer que:

$$\bigcap_n V_n = \{0\} \text{ e } \overline{\bigcup_n V_n} = L^2(R) .$$

Os diferentes sub-espacos devem estar relacionados através da seguinte lei:

$$h(x) \in V_j \Leftrightarrow h(2x) \in V_{j+1} .$$

Cada sub-espaco V_j deve ser gerado a partir de todas as translações inteiras de uma única função $h(x)$, verificando-se:

$$h(x) \in V_0 \Leftrightarrow h(x+k) \in V_0 , \text{ com } k \in Z .$$

Surge então a necessidade de se definir, em V_0 , uma função que desempenha um papel fulcral na análise multiresolução e na geração dos sistemas de wavelets. É a chamada *função de escala*, usualmente representada na literatura por $\phi(x)$. A função de escala $\phi(x)$ e as suas translações inteiras $\phi(x-k)$, com $k \in Z$, formam uma base do sub-espaco V_0 . Como consequência das condições atrás enunciadas, as funções $\phi(2x-m)$, com $m \in Z$, formam uma base para o sub-espaco V_1 . Como V_0 está contido em V_1 , qualquer função definida em V_0 pode ser expressa como combinação linear das funções que constituem a base do sub-espaco V_1 . Em particular, é possível escrever para a função de escala:

$$\phi(x) = \sum_{k \in Z} \alpha_k \phi(2x-k) . \tag{5.1}$$

Esta equação é extremamente importante, uma vez que constitui a base para a geração dos diferentes sistemas de wavelets. É conhecida geralmente como *equação de dilatação* (*dilation equation*, em inglês). Em alternativa, pode ser designada por *equação de refinamento* ou ainda por *equação de relação de escala*.

Para um dado valor do inteiro j , as funções

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) , \text{ com } j, k \in Z , \tag{5.2}$$

obtidas a partir da função de escala $\phi(x)$ através de uma operação de dilatação e uma translação, formam uma base do sub-espaco V_j . O inteiro j é o chamado *parâmetro de dilatação* (ou *escala*), enquanto que o inteiro k define a translação efectuada. De seguida explicar-se-ão com maior detalhe estes conceitos.

A análise multiresolução conduz directamente a uma decomposição do espaco $L^2(R)$. Defina-se agora o sub-espaco W_{j-1} como sendo o complemento ortogonal de V_{j-1} em V_j . Tem-se então que,

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} , \tag{5.3}$$

com $V_{j-1} \perp W_{j-1}$ e onde \oplus representa uma soma directa. Daqui resulta que os sub-espacos W_j (com $j \in Z$) são ortogonais e que a sua soma directa é $L^2(R)$. Verifica-se então:

$$\overline{\bigcup_j V_j} = \bigoplus_j W_j = L^2(R) \text{ , com } j \in Z \text{ .} \quad (5.4)$$

Para além da função de escala $\phi(x)$, há uma outra função, definida agora em W_0 , cuja definição é essencial para a geração do sistema completo de wavelets. Trata-se da *wavelet primária* (*primary wavelet*), usualmente representada por $\psi(x)$. Esta wavelet, em conjunto com todas as suas translações inteiras, $\psi(x-k)$, com $k \in Z$, deverá constituir uma base do sub-espaco W_0 .

Como o sub-espaco W_0 está contido no sub-espaco V_1 (ver igualdade (5.4)), a wavelet primária $\psi(x)$ pode ser expressa como combinação linear das funções que constituem a base de V_1 . Pode então escrever-se:

$$\psi(x) = \sum_{k \in Z} \beta_k \phi(2x - k) \text{ .} \quad (5.5)$$

Os coeficientes β_k de (5.5) devem estar relacionados com os coeficientes α_k da equação (5.1), de modo a garantir a desejada ortogonalidade entre sub-espacos, $V_0 \perp W_0$. Na secção seguinte indicar-se-à qual a relação existente entre os coeficientes α_k e β_k no caso das famílias de wavelets de Daubechies.

As funções,

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \text{ , com } j, k \in Z \text{ ,} \quad (5.6)$$

formam, para um dado valor do parâmetro j , uma base do sub-espaco W_j . Atendendo à igualdade (5.4), pode afirmar-se que o conjunto de todas as translações e dilatações da wavelet primária (ou seja $\{\psi_{j,k}(x), \text{ com } j, k \in Z\}$) constitui uma base de $L^2(R)$. Em particular, se as funções $\{\psi(x-k), k \in Z\}$ forem ortonormais, então o conjunto de funções $\psi_{j,k}(x)$ constitui uma base ortonormal do espaco $L^2(R)$.

Qualquer função $f(x) \in L^2(R)$ pode então ser expressa como combinação linear de todas as dilatações e translações da wavelet primária. Escrever-se-à:

$$f(x) = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} b_{j,k} \psi_{j,k}(x) \text{ .} \quad (5.7)$$

Uma outra forma de aproximar a mesma função consiste em efectuar a sua projecção no sub-espaco V_j :

$$P_j f(x) = \sum_{k \in Z} c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \text{ .} \quad (5.8)$$

É possível demonstrar [37] que as projecções $P_j f(x)$ tendem a representar de uma forma cada vez mais exacta a função $f(x)$ à medida que o valor do parâmetro de escala j aumenta. No limite, verifica-se que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m f(x) = f(x) \text{ .}$$

Considerem-se agora as projecções da mesma função $f(x)$ em dois sub-espacos, V_j e V_{j+1} . Tendo em conta a igualdade (5.3), pode escrever-se,

$$P_{j+1} f(x) = P_j f(x) + Q_j f(x) , \tag{5.9}$$

onde $Q_j f(x)$ denota a projecção de $f(x)$ no sub-espaco W_j . Tal projecção é obtida através de:

$$Q_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) . \tag{5.10}$$

A igualdade (5.9) indica que $Q_j f(x)$ representa o *detalhe* que é necessário adicionar à aproximação referente à projecção na escala j para se obter a aproximação na escala de refinamento seguinte, $j+1$.

O sistema de funções de Haar [94] é agora utilizado para ilustrar alguns dos conceitos introduzidos nesta secção. Como já foi referido, as funções de Haar podem ser encaradas como sendo as wavelets de *grau* menos elevado. A função de escala de Haar é uma função constante no intervalo $[0, 1]$. Tem-se:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 , & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

É fácil verificar que esta função verifica a equação de dilatação (5.1), se se considerar $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ e $\alpha_k = 0$ para valores de k diferentes:

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1) .$$

A correspondente wavelet primária é obtida substituindo na igualdade (5.5) $\beta_0 = 1$ e $\beta_1 = -1$, e também $\beta_k = 0$ para todos os outros k inteiros. Vem então,

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1).$$

Na figura 5.2 encontram-se representadas a função de escala e a wavelet primária do sistema de wavelets de Haar. A condição de ortogonalidade entre ambas, e por consequência entre os sub-espacos V_0 e W_0 , é imediatamente verificável.

Para se formar o sistema de wavelets de Haar, há agora que obter as dilatações e as translações, quer da função de escala, quer da wavelet primária. A figura 5.3 ilustra uma operação de translação e uma operação de dilatação efectuadas sobre a wavelet de Haar.

A operação de dilatação pode ser explicada de um modo simples, sem recurso a quaisquer formalismos matemáticos. Consiste em *pegar* na função inicial e, mantendo-lhe a forma, *comprimi-la* de modo a que o seu novo intervalo de definição tenha um comprimento igual a metade do inicial. Há ainda que multiplicar a função assim obtida por um certo factor ($\sqrt{2}$ neste caso) por forma a garantir que a *norma quadrática* da função *dilatada* seja igual à norma quadrática da função original.

As funções representadas na figura (5.4) {5.5} são as wavelets $\psi_{1,k}(x)$ $\{\psi_{2,k}(x)\}$, com o valor de k escolhido de forma a garantir que tais funções se encontrem definidas

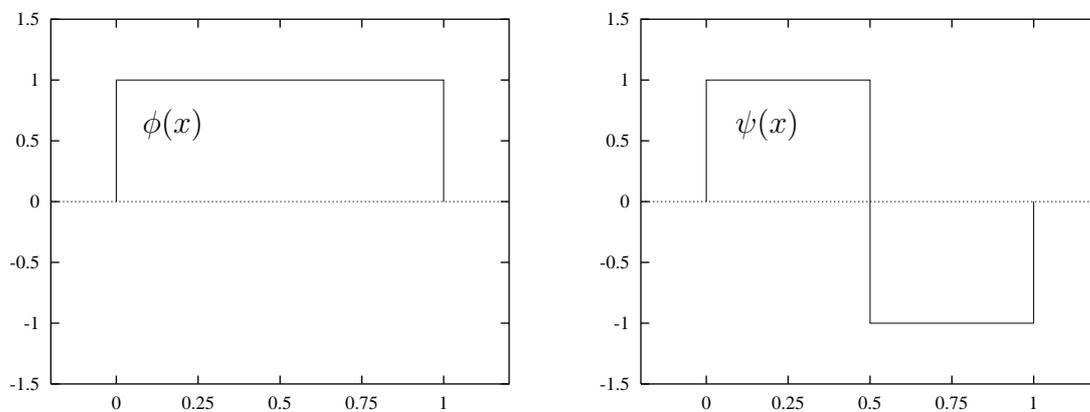


Figura 5.2: Sistema de Haar; função de escala e wavelet primária.

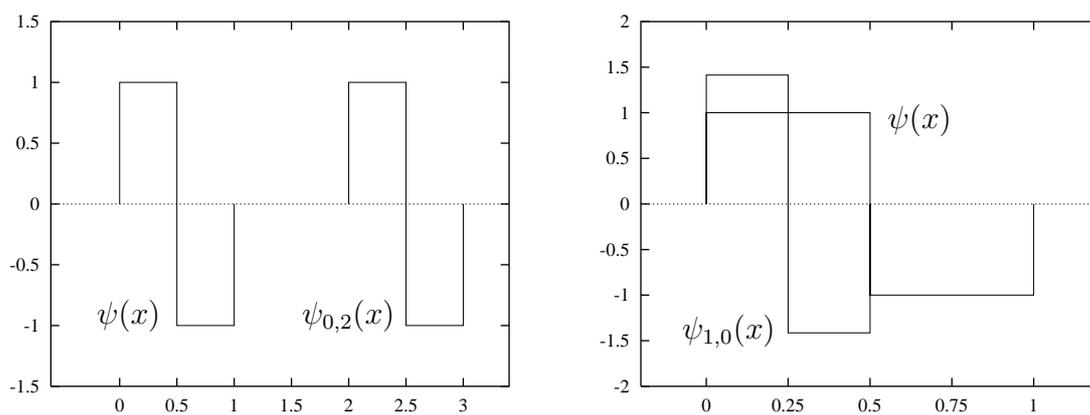


Figura 5.3: Operações de translação e de dilatação aplicadas sobre a wavelet primária de Haar.

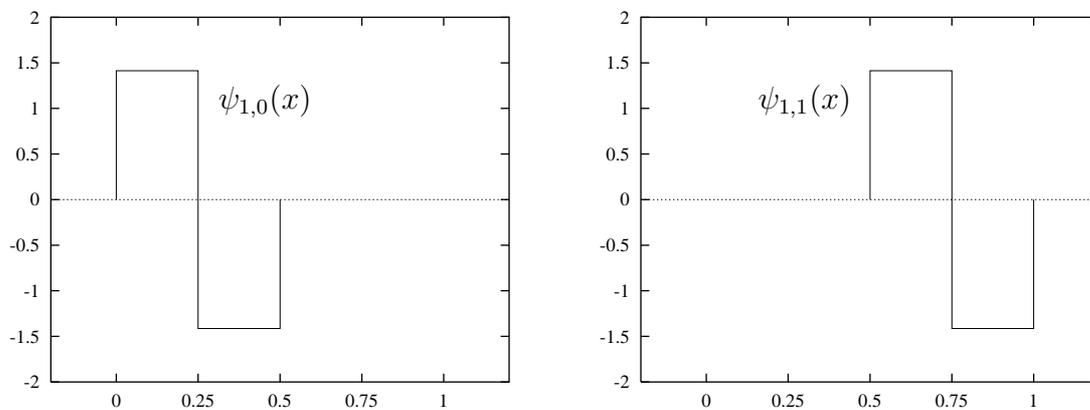


Figura 5.4: Funções $\psi_{1,0}(x)$ e $\psi_{1,1}(x)$.

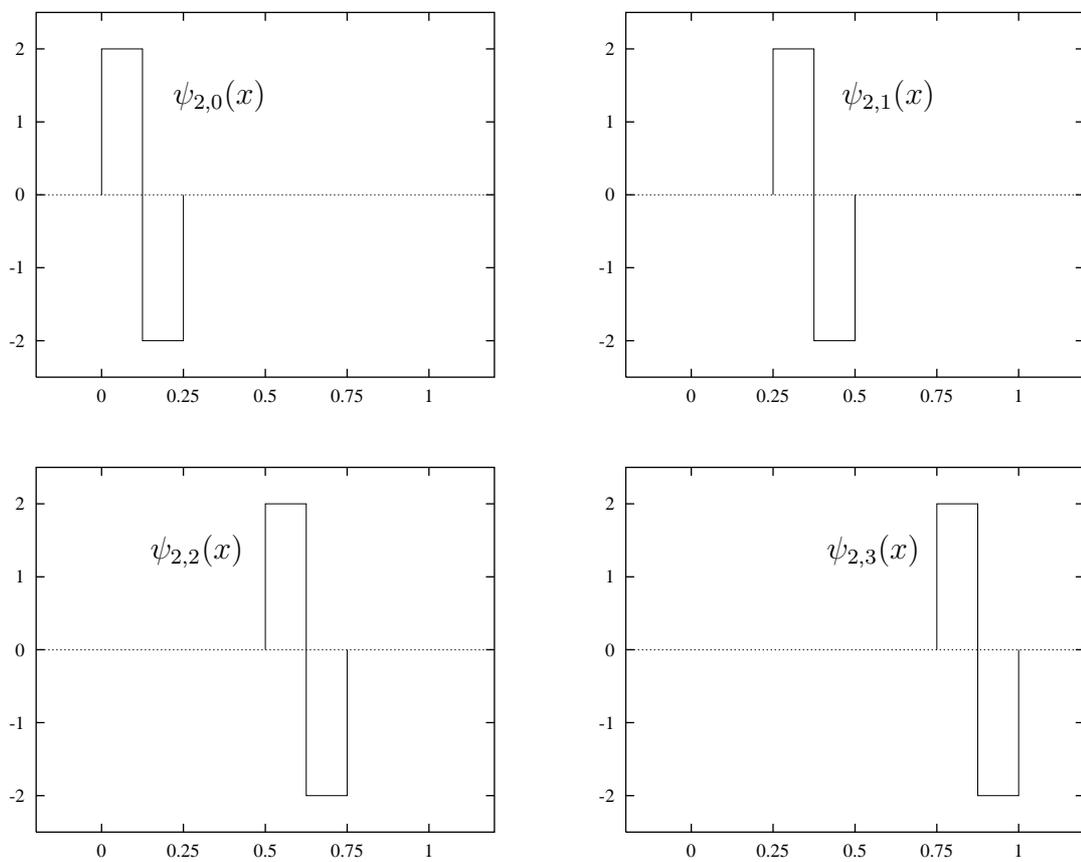


Figura 5.5: Funções $\psi_{2,0}(x)$, $\psi_{2,1}(x)$, $\psi_{2,2}(x)$ e $\psi_{2,3}(x)$.

no intervalo $[0, 1]$. Note-se que as wavelets das figuras 5.4 e 5.5, em conjunto com a função de escala e a wavelet primária apresentados na figura 5.2, reconstituem exactamente os oito primeiros termos da série de Haar ilustrados na figura 5.1. Não há dificuldade alguma em verificar que as funções de Haar formam um conjunto de funções ortonormais.

Considere-se agora a função $f(x) = x$ definida no intervalo $x \in [0, 1]$. A projecção desta função no sub-espaço definido pelas funções $\phi_{2,k}(x)$ pode ser obtida através de,

$$P_2 f(x) = \sum_{k=0}^3 c_{2,k} \phi_{2,k}(x) , \quad (5.11)$$

com os coeficientes $c_{2,k}$ determinados por,

$$c_{2,k} = \int_0^1 x \phi_{2,k}(x) dx , \quad (5.12)$$

uma vez que as funções $\phi_{2,k}(x)$ são ortonormais (ver figura 5.6).

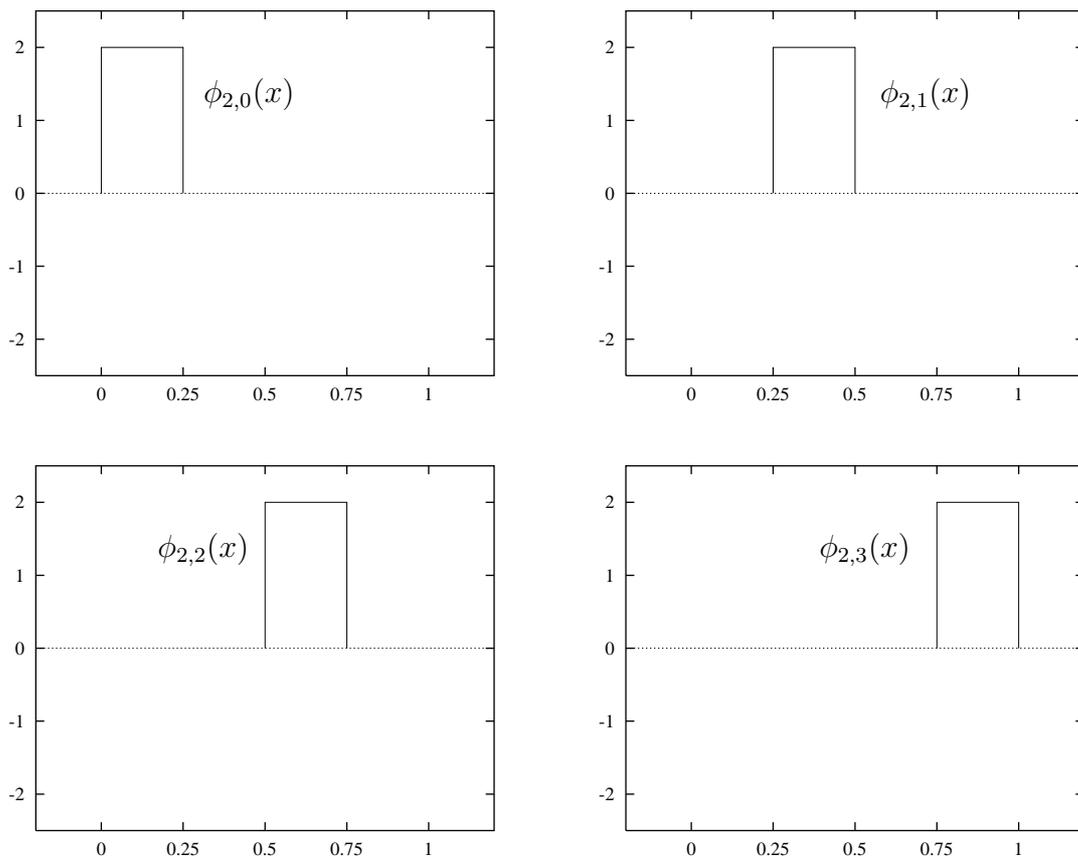


Figura 5.6: Funções $\phi_{2,k}(x)$, com $k = 0, 1, 2, 3$.

Efectuando os cálculos indicados em (5.12), obtém-se:

$$c_{2,0} = 1/16 ; c_{2,1} = 3/16 ; c_{2,2} = 5/16 ; c_{2,3} = 7/16 .$$

Substituindo estes valores na aproximação (5.11), obtém-se a projecção desejada, a qual se encontra ilustrada na figura 5.7.

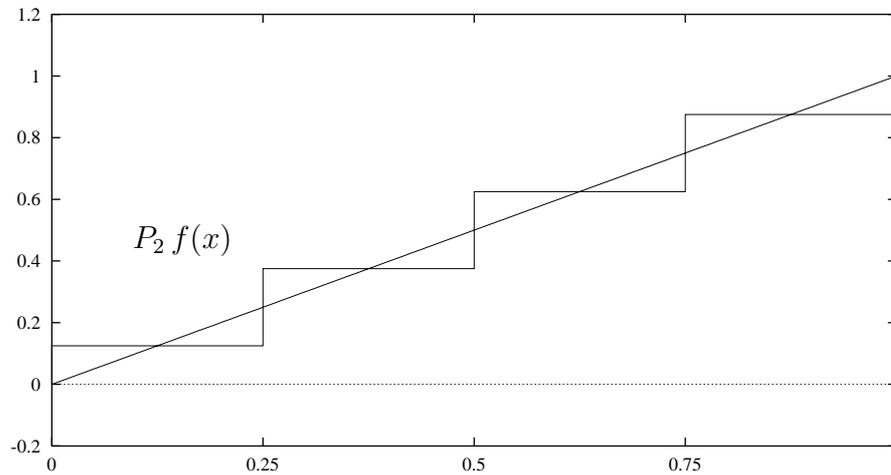


Figura 5.7: *Projecção da função $f(x)$ no sub-espaco definido pelas funções $\phi_{2,k}(x)$.*

A projecção da mesma função $f(x) = x$ no sub-espaco V_1 definido pelas funções $\phi_{1,k}(x)$ (ver figura 5.8) é obtido através de,

$$P_1 f(x) = \sum_{k=0}^1 c_{1,k} \phi_{1,k}(x) , \tag{5.13}$$

com os coeficientes $c_{1,k}$ determinados por:

$$c_{1,k} = \int_0^1 x \phi_{1,k}(x) dx . \tag{5.14}$$

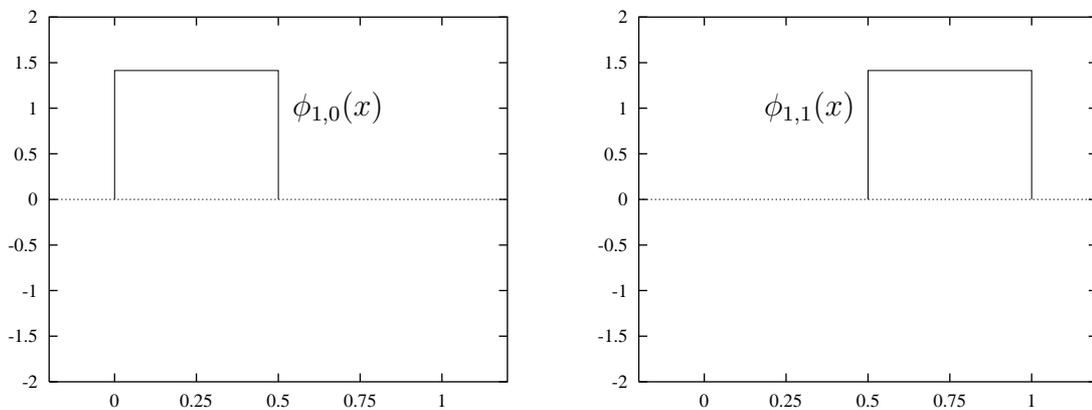


Figura 5.8: *Funções $\phi_{1,k}(x)$, com $k = 0, 1$.*

Efectuando as integrações definidas em (5.14), obtém-se:

$$c_{1,0} = \sqrt{2}/8 ; c_{1,1} = 3\sqrt{2}/8 .$$

A projecção $P_1 f(x)$ é obtida substituindo estes coeficientes na igualdade (5.13). A figura 5.9 ilustra a aproximação obtida.

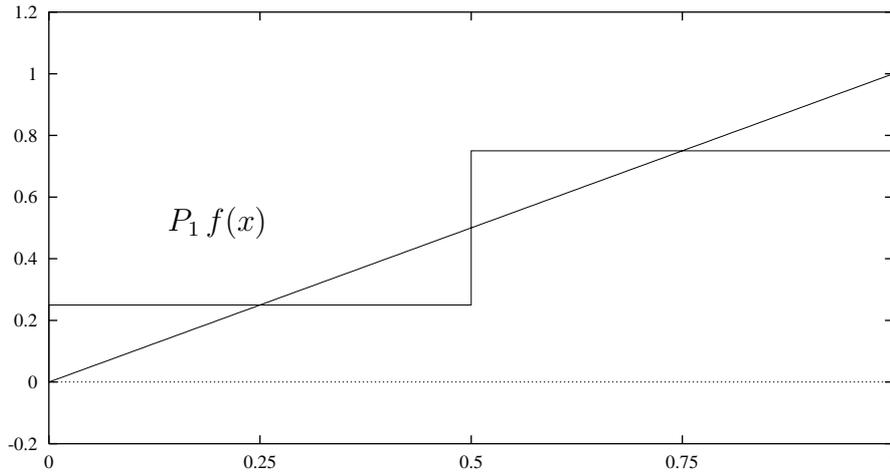


Figura 5.9: *Projecção da função $f(x)$ no sub-espaço definido pelas funções $\phi_{1,k}(x)$.*

Finalmente, obtenha-se a projecção de $f(x) = x$ no sub-espaço W_1 definido pelas funções $\psi_{1,k}(x)$, apresentadas na figura 5.4. Tem-se,

$$Q_1 f(x) = \sum_{k=0}^1 d_{1,k} \psi_{1,k}(x) , \quad (5.15)$$

em que os coeficientes da expansão são obtidos através de:

$$d_{1,k} = \int_0^1 x \psi_{1,k}(x) dx . \quad (5.16)$$

A igualdade anterior conduz aos seguintes valores:

$$d_{1,0} = -\sqrt{2}/16 ; d_{1,1} = -\sqrt{2}/16 .$$

Na figura 5.10 encontra-se representada a projecção $Q_1 f(x)$ obtida substituindo os coeficientes atrás obtidos na equação (5.15).

Tal como seria de esperar, verifica-se que $P_2 f(x) = P_1 f(x) + Q_1 f(x)$. Tal facto poderá ser imediatamente comprovado através da análise das figuras 5.7, 5.9 e 5.10. Tendo ainda em conta as características das funções $\phi_{j,k}(x)$, obtidas a partir da função de escala de Haar, não é difícil perceber que $P_j f(x) \rightarrow x$ quando $j \rightarrow +\infty$.

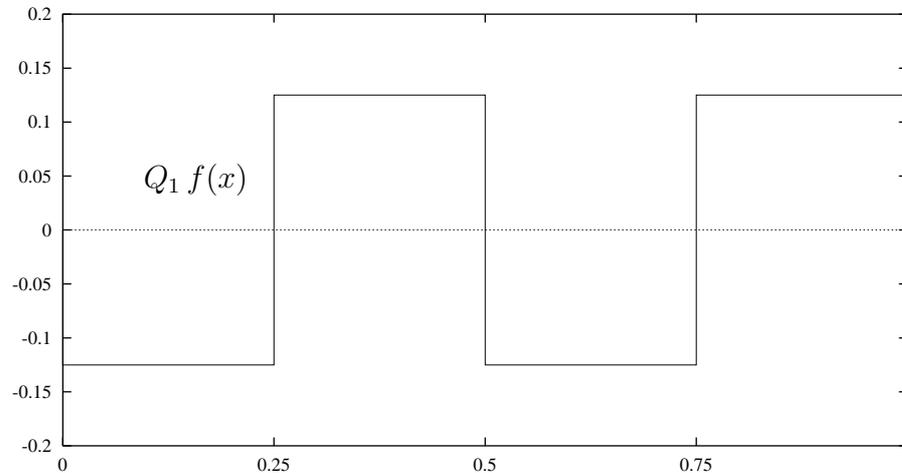


Figura 5.10: *Projecção da função $f(x)$ no sub-espaço definido pelas funções $\psi_{1,k}(x)$.*

5.3 Definição das Wavelets de Daubechies

As wavelets de Daubechies [52] formam sistemas completos de funções ortonormais. A geração de tais sistemas passa pela obtenção da respectiva função de escala:

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k) . \tag{5.17}$$

Os parâmetros a_k são geralmente designados como *coeficientes de filtro* (*filter coefficients*). É através da imposição de determinadas condições sobre os valores que estes coeficientes podem tomar que se conseguem obter determinadas propriedades para um sistema de wavelets, tal como por exemplo a ortonormalidade. Na próxima secção indicar-se-ão quais as restrições a satisfazer pelos coeficientes a_k quando se geram as wavelets de Daubechies.

Quando se pretende que as wavelets tenham suporte compacto, isto é, que sejam definidas sobre um intervalo limitado, é necessário que apenas um número finito de coeficientes de filtro seja diferente de zero. Os sistemas de wavelets de Daubechies são organizados em diferentes famílias, cada uma das quais caracterizada por um número diferente de coeficientes a_k não-nulos. Cada família é identificada pelo seu *número de família* (*wavelet number*), denotado aqui por N , e cujo valor é igual a metade do número de coeficientes de filtro utilizados na equação (5.17).

A função de escala para cada uma das famílias de Wavelets é então dada por:

$${}_N\phi(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k {}_N\phi(2x - k) . \tag{5.18}$$

As funções de escala assim definidas tomam valores diferentes de zero apenas no intervalo $[0, 2N - 1]$. A este intervalo costuma chamar-se *suporte* da função de

escala ${}_N\phi(x)$. Pode escrever-se:

$$\sup_{{}_N\phi(x)} = [0, 2N - 1] . \quad (5.19)$$

Daubechies definiu no seu artigo [52] as famílias de wavelets com valores de N compreendidos entre 2 e 10. Para além da ortonormalidade, há uma outra propriedade que caracteriza estes sistemas de funções. Dada uma família com um determinado N , qualquer polinómio de grau igual ou inferior a $N - 1$ pode ser representado *de uma forma exacta* pela combinação linear da função de escala ${}_N\phi(x)$ e de todas as suas translações inteiras.

A wavelet primária de cada uma das famílias pode ser definida através de:

$${}_N\psi(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} b_k {}_N\phi(2x - k) = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k a_{2N-1-k} {}_N\phi(2x - k) . \quad (5.20)$$

A escolha dos coeficientes $b_k = (-1)^k a_{2N-1-k}$ é condicionada pela necessidade de garantir a ortonormalidade entre a função de escala e a wavelet primária. Verifica-se então que:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} {}_N\phi(x) {}_N\psi(x) dx = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2N-1} a_k {}_N\phi(2x - k) \sum_{l=0}^{2N-1} (-1)^l a_{2N-1-l} {}_N\phi(2x - l) dx = \\ & \sum_{k=0}^{2N-1} a_k \sum_{l=0}^{2N-1} (-1)^l a_{2N-1-l} \int_{-\infty}^{+\infty} {}_N\phi(2x - k) {}_N\phi(2x - l) dx = \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} a_k \sum_{l=0}^{2N-1} (-1)^l a_{2N-1-l} \int_{-\infty}^{+\infty} {}_N\phi(\bar{x} - k) {}_N\phi(\bar{x} - l) d\bar{x} \end{aligned}$$

Se durante a geração de ${}_N\phi(x)$ tiver sido garantida a ortonormalidade entre todas as translações inteiras daquela função de escala (ver secção seguinte), ter-se-à,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} {}_N\phi(x - k) {}_N\phi(x - l) dx = \delta_{kl},$$

o que implica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} {}_N\phi(x) {}_N\psi(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k a_k a_{2N-1-k} = 0,$$

como se pretendia demonstrar.

O suporte da wavelet primária ${}_N\psi(x)$, definida através de (5.20), é igual ao da função de escala correspondente. Tem-se então:

$$\sup_{{}_N\psi(x)} = [0, 2N - 1] . \quad (5.21)$$

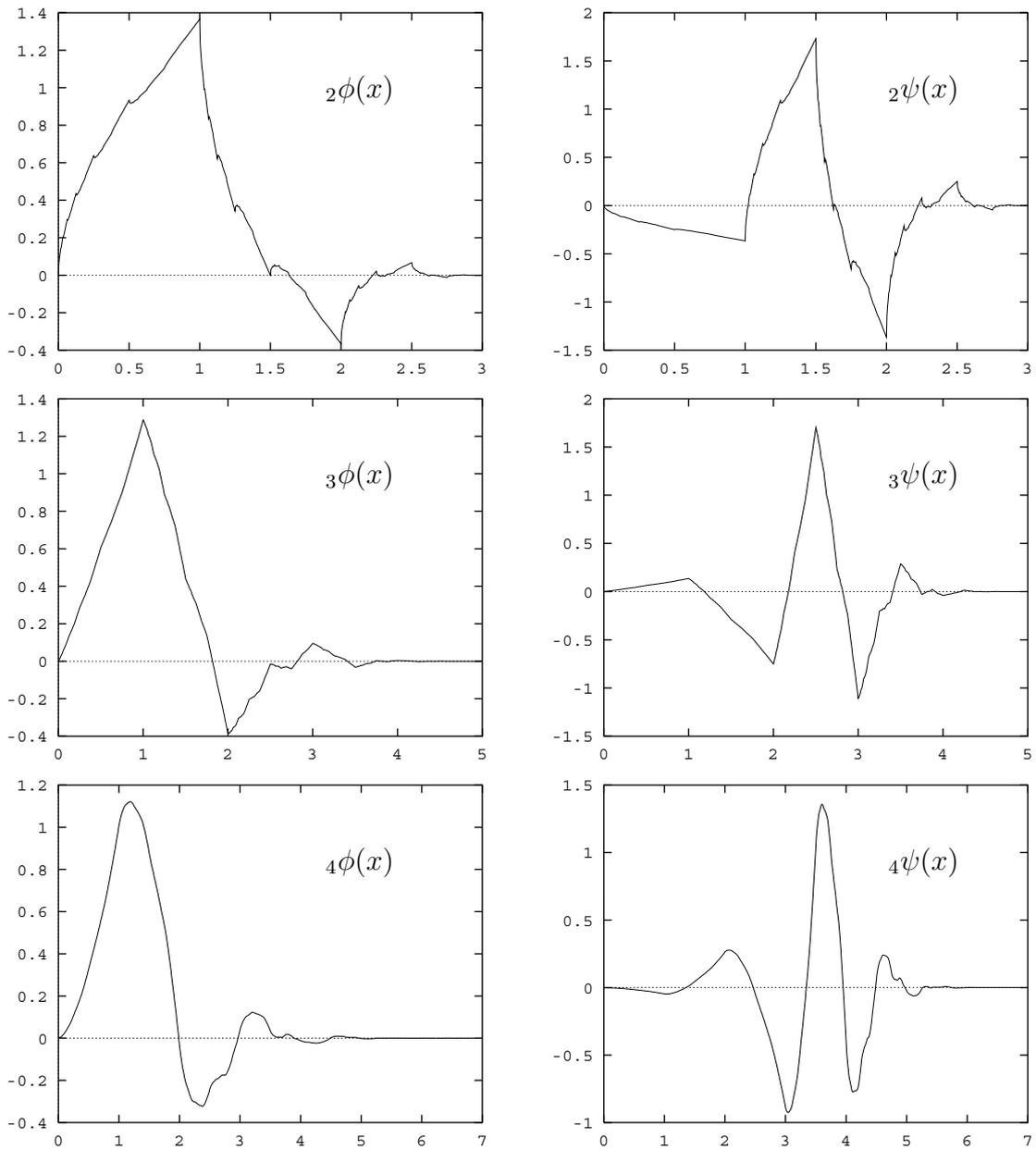


Figura 5.11: Famílias de wavelets de Daubechies. Correspondentes funções de escala e wavelets primárias; $N = 2, 3, 4$.

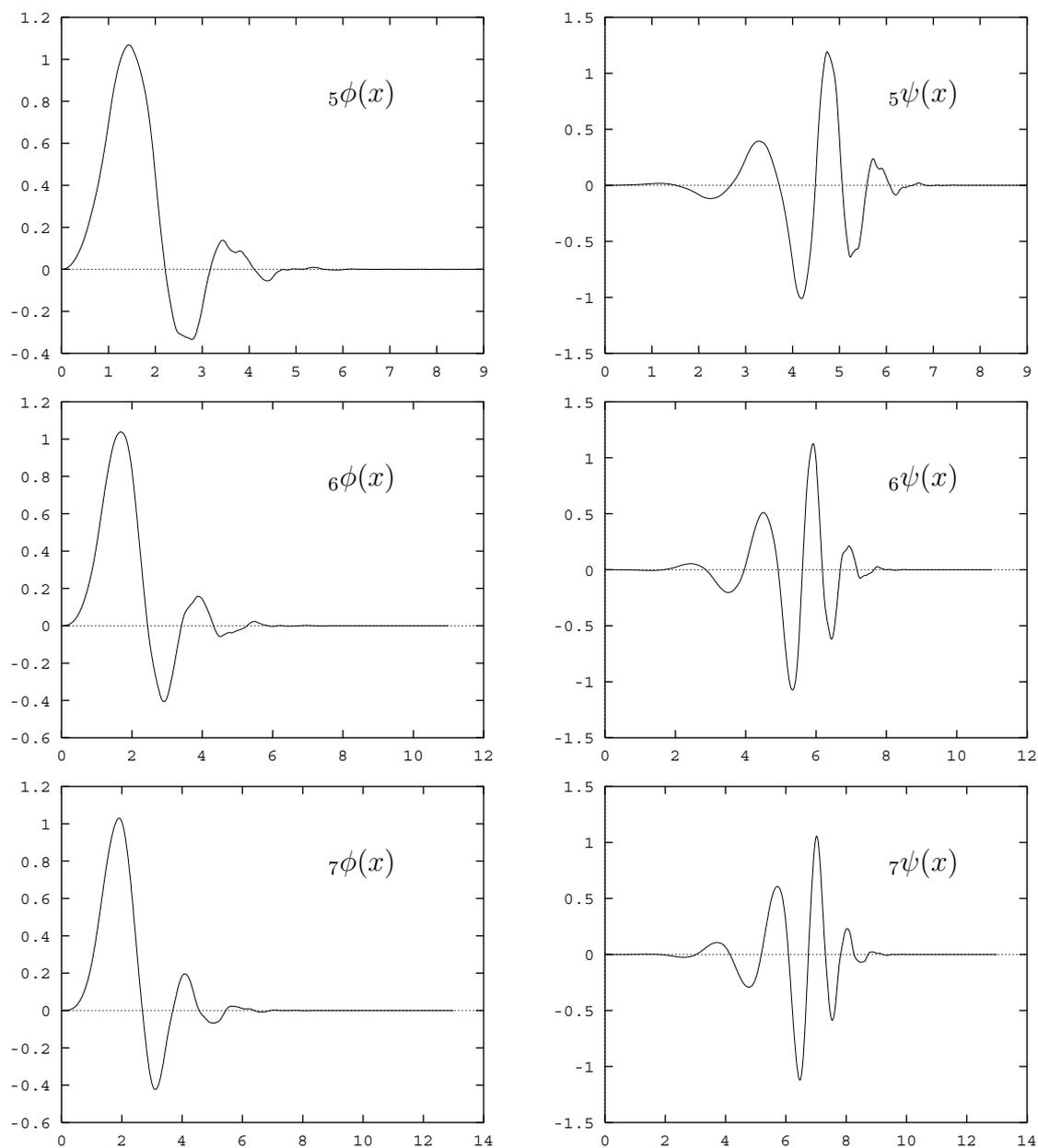


Figura 5.12: Famílias de wavelets de Daubechies. Correspondentes funções de escala e wavelets primárias; $N = 5, 6, 7$.

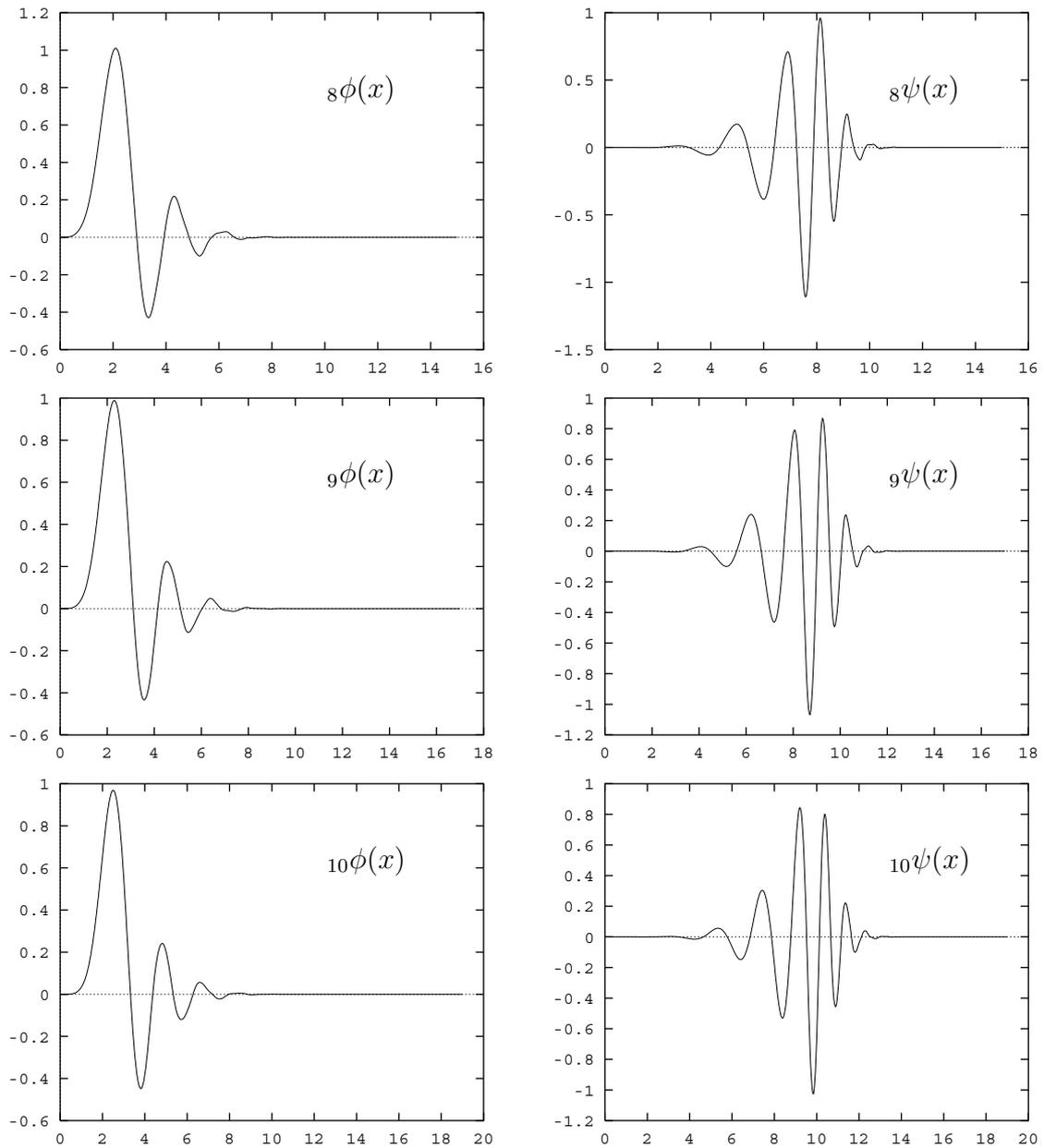


Figura 5.13: Famílias de wavelets de Daubechies. Correspondentes funções de escala e wavelets primárias; $N = 8, 9, 10$.

Nas figuras 5.11, 5.12 e 5.13 apresentam-se as funções de escala e as wavelets primárias para cada uma das famílias estudadas por Daubechies [52]. Como se conclui pela análise destas figuras, a regularidade das wavelets aumenta à medida que cresce o valor de N .

Para cada uma das famílias de wavelets de Daubechies, o sistema completo de funções é obtido considerando translações e dilatações, quer sobre a função de escala, quer sobre a wavelet primária. Define-se, desta forma,

$${}_N\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} {}_N\phi(2^j x - k) , \quad (5.22)$$

e

$${}_N\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} {}_N\psi(2^j x - k) . \quad (5.23)$$

Não é difícil concluir que:

$$\sup_{{}_N\phi_{j,k}(x)} = \sup_{{}_N\psi_{j,k}(x)} = [k \times 2^{-j}, (2N - 1 + k) \times 2^{-j}] . \quad (5.24)$$

Para simplificar a notação, a partir deste instante deixará de se utilizar o prefixo N (em ${}_N\phi(x)$ e ${}_N\psi(x)$) sempre que tal não origine qualquer dúvida acerca da família de wavelets em causa.

A família de wavelets com $N=4$ é utilizada para ilustrar os conceitos e exemplificar algumas das operações envolvendo wavelets que vão sendo introduzidas ao longo do texto. Assim, e tendo em atenção a relação (5.18), a função de escala desta família de wavelets é obtida através da resolução da seguinte equação:

$$\begin{aligned} \phi(x) = & a_0 \phi(2x) + a_1 \phi(2x - 1) + a_2 \phi(2x - 2) + a_3 \phi(2x - 3) \\ & + a_4 \phi(2x - 4) + a_5 \phi(2x - 5) + a_6 \phi(2x - 6) + a_7 \phi(2x - 7) . \end{aligned}$$

Os valores dos coeficientes a_k ($0 \leq k \leq 7$) são determinados de forma a que sejam satisfeitas algumas das propriedades que se pretendem obter para o sistema de wavelets. Na secção seguinte ver-se-à quais são essas condições e a forma através da qual são impostas.

A obtenção de $\phi(x)$ passa pela resolução da equação de dilatação (5.18). Trata-se, como se reconhece com facilidade, de uma fórmula de recorrência. Como a sua resolução analítica não é possível, torna-se necessário aplicar um procedimento numérico na obtenção da função de escala. Os algoritmos que permitem calcular numericamente os valores das funções $\phi(x)$ são apresentados na secção 5.5.

Uma vez calculada a função de escala, a wavelet primária $\psi(x)$ pode ser obtida através da aplicação da igualdade (5.20). Ter-se-à então:

$$\begin{aligned} \psi(x) = & a_7 \phi(2x) - a_6 \phi(2x - 1) + a_5 \phi(2x - 2) - a_4 \phi(2x - 3) \\ & + a_3 \phi(2x - 4) - a_2 \phi(2x - 5) + a_1 \phi(2x - 6) - a_0 \phi(2x - 7) . \end{aligned}$$

Tendo em atenção (5.19) e (5.21), pode-se escrever:

$$\sup_{{}_4\phi(x)} = \sup_{{}_4\psi(x)} = [0, 7] .$$

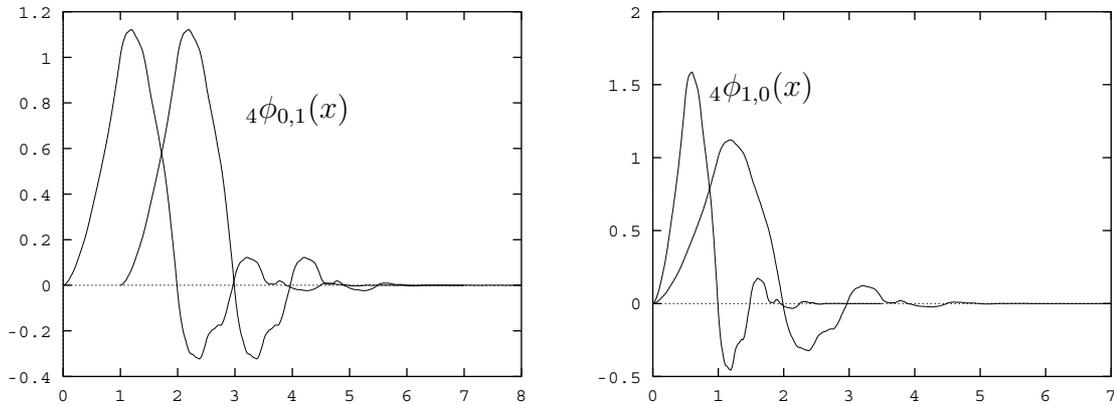


Figura 5.14: Traçado das funções ${}_4\phi_{0,1}(x)$ e ${}_4\phi_{1,0}(x)$.

Na figura 5.14 apresentam-se as funções ${}_4\phi_{0,1}(x)$ e ${}_4\phi_{1,0}(x)$. Estas funções foram obtidas a partir de uma translação inteira de ${}_4\phi(x)$ e de uma operação de dilatação efectuada sobre a mesma função de escala, respectivamente.

Como referido anteriormente, qualquer polinómio do terceiro grau pode ser representado de uma forma exacta pela combinação linear da função de escala ${}_4\phi(x)$ e de todas as suas translações inteiras. Tem-se,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k) ,$$

com

$$c_k = \int_{\mathbb{R}} \phi(x - k) (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx .$$

5.4 Wavelets bidimensionais

Até aqui apenas foram definidas wavelets numa dimensão. No entanto, e a exemplo do que acontece no caso das funções de Walsh, a sua generalização a domínios bi-dimensionais é imediata. Basta para tal considerar o produto cartesiano das funções unidimensionais anteriormente definidas. A função de escala bidimensional pode ser escrita na forma:

$$\Phi(x, y) = \phi(x) \phi(y).$$

Já a definição da wavelet primária bi-dimensional envolve as três funções seguintes:

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(x, y) &= \phi(x) \psi(y) ; \\ \Psi^{(2)}(x, y) &= \psi(x) \phi(y) ; \\ \Psi^{(3)}(x, y) &= \psi(x) \psi(y) . \end{aligned}$$

As translações e dilatações de $\Phi(x, y)$ e de $\Psi^{(l)}(x, y)$ (com $l = 1, 2, 3$) são obtidas através de,

$$\begin{aligned}\Phi_{j,(k_1,k_2)}(x, y) &= 2^{-j}\Phi(2^{-j}x - k_1, 2^{-j}y - k_2) = \phi_{j,k_1}(x) \phi_{j,k_2}(y) ; \\ \Psi_{(j_1,j_2),(k_1,k_2)}^{(l)}(x, y) &= 2^{-(j_1+j_2)/2}\Psi^{(l)}(2^{-j_1}x - k_1, 2^{-j_2}y - k_2) , \quad l = 1, 2, 3 .\end{aligned}$$

5.5 Obtenção do valor dos coeficientes a_k

A função de escala de cada uma das famílias de wavelets de Daubechies é determinada a partir da resolução da equação de dilatação (5.18). Sendo uma equação homogénea, a função $\phi(x)$ é determinada a menos de um factor de escala. Para se definir de uma forma única cada uma das funções de escala, é usual impor que a área definida por $\phi(x)$ seja unitária. Tem-se então que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1 . \quad (5.25)$$

A primeira condição a respeitar pelos coeficientes de filtro, a_k , advém directamente do facto do integral definido em (5.25) ser diferente de zero. Esta condição é geralmente conhecida na literatura como *condição de consistência*. Integrando a equação de dilatação obtém-se então:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2N-1} a_k \phi(2x - k) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\bar{x}) d\bar{x} \quad (\text{com } \bar{x} = 2x - k) .\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade anterior por $\int \phi(x) dx \neq 0$, obtém-se a condição:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} a_k = 2 . \quad (5.26)$$

Quando se impõe que a função de escala seja ortonormal a todas as suas translações inteiras, obtém-se a segunda condição a respeitar pelos coeficientes a_k . A condição de ortonormalidade pode ser escrita na forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \phi(x - k) dx = \delta_{0k} .$$

Substituindo na igualdade anterior a definição (5.18), obtém-se sucessivamente:

$$\begin{aligned}\delta_{0k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{2N-1} a_m \phi(2x - m) \sum_{n=0}^{2N-1} a_n \phi(2(x - k) - n) dx \\ &= \sum_{m=0}^{2N-1} a_m \sum_{n=0}^{2N-1} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2x - m) \phi(2x - (2k + n)) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2N-1} \sum_{n=0}^{2N-1} a_m a_n \delta_{m,2k+n} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2N-1} a_n a_{n+2k} .
 \end{aligned}$$

A segunda condição assim obtida pode ser escrita na forma:

$$\sum_{n=0}^{2N-1} a_n a_{n+2k} = 2\delta_{0k} \text{ (com } k \in Z\text{)}. \quad (5.27)$$

A relação anterior permite escrever N equações independentes envolvendo os valores dos coeficientes de filtro, a_k . É importante verificar que a condição (5.27), em conjunto com a definição (5.20) implica a ortonormalidade entre a wavelet primária $\psi(x)$ e todas as suas translações inteiras. Tendo em conta (5.20), pode escrever-se:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \psi(x - k) dx = \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{2N-1} (-1)^m a_{2N-1-m} \phi(2x - m) \sum_{n=0}^{2N-1} (-1)^n a_{2N-1-n} \phi(2(x - k) - n) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2N-1} \sum_{n=0}^{2N-1} (-1)^m (-1)^n a_{2N-1-m} a_{2N-1-n} \delta_{m,2k+n} = \\
 &\quad \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2N-1} (-1)^{2k+n} (-1)^n a_{2N-1-n-2k} a_{2N-1-n} = \\
 &\quad \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2N-1} a_{2N-1-n-2k} a_{2N-1-n} = \delta_{0k} , \text{ (atendendo a (5.27))} .
 \end{aligned}$$

As condições (5.26) e (5.27) permitem escrever $N + 1$ equações relacionando os $2N$ coeficientes a_k presentes na definição de $\phi(x)$ e $\psi(x)$. Para que estes coeficientes possam vir a ser determinados de forma única, torna-se necessário estabelecer uma terceira condição que permita obter as $N - 1$ equações em falta. Esta condição surge naturalmente quando se impõe que qualquer polinómio de grau igual ou inferior a $N - 1$ possa ser representado de uma forma exacta pela combinação linear da função de escala ${}_N\phi(x)$ e de todas as suas translações inteiras ${}_N\phi(x - k)$, com $k \in Z$. Qualquer polinómio do tipo,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{N-1} x^{N-1} , \quad (5.28)$$

pode ser representado, de uma forma exacta, por uma expansão do tipo:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \phi(x - k) . \quad (5.29)$$

Pré-multiplicando ambos os membros da equação (5.29) por $\psi(x)$ e integrando, obtém-se:

$$\int \psi(x) f(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int \phi(x - k) \psi(x) dx = 0 . \quad (5.30)$$

Substituindo em (5.30) a definição (5.28) vem:

$$\int \psi(x) (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{N-1} x^{N-1}) dx = 0 . \quad (5.31)$$

Esta igualdade tem que ser válida para todos os valores α_j , $j = 0, 1, \dots, N - 1$. Escolhendo $\alpha_j = 1$ e $\alpha_l = 0$, para $j \neq l$, obtém-se a seguinte condição:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) x^j dx = 0 , \quad j = 0, 1, \dots, N - 1 . \quad (5.32)$$

Substituindo na igualdade anterior a definição da wavelet primária (5.20) obtém-se sucessivamente:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) x^j dx = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2N-1} x^j (-1)^k a_{2N-1-k} \phi(2x - k) dx = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2N-1} \left(\frac{2x - k + k}{2} \right)^j (-1)^k a_{2N-1-k} \phi(2x - k) dx = \\ & 2^{-j-1} \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \sum_{k=0}^{2N-1} k^{j-r} (-1)^k a_{2N-1-k} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x})^r \phi(\bar{x}) d\bar{x} . \end{aligned}$$

Os integrais $\int x^r \phi(x) dx$ são não-nulos, uma vez que se pretende garantir que as funções $f(x) = x^r$, com $r = 0, 1, \dots, N - 1$, possam ser escritas como combinação linear da função de escala, $\phi(x)$, e das suas translações inteiras, $\phi(x - k)$. Como consequência, e tendo em conta a igualdade (5.32), pode escrever-se:

$$2^{-j-1} \sum_{r=0}^j \binom{j}{r} \sum_{k=0}^{2N-1} k^{j-r} (-1)^k a_{2N-1-k} = 0 , \quad j = 0, 1, \dots, N - 1 .$$

Escrevendo a equação anterior para os sucessivos valores de j , obtém-se finalmente:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k a_{2N-1-k} k^j = 0 , \quad j = 0, 1, \dots, N - 1 . \quad (5.33)$$

Esta condição aparece normalmente na literatura escrita na forma equivalente,

$$\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k a_k k^j = 0 , \quad j = 0, 1, \dots, N - 1 . \quad (5.34)$$

A condição (5.34) permite escrever N equações relacionando os coeficientes a_k . Recorde-se que uma vez estabelecidas as condições (5.26) e (5.27), ficam a faltar apenas $N - 1$ equações para determinar univocamente o valor dos coeficientes de filtro. Haverá algures uma equação redundante. Com efeito, é possível verificar que

a equação que resulta de (5.34) quando se considera $j = 0$ pode ser obtida também a partir de [196]:

$$\sqrt{2 \times eq(5.27)_{l=0} + 4 \times eq(5.27)_{l>0} - eq(5.26)^2} .$$

As $N - 1$ equações em falta podem então ser obtidas a partir de:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k a_k k^j = 0 , j = 1, 2, \dots, N - 1 . \quad (5.35)$$

Os valores dos $2N$ coeficientes de filtro a_k podem ser então obtidos através da resolução de um sistema de $2N$ equações não-lineares, escritas a partir das condições (5.26), (5.27) e (5.35). No seu artigo de 1988 [52], Daubechies lista os valores dos coeficientes de filtro para cada uma das famílias de wavelets. Esses valores podem ser encontrados na tabela apresentada no apêndice C.

Para ilustrar a aplicação das condições que permitem obter o valor dos coeficientes de filtro, apresentam-se as oito equações que conduzem à determinação dos diferentes valores de a_k , $k = 0, 1, \dots, 7$, para a família de wavelets com $N = 4$. A condição (5.26) permite escrever:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 2 .$$

De (5.27) obtém-se,

$$\begin{aligned} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 &= 2; \\ a_0 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_7 &= 0; \\ a_0 a_4 + a_1 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_7 &= 0; \\ a_0 a_6 + a_1 a_7 &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, de (5.35) vem,

$$\begin{aligned} -a_1 + 2 a_2 - 3 a_3 + 4 a_4 - 5 a_5 + 6 a_6 - 7 a_7 &= 0; \\ -a_1 + 4 a_2 - 9 a_3 + 16 a_4 - 25 a_5 + 36 a_6 - 49 a_7 &= 0; \\ -a_1 + 8 a_2 - 27 a_3 + 64 a_4 - 125 a_5 + 216 a_6 - 343 a_7 &= 0. \end{aligned}$$

A resolução deste conjunto de oito equações não-lineares permitirá recuperar os valores indicados na tabela referida anteriormente.

5.6 Geração das funções de escala

Uma vez conhecidos os valores dos coeficientes de filtro, é possível gerar a função de escala através da resolução da equação de dilatação (5.18). Não existindo solução analítica para esta equação, torna-se necessário recorrer a um procedimento numérico para obter a função $\phi(x)$.

A primeira e mais intuitiva forma de resolver (5.18) consiste em iterar directamente sobre a própria equação de definição [183, 1]. Partindo de ${}_N\phi_0(x) = 1/(2N - 1)$ em $[0, 2N - 1]$, itera-se sucessivamente na forma,

$${}_N\phi_j(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k {}_N\phi_{j-1}(2x - k) , \quad (5.36)$$

até se obter convergência, ou seja, até que $\phi_j(x) \simeq \phi_{j-1}(x)$. Embora este processo de determinação da função de escala seja conceptualmente bastante simples, não é o mais eficaz de um ponto de vista numérico. A precisão com que a função $\phi(x)$ é gerada depende do número de pontos considerado. Para além disso, há ainda que definir um critério de paragem que permita estabelecer o momento em que se interrompe o processo iterativo definido em (5.36).

Um outro método utilizado na construção das funções de escala envolve a utilização da transformada de Fourier [183, 37]. É o processo utilizado por Meyer [130] e também por Daubechies [52]. Efectuando a transformada de Fourier da definição de $\phi(x)$ obtém-se,

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(\xi) &= \sum_{k=0}^{2N-1} a_k \int \phi(2x - k) e^{i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{2N-1} a_k e^{i\xi x/2} \right) \int \phi(\bar{x}) e^{i\xi \bar{x}/2} d\bar{x} \quad (\text{com } \bar{x} = 2x - k) \\ &= P(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2) , \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde

$$P(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} a_k e^{ik\xi} .$$

Repetindo agora a operação (5.37) para $\xi/2$, depois para $\xi/4$, e assim sucessivamente, obtém-se a definição:

$$\widehat{\phi}(\xi) = \left[\prod_{j=1}^M P(\xi/2^j) \right] \widehat{\phi}(\xi/2^M).$$

Tendo em atenção que devido à condição de normalização (5.25) se verifica que $\widehat{\phi}(0) = \int \phi(x) dx = 1$, a igualdade anterior transforma-se na definição,

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^M P(\xi/2^j) , \quad (5.38)$$

válida para valores suficientemente elevados do parâmetro M . Uma vez obtida a função $\widehat{\phi}(\xi)$, a aplicação de uma transformada de Fourier inversa conduz à obtenção da função de escala pretendida.

Este processo de construção, embora seja bastante utilizado no tratamento matemático e no desenvolvimento teórico dos sistemas de wavelets, não é muito eficaz

quando se pretende utilizá-lo em aplicações numéricas. Nestes casos, a geração da função de escala passa, como foi referido, pela obtenção de $\hat{\phi}(\xi)$ através da aplicação de (5.38), colocando-se desde logo a questão do número de factores que se devem considerar no produto indicado. Depois há ainda que efectuar uma transformada de Fourier inversa. Não é pois difícil perceber que este procedimento se pode tornar significativamente pesado e moroso.

O método de geração mais elegante, e simultaneamente o mais eficaz, foi proposto por Strang [183]. É o processo de construção de wavelets mais utilizado hoje em dia nas aplicações práticas, e o que é seguido neste trabalho. Baseia-se, de uma forma bastante simples, na aplicação recursiva da equação de dilatação (5.18).

O método de Strang permite calcular, numa primeira etapa, o valor que a função de escala toma em cada um dos inteiros pertencentes ao intervalo em que se encontra definida. Uma vez obtida esta informação, a aplicação sucessiva da equação (5.18) permite obter os valores que $\phi(x)$ toma em todos os pontos diádicos $x = k2^{-j}$, $k, j \in Z$.

Recorde-se agora que $\text{supp}_N \phi(x) = [0, 2N - 1]$. Em consequência, verifica-se que $\phi(j) = 0$ para todos os inteiros j não pertencentes ao intervalo onde a função de escala é suportada. Escrevendo a equação de dilatação (5.18) para cada um dos inteiros pertencentes ao intervalo $[0, 2N - 1]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= a_0\phi(0) ; \\ \phi(1) &= a_0\phi(2) + a_1\phi(1) + a_2\phi(0) ; \\ \phi(2) &= a_0\phi(4) + a_1\phi(3) + a_2\phi(2) + a_3\phi(1) + a_4\phi(0) ; \\ &\vdots \\ \phi(2N - 3) &= a_{2N-5}\phi(2N - 1) + a_{2N-4}\phi(2N - 2) + a_{2N-3}\phi(2N - 3) \\ &\quad + a_{2N-2}\phi(2N - 4) + a_{2N-1}\phi(2N - 5) ; \\ \phi(2N - 2) &= a_{2N-3}\phi(2N - 1) + a_{2N-2}\phi(2N - 2) + a_{2N-1}\phi(2N - 3) ; \\ \phi(2N - 1) &= a_{2N-1}\phi(2N - 1) . \end{aligned}$$

Das equações anteriores, e tendo em atenção que $a_0 \neq 0$ e $a_{2N-1} \neq 0$, conclui-se que $\phi(0) = \phi(2N - 1) = 0$.

Para os restantes inteiros, $1 \leq j \leq 2N - 2$, as igualdades anteriores podem ser

escritas matricialmente na forma,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{2N-5} & a_{2N-6} & a_{2N-7} & a_{2N-8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{2N-3} & a_{2N-4} & a_{2N-5} & a_{2N-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{2N-1} & a_{2N-2} & a_{2N-3} & a_{2N-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & a_{2N-1} & a_{2N-2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi(1) \\ \phi(2) \\ \phi(3) \\ \phi(4) \\ \vdots \\ \phi(2N-5) \\ \phi(2N-4) \\ \phi(2N-3) \\ \phi(2N-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(1) \\ \phi(2) \\ \phi(3) \\ \phi(4) \\ \vdots \\ \phi(2N-5) \\ \phi(2N-4) \\ \phi(2N-3) \\ \phi(2N-2) \end{bmatrix},$$

ou ainda, de um modo mais compacto:

$$\mathbf{L}\Phi = \Phi. \quad (5.39)$$

A matriz \mathbf{L} tem dimensão $2N - 2$. Os seus coeficientes podem ser calculados através da igualdade:

$$L_{ij} = a_{2i-j}.$$

No vector Φ encontram-se listados os valores que a função de escala toma nos inteiros pertencentes ao intervalo $]0, 2N - 1[$. A igualdade (5.39) permite verificar, de um modo bastante simples, que o cálculo de tais valores pode ser conseguido através da determinação do vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ da matriz \mathbf{L} . Para tal, basta escrever (5.39) na forma,

$$(\mathbf{L} - \mathbf{I})\Phi = \mathbf{0}. \quad (5.40)$$

Como em qualquer problema de valores e vectores próprios, a solução de (5.40) não é única. Como consequência, torna-se necessário estabelecer uma condição adicional que permita calcular univocamente os valores listados no vector Φ . É então usual impor-se que:

$$\sum_{k=1}^{2N-2} \phi(k) = 1. \quad (5.41)$$

No apêndice C explica-se a razão pela qual se utiliza esta condição. Refira-se no entanto que (5.41) é consequência directa da condição de normalização definida em (5.25).

Os valores que a função de escala toma em cada um dos inteiros $j = 1, 2, \dots, 2N - 2$ são então calculados aplicando a condição (5.41) à solução obtida a partir de (5.40).

Como foi atrás referido, uma vez calculados estes valores, a aplicação repetida da equação de dilatação (5.18) permite obter o valor da função de escala em todos os pontos diádicos ($x = k2^{-j}$, j e $k \in \mathbb{Z}$) pertencentes ao intervalo de definição.

Tem-se então,

$$\begin{aligned} \phi(k/2) &= \sum_{m=0}^{2N-1} a_m \phi(k-m) ; \\ \phi(k/4) &= \sum_{m=0}^{2N-1} a_m \phi(k/2-m) ; \\ &\vdots \\ \phi(k 2^{-j}) &= \sum_{m=0}^{2N-1} a_m \phi(k 2^{-j+1} - m). \end{aligned}$$

A construção da derivada da função de escala parece à primeira vista dificultada pelo facto de não haver qualquer definição analítica explícita para $\phi(x)$. No entanto, a construção proposta por Strang pode ser adaptada de um modo extremamente simples ao cálculo de $\phi'(x)$. Derivando ambos os membros da equação de dilatação (5.18) obtém-se:

$$\phi'(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} 2 a_k \phi'(2x - k) . \quad (5.42)$$

Utilizando um raciocínio análogo ao que permitiu estabelecer a equação (5.39), pode escrever-se,

$$2 \mathbf{L} \Phi' = \Phi' , \quad (5.43)$$

onde se lista, no vector Φ' , o valor que a derivada da função de escala toma em cada um dos inteiros pertencentes ao intervalo $]0, 2N - 1[$. Escrevendo a igualdade (5.43) na forma,

$$\left(\mathbf{L} - \frac{1}{2} \mathbf{I}\right) \Phi' = \mathbf{0} , \quad (5.44)$$

verifica-se que o vector Φ' é o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1/2$ da matriz \mathbf{L} . Tal como anteriormente, é necessário estabelecer uma condição adicional de modo a que seja possível determinar de uma forma única os valores que a derivada da função de escala toma em cada um dos inteiros $j = 1, 2, \dots, 2N - 2$. No apêndice C explica-se a razão pela qual se costuma utilizar a seguinte condição de normalização:

$$\sum_{k=1}^{2N-2} -k \phi'(k) = 1 . \quad (5.45)$$

Convém salientar que as funções pertencentes à família de wavelets de Daubechies com $N = 2$ não são diferenciáveis. Verifica-se também que as funções pertencentes à família com $N = 3$ não são diferenciáveis nos pontos diádicos [168]. Para as famílias com $N \geq 4$, as funções de escala (e em consequência todo o sistema de wavelets) são pelo menos uma vez diferenciáveis. Este aspecto será estabelecido com maior rigor na secção seguinte.

Ilustra-se agora a aplicação do método de Strang na construção da função de escala ${}_4\phi(x)$ e da sua derivada. Recorde-se que $\text{sup}_{{}_4\phi(x)} = [0, 7]$. O primeiro passo do método de geração consiste na determinação do valor que a função de escala

{derivada da função de escala} toma nos inteiros $j = 1, 2, \dots, 6$ através da resolução da equação (5.40) {(5.44)} em conjunto com a condição de normalização (5.41) {(5.45)}.

A matriz \mathbf{L} terá o seguinte formato,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & a_6 \end{bmatrix},$$

onde os valores de a_0, a_1, \dots, a_7 se encontram listados na tabela apresentada no apêndice C.

As condições de normalização (5.41) e (5.45) conduzem às seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(4) + \phi(5) + \phi(6) &= 1; \\ -\phi'(1) - 2\phi'(2) - 3\phi'(3) - 4\phi'(4) - 5\phi'(5) - 6\phi'(6) &= 1. \end{aligned}$$

Obtêm-se os seguintes valores:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(1) = 1.00716998 \\ \phi(2) = -0.33836960 \times 10^{-1} \\ \phi(3) = 0.39610465 \times 10^{-1} \\ \phi(4) = -0.11764359 \times 10^{-1} \\ \phi(5) = -0.11979577 \times 10^{-2} \\ \phi(6) = 0.18829417 \times 10^{-4} \end{bmatrix}; \quad \Phi' = \begin{bmatrix} \phi'(1) = 1.77607243 \\ \phi'(2) = -2.78534991 \\ \phi'(3) = 1.19245278 \\ \phi'(4) = -0.13137453 \\ \phi'(5) = -0.53571038 \times 10^{-1} \\ \phi'(6) = 0.17703968 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

A aplicação repetida das equações (5.18) e (5.42) permite determinar o valor que a função de escala e a sua derivada tomam em cada um dos pontos diádicos no intervalo de definição $[0, 7]$. Na figura 5.15 representam-se as funções ${}_4\phi(x)$ e ${}_4\phi'(x)$ obtidas desta forma. As derivadas das restantes funções de escala encontram-se representadas na figura 5.16.

5.7 Propriedades das wavelets

As principais propriedades dos sistemas de wavelets têm vindo a ser referidas ao longo das secções anteriores. Não será contudo demais listar de novo as mais relevantes. É o que é feito de seguida, onde se procura condensar e sistematizar alguma da informação apresentada anteriormente.

A apresentação das propriedades das wavelets é acompanhada, quando necessário, de alguns breves comentários. As demonstrações, algumas das quais bastante extensas, serão omitidas, podendo no entanto ser encontradas nalgumas das referências já citadas, nomeadamente em [52, 130, 37].

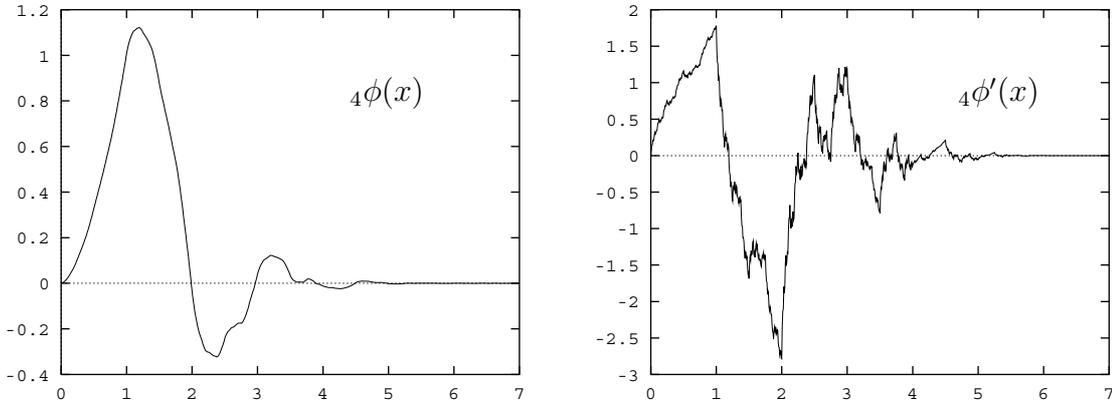


Figura 5.15: Representação das wavelets $4\phi(x)$ e $4\phi'(x)$.

P1 As wavelets $\psi_{j,k}(x)$ (com $j, k \in \mathbb{Z}$) formam uma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$.

O conjunto formado por todas as translações e dilatações da wavelet primária $\psi(x)$, constitui um conjunto completo de funções ortonormais. Verifica-se então que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(x) \psi_{m,n}(x) dx = \delta_{jm} \delta_{kn} \quad (j, k, m, n \in \mathbb{Z}) . \quad (5.46)$$

P2 As funções $\phi_{j,k}(x)$ (com $k \in \mathbb{Z}$) formam uma base ortonormada do sub-espço V_j .

De acordo com **P2**, o conjunto formado por todas as translações da dilatação j da função de escala fornece uma base para o sub-espço V_j , definido aquando da apresentação dos conceitos referentes à análise multiresolução. Recorde-se que $V_j \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ quando $j \rightarrow \infty$. Verifica-se então que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j,k}(x) \phi_{j,m}(x) dx = \delta_{km} \quad (j, k, m \in \mathbb{Z}) . \quad (5.47)$$

P3 Para um determinado valor do parâmetro de dilatação j , verifica-se que as funções $\phi_{j,k}(x)$ e $\psi_{j,m}(x)$ são ortonormais.

Tem-se então que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j,k}(x) \psi_{j,m}(x) dx = \delta_{km} \quad (j, k, m \in \mathbb{Z}) . \quad (5.48)$$

P4 Para cada família de wavelets de Daubechies com $N \geq 3$, existe um valor $\lambda > 0$ para o qual se verifica ${}_N\phi(x), {}_N\psi(x) \in C^\lambda$.

De acordo com Daubechies [52], os valores de λ para cada uma das famílias de wavelets são os seguintes:

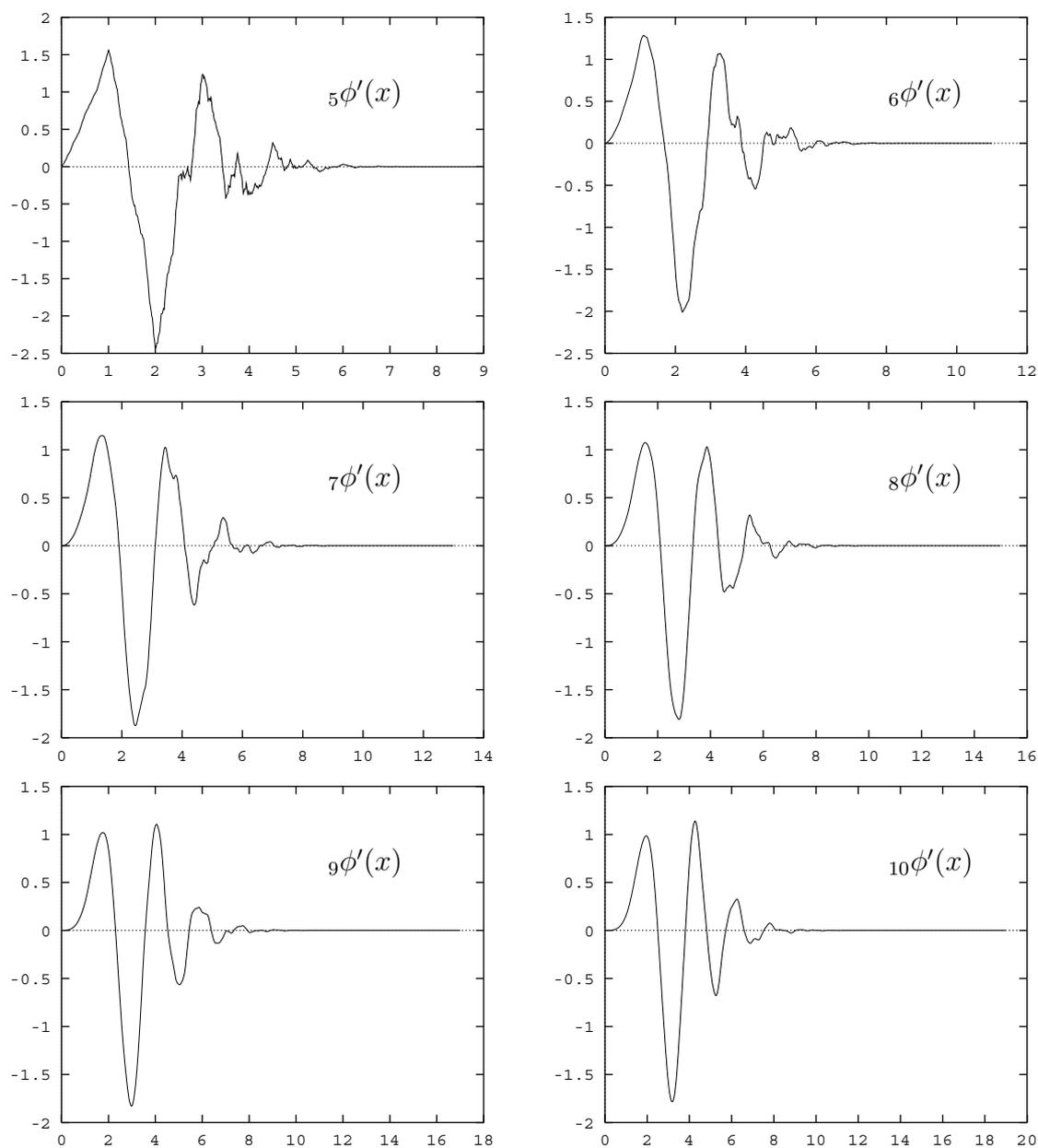


Figura 5.16: Representação das derivadas das funções de escala; $N = 5, \dots, 10$.

N	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	0.915	1.275	1.596	1.888	2.158	2.415	2.661	2.902

Tabela 5.1: Valores de $\lambda > 0$ para os quais ${}_N\phi(x), {}_N\psi(x) \in C^\lambda$.

Os valores indicados na tabela 5.1 justificam a afirmação efectuada anteriormente segundo a qual as funções de escala ${}_N\phi(x)$, com $N \geq 4$, seriam pelo menos uma vez diferenciáveis. Permitem também confirmar a ideia de que a *regularidade* das wavelets aumenta à medida que cresce o valor de N .

P5 Qualquer polinómio de grau igual ou inferior a $N - 1$ pode ser representado de uma forma exacta através de uma combinação linear da função de escala ${}_N\phi(x)$ e de todas as suas translações inteiras ${}_N\phi(x - k)$, com $k \in Z$.

Para assegurar esta propriedade, recorde-se que é imposta a condição (5.34) para o valor dos coeficientes de filtro a_k .

5.8 Aproximação de funções

As funções $\psi_{j,k}(x)$ ($j, k \in Z$) formam uma base de $L^2(R)$. Como tal, qualquer função $f(x) \in L^2(R)$ pode ser representada na forma,

$$f(x) = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) , \tag{5.49}$$

onde os coeficientes da expansão são determinados a partir da igualdade:

$$c_{j,k} = \int_{\sup_N \psi_{j,k}(x)} f(x) \psi_{j,k}(x) dx . \tag{5.50}$$

Tendo em conta o carácter local das wavelets, quando se pretende aproximar uma função $f(x)$ num dado intervalo $[a, b]$, há apenas que considerar na expansão as funções $\psi_{j,k}(x)$ que tomem valores diferentes de zero para alguns pontos pertencentes àquele mesmo intervalo. Para identificar quais são essas funções, recorde-se que $\sup_N \psi_{j,k}(x) = [k \times 2^{-j}, (2N - 1 + k) \times 2^{-j}]$. De modo a garantir que a wavelet $\psi_{j,k}(x)$ tome valores não-nulos no intervalo $[a, b]$ é necessário garantir que:

$$\begin{cases} k 2^{-j} < b \\ (2N - 1 + k) 2^{-j} > a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < b 2^j \\ k > a 2^j - 2N + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq b 2^j - 1 \\ k \geq a 2^j + 2(1 - N) \end{cases} . \tag{5.51}$$

A expansão da função $f(x)$ naquele intervalo pode ser escrita na forma,

$$f(x) = \sum_{j \in Z} \sum_{k=a 2^j + 2(1-N)}^{b 2^j - 1} c_{j,k} \psi_{j,k}(x),$$

e onde os coeficientes $c_{j,k}$ continuam a ser dados por (5.50).

Considere-se agora o intervalo $[0, 1]$. As wavelets ${}_N\psi_{j,k}(x)$ que se torna necessário considerar quando se pretende modelar uma dada função naquele intervalo são, para um dado valor do parâmetro j , as que verificam a condição $2(1 - N) \leq k \leq 2^j - 1$. O número destas funções é dado por:

$$n_j = 2^j - 1 - 2(1 - N) + 1 = 2^j + 2(N - 1) . \tag{5.52}$$

Como exemplo, considere-se a família de wavelets com $N = 2$. Considerando o parâmetro de dilatação $j = 2$, haverá $2^2 + 2(2 - 1) = 6$ funções ${}_2\psi_{2,k}(x)$ cujo intervalo de definição tem uma intersecção não-nula com o intervalo $[0, 1]$. Os valores de k são obtidos a partir de (5.51), pelo que se terá: $-2 \leq k \leq 3$. A informação contida na figura 5.17 permite verificar de uma forma intuitiva estes valores.

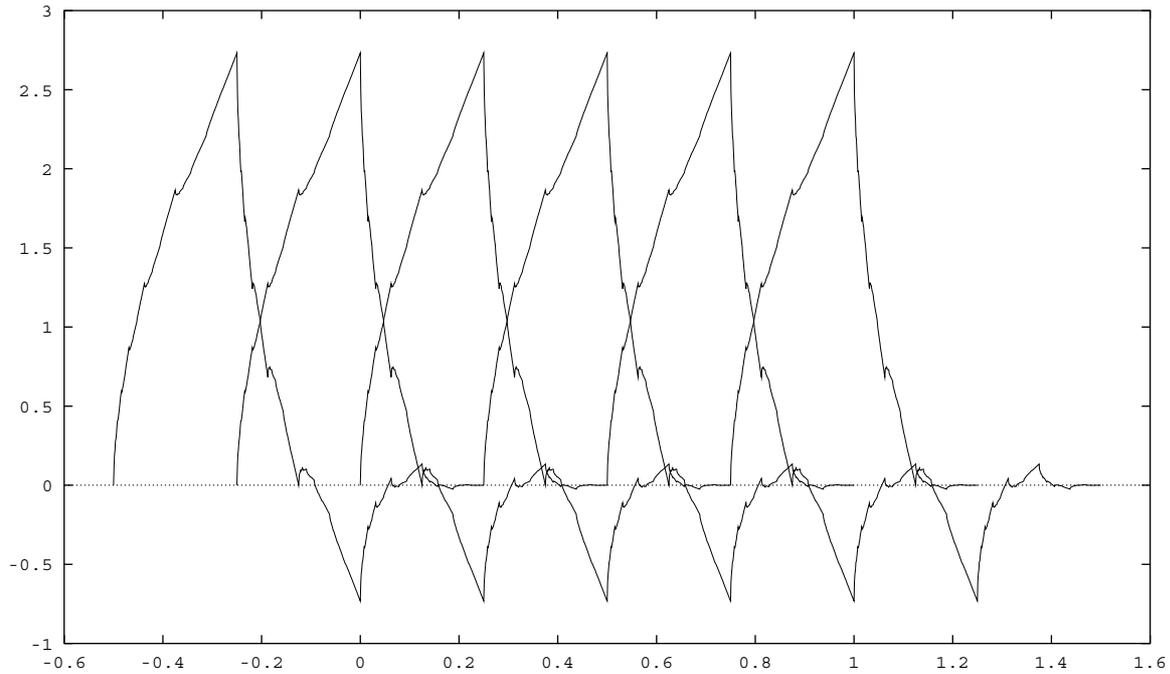


Figura 5.17: Wavelets no intervalo $[0, 1]$.

Na expansão (5.49) são utilizadas as dilatações positivas e negativas da wavelet primária $\psi(x)$. Existe uma outra forma de efectuar a representação de uma dada função $f(x) \in L^2(R)$ numa base de wavelets. Esta forma alternativa faz intervir apenas as dilatações positivas da função $\psi(x)$. É usualmente denominada como *forma canónica* da expansão em série de wavelet e pode ser escrita na forma,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \phi(x - k) + \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (5.53)$$

onde os coeficientes d_k e $c_{j,k}$ são obtidos através das igualdades:

$$d_k = \int_{\text{sup}_N \phi_{0,k}(x)} f(x) \phi(x - k) dx, \quad (5.54)$$

$$c_{j,k} = \int_{\text{sup}_N \psi_{j,k}(x)} f(x) \psi_{j,k}(x) dx \quad (j, k \in \mathbb{Z}; j \geq 0). \quad (5.55)$$

Embora tal assunto não seja abordado neste trabalho, a aplicação da transformada de wavelet (ou da sua inversa) pode ser efectuada através da implementação de algoritmos simples e bastante eficazes [22], à semelhança do que se passa com as transformadas rápidas de Fourier e de Walsh. Como exemplo, refira-se o algoritmo

de Mallat [124] que permite efectuar de uma forma simples e elegante a decomposição, e a subsequente reconstrução, de um dado sinal. Este algoritmo explora os conceitos da análise multiresolução e trabalha directamente com os coeficientes de filtro a_k , nunca aparecendo explicitamente a definição de wavelets. Mais detalhes sobre a fundamentação matemática ou modo de utilização deste algoritmo podem ser encontrados, por exemplo, nas referências [52, 183, 196].

Uma terceira forma para representar uma dada função $f(x) \in L^2(R)$ numa base de wavelets consiste em efectuar a sua projecção no sub-espço V_j (ver secção referente à análise multiresolução). Ter-se-à então, para um dado valor do parâmetro de escala j ,

$$f(x) \simeq P_j f(x) = \sum_{k \in Z} d_{j,k} \phi_{j,k}(x) \quad j, k \in Z, \quad (5.56)$$

com

$$d_{j,k} = \int_{\text{sup}_N \phi_{j,k}(x)} f(x) \phi_{j,k}(x) dx . \quad (5.57)$$

Como já anteriormente foi referido, $P_j f(x) \rightarrow f(x)$ quando $j \rightarrow \infty$.

Esta forma de aproximação é adoptada por um grande número de autores que utilizam os sistemas de wavelets para efectuar a resolução numérica de equações diferenciais às derivadas parciais. É o caso por exemplo de Williams [196], Amaratunga [3, 4, 5], Qian e Weiss [170], Glowinski *et al.* [89] e Bertoluzza [20, 21].

Tem sido repetidas vezes afirmado ao longo deste texto que os sistemas de wavelets formam bases para o espaço $L^2(R)$. Todas as construções até aqui efectuadas assumem que se trabalha com toda a recta dos reais. No entanto, há determinadas situações para as quais se torna necessário confinar a análise a um dado intervalo fechado, $[a, b]$. É o que se passa, por exemplo, quando se pretende efectuar a resolução numérica de equações diferenciais, onde os operadores são definidos num certo intervalo e onde se impõem condições de fronteira nos extremos desse intervalo. É também a situação que surge quando se pretendem utilizar as wavelets como funções de aproximação nos modelos híbrido-mistos de elementos finitos aqui apresentados.

Quais são então as alterações que se torna necessário introduzir na definição dos sistemas de wavelets de forma a que seja possível obter bases de funções para o espaço $L^2[a, b]$? A solução mais simples é aquela que prevê a utilização das wavelets que foram obtidas em $L^2(R)$, sendo no entanto consideradas apenas aquelas para as quais o seu intervalo de definição tenha uma intersecção não-nula com o intervalo $[a, b]$. Haverá então dois tipos de situações: ou o suporte da wavelet está completamente contido em $[a, b]$, ou há uma parte da função que se encontra fora daquele intervalo. Neste último caso *trunca-se* a wavelet, considerando na análise apenas o domínio contido no intervalo em causa. Na figura 5.18 ilustram-se as wavelets que se devem considerar aquando da análise de um problema no intervalo $[0, 1]$, tendo em conta que $N = 2$ e o parâmetro de dilatação $j = 2$ (compare-se com a figura 5.17).

Este tipo de procedimento origina dois tipos de problemas que importa desde já realçar. O primeiro tem a ver com a perda da condição de ortonormalidade entre as

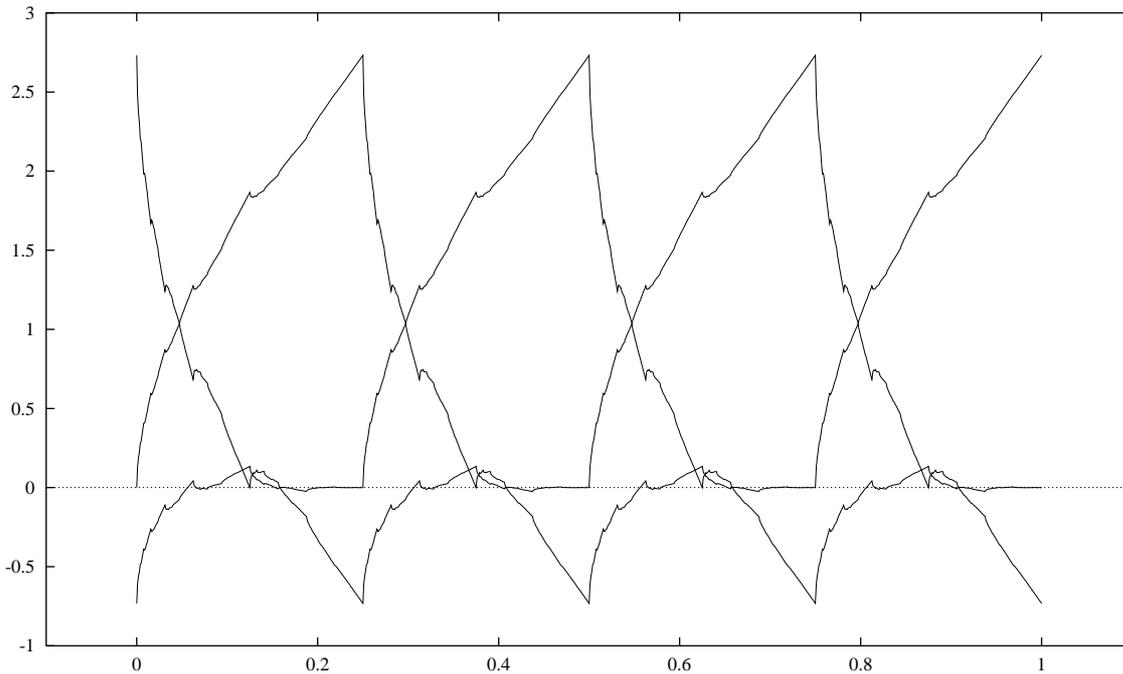


Figura 5.18: *Wavelets no intervalo* $[0, 1]$.

funções desta forma obtidas e o segundo com a escolha das wavelets a utilizar.

As igualdades (5.46), (5.47) e (5.48) verificam-se quando os limites de integração se estendem à reunião dos intervalos de definição das duas funções integrandas. Quando se restringe a análise e, por consequência, os limites de tais integrações a um determinado intervalo fixo, $[a, b]$, deixa de se poder garantir a condição de ortogonalidade sempre que parte da intersecção dos suportes das funções integrandas caia fora desse intervalo. Perde-se então parcialmente uma das mais importantes propriedades dos sistemas de wavelets. Daqui resulta que os coeficientes das expansões em série de wavelets deixam de poder ser obtidos directamente a partir das definições (5.50), (5.54), (5.55) e (5.57). Para a sua determinação passa a ser necessário efectuar a resolução de um sistema de equações lineares, o qual pode ser escrito genericamente na forma,

$$[K_{mn}] \times \{c_{j,n}\} = \{t_m\} \quad (m, n = 1, 2, \dots, n_f), \quad (5.58)$$

onde n_f denota o número de funções utilizadas e \mathbf{c} é um vector onde se reúnem os coeficientes da expansão. Quando se utiliza na aproximação o formato (5.56), a matriz dos coeficientes, \mathbf{k} , e os termos independentes, \mathbf{t} , do sistema (5.58) são calculados através das igualdades:

$$K_{mn} = \int_a^b \phi_{j,m}(x) \phi_{j,n}(x) dx ,$$

$$t_m = \int_a^b \phi_{j,m}(x) f(x) dx .$$

O segundo problema originado pelo procedimento acima descrito tem a ver com a escolha das funções a utilizar. Muito embora a expressão (5.51) permita identificar de imediato quais e quantas são as wavelets que tomam valores diferentes de zero no intervalo em estudo, nem sempre é conveniente considerá-las todas na análise que se pretende efectuar. Tal sucede por haver zonas do intervalo de definição em que as wavelets tomam valores muito próximos de zero (ver figura 5.13) devido à existência de coeficientes de filtro com valores muito pequenos (ver tabela no anexo C). Se por coincidência for apenas essa a zona que fica *dentro* do intervalo $[a, b]$, então existirá na base uma função cuja norma, calculada naquele intervalo, é insignificante. Esta situação é de evitar, uma vez que pode ocasionar problemas de instabilidade numérica, para além de aumentar desnecessariamente o número de funções a considerar na análise. Há então que ter o cuidado de seleccionar as wavelets que possuam em $[a, b]$ uma norma, definida por

$$\|\phi_{n,k}(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_{n,k}^2(x) dx} ,$$

igual ou superior a um dado valor pré-estabelecido. Este parâmetro é aqui fixado em 1×10^{-3} . Importa no entanto desde já sublinhar que a escolha deste valor de referência encerra algumas dificuldades, tal como se terá ocasião de constatar em capítulos subsequentes.

Embora apresentando estas duas limitações, é esta a metodologia seguida neste trabalho para definir as bases de wavelets utilizadas na aproximação dos campos de tensões e de deslocamentos. Importa no entanto sublinhar que têm surgido recentemente na literatura alguns métodos que, partindo da definição dos sistemas wavelets em $L^2(R)$, permitem construir bases ortonormadas de wavelets em $L^2[a, b]$ mantendo todas as propriedades anteriormente referidas. Embora não tenham sido aqui utilizados, o estudo e a implementação de tais métodos e algoritmos será essencial num futuro próximo. Nesta área são de referir os trabalhos de Meyer [38], Cohen e Daubechies [38], Bertoluzza [21] e Auscher [9].

Como curiosidade, refira-se que no caso do sistema de funções de Haar não há qualquer dificuldade em definir uma base de funções ortonormais em $[0, 1]$. Isto sucede porque o *comprimento* do suporte da função de escala e da wavelet primária é unitário. Como tal, os comprimentos dos intervalos em que se encontram definidas todas as dilatações daquelas funções são sempre sub-múltiplos da unidade. Em consequência, o suporte de qualquer função de Haar que tenha valores não-nulos em $[0, 1]$ estará completamente contido naquele intervalo.

Na figura 5.19 encontra-se ilustrada a expansão da função trigonométrica $f(t) = \sin(2\pi t)$ definida no intervalo $0 \leq t \leq 1$. Utiliza-se a expressão (5.56) com $j = 0$ e os coeficientes $c_{0,k}$ são determinados resolvendo o sistema de equações (5.58). Tal como seria de esperar, a qualidade da aproximação melhora à medida que se consideram famílias de wavelets com um valor de N mais elevado.

Na tabela 5.2 apresenta-se, para cada caso, o número de funções utilizadas na ex-

N	3	4	5	10
n_f	5	6	8	11
$T1$	0.09	0.12	0.19	0.60
$T2$	0.20	0.26	0.32	0.73

Tabela 5.2: Número de funções e tempos de cálculo (segundos) dispendidos na aproximação para $j = 0$.

pansão e o tempo de CPU (em segundos) gasto na análise. O valor apresentado para $T1$ engloba o tempo dispendido na geração das wavelets e na montagem e resolução do sistema de equações lineares que conduz à determinação dos coeficientes da expansão. O valor de $T2$ corresponde ao tempo total da análise, onde para além de $T1$ se inclui o tempo gasto em operações de pós-processamento, às quais corresponde a sobreposição das funções por forma a efectuar a recomposição da função inicial.

A análise dos resultados permite constatar a eficiência do processos de decomposição e recomposição. Verifica-se por outro lado que mesmo a utilização de um pequeno número de termos na série conduz a aproximações de muito boa qualidade. Por fim, salienta-se que o número de funções utilizado é sempre inferior ao valor indicado pela aplicação directa da expressão (5.52).

Para cada uma das famílias de wavelets, o aumento da qualidade da aproximação pode ser conseguido à custa da consideração de um parâmetro de dilatação j de valor crescente. A figura 5.20, onde se apresentam as aproximações obtidas para diferentes valores de j (para a família de funções com $N = 3$), ilustra esta afirmação. Na tabela 5.3 encontram-se listados o número de funções utilizado em cada uma das aproximações e o tempo de cálculo (em segundos) dispendido.

j	0	1	2	3	4	5
n_f	5	6	8	12	20	36
$T1$	0.09	0.09	0.10	0.11	0.15	0.23
$T2$	0.20	0.21	0.23	0.24	0.28	0.34

Tabela 5.3: Número de funções e tempos de cálculo (segundos) dispendidos na aproximação para $N = 3$.

5.9 Resolução numérica de equações diferenciais

Tem-se vindo a assistir, nestes últimos anos, ao aparecimento de inúmeros trabalhos em que são utilizados sistema de wavelets na resolução numérica de equações diferenciais. A utilização de tais funções tem sido muito bem sucedida, quer do ponto de vista teórico, quer do ponto de vista computacional.

As razões para este sucesso têm vindo a ser enunciadas ao longo de todo este

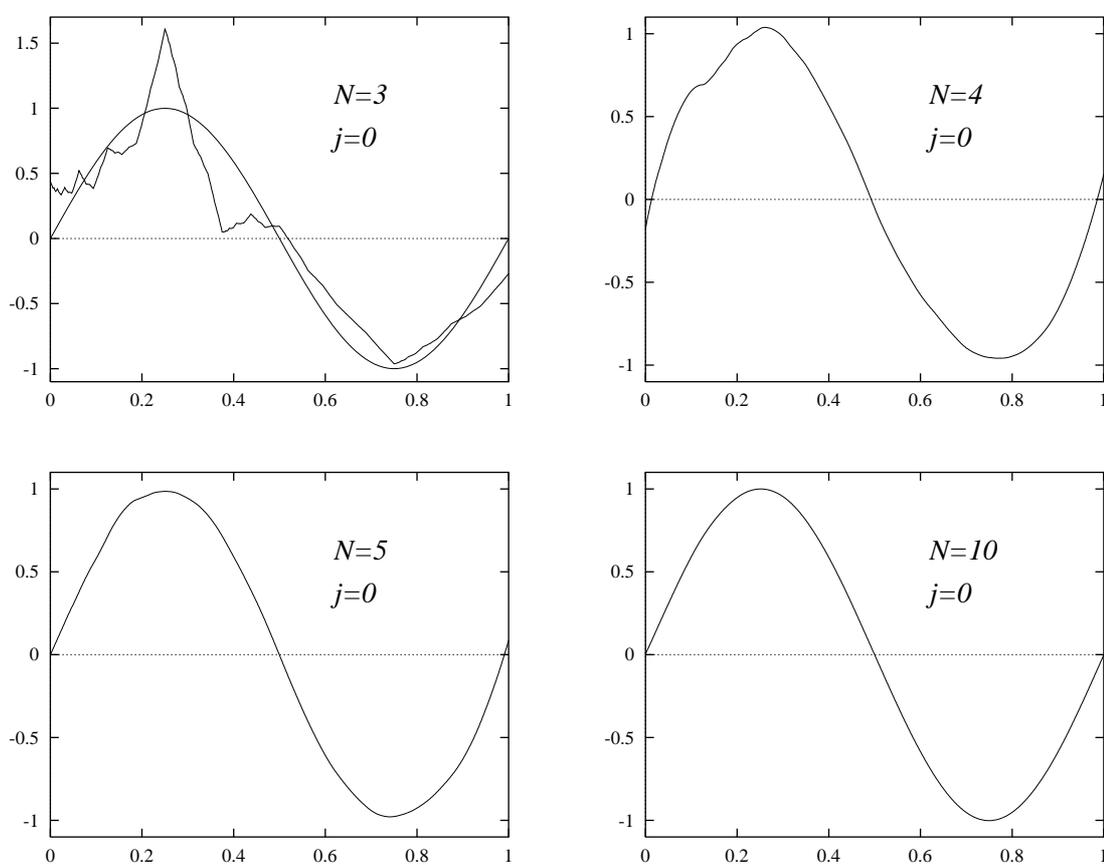


Figura 5.19: Aproximação da função $f(t) = \sin(2\pi t)$; wavelets com $j = 0$.

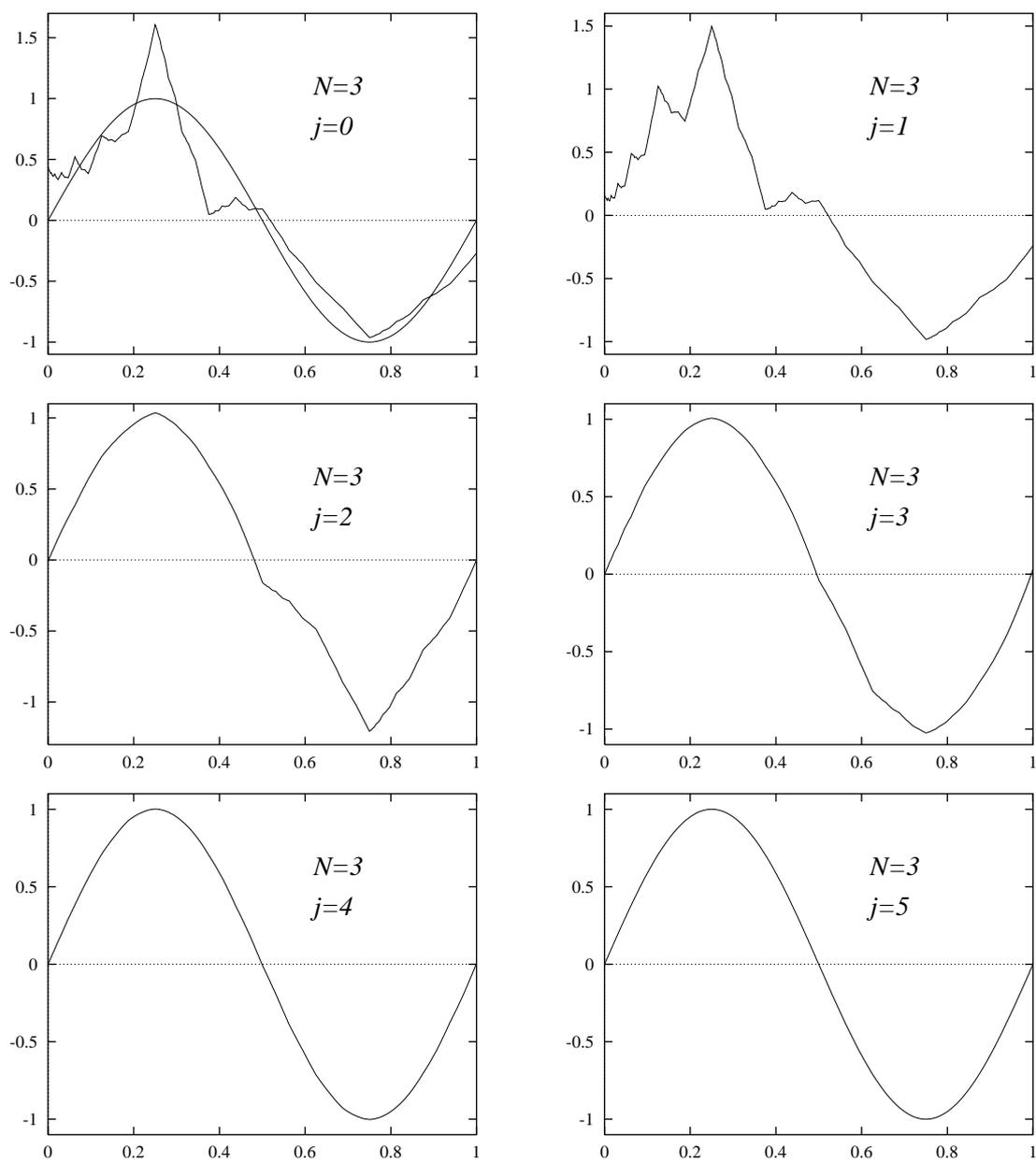


Figura 5.20: Aproximação da função $f(t) = \sin(2\pi t)$; wavelets com $N = 3$.

capítulo. É no entanto de sublinhar a importância que o comportamento local (quer no domínio do espaço/tempo, quer no domínio da frequência), em conjunto com a facilidade com que se podem obter algoritmos adaptativos, pode vir a desempenhar no desenvolvimento de ferramentas numéricas para a resolução de equações diferenciais. A definição local das wavelets permite compreender que o efeito de Gibbs, sempre que ocorre, se encontra localizado junto às singularidades, não se propagando ao restante domínio [20].

A utilização de sistemas de wavelets permite também obter algoritmos eficazes para a resolução de problemas evolutivos. Utilizando este tipo de funções, é possível, a partir do conhecimento da solução para um dado instante, prever de uma forma bastante simples o número restrito de graus de liberdade que são precisos para representar (com uma dada precisão), a solução do problema no passo de tempo seguinte [20, 21, 89].

Numerosos têm sido os trabalhos publicados sobre a aplicação de wavelets na resolução de equações diferenciais. Podem encontrar-se nas referências alguns destes trabalhos. É o caso dos artigos de Williams e Amaratunga [3, 4, 5], Glowinski [89], Qian e Weiss [170], Jaffard [102] e Bertoluzza [20, 21].

Com o intuito de ilustrar a aplicação de wavelets nesta área e simultaneamente vincar uma vez mais as características e potencialidade de tais funções, é efectuada de seguida a resolução numérica do seguinte problema de Neumann [89]. Resolver

$$-u'' + u = (1 + \pi^2) \sin(\pi x) + 1 \text{ com } x \in [0, 1] ,$$

sujeito às condições de fronteira,

$$-u'(0) = u'(1) = -\pi .$$

Para efectuar a resolução numérica desta equação diferencial, adopta-se um procedimento baseado no método de Galerkin [3, 20, 89]. A formulação variacional do problema de Neumann aqui em estudo pode ser escrita na forma,

Determinar $u \in V = H^1 [0, 1]$ de forma a que :

$$a(u, v) = L(v), \text{ para qualquer } v \in H^1 [0, 1] . \tag{5.59}$$

Em (5.59), $a : V \times V \rightarrow R$ representa uma forma bilinear, contínua e elíptica sobre $V \times V$. Isto significa que existe um escalar $\alpha > 0$ para o qual se verifica

$$a(u, v) \geq \alpha \|v\|^2 , \forall v \in H^1 [0, 1] .$$

Ainda em (5.59), $L : V \rightarrow R$ é linear e contínua. É possível verificar que para o problema em estudo se tem [89],

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx \quad \forall u, v \in H^1 [0, 1] , \tag{5.60}$$

$$L(v) = \int_0^1 [(1 + \pi^2) \sin(\pi x) + 1] v dx - \pi v(0) - \pi v(1). \quad (5.61)$$

Para resolver numericamente a forma variacional (5.59), há que efectuar uma discretização do problema de modo a que seja possível reduzir a análise à resolução de um sistema de equações lineares. Considera-se então que a solução $u(x)$ é aproximada através da combinação linear das funções $\phi_{n,k}(x)$, sendo n um inteiro, fixo. Estas funções formam, como referido anteriormente, uma base do sub-espaço V_n . Tem-se então,

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^p u_{n,i} \phi_{n,i}(x). \quad (5.62)$$

Pode dizer-se que a solução aproximada $u_n(x)$ é equivalente à projecção da solução u no sub-espaço V_n . Tal como Glowinski demonstra [89], verifica-se que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u) = 0 \text{ em } H^1 [0, 1].$$

A formulação de Galerkin do problema de Neumann vem agora escrita na forma,

Determinar $u_n \in V_n [0, 1]$ de forma a que :

$$a(u_n, v) = L(v), \text{ para qualquer } v \in V_n [0, 1]. \quad (5.63)$$

Antes de mais, é de salientar que na equação (5.62), p denota o número de funções $\phi_{n,k}(x)$ que são utilizadas na aproximação. Coloca-se então desde já exactamente o mesmo problema que tinha surgido aquando da expansão de funções em série de wavelet. Quais são as funções que se devem considerar na análise? A resposta é a mesma. Devem utilizar-se as funções que possuem valores diferentes de zero no intervalo $[0, 1]$ e para as quais o valor da norma seja superior a um determinado limite inferior.

Para que se possam determinar os p coeficientes $u_{n,i}$, há que produzir p equações a partir de (5.63). Isto pode ser feito escolhendo para funções de teste exactamente as mesmas funções que foram utilizadas na aproximação,

$$v = \phi_{n,j}(x) \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (5.64)$$

Substituindo (5.64) em (5.63) obtém-se,

$$\sum_{i=1}^p a(\phi_{n,i}(x), \phi_{n,j}(x)) u_{n,i} = L(\phi_{n,j}(x)) \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (5.65)$$

Tendo em conta as igualdades (5.60) e (5.61), pode escrever-se

$$a(\phi_{n,i}(x), \phi_{n,j}(x)) = \int_0^1 \phi'_{n,i}(x) \phi'_{n,j}(x) dx + \int_0^1 \phi_{n,i}(x) \phi_{n,j}(x) dx, \quad (5.66)$$

$$L(\phi_{n,j}(x)) = \int_0^1 [(1 + \pi^2) \sin(\pi x) + 1] \phi_{n,j}(x) dx - \pi \phi_{n,j}(0) - \pi \phi_{n,j}(1). \quad (5.67)$$

A resolução do sistema de equações lineares definido em (5.65) conduz finalmente à obtenção dos coeficientes $u_{n,i}$.

A solução exacta do problema em estudo é dada por [89],

$$u(x) = \sin(\pi x) + 1 .$$

Efectua-se agora a resolução numérica da mesma equação diferencial , utilizando-se para o efeito a família de wavelets de Daubechies com $N = 4$. São testadas diferentes aproximações, correspondentes a diferentes valores de n . Na tabela 5.4 apresenta-se, para cada um dos casos estudados, o número de funções utilizado, a norma do erro da solução aproximada obtida e o tempo de CPU (em segundos) utilizado na resolução do problema. Foi utilizado na análise um computador IBM/550 com um processador RISC6000. Os valores de T1 englobam o tempo necessário para gerar as funções $\phi_{n,i}(x)$ em 1025 pontos igualmente espaçados (que correspondem aos pontos diádicos $k/2^{10}$ no intervalo $[0, 1]$), e para montar e resolver o sistema de equações (5.65). Refira-se que o cálculo dos integrais indicados em (5.66) e(5.67) é efectuado numericamente, utilizando-se para o efeito a regra dos trapézios.

O tempo total gasto na análise encontra-se listado na coluna T2. Estes valores englobam, para além do valor de T1, o tempo gasto em operações de pós-processamento, ou seja, no cálculo da solução aproximada (5.62) em cada um dos pontos diádicos anteriormente referidos.

n	p	T1	T2	$\ e\ $
0	6	0.20	0.28	0.7755×10^{-2}
1	7	0.22	0.30	0.7703×10^{-2}
2	9	0.24	0.33	0.4389×10^{-2}
3	13	0.25	0.35	0.2423×10^{-3}
4	21	0.30	0.39	0.1379×10^{-4}

Tabela 5.4: *Tempos de cálculo (segundos) e erros obtidos na resolução numérica da equação diferencial com $N = 4$.*

A análise da tabela 5.4 permite verificar que mesmo a utilização de um pequeno número de graus de liberdade permite obter uma solução aproximada de muito boa qualidade. É também evidente a rapidez com que os cálculos podem ser efectuados. Verifica-se ainda que, tal como seria de esperar, a solução obtida vai melhorando à medida que se incrementa o valor de n .

A qualidade das soluções numéricas obtidas pode ser comprovada através da análise da figura 5.21a), onde se apresenta a solução obtida com $n = 0$ e a solução exacta do problema. Como se observa, as duas são praticamente coincidentes. Na figura 5.21b) apresenta-se a solução numérica obtida considerando $n = 4$. As diferenças em relação à solução exacta já não são perceptíveis. Isto mesmo pode ser confirmado a partir da análise da figura 5.22 onde se ilustra a distribuição do erro relativo obtido para os casos em que se toma $n = 0$ e $n = 4$. O erro relativo em cada um dos 1025

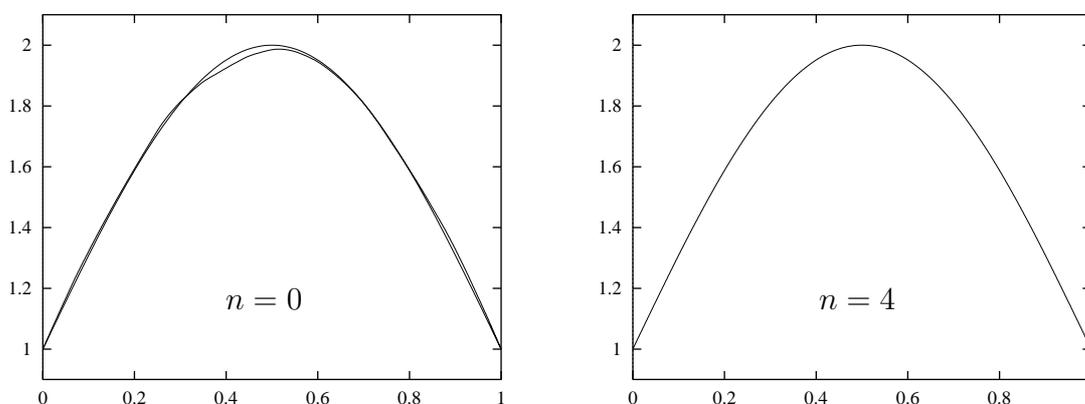


Figura 5.21: Soluções aproximadas obtidas com $N = 4$.

pontos diádicos é obtido utilizando-se a expressão

$$e_i = \frac{u_{ni} - u_i}{u_i}.$$

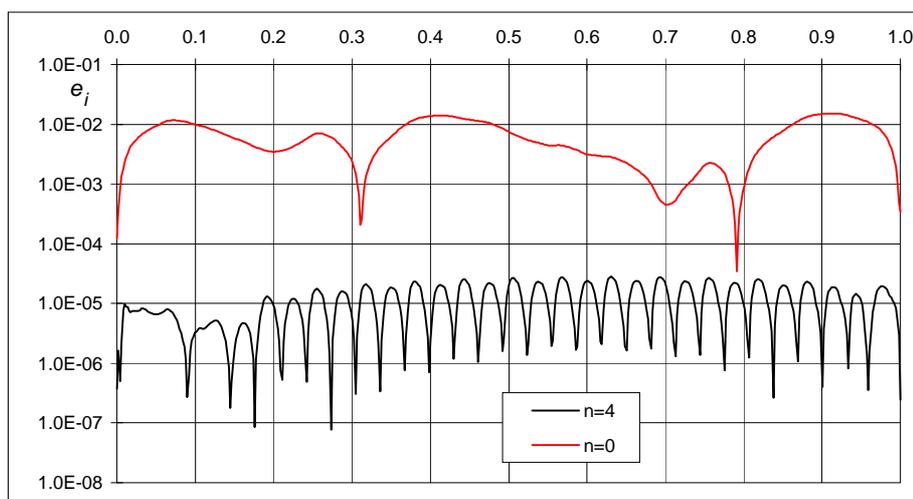


Figura 5.22: Erro relativo das soluções aproximadas obtidas com $N = 4$.

Refira-se por último que o número p de funções utilizado na aproximação é sempre inferior ao valor fornecido pela aplicação directa da fórmula (5.52).

Repetem-se agora as mesma análises, mas considerando a família da wavelets de Daubechies com $N = 10$. Na tabela 5.5 listam-se mais uma vez, para os diferentes valores de n testados, o número de graus de liberdade envolvidos no cálculo, o tempo de CPU gasto e a norma do erro da solução aproximada obtida.

Da análise da tabela 5.5 ressalta a precisão das soluções obtidas. Com efeito, a norma do erro associada a cada uma das aproximações toma valores bastante pequenos.

n	p	T1	T2	$\ e\ $
0	11	0.76	0.85	0.2849×10^{-4}
1	12	0.77	0.86	0.2223×10^{-5}
2	14	0.78	0.87	0.5651×10^{-6}
3	18	0.80	0.89	0.8001×10^{-7}
4	26	0.84	0.91	0.4125×10^{-7}

Tabela 5.5: *Tempos de cálculo e erros obtidos na resolução da equação diferencial com $N = 10$.*

Verifica-se ainda que em relação às soluções obtidas com $N = 4$, se se considerar um número aproximado de graus de liberdade, embora se registre um ligeiro acréscimo no tempo de cálculo, o erro decresce de forma significativa.

A qualidade das aproximações obtidas é confirmada pela análise da figura 5.23, onde se apresenta a distribuição do erro relativo para cada uma daquelas duas situações.

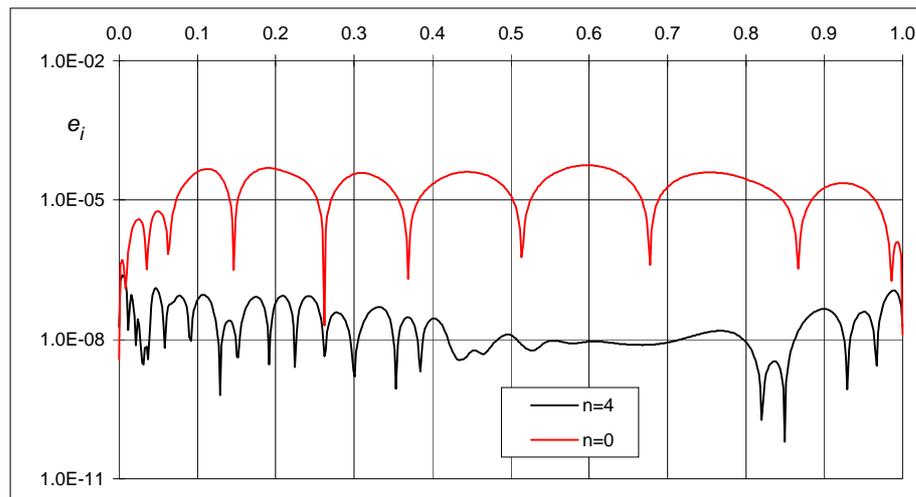


Figura 5.23: *Erro relativo das soluções aproximadas obtidas com $N = 10$.*

5.10 Considerações finais

Concluída que está a apresentação das funções de Walsh e das wavelets, importa sublinhar as enormes potencialidades que tais sistemas de funções possuem e que tornam tão atractiva a sua utilização no âmbito da Mecânica Computacional. A facilidade com que podem ser geradas e manipuladas, as suas propriedades únicas e o seu carácter naturalmente hierárquico, fazem prever que a utilização destas funções na aproximação dos campos de tensões e de deslocamentos permita obter um modelo numérico eficiente e robusto quando se aplicam as formulações híbridomistas de elementos finitos descritas no capítulo anterior.

Embora possuam várias propriedades em comum, as funções de Walsh e as wavelets têm características próprias que as distinguem. As funções de Walsh são mais fáceis de gerar e de manipular dado possuírem apenas duas amplitudes possíveis. Em contrapartida, a sua natureza implica que se tenha que utilizar um número considerável de funções sempre que se pretenda modelar com precisão uma dada função. Esta limitação é compensada pelas propriedades que tais funções apresentam e pela existência de algoritmos extremamente eficazes que permitem efectuar a decomposição e/ou recomposição de um dado sinal em série de Walsh.

As wavelets, por seu lado, possuem uma definição muito mais rica que as funções de Walsh. Como consequência, verifica-se que para um grau de precisão equivalente, as expansões em série de wavelets envolvem um muito menor número de graus de liberdade. A sua geração e manipulação é no entanto mais delicada. Como não existem expressões analíticas que permitam gerar directamente os sistemas de wavelets, torna-se necessário basear todos os cálculos em procedimentos puramente numéricos. No entanto, os algoritmos que o permitem efectuar são suficientemente rápidos e eficientes para que este facto não seja relevante.