

Capítulo 3

Modelos híbrido-mistos de elementos finitos

3.1 Considerações iniciais

Apresentam-se neste capítulo os modelos híbrido-mistos de elementos finitos utilizados na análise de estruturas laminares (placas e lajes) em regime elastoplástico. Uma característica única destes modelos consiste na utilização de funções digitais de Walsh e de wavelets como funções de aproximação. Tais funções são utilizadas para aproximar os campos de tensão e de deslocamento. Para modelar os fenômenos locais associados à plasticidade, cada elemento finito é subdividido em várias células críticas nas quais se permite o desenvolvimento de deformações plásticas. Em cada uma destas células, a distribuição do incremento dos parâmetros plásticos é aproximada através da utilização de um conjunto completo de funções polinomiais. Para garantir a imposição local das condições de escoamento plástico, estas funções devem possuir valores não-negativos em todo o seu intervalo de definição.

A apresentação dos modelos é precedida por uma breve resenha histórica onde se relata o aparecimento e posterior desenvolvimento das formulações não-convencionais de elementos finitos híbridos e mistos. Ainda que de uma forma muito sucinta, são caracterizadas as diferentes variantes que este modelos alternativos podem apresentar, sendo listadas as aplicações numéricas que têm vindo a ser desenvolvidas.

As formulações são deduzidas a partir dos princípios fundamentais da Mecânica [68, 70], não se utilizando para o efeito quaisquer teoremas energéticos. Os teoremas variacionais associados às formulações híbridas-mistas podem ser recuperados, *a posteriori*, através da aplicação da teoria da equivalência da programação matemática ao sistema governativo do modelo discreto entretanto obtido [68, 69, 30]. Os teoremas da programação matemática permitem ainda estabelecer condições para a existência, unicidade e estabilidade das soluções [68, 65].

As condições de fronteira cinemática, nos modelos de equilíbrio, e as condições de fronteira estática, nos modelos de compatibilidade, são impostas localmente. Também a condição de escoamento plástico é verificada *a priori*. As restantes equações de campo e condições de fronteira são impostas ponderadamente, na forma de resíduos pesados. Esta imposição é feita de forma a assegurar que no modelo discreto se preserve a *dualidade estática-cinemática*, a *reciprocidade elástica* e a *plasticidade associada*. Em consequência, as matrizes de equilíbrio e compatibilidade são a transposta uma da outra, o operador de elasticidade é simétrico e as taxas de variação das deformações plásticas são ortogonais à superfície de cedência generalizada.

O sistema governativo elementar é obtido através da combinação das descrições discretas das condições de equilíbrio, compatibilidade, elasticidade e plasticidade. O modelo discreto que representa a resposta da estrutura em análise é obtido através da reunião de cada uma das contribuições elementares. Nos modelos de equilíbrio, impõe-se que elementos adjacentes partilhem a mesma aproximação para o campo de deslocamentos na fronteira que lhes é comum. Nos elementos de compatibilidade, a ligação dos elementos é efectuada impondo a mesma aproximação para o campo de tracções ao longo da interface entre elementos contíguos.

O sistema não-linear de equações e inequações que resulta da formulação atrás descrita e que rege o comportamento elastoplástico do modelo que representa a estrutura em análise, pode ser encarado como constituindo um *problema de complementaridade simétrico* [69]. Este facto é consequência directa da preservação, no modelo de elementos finitos, das propriedades fundamentais acima listadas.

Recorrendo a um algoritmo simples do método das perturbações [63, 71], este sistema de equações não-lineares é transformado numa sequência recursiva de problemas *de complementaridade simétrica e linear*. Isto é feito expandindo em série de Taylor os incrementos de cada uma das variáveis envolvidas no processo e igualando posteriormente os termos de igual ordem em ambos os membros do sistema governativo não-linear.

Neste algoritmo de resolução incremental, a dimensão do passo é automaticamente ajustada de forma a permitir não só a detecção da célula crítica onde o processo de deformação plástica se inicia em cada uma das etapas, mas também o controlo e implementação das descargas plásticas. A dimensão do passo é ainda condicionada pela necessidade de se limitar a acumulação de erros de truncatura na série [63, 64].

3.2 Formulações não-convencionais de elementos finitos

Os fundamentos que permitem o desenvolvimento de *modelos híbridos e mistos* de elementos finitos foram estabelecidos com rigor no final dos anos 60 [155]. Embora

tenha conhecido nos anos subsequentes alguma notoriedade, este tipo de formulações nunca conseguiu rivalizar em divulgação e em aceitação com os tradicionais *elementos de deslocamento* (ou de *compatibilidade* como foram denominados anteriormente). Hoje em dia, o estudo e aplicação de formulações híbridas e mistas encontram-se praticamente circunscritos à comunidade científica, verificando-se que a esmagadora maioria dos modelos de elementos finitos utilizados na indústria e disponíveis em versões comerciais, se baseiam em formulações de deslocamento.

São várias as razões que se podem apontar para explicar este relativo insucesso. Desde já, as formulações híbridas/mistas não são tão intuitivas como os modelos de deslocamento, o que pode provocar uma impressão inicial desfavorável a quem toma contacto pela primeira vez com este tipo de formulação. Do ponto de vista do utilizador, implica também a necessidade de reformulação de alguns conceitos no que diz respeito ao tipo de discretização e interpolação a adoptar.

Um segundo aspecto que tem limitado a aplicação generalizada de elementos finitos híbridos/mistos tem a ver com o reconhecido fraco desempenho em termos da relação *benefício/custo*. Este facto resulta em muito da enorme restrição imposta pela tentativa de formular este tipo de elementos de uma forma tradicional, ou seja, através do conceito de *interpolação nodal*. Para tal, os elementos são formulados de modo a que no final se possa obter uma *matriz de rigidez equivalente* e onde os graus de liberdade em função dos quais se exprime o modelo discreto possuam um significado físico bem preciso, o de deslocamentos nodais. A reunião das contribuições de cada um dos elementos é então efectuada da forma tradicional, impondo-se a continuidade dos deslocamentos entre elementos adjacentes. Este procedimento tem como principal objectivo garantir uma fácil integração destes modelos num código de elementos finitos de deslocamento. Tem ainda como finalidade tornar mais fácil a compreensão e utilização deste tipo de elementos a utilizadores que sempre lidaram com as formulações clássicas de elementos finitos. No entanto, esta forma de proceder restringe enormemente o tipo e o grau das funções que se podem utilizar na aproximação dos campos estático e cinemático.

Foi ainda reconhecido e demonstrado que a utilização de modelos híbridos e mistos conduz, em certos casos e sob certas condições, exactamente aos mesmos resultados que se obteriam se um modelo de deslocamentos fosse utilizado. Estas condições de equivalência, conhecidas na literatura como *Limitation Principles*, foram estabelecidas por Veubeke [190] e Stolarski e Belytschko [181]. Para além destes trabalhos, Malkus e Hughes [123] demonstraram que a utilização de elementos de deslocamento, em conjunto com métodos de integração reduzida e/ou selectiva permite recuperar, em certos casos, os resultados fornecidos pela aplicação de elementos mistos. Estas contribuições reforçaram a ideia de que não se justificaria a utilização de modelos mais pesados e sofisticados, como seriam os elementos híbridos e mistos, uma vez que os tradicionais elementos finitos permitiriam obter exactamente a mesma solução num grande número de situações, e de uma forma simples e rápida.

Finalmente, refira-se que as formulações híbridas e mistas dão origem a modelos

onde nem sempre é possível estabelecer, *a priori*, um critério de convergência. Para além do mais, há sempre a possibilidade de se gerarem *modos espúrios*, o que torna muito mais delicada a aplicação de tais modelos.

Não é contudo difícil compreender que as formulações mistas e híbridas possuem um enorme potencial de desenvolvimento que advém da possibilidade de permitirem a aproximação independente e simultânea de diferentes campos. Se se removerem as restrições impostas pelo conceito de interpolação nodal, então virtualmente qualquer sistema de funções, desde que defina um conjunto completo de funções, pode vir a ser utilizado para modelar os campos de tensões, de deformações e de deslocamentos em problemas de Mecânica dos Meios Contínuos. Foi com o intuito de remover estas restrições que surgiram recentemente as *formulações não-convencionais* de elementos finitos híbridos e mistos apresentadas, por exemplo, em [75, 77].

São quatro os aspectos chave que podem ser considerados como os principais ingredientes destas formulações:

1. A formulação é desenvolvida a partir dos princípios fundamentais de Mecânica;
2. As aproximações efectuadas não se encontram restringidas pela necessidade de se efectuarem interpolações nodais. Os nós existem apenas para permitir a definição da geometria do problema em estudo;
3. As variáveis generalizadas em função das quais se descreve o comportamento do modelo discreto são definidas de modo a serem energeticamente consistentes;
4. A utilização de conceitos oriundos da Programação Matemática permite recuperar os teoremas energéticos, assim como possibilita que se estabeleçam condições para a existência e unicidade das soluções.

As bases que permitiram o estabelecimento deste tipo de formulações foram lançadas por Munro e Smith [137, 180] e em seguida foram desenvolvidas por Freitas [62], ainda que apenas no âmbito da análise física e geometricamente não-linear de estruturas reticuladas. A generalização de tais formulações a problemas planos pode ser encontrada nos trabalhos de Fonseca [61], Moitinho de Almeida [132] e Freitas [68, 70].

É possível formular dois conjuntos complementares de modelos: os *modelos de equilíbrio* e os *modelos de compatibilidade*. Tais modelos diferem pela forma através da qual é obtida a descrição discreta das condições de equilíbrio e compatibilidade e também pelo campo que é interpolado na fronteira dos elementos. Enquanto que nos modelos de equilíbrio se aproxima o campo de deslocamentos na fronteira estática, nos modelos de compatibilidade é o campo das tracções na fronteira cinemática que é modelado.

De acordo com as imposições que se colocam à partida na selecção das funções de aproximação, podem ser obtidos três tipos diferentes de modelos: os *modelos*

híbrido-mistos, os *modelos híbridos* e os *modelos híbridos-Trefftz*. Considerando as formulações de equilíbrio e de compatibilidade associadas a cada um destes três tipos de modelos, obtém-se um total de seis modelos não-convencionais de elementos finitos híbrido/mistos.

Os modelos híbrido-mistos [147, 30, 149] são os mais gerais. Não são colocadas quaisquer restrições às funções utilizadas na aproximação. Este facto permite uma enorme liberdade e versatilidade na escolha das funções a considerar [147, 76]. No domínio de cada um dos elementos são aproximados simultânea e independentemente os campos de tensões e de deslocamentos. Para além destes é ainda aproximado, de uma forma completamente independente, um outro campo na fronteira dos elementos. São estas as formulações utilizadas ao longo deste trabalho.

Nos modelos híbridos [132, 151, 173], apenas é aproximado um dos campos no interior dos elementos: o campo estático no caso das formulações de equilíbrio, o campo cinemático, no caso das formulações de compatibilidade. No entanto, a escolha das funções de aproximação está desta vez sujeita a determinadas regras. Nos modelos de equilíbrio, as funções utilizadas para aproximar as tensões têm que satisfazer, *a priori* a condição de equilíbrio (2.3). Já no caso dos modelos de compatibilidade, as funções utilizadas para modelar os campos de deslocamentos têm que induzir deformações compatíveis.

Nos modelos híbridos-Trefftz [79, 80, 82] é aproximado também apenas um dos campos no domínio dos elementos, à semelhança do que acontece com as formulações híbridas. No entanto, é imposto que as funções utilizadas para modelar tais campos verifiquem localmente (e em simultâneo), as condições de equilíbrio (2.3), de compatibilidade (2.7) e as relações constitutivas (2.10). Nos modelos de equilíbrio impõe-se então que as funções de aproximação do potencial das tensões verifiquem localmente o sistema de equações diferenciais de Beltrami [79]. No caso dos modelos de compatibilidade, as funções utilizadas para modelar o campo de deslocamentos devem satisfazer, *a priori*, as equações diferenciais de Navier [82]. Refira-se que esta forma de obter as funções de aproximação pode ser encontrada também nos modelos desenvolvidos por Jirousek [104, 105, 106, 107, 108].

Uma das características fundamentais dos modelos híbridos de Trefftz é que todas as integrações a efectuar quando se pretendem determinar os elementos dos diferentes operadores estruturais podem ser efectuadas apenas ao longo da fronteira dos elementos. Não há então lugar a integrações definidas sobre o domínio dos elementos, o que permite obter um modelo que recupera a característica fundamental do método dos elementos de fronteira. No entanto, é importante sublinhar que as restrições impostas à partida dificultam a obtenção das funções de aproximação a utilizar.

A metodologia seguida na formulação deste tipo de elementos finitos, caracterizada pelo estabelecimento em separado das descrições discretas das condições de equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas, facilita a sua fácil adaptação a diferentes formas estruturais, assim como possibilita a consideração de diferentes leis

de comportamento. Têm sido desenvolvidos modelos para a análise de placas [132, 147, 30], lajes de Khirchhoff [173, 81], lajes de Reissner-Mindlin [173, 147, 78, 150], lajes de ordem superior [147] e ainda sólidos tridimensionais [147, 151]. Têm sido ainda implementados modelos que, tirando partido da versatilidade deste tipo de elementos, permitem a resolução eficiente de problemas onde é condicionante a existência de soluções singulares, como é exemplo típico o caso da análise de problemas de fendas [79, 80]. Do ponto de vista das relações constitutivas, têm vindo a ser desenvolvidos modelos que permitem efectuar análises não só em regime elástico linear [147, 173, 30, 151], mas também em regime elastoplástico [132, 76, 78]. Recentemente têm vindo a ser desenvolvidas formulações para a resolução de problemas elastodinâmicos [60, 83].

3.3 Critérios de aproximação

Na formulação híbrida-mista, os campos de tensão e de deslocamento são directamente aproximados no domínio de cada elemento. É aproximado ainda o valor dos incrementos dos parâmetros plásticos em cada uma das células críticas em que se considera subdividido cada elemento finito. Define-se, deste modo,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}_v \mathbf{X} + \boldsymbol{\sigma}_p \text{ em } V, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_v \mathbf{q}_v + \mathbf{u}_p \text{ em } V, \quad (3.2)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_* = \mathbf{P}_* \Delta \mathbf{e}_* \text{ em } V. \quad (3.3)$$

As matrizes \mathbf{S}_v , \mathbf{U}_v , e \mathbf{P}_* reúnem as funções de aproximação associadas às variáveis generalizadas \mathbf{X} , \mathbf{q}_v , e $\Delta \mathbf{e}_*$ que representam, respectivamente, os campos discretos de tensões, de deslocamentos no domínio e de incrementos dos parâmetros plásticos. As variáveis generalizadas acima listadas não possuem um significado físico imediato, não representando necessariamente valores nodais de deslocamentos ou de tensões, ao contrário do que é habitual nas formulações clássicas de elementos finitos.

Na definição (3.1), o vector $\boldsymbol{\sigma}_p$ é utilizado sempre que se pretenda considerar explicitamente na aproximação uma solução particular para o campo de tensões. Será por exemplo o caso em que existem tensões residuais ou ainda quando se pretendem considerar tipos muito particulares de carregamento. Situação típica é aquela em que se pretende considerar a acção de uma carga concentrada. Para modelar com bastante precisão a distribuição da concentração de tensões na vizinhança do ponto de aplicação da carga, basta considerar na aproximação uma solução particular baseada, por exemplo, na solução clássica de Boussinesq [188]. Cabe então à solução complementar ($\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{S}_v \mathbf{X}$) corrigir a solução particular nas restantes zonas do domínio, procurando restabelecer as condições do problema. Da mesma forma, o vector \mathbf{u}_p é utilizado sempre que se pretende considerar explicitamente na aproximação uma solução particular para o campo de deslocamentos.

As variáveis generalizadas representando deformações \mathbf{e} , forças de massa \mathbf{Q}_v e resultantes de potenciais plásticos $\Delta\Phi_*$, são definidas de forma a que os pares de variáveis discretas duais $\{\mathbf{X}, \mathbf{e}\}$, $\{\mathbf{q}_v, \mathbf{Q}_v\}$ e $\{\Delta\mathbf{e}_*, \Delta\Phi_*\}$ dissipem a mesma energia que os campos contínuos que representam. Pretende-se então verificar,

$$\mathbf{e}^t \mathbf{X} = \int \boldsymbol{\varepsilon}^t (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_p) dV ;$$

$$\mathbf{q}_v^t \mathbf{Q}_v = \int \mathbf{b}^t (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) dV ;$$

$$\Delta\mathbf{e}_*^t \Delta\Phi_* = \int \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_*^t \Delta\phi_* dV .$$

Tendo em conta as aproximações definidas em (3.1),(3.2) e (3.3) obtém-se:

$$\mathbf{e} = \int \mathbf{S}_v^t \boldsymbol{\varepsilon} dV ; \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Q}_v = \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{b} dV ; \quad (3.5)$$

$$\Delta\Phi_* = \int \mathbf{P}_*^t \Delta\phi_* dV . \quad (3.6)$$

Para além das aproximações efectuadas no domínio, a formulação híbrida-mista requer que seja modelado, de uma forma completamente independente, um outro campo na fronteira de cada elemento finito. Nos modelos de equilíbrio é aproximado o campo de deslocamentos ao longo da fronteira estática, Γ_σ , a qual engloba todas as fronteiras onde o valor do campo de deslocamentos é desconhecido. As fronteiras entre elementos adjacentes estão nesta situação, pelo que se considera que fazem parte integrante da fronteira estática. Define-se,

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_\gamma \mathbf{q}_\gamma \text{ em } \Gamma_\sigma. \quad (3.7)$$

Nos modelos de compatibilidade, é aproximado o campo de tracções ao longo da fronteira cinemática, Γ_u . Esta engloba todas as fronteiras onde é desconhecido o valor das tracções, o que inclui as fronteiras inter-elementares. Define-se, neste caso,

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}_\gamma \mathbf{p}_\gamma \text{ em } \Gamma_u. \quad (3.8)$$

As matrizes \mathbf{U}_γ e \mathbf{S}_γ reúnem as funções de aproximação associadas às variáveis generalizadas \mathbf{q}_γ e \mathbf{p}_γ , que representam os campos discretos de deslocamentos na fronteira estática e de tracções na fronteira cinemática, respectivamente. As variáveis generalizadas representando tracções aplicadas na fronteira, \mathbf{Q}_γ , e deslocamentos na fronteira, \mathbf{v}_γ , são definidas de forma a que os pares de variáveis discretas duais $\{\mathbf{q}_v, \mathbf{Q}_v\}$ e $\{\mathbf{p}_\gamma, \mathbf{v}_\gamma\}$ dissipem a mesma energia que os campos contínuos que representam. Impondo então que

$$\mathbf{q}_\gamma^t \mathbf{Q}_\gamma = \int \mathbf{u}^t \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma ,$$

$$\mathbf{p}_\gamma^t \mathbf{v}_\gamma = \int \mathbf{t}^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u ,$$

e tendo em conta as aproximações (3.7) e (3.8), obtém-se:

$$\mathbf{Q}_\gamma = \int \mathbf{U}_\gamma^t \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma , \quad (3.9)$$

$$\mathbf{v}_\gamma = \int \mathbf{S}_\gamma^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u . \quad (3.10)$$

Como consequência de todas as condições de equivalência energética acima enunciadas, são preservadas no modelo discreto de elementos finitos a dualidade estática-cinemática, a reciprocidade das condições de elasticidade e a lei de escoamento associada.

3.4 Condições de equilíbrio

3.4.1 Modelo de equilíbrio

A condição de equilíbrio no domínio (2.3) é imposta na forma de resíduos pesados, utilizando-se para efectuar a ponderação as funções de aproximação dos deslocamentos no domínio. Tem-se,

$$\int \mathbf{U}_v^t (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dV = 0 .$$

Substituindo na igualdade anterior a aproximação (3.1) obter-se-á:

$$\int \mathbf{U}_v^t \mathbf{D}\mathbf{S}_v \mathbf{X} dV + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}_p dV = - \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{b} dV .$$

Tendo em conta a definição (3.5), a condição de equilíbrio no domínio para o modelo discreto pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{A}_v^t \mathbf{X} = -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_p , \quad (3.11)$$

considerando,

$$\mathbf{A}_v = \int (\mathbf{D}\mathbf{S}_v)^t \mathbf{U}_v dV , \quad (3.12)$$

$$\mathbf{Q}_p = \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}_p dV . \quad (3.13)$$

As condições de fronteira estática (2.4) e de equilíbrio de tracções entre elementos adjacentes são também impostas de uma forma ponderada. A utilização das funções de aproximação do campo de deslocamentos na fronteira para ponderação, na forma de resíduos pesados, da condição de fronteira (2.4) conduz à seguinte igualdade:

$$\int \mathbf{U}_\gamma^t (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{t}_\gamma) d\Gamma_\sigma = 0 .$$

Substituindo na expressão anterior a aproximação adoptada para o campo de tensões vem:

$$\int \mathbf{U}_\gamma^t \mathbf{N} \mathbf{S}_v \mathbf{X} d\Gamma_\sigma + \int \mathbf{U}_\gamma^t \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_p d\Gamma_\sigma = \int \mathbf{U}_\gamma^t \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma .$$

Tendo em conta a definição (3.9), a condição de fronteira estática no modelo discreto pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{A}_\gamma^t \mathbf{X} = \mathbf{Q}_\gamma - \mathbf{Q}_{\gamma p} , \quad (3.14)$$

onde

$$\mathbf{A}_\gamma = \int (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{U}_\gamma d\Gamma_\sigma , \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Q}_{\gamma p} = \int \mathbf{U}_\gamma^t \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_p d\Gamma_\sigma \quad (3.16)$$

É agora possível verificar que a imposição ponderada da condição de equilíbrio entre elementos adjacentes permite recuperar a equação (3.14). Considerem-se então dois elementos vizinhos (elementos a e b) partilhando uma fronteira comum, Γ_σ . Para que haja equilíbrio na fronteira, é necessário que a soma das tracções calculadas com base no campo de tensões de cada um dos elementos iguale o valor da tracção aí directamente aplicada:

$$(\mathbf{t})_a + (\mathbf{t})_b = \mathbf{t}_\gamma \Rightarrow (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma})_a + (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma})_b = \mathbf{t}_\gamma \text{ em } \Gamma_\sigma$$

Impondo a condição anterior na forma resíduos pesados, utilizando para efectuar a ponderação as funções de aproximação do campo de deslocamentos ao longo de Γ_σ , obtém-se:

$$\int \mathbf{U}_\gamma^t ((\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma})_a + (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma})_b - \mathbf{t}_\gamma) d\Gamma_\sigma = 0 .$$

Substituindo na igualdade anterior as aproximações dos campos de tensões em cada um daqueles dois elementos e tendo em conta as definições (3.15), (3.16) e (3.9) pode escrever-se:

$$(\mathbf{A}_\gamma^t)_a \mathbf{X}_a + (\mathbf{A}_\gamma^t)_b \mathbf{X}_b = \mathbf{Q}_\gamma - (\mathbf{Q}_{\gamma p})_a - (\mathbf{Q}_{\gamma p})_b .$$

Considerando em separado a contribuição de cada um dos elementos para a igualdade anterior, obtém-se de novo a definição (3.14).

Combinando as equações (3.11) e (3.14), obtém-se a seguinte condição de equilíbrio para o modelo discreto:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_v^t \\ \mathbf{A}_\gamma^t \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_\gamma - \mathbf{Q}_{\gamma p} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.4.2 Modelo de compatibilidade

Tal como no modelo de equilíbrio, a condição de equilíbrio no domínio (2.3) é imposta de uma forma ponderada. Utilizam-se, para o efeito, as funções de aproximação do campo de deslocamentos no domínio. Tem-se então,

$$\int \mathbf{U}_v^t (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dV = 0 \Rightarrow \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} dV + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{b} dV = 0 .$$

Integrando o primeiro termo da equação anterior por partes por forma a mobilizar os termos de fronteira, obtém-se sucessivamente:

$$\begin{aligned}
& - \int (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^t \boldsymbol{\sigma} dV + \int (\mathbf{N}^t \mathbf{U}_v)^t \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{b} dV = 0 ; \\
& - \int (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^t \boldsymbol{\sigma} dV + \int (\mathbf{N}^t \mathbf{U}_v)^t \boldsymbol{\sigma} d\Gamma_\sigma + \int (\mathbf{N}^t \mathbf{U}_v)^t \boldsymbol{\sigma} d\Gamma_u + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{b} dV = 0 ; \\
& - \int (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^t \boldsymbol{\sigma} dV + \int \mathbf{U}_v^t (\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma_\sigma + \int \mathbf{U}_v^t (\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma_u + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{b} dV = 0 ; \quad (3.18) \\
& - \int (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^t \boldsymbol{\sigma} dV + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_u + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{b} dV = 0 .
\end{aligned}$$

Substituindo na igualdade anterior as aproximações do campo de tensões no domínio (3.1) e do campo de tracções ao longo da fronteira Γ_u , obtém-se:

$$\begin{aligned}
& - \int (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^t \mathbf{S}_v \mathbf{X} dV - \int (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^t \boldsymbol{\sigma}_p dV + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma \\
& \quad \pm \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{S}_\gamma \mathbf{p}_\gamma d\Gamma_u + \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{b} dV = 0 . \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Seja Γ_u a fronteira comum a dois elementos finitos adjacentes. Quando existe equilíbrio na fronteira entre aqueles elementos, a tracção aplicada na face do primeiro é igual e de sinal contrário à tracção aplicada na face do segundo. Em consequência, num dos casos verifica-se que a tracção na fronteira é igual ao campo de tracções ao longo de Γ_u (campo este que é aproximado), enquanto que no segundo caso tem igual valor mas sinal contrário. É esta a razão pela qual surge o sinal \pm na definição do quarto termo da igualdade (3.19).

Tendo em atenção a definição (3.5), a condição de equilíbrio no domínio para o modelo discreto pode ser escrita na forma,

$$-\mathbf{B}_v \mathbf{X} \pm \mathbf{B}_\gamma \mathbf{p}_\gamma = \mathbf{Q}_{vp} - \mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_{v\gamma} , \quad (3.20)$$

onde

$$\mathbf{B}_v = \int (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^t \mathbf{S}_v dV , \quad (3.21)$$

$$\mathbf{B}_\gamma = \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{S}_\gamma d\Gamma_u , \quad (3.22)$$

$$\mathbf{Q}_{vp} = \int (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^t \boldsymbol{\sigma}_p dV , \quad (3.23)$$

$$\mathbf{Q}_{v\gamma} = \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma . \quad (3.24)$$

É de sublinhar que neste modelo as condições de fronteira estática são impostas localmente, quando se substitui a igualdade (2.4) explicitamente na equação (3.18). Também as condições de equilíbrio na fronteira entre elementos adjacentes são localmente verificadas. Para tal, impõe-se que ambos os elementos partilhem, no lado que lhes é comum, a mesma aproximação para o campo de tracções.

Para finalizar, refira-se que a partir deste instante se considera (para simplificar a escrita) que o elemento genérico utilizado na dedução do modelo discreto tem uma contribuição positiva para a matriz \mathbf{B}_γ . Como tal, desaparecerão das equações que vão sendo obtidas os sinais \pm sempre que apareça envolvida aquela mesma matriz.

3.5 Condições de compatibilidade

3.5.1 Modelo de equilíbrio

A condição de compatibilidade no domínio (2.7) é imposta na forma de resíduos pesados, utilizando-se para efectuar a ponderação as funções de aproximação das tensões. Tem-se,

$$\int \mathbf{S}_v^t (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV = 0 \Rightarrow \int \mathbf{S}_v^t \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{D}^* \mathbf{u} dV .$$

Tendo em conta a definição (3.4) e integrando por partes o segundo membro da igualdade anterior por forma a mobilizar os termos de fronteira, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{D}^* \mathbf{u} dV = - \int (\mathbf{D} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{u} dV + \int (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{u} d\Gamma , \\ \mathbf{e} &= - \int (\mathbf{D} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{u} dV + \int (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{u} d\Gamma_\sigma + \int (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Substituindo na igualdade anterior as aproximações do campo de deslocamentos no domínio (3.2) e do campo de deslocamentos ao longo da fronteira Γ_σ , obtém-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= - \int (\mathbf{D} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{U}_v \mathbf{q}_v dV - \int (\mathbf{D} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{u}_p dV \\ &+ \int (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{U}_\gamma \mathbf{q}_\gamma d\Gamma_\sigma + \int (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u . \end{aligned}$$

As condições de compatibilidade no modelo discreto podem então ser escritas na forma,

$$\mathbf{e} = -\mathbf{A}_v \mathbf{q}_v + \mathbf{A}_\gamma \mathbf{q}_\gamma + \mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_{pp} , \quad (3.26)$$

onde as matrizes \mathbf{A}_v e \mathbf{A}_γ se encontram definidas por (3.12) e (3.15), respectivamente e onde

$$\mathbf{e}_\gamma = \int (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u , \quad (3.27)$$

$$\mathbf{e}_{pp} = \int (\mathbf{D} \mathbf{S}_v)^t \mathbf{u}_p dV . \quad (3.28)$$

No modelo de equilíbrio são verificadas localmente as condições cinemáticas de fronteira e a continuidade dos deslocamentos na fronteira comum a elementos adjacentes. A condição cinemática de fronteira é imposta localmente quando se substitui explicitamente a igualdade (2.8) na definição (3.25). Por outro lado, a continuidade de deslocamentos nas interfaces entre elementos vizinhos é assegurada quando se impõe que tais elementos partilhem, no lado que lhes é comum, a mesma aproximação para o campo de deslocamentos.

3.5.2 Modelo de compatibilidade

No modelo de compatibilidade, a condição de compatibilidade no domínio (2.7) é imposta ponderadamente. Utilizam-se, como pesos, as funções de aproximação do campo de tensões. Obtém-se então:

$$\int \mathbf{S}_v^t (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV = 0 \Rightarrow \int \mathbf{S}_v^t \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{D}^* \mathbf{u} dV .$$

Substituindo na igualdade anterior a aproximação do campo de deslocamentos (3.2) e tendo em conta a definição (3.4) vem,

$$e = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{D}^* \mathbf{U}_v \mathbf{q}_v dV + \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{D}^* \mathbf{u}_p dV .$$

A condição de compatibilidade no domínio para o modelo discreto pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}_v^t \mathbf{q}_v + \mathbf{e}_{pc} , \quad (3.29)$$

onde a matriz \mathbf{B}_v se encontra definida em (3.21) e onde

$$\mathbf{e}_{pc} = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{D}^* \mathbf{u}_p dV . \quad (3.30)$$

A condição de fronteira cinemática (2.8) e a continuidade de deslocamentos entre elementos adjacentes são também impostos de uma forma ponderada. A utilização das funções de aproximação do campo de tracções na fronteira para ponderação, na forma de resíduos pesados, da condição de fronteira (2.8), conduz à seguinte igualdade:

$$\int \mathbf{S}_\gamma^t (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\gamma) d\Gamma_u = 0 \Rightarrow \int \mathbf{S}_\gamma^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u = \int \mathbf{S}_\gamma^t \mathbf{u} d\Gamma_u .$$

Tendo em atenção a definição (3.10) e substituindo na equação anterior a aproximação adoptada para o campo de deslocamentos no domínio (3.2), obtém-se:

$$\mathbf{v}_\gamma = \int \mathbf{S}_\gamma^t \mathbf{U}_v \mathbf{q}_v d\Gamma_u + \int \mathbf{S}_\gamma^t \mathbf{u}_p d\Gamma_u$$

A condição de compatibilidade na fronteira cinemática pode ser então expressa na forma,

$$\mathbf{v}_\gamma = \mathbf{B}_\gamma^t \mathbf{q}_v + \mathbf{v}_{\gamma p} , \quad (3.31)$$

onde a matriz \mathbf{B}_γ se encontra definida em (3.22) e onde se tem

$$\mathbf{v}_{\gamma p} = \int \mathbf{S}_\gamma^t \mathbf{u}_p d\Gamma_u . \quad (3.32)$$

A imposição ponderada da condição de continuidade dos deslocamentos nas fronteiras entre elementos adjacentes conduz de novo à equação (3.31). Considerem-se dois elementos vizinhos (elementos a e b) partilhando uma fronteira comum, Γ_u . Para que haja continuidade do campo de deslocamentos, é necessário verificar a igualdade:

$$(\mathbf{u})_a - (\mathbf{u})_b = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_u .$$

A imposição da condição anterior na forma resíduos pesados, utilizando-se para efectuar a ponderação as funções de aproximação do campo de tracções definido ao longo da fronteira Γ_u , permite escrever:

$$\int \mathbf{S}_\gamma^t ((\mathbf{u})_a - (\mathbf{u})_b) d\Gamma_u = 0 .$$

Substituindo na igualdade anterior as aproximações dos campos de deslocamentos em cada um daqueles dois elementos e tendo em conta as definições (3.22) e (3.32), pode escrever-se:

$$(\mathbf{B}_\gamma^t)_a \mathbf{q}_{va} + (\mathbf{v}_{\gamma p})_a - (\mathbf{B}_\gamma^t)_b \mathbf{q}_{vb} - (\mathbf{v}_{\gamma p})_b = 0 .$$

Considerando em separado a contribuição de cada um dos elementos para a igualdade anterior, recupera-se então a definição (3.31), tal como se pretendia verificar.

Combinando as equações (3.29) e (3.31), obtém-se a seguinte condição de compatibilidade para o modelo discreto:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_v^t \\ \mathbf{B}_\gamma^t \end{bmatrix} \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{pc} - \mathbf{e} \\ \mathbf{v}_\gamma - \mathbf{v}_{\gamma p} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

3.6 Relações constitutivas

3.6.1 Elasticidade

As relações de elasticidade (2.10) são impostas na forma de resíduos pesados. São utilizadas na ponderação as funções de aproximação do campo de tensões no domínio. Pode escrever-se então:

$$\int \mathbf{S}_v^t (\boldsymbol{\varepsilon}_e - \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) dV = 0 .$$

Substituindo na igualdade anterior a aproximação definida para o campo de tensões no domínio (3.1) e tendo em conta a definição de deformações generalizadas (3.4), obtém-se:

$$\mathbf{e}_e = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{f} \mathbf{S}_v \mathbf{X} dV + \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}_p dV + \int \mathbf{S}_v^t \boldsymbol{\varepsilon}_\theta dV .$$

As relações de elasticidade no modelo discreto podem ser escritas na forma,

$$\mathbf{e}_e = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{e}_{pe} + \mathbf{e}_\theta , \quad (3.34)$$

onde

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{f} \mathbf{S}_v dV , \quad (3.35)$$

$$\mathbf{e}_{pe} = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}_p dV , \quad (3.36)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \int \mathbf{S}_v^t \boldsymbol{\varepsilon}_\theta dV . \quad (3.37)$$

3.6.2 Plasticidade

Apresenta-se de seguida a descrição discreta das relações de plasticidade, escritas numa forma incremental. Apenas a condição de escoamento plástico (2.37) é verificada localmente. Todas as outras condições que descrevem o comportamento não-linear do material são impostas ponderadamente, na forma de resíduos pesados.

Tal como definido no capítulo anterior, adopta-se aqui uma descrição cinemática das relações de plasticidade, na qual se consideram as deformações decompostas nas suas parcelas elástica e plástica. Em consequência, as deformações generalizadas \mathbf{e} , definidas em (3.4), aparecem da mesma forma decompostas em duas parcelas, \mathbf{e}_e e \mathbf{e}_p , respectivamente. A definição de tais parcelas é imediata. Tem-se,

$$\mathbf{e}_e = \int \mathbf{S}_v^t \boldsymbol{\varepsilon}_e dV, \quad \mathbf{e}_p = \int \mathbf{S}_v^t \boldsymbol{\varepsilon}_p dV. \quad (3.38)$$

A condição de normalidade (2.34) é imposta ponderadamente, utilizando-se para efectuar a ponderação as funções de aproximação do campo de tensões no domínio dos elementos. Escreve-se então:

$$\int \mathbf{S}_v^t (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p - \mathbf{n} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_* - \mathbf{R}_e^*) dV = 0.$$

A introdução na igualdade anterior da aproximação definida para os incrementos dos parâmetros plásticos (3.3) permite obter

$$\int \mathbf{S}_v^t \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p dV - \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{n} \mathbf{P}_* \Delta \mathbf{e}_* dV - \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{R}_e^* dV = 0.$$

Tendo em atenção a definição das deformações plásticas generalizadas (3.38), a descrição incremental da condição de normalidade no modelo discreto pode ser escrita na forma,

$$\Delta \mathbf{e}_p = \mathbf{N}_* \Delta \mathbf{e}_* + \mathbf{R}_e^*, \quad (3.39)$$

onde

$$\mathbf{N}_* = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{n} \mathbf{P}_* dV, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{R}_e^* = \int \mathbf{S}_v^t \mathbf{R}_e^* dV. \quad (3.41)$$

A condição de escoamento plástico escrita para o modelo discreto assume a forma:

$$\Delta \mathbf{e}_* \geq 0. \quad (3.42)$$

Se na aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos (3.3) se utilizarem conjuntos de funções que tomem sempre valores não-negativos no seu intervalo de definição (células plásticas), então a condição de escoamento é imposta localmente.

A definição dos incrementos dos potenciais plásticos generalizados pode ser obtida substituindo, na definição (3.6) a equação que define a variação dos potenciais plásticos (2.35). Tem-se então:

$$\Delta \Phi_* = \int \mathbf{P}_*^t (\mathbf{n}^t \Delta \boldsymbol{\sigma} - h_* \Delta \varepsilon_* + R_\phi^*) dV .$$

Substituindo na definição anterior a aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos (3.3) e a aproximação dos incrementos do campo de tensões (obtida a partir de (3.1)) vem:

$$\Delta \Phi_* = \int \mathbf{P}_*^t \mathbf{n}^t \mathbf{S}_v \Delta \mathbf{X} dV - \int \mathbf{P}_*^t h_* \mathbf{P}_* \Delta \varepsilon_* dV + \int \mathbf{P}_*^t R_\phi^* dV .$$

Tendo em conta a definição da matriz \mathbf{N}_* (3.40), a definição dos incrementos dos potenciais plásticos generalizados pode ser escrita na forma,

$$\Delta \Phi_* = \mathbf{N}_*^t \Delta \mathbf{X} - \mathbf{H}_* \Delta \mathbf{e}_* + \mathbf{R}_\Phi^* , \quad (3.43)$$

onde,

$$\mathbf{H}_* = \int \mathbf{P}_*^t h_* \mathbf{P}_* dV , \quad (3.44)$$

$$\mathbf{R}_\Phi^* = \int \mathbf{P}_*^t R_\phi^* dV . \quad (3.45)$$

As condições de cedência no modelo discreto podem ser obtidas através da imposição, na forma de resíduos pesados, das condições (2.36). A utilização das funções de aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos para efectuar a ponderação permite obter directamente:

$$\Phi_* + \Delta \Phi_* \leq 0 . \quad (3.46)$$

As condições de complementaridade são obtidas quando se impõe que as condições (2.38) e (2.39) sejam verificadas, em média, em cada uma das células críticas em que se considera subdividido cada elemento finito. A substituição em

$$\int \phi_* \Delta \varepsilon_* dV = 0$$

da aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos permite obter:

$$\int \phi_* \mathbf{P}_* \Delta \mathbf{e}_* dV = 0 \Rightarrow \int \phi_* \mathbf{P}_* dV \Delta \mathbf{e}_* = 0 \Rightarrow \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 . \quad (3.47)$$

O mesmo procedimento aplicado agora à igualdade (2.39) permite obter a segunda condição de complementaridade, que aparece então escrita na forma:

$$\Delta \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 . \quad (3.48)$$

A representação discreta das condições de plasticidade pode ser sumarizada na forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}_p \\ \Delta \Phi_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{N}_* \\ \mathbf{N}_*^t & -\mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{e}_* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^* \\ \mathbf{R}_\Phi^* \end{bmatrix} , \quad (3.49)$$

$$\Phi_* + \Delta \Phi_* \leq 0 , \quad (3.50)$$

$$\begin{cases} \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 \\ \Delta \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 . \end{cases} , \quad (3.51)$$

$$\Delta \mathbf{e}_* \geq 0 . \quad (3.52)$$

3.7 Sistema governativo - Modelo elástico

O sistema governativo elementar para os modelos elásticos é obtido através da combinação das representações discretas das condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade. Como consequência da preservação da dualidade estática-cinemática e da reciprocidade nas relações constitutivas no modelo discreto, tal sistema apresenta uma matriz dos coeficientes que é simétrica.

3.7.1 Modelo de equilíbrio

Combinando as equações (3.26) e (3.34) de forma a eliminar a definição explícita das deformações generalizadas, \mathbf{e} , e considerando as equações (3.11) e (3.14), obtém-se o seguinte sistema governativo elementar para os modelos de equilíbrio,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_{pp} \\ -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_p \\ -\mathbf{Q}_\gamma + \mathbf{Q}_{\gamma p} \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

A reunião das diferentes equações elementares é efectuada impondo que elementos adjacentes partilhem a mesma aproximação para o campo de deslocamentos na fronteira que lhes é comum. É importante salientar que o sistema governativo global, obtido a partir do espalhamento de todas as contribuições elementares, tem um aspecto em tudo semelhante ao sistema (3.53). A única diferença reside na composição dos diferentes operadores estruturais \mathbf{F} , \mathbf{A}_v , \mathbf{A}_γ e dos termos independentes, que reúnem agora a contribuição de todos os elementos da malha.

É importante sublinhar que, ao contrário do que é típico nas formulações clássicas de elementos finitos, os coeficientes de cada matriz estrutural de cada elemento são directamente espalhados no sistema global, sem que haja a necessidade de proceder a quaisquer sobreposições ou somatórios. Isto acontece porque todas as variáveis (com excepção dos deslocamentos de fronteira generalizados que são partilhados por elementos adjacentes) são definidas de uma forma perfeitamente local e independente de elemento para elemento.

Embora tal procedimento não seja aqui adoptado, é possível deixar de impor localmente a condição de continuidade de deslocamentos nas fronteiras entre elementos adjacentes. Tal condição pode passar a ser imposta ponderadamente na forma de resíduos pesados [133, 134].

Para melhor esclarecer a forma através da qual se efectua a reunião das diferentes equações elementares escritas na forma (3.53), considere-se o exemplo da estrutura representada na figura 3.1. Denotando por $\mathbf{F}^{(i)}$ $\{\mathbf{A}_v^{(i)}\}$ a matriz de flexibilidade {operador de compatibilidade no domínio} definida para o elemento i e por $\mathbf{A}_\gamma^{(i,j)}$ a parcela do operador de compatibilidade na fronteira definido para o elemento i e fronteira estática j , o respectivo sistema governativo global pode ser escrito na

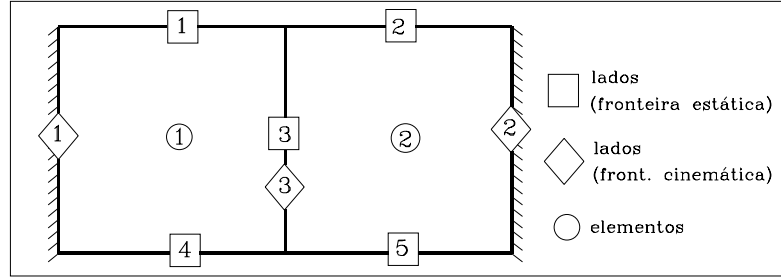


Figura 3.1: Topologia da estrutura.

seguinte forma:

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{F}^{(1)} & 0 & \mathbf{A}_v^{(1)} & 0 & \mathbf{A}_\gamma^{(1,1)} & 0 & \mathbf{A}_\gamma^{(1,3)} & \mathbf{A}_\gamma^{(1,4)} & 0 \\
 0 & \mathbf{F}^{(2)} & 0 & \mathbf{A}_v^{(2)} & 0 & \mathbf{A}_\gamma^{(2,2)} & \mathbf{A}_\gamma^{(2,3)} & 0 & \mathbf{A}_\gamma^{(2,5)} \\
 \mathbf{A}_v^{t(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{A}_v^{t(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{A}_\gamma^{t(1,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{A}_\gamma^{t(2,2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{A}_\gamma^{t(1,3)} & \mathbf{A}_\gamma^{t(2,3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{A}_\gamma^{t(1,4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \mathbf{A}_\gamma^{t(2,5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{X}^{(1)} \\
 \mathbf{X}^{(2)} \\
 \mathbf{q}_v^{(1)} \\
 \mathbf{q}_v^{(2)} \\
 \mathbf{q}_\gamma^{(1)} \\
 \mathbf{q}_\gamma^{(2)} \\
 \mathbf{q}_\gamma^{(3)} \\
 \mathbf{q}_\gamma^{(4)} \\
 \mathbf{q}_\gamma^{(5)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{e}_\gamma^{(1)} - \mathbf{e}_\theta^{(1)} - \mathbf{e}_{pe}^{(1)} - \mathbf{e}_{pp}^{(1)} \\
 \mathbf{e}_\gamma^{(2)} - \mathbf{e}_\theta^{(2)} - \mathbf{e}_{pe}^{(2)} - \mathbf{e}_{pp}^{(2)} \\
 -\mathbf{Q}_v^{(1)} - \mathbf{Q}_p^{(1)} \\
 -\mathbf{Q}_v^{(2)} - \mathbf{Q}_p^{(2)} \\
 -\mathbf{Q}_\gamma^{(1)} + \mathbf{Q}_{\gamma p}^{(1,1)} \\
 -\mathbf{Q}_\gamma^{(2)} + \mathbf{Q}_{\gamma p}^{(2,2)} \\
 -\mathbf{Q}_\gamma^{(3)} + \mathbf{Q}_{\gamma p}^{(1,3)} + \mathbf{Q}_{\gamma p}^{(2,3)} \\
 -\mathbf{Q}_\gamma^{(4)} + \mathbf{Q}_{\gamma p}^{(1,4)} \\
 -\mathbf{Q}_\gamma^{(5)} + \mathbf{Q}_{\gamma p}^{(2,5)}
 \end{bmatrix}$$

Quando as funções utilizadas na aproximação do campo de tensões são linearmente independentes, a matriz de flexibilidade generalizada, \mathbf{F} , é positiva definida. O sistema (3.53) pode então ser condensado na forma:

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{K}_{vv} & -\mathbf{K}_{v\gamma} \\
 -\mathbf{K}_{v\gamma}^t & \mathbf{K}_{\gamma\gamma}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{q}_v \\
 \mathbf{q}_\gamma
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_p - \mathbf{R}_v \\
 \mathbf{Q}_\gamma - \mathbf{Q}_{\gamma p} + \mathbf{R}_\gamma
 \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

onde,

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{A}_i^t \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{A}_i^t \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_{pe} + \mathbf{e}_{pp} - \mathbf{e}_\gamma). \quad (3.55)$$

É importante salientar que a reunião das equações elementares escritas na forma condensada (3.54) envolve já, ao contrário do que sucede com o formato não-condensado do sistema governativo (3.53), as operações de espalhamento típicas (somatórios incluídos) da formulação clássica de deslocamentos do método dos elementos finitos.

Uma vez conhecidos os deslocamentos generalizados, \mathbf{q}_v e \mathbf{q}_γ , os valores das tensões generalizadas podem ser calculadas a partir de:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}(-\mathbf{A}_v \mathbf{q}_v + \mathbf{A}_\gamma \mathbf{q}_\gamma + \mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_{pp}). \quad (3.56)$$

O sistema (3.53) pode ser ainda condensado de forma a que o comportamento do modelo discreto venha escrito apenas em função dos valores dos deslocamentos generalizados na fronteira. O sistema governativo elementar assim obtido pode ser escrito na seguinte forma, bastante familiar aos utilizadores das formulações clássicas de elementos finitos,

$$\mathbf{K}^* \mathbf{q}_\gamma = \mathbf{Q}_\gamma^*, \quad (3.57)$$

onde,

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\gamma^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v \\ \mathbf{A}_v^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

$$\mathbf{Q}_\gamma^* = \mathbf{Q}_\gamma - \mathbf{Q}_{\gamma p} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\gamma^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v \\ \mathbf{A}_v^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_{pe} + \mathbf{e}_{pp} - \mathbf{e}_\gamma \\ \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_p \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Quando se escreve o sistema governativo elementar nesta forma, a obtenção do sistema de equações global envolve a reunião das contribuições elementares através de um processo de espalhamento análogo ao utilizado nas formulações de deslocamentos. Desde já se adianta que a utilização da forma condensada (3.57) pode trazer alguns benefícios de um ponto de vista da melhoria da eficiência numérica do modelo, como oportunamente se referirá. A aplicação da equação seguinte permite calcular os valores das tensões e deslocamentos de domínio generalizados, \mathbf{X} e \mathbf{q}_v , uma vez obtidos os deslocamentos generalizados na fronteira, \mathbf{q}_γ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v \\ \mathbf{A}_v^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_\gamma + \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v \\ \mathbf{A}_v^t & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_{pp} \\ -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_p \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

3.7.2 Modelo de compatibilidade

Combinando as equações (3.29) e (3.34) de forma a eliminar a definição explícita das deformações generalizadas, \mathbf{e} , e considerando as equações (3.31) e (3.20), obtém-se o seguinte sistema governativo elementar para os modelos de compatibilidade,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & 0 & -\mathbf{B}_v^t \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_\gamma^t \\ -\mathbf{B}_v & \mathbf{B}_\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{p}_\gamma \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{pc} - \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{pe} \\ \mathbf{v}_\gamma - \mathbf{v}_{\gamma p} \\ -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_{v\gamma} + \mathbf{Q}_{vp} \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

A reunião das diferentes equações elementares é efectuada impondo que elementos adjacentes partilhem a mesma aproximação para o campo de tracções ao longo da fronteira que lhes é comum. Tal como no caso dos modelos de equilíbrio, o sistema governativo global, obtido a partir do espalhamento de todas as contribuições elementares, tem um aspecto em tudo semelhante ao sistema (3.61). De igual forma, os

coeficientes de cada matriz estrutural de cada elemento são directamente espalhados no sistema global, sem que haja a necessidade de proceder a quaisquer sobreposições ou somatórios.

Tal como para o caso do modelo de equilíbrio, as operações de espalhamento das equações elementares escritas na forma (3.61) são agora ilustradas através da apresentação de um exemplo bastante simples. Utiliza-se de novo para o efeito a estrutura representada na figura 3.1. Denotando por $\mathbf{F}^{(i)}$ $\{\mathbf{B}_v^{(i)}\}$ a matriz de flexibilidade {operador de equilíbrio no domínio} definida para o elemento i e por $\mathbf{B}_\gamma^{(i,j)}$ a parcela do operador de equilíbrio na fronteira definido para o elemento i e fronteira cinemática j , o respectivo sistema governativo global pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{B}_v^{t(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{B}_v^{t(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_\gamma^{t(1,1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_\gamma^{t(2,2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_\gamma^{t(1,3)} & -\mathbf{B}_\gamma^{t(2,3)} \\ -\mathbf{B}_v^{(1)} & 0 & \mathbf{B}_\gamma^{(1,1)} & 0 & \mathbf{B}_\gamma^{(1,3)} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_v^{(2)} & 0 & \mathbf{B}_\gamma^{(2,2)} & -\mathbf{B}_\gamma^{(2,3)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{X}^{(2)} \\ \mathbf{p}_\gamma^{(1)} \\ \mathbf{p}_\gamma^{(2)} \\ \mathbf{p}_\gamma^{(3)} \\ \mathbf{q}_v^{(1)} \\ \mathbf{q}_v^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{pc}^{(1)} - \mathbf{e}_\theta^{(1)} \\ \mathbf{e}_{pc}^{(2)} - \mathbf{e}_\theta^{(2)} \\ \mathbf{v}_\gamma^{(1)} - \mathbf{v}_{\gamma p}^{(1,1)} \\ \mathbf{v}_{\gamma p}^{(1,3)} - \mathbf{v}_{\gamma p}^{(2,3)} \\ \mathbf{v}_\gamma^{(3)} - \mathbf{v}_{\gamma p}^{(2,3)} \\ -\mathbf{Q}_v^{(1)} - \mathbf{Q}_{v\gamma}^{(1)} \\ -\mathbf{Q}_v^{(2)} - \mathbf{Q}_{v\gamma}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Sendo as funções utilizadas na aproximação do campo de tensões linearmente independentes, a matriz de flexibilidade generalizada, \mathbf{F} , é positiva definida e o sistema (3.61) pode então ser condensado na forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_v & -\mathbf{B}_\gamma \\ -\mathbf{B}_\gamma^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \mathbf{p}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_{v\gamma} - \mathbf{Q}_{vp} - \mathbf{R}_{vc} \\ -\mathbf{v}_\gamma + \mathbf{v}_{\gamma p} \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

onde,

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{B}_v \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B}_v^t, \quad \mathbf{R}_{vc} = \mathbf{B}_v \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{e}_{pc} - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_\theta). \quad (3.63)$$

Uma vez conhecidos os deslocamentos generalizados, \mathbf{q}_v e \mathbf{p}_γ , os valores das tensões generalizadas podem ser calculadas a partir de:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B}_v^t \mathbf{q}_v + \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{e}_{pc} - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_\theta). \quad (3.64)$$

3.8 Sistema governativo - Modelo elastoplástico

O sistema governativo elementar para os modelos elastoplásticos é obtido através da combinação das relações de plasticidade com a forma incremental das condições discretas de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade. Para simplificar a apresentação, admite-se a inexistência de deformações térmicas generalizadas ($\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$) e consideram-se nulas as soluções particulares presentes na aproximação do campo de tensões ($\boldsymbol{\sigma}_p$) e do campo de deslocamentos (\mathbf{u}_p).

3.8.1 Modelo de equilíbrio

A substituição das definições (3.34) e (3.39) na forma incremental das condições de compatibilidade descritas em (3.26) permite eliminar as parcelas elástica e plástica das deformações generalizadas como variáveis explícitas do problema. Considerando ainda a descrição incremental das condições de equilíbrio no domínio (3.11) e na fronteira (3.14), a definição dos incrementos dos potenciais plásticos generalizados (3.43) e as condições de cedência (3.46), escoamento plástico (3.42) e complementaridade (3.51), obtém-se o seguinte sistema de equações e inequações que permite modelar o comportamento elastoplástico da estrutura em estudo.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma & \mathbf{N}_* \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{N}_*^t & 0 & 0 & -\mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{q}_\gamma \\ \Delta \mathbf{e}_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}_\gamma - \mathbf{R}_e^* \\ -\Delta \mathbf{Q}_v \\ -\Delta \mathbf{Q}_\gamma \\ \Delta \Phi_* - \mathbf{R}_\Phi^* \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

$$\Phi_* + \Delta \Phi_* \leq 0; \quad \begin{cases} \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 \\ \Delta \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0. \end{cases} ; \quad \Delta \mathbf{e}_* \geq 0.$$

O sistema governativo para os modelos elásticos pode ser recuperado de imediato se se eliminarem, no sistema (3.65), todos os operadores e variáveis associados à fase plástica da resposta. Por outro lado, se se pretende efectuar uma análise rígido-plástica, há que eliminar todos os operadores elásticos do sistema (3.65), tal como é ilustrado em [73].

Tal como no caso do sistema governativo apresentado para o modelo elástico, todas as variáveis generalizadas, à excepção dos deslocamentos na fronteira, são definidas de uma forma completamente independente para cada um dos elementos da malha. O processo de espalhamento, efectuado impondo que elementos adjacentes partilhem a mesma aproximação para o campo de deslocamentos ao longo da fronteira que lhes é comum, conduz então à obtenção de um sistema governativo global que corresponde exactamente à forma do sistema (3.65).

Aplicando as condições de equivalência de Karush-Kuhn-Tucker [111, 113] ao sistema governativo (3.65) é possível estabelecer pares de programas quadráticos não lineares equivalentes. A aplicação de algoritmos da Programação Matemática na resolução de tais programas permite então efectuar a análise elastoplástica pretendida. Contudo, a aplicação de tais algoritmos é em muitos casos preterida em favor de métodos incrementais de análise, devido às vantagens que estes apresentam, não só em termos de eficiência numérica do processo de cálculo, mas também no que toca à quantidade de informação adicional fornecida. É em consequência do reconhecimento destas vantagens que se adopta neste trabalho um método incremental para a execução das análises elastoplásticas.

É fácil reconhecer que o sistema governativo, tal como é apresentado em (3.65), não apresenta um formato adequado para a realização de uma análise incremental. Estas últimas costumam basear-se na existência de um *parâmetro de carga* ou de

deslocamento previamente estabelecido. Há então que reformular ligeiramente o sistema não-linear de equações e inequações definido em (3.65) por forma a fazer surgir explicitamente a definição de tais parâmetros. São obtidos dois sistemas alternativos, conforme se considere a existência de forças ou deslocamentos impostos, respectivamente.

Forças impostas

Considere-se que as tracções aplicadas na fronteira são proporcionais ao *parâmetro de carga* λ ,

$$\mathbf{t}_\gamma = \bar{\mathbf{t}}_\gamma \lambda .$$

Em consequência, a definição das tracções generalizadas (3.9) pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{Q}_\gamma = \int \mathbf{U}_\gamma^t \mathbf{t}_\gamma d\Gamma \sigma = \int \mathbf{U}_\gamma^t \bar{\mathbf{t}}_\gamma \lambda d\Gamma \sigma = \mathbf{a}_e \lambda ,$$

onde

$$\mathbf{a}_e = \int \mathbf{U}_\gamma^t \bar{\mathbf{t}}_\gamma d\Gamma \sigma .$$

O incremento das tracções generalizadas é obtido imediatamente através de

$$\Delta \mathbf{Q}_\gamma = \mathbf{a}_e \Delta \lambda .$$

A substituição da igualdade anterior na forma incremental das condições (3.14) permite obter uma nova descrição para as condições de equilíbrio no modelo discreto, a qual pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_v^t & 0 \\ \mathbf{A}_\gamma^t & -\mathbf{a}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (3.66)$$

Note-se que foi considerado como constante o valor das forças de massa. Como tal, $\Delta \mathbf{Q}_v = 0$. É de sublinhar no entanto que é possível considerar também as forças de massa como proporcionais ao parâmetro λ . Tal não foi aqui feito, não só com o intuito de simplificar a apresentação (salientando apenas os aspectos essenciais), mas também porque tal situação não é muito vulgar em situações reais.

A nova descrição das condições de compatibilidade, duais de (3.66), pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_v & \mathbf{A}_\gamma \\ 0 & -\mathbf{a}_e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}_e + \Delta \mathbf{e}_p \\ -\Delta \bar{w} \end{bmatrix} . \quad (3.67)$$

A interpretação física do parâmetro $\Delta \bar{w}$ permite verificar, de uma forma bastante simples, que define o incremento do trabalho unitário efectuado pelas tracções impostas. De facto,

$$\Delta \bar{w} = \mathbf{a}_e^t \Delta \mathbf{q}_\gamma = \int \bar{\mathbf{t}}_\gamma^t \mathbf{U}_\gamma \Delta \mathbf{q}_\gamma d\Gamma \sigma = \int \bar{\mathbf{t}}_\gamma^t \Delta \mathbf{u} d\Gamma \sigma .$$

Como se trata de um problema de *forças impostas*, são nulos os deslocamentos impostos. Tem-se então que $\Delta \mathbf{e}_\gamma = 0$.

Combinando as novas condições de equilíbrio (3.66) e compatibilidade (3.67) com as descrições incrementais das relações de elasticidade e de plasticidade, obtém-se o seguinte sistema governativo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma & \mathbf{N}_* & 0 \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_e \\ \mathbf{N}_*^t & 0 & & -\mathbf{H}_* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_e^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{q}_\gamma \\ \Delta \mathbf{e}_* \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_e^* \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \Phi_* - \mathbf{R}_\Phi^* \\ \Delta \bar{w} \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

$$\Phi_* + \Delta \Phi_* \leq 0; \quad \begin{cases} \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 \\ \Delta \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 \end{cases}; \quad \Delta \mathbf{e}_* \geq 0. \quad (3.69)$$

Deslocamentos impostos

Considera-se que os deslocamentos impostos na fronteira cinemática são proporcionais ao *parâmetro de deslocamento* λ ,

$$\mathbf{u}_\gamma = \bar{\mathbf{u}}_\gamma \lambda.$$

Em consequência, a definição das deformações generalizadas \mathbf{e}_γ (3.27) pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{e}_\gamma = \int (\mathbf{NS}_v)^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma u = \int (\mathbf{NS}_v)^t \bar{\mathbf{u}}_\gamma \lambda d\Gamma u = \mathbf{b}_e \lambda,$$

onde

$$\mathbf{b}_e = \int (\mathbf{NS}_v)^t \bar{\mathbf{u}}_\gamma d\Gamma u.$$

A variação das deformações \mathbf{e}_γ vem então dada por,

$$\Delta \mathbf{e}_\gamma = \mathbf{b}_e \Delta \lambda.$$

A nova descrição para as condições de compatibilidade no modelo discreto pode ser obtida substituindo a igualdade anterior na forma incremental da definição (3.26). Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_v & \mathbf{A}_\gamma & \mathbf{b}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{q}_\gamma \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = [\Delta \mathbf{e}_e + \Delta \mathbf{e}_p]. \quad (3.70)$$

As condições de equilíbrio, duais de (3.70), vêm escritas da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_v^t \\ \mathbf{A}_\gamma^t \\ \mathbf{b}_e^t \end{bmatrix} \Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \bar{w}_* \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

onde o parâmetro $\Delta\bar{w}_*$ representa o incremento do trabalho unitário induzido pelos deslocamentos impostos na fronteira:

$$\Delta\bar{w}_* = \mathbf{b}_e^t \Delta\mathbf{X} = \int \bar{\mathbf{u}}_\gamma^t \mathbf{N} \mathbf{S}_v \Delta\mathbf{X} d\Gamma u = \int \bar{\mathbf{u}}_\gamma^t \Delta\mathbf{t} d\Gamma u .$$

Como se trata agora de um problema de *deslocamentos impostos*, verifica-se que $\Delta\mathbf{Q}_v = \Delta\mathbf{Q}_\gamma = 0$. Combinando as novas condições de compatibilidade (3.70) e equilíbrio (3.71) com as descrições incrementais das relações de elasticidade e de plasticidade, obtém-se o seguinte sistema governativo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma & \mathbf{N}_* & -\mathbf{b}_e \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{N}_*^t & 0 & 0 & -\mathbf{H}_* & 0 \\ -\mathbf{b}_e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta\mathbf{q}_v \\ \Delta\mathbf{q}_\gamma \\ \Delta\mathbf{e}_* \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_e^* \\ 0 \\ 0 \\ \Delta\Phi_* - \mathbf{R}_\Phi^* \\ -\Delta\bar{w}_* \end{bmatrix} . \quad (3.72)$$

$$\Phi_* + \Delta\Phi_* \leq 0 ; \begin{cases} \Phi_*^t \Delta\mathbf{e}_* = 0 \\ \Delta\Phi_*^t \Delta\mathbf{e}_* = 0 \end{cases} ; \Delta\mathbf{e}_* \geq 0 .$$

3.8.2 Modelo de compatibilidade

A substituição das definições (3.34) e (3.39) na forma incremental das condições de compatibilidade descritas em (3.29) permite eliminar as parcelas elástica e plástica das deformações generalizadas como variáveis explícitas do problema. Considerando ainda a descrição incremental das condições de equilíbrio no domínio (3.20) e de compatibilidade na fronteira (3.31), a definição dos incrementos dos potenciais plásticos generalizados (3.43) e as condições de cedência (3.46), escoamento plástico (3.42) e complementaridade (3.51), obtém-se o seguinte sistema de equações e inequações que permite modelar o comportamento elastoplástico da estrutura em estudo.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & 0 & -\mathbf{B}_v^t & \mathbf{N}_* \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_\gamma^t & 0 \\ -\mathbf{B}_v & \mathbf{B}_\gamma & 0 & 0 \\ \mathbf{N}_*^t & 0 & 0 & -\mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta\mathbf{p}_\gamma \\ \Delta\mathbf{q}_v \\ \Delta\mathbf{e}_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_e^* \\ \Delta\mathbf{v}_\gamma \\ -\Delta\mathbf{Q}_v - \Delta\mathbf{Q}_{v\gamma} \\ \Delta\Phi_* - \mathbf{R}_\Phi^* \end{bmatrix} . \quad (3.73)$$

$$\Phi_* + \Delta\Phi_* \leq 0 ; \begin{cases} \Phi_*^t \Delta\mathbf{e}_* = 0 \\ \Delta\Phi_*^t \Delta\mathbf{e}_* = 0 \end{cases} ; \Delta\mathbf{e}_* \geq 0 .$$

Tal como no caso dos modelos de equilíbrio, o sistema (3.73) não se encontra no formato mais apropriado para se efectuar uma análise incremental. Para contornar este problema são agora reformuladas as condições de equilíbrio e de compatibilidade, de molde a fazer surgir explicitamente a definição dos parâmetros de carga ou deslocamento.

Forças impostas

Considera-se que as tracções impostas na fronteira estática são proporcionais ao parâmetro de carga, λ .

$$\mathbf{t}_\gamma = \bar{\mathbf{t}}_\gamma \lambda .$$

É então possível escrever-se:

$$\mathbf{Q}_{v\gamma} = \int \mathbf{U}_v^t \mathbf{t}_\gamma d\Gamma \sigma = \int \mathbf{U}_v^t \bar{\mathbf{t}}_\gamma \lambda d\Gamma \sigma = \mathbf{a}_c \lambda ,$$

onde

$$\mathbf{a}_c = \int \mathbf{U}_v^t \bar{\mathbf{t}}_\gamma d\Gamma \sigma .$$

A substituição da forma incremental da definição (3.24),

$$\Delta \mathbf{Q}_{v\gamma} = \mathbf{a}_c \Delta \lambda ,$$

na versão incremental das condições (3.20) permite obter a nova descrição para as condições de equilíbrio, que pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_v & \mathbf{B}_\gamma & \mathbf{a}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{p}_\gamma \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = 0 . \quad (3.74)$$

Considera-se que as forças de massa são constantes, pelo que se verifica $\Delta \mathbf{Q}_v = 0$. As condições de compatibilidade, duais das condições de equilíbrio (3.74), são dadas por:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_v^t \\ \mathbf{B}_\gamma^t \\ \mathbf{a}_c^t \end{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} -\Delta \mathbf{e}_e - \Delta \mathbf{e}_p \\ 0 \\ \Delta \bar{w} \end{bmatrix} . \quad (3.75)$$

A interpretação física de $\Delta \bar{w}$ permite verificar que este parâmetro representa o incremento do trabalho unitário realizado pelas tracções aplicadas na fronteira estática do domínio:

$$\Delta \bar{w} = \mathbf{a}_c^t \Delta \mathbf{q}_v = \int \bar{\mathbf{t}}_\gamma^t \mathbf{U}_v \Delta \mathbf{q}_v d\Gamma \sigma = \int \bar{\mathbf{t}}_\gamma^t \Delta \mathbf{u} d\Gamma \sigma .$$

Combinando as novas condições de equilíbrio (3.74) e compatibilidade (3.75) com as descrições incrementais das relações de elasticidade e de plasticidade, obtém-se o seguinte sistema governativo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & 0 & -\mathbf{B}_v^t & \mathbf{N}_* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_\gamma^t & 0 & 0 \\ -\mathbf{B}_v & \mathbf{B}_\gamma & 0 & 0 & \mathbf{a}_c \\ \mathbf{N}_*^t & 0 & 0 & -\mathbf{H}_* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_c^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{p}_\gamma \\ \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{e}_* \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_e^* \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \Phi_* - \mathbf{R}_\Phi^* \\ \Delta \bar{w} \end{bmatrix} . \quad (3.76)$$

$$\Phi_* + \Delta \Phi_* \leq 0 ; \begin{cases} \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 \\ \Delta \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 . \end{cases} ; \Delta \mathbf{e}_* \geq 0 .$$

Deslocamentos impostos

Considera-se que os deslocamentos impostos na fronteira cinemática são proporcionais ao *parâmetro de deslocamento* λ

$$\mathbf{u}_\gamma = \bar{\mathbf{u}}_\gamma \lambda$$

Os deslocamentos generalizados na fronteira são então dados por:

$$\mathbf{v}_\gamma = \int \mathbf{S}_\gamma^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma u = \int \mathbf{S}_\gamma^t \bar{\mathbf{u}}_\gamma \lambda d\Gamma u = \mathbf{b}_c \lambda,$$

onde

$$\mathbf{b}_c = \int \mathbf{S}_\gamma^t \bar{\mathbf{u}}_\gamma d\Gamma u.$$

Substituindo-se a versão incremental da relação (3.10), definida por

$$\Delta \mathbf{v}_\gamma = \mathbf{b}_c \Delta \lambda,$$

na forma incremental das condições (3.31), obtém-se a nova condição de compatibilidade para o modelo discreto. Esta última pode ser apresentada a forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^t & 0 \\ -\mathbf{B}_\gamma^t & \mathbf{b}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}_e + \Delta \mathbf{e}_p \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

As condições de equilíbrio, duais de (3.77), são as que se apresentam de seguida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_v & -\mathbf{B}_\gamma \\ 0 & \mathbf{b}_c^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{p}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \bar{w}_* \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

O parâmetro $\Delta \bar{w}_*$ representa o incremento do trabalho unitário induzido pelos deslocamentos impostos na fronteira cinemática do domínio considerado:

$$\Delta \bar{w}_* = \mathbf{b}_c^t \Delta \mathbf{p}_\gamma = \int \bar{\mathbf{u}}_\gamma^t \mathbf{S}_\gamma \Delta \mathbf{p}_\gamma d\Gamma u = \int \bar{\mathbf{u}}_\gamma^t \Delta \mathbf{t} d\Gamma u$$

Combinando as novas condições de compatibilidade (3.77) e equilíbrio (3.78) com as descrições incrementais das relações de elasticidade e de plasticidade, obtém-se o seguinte sistema governativo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & 0 & -\mathbf{B}_v^t & \mathbf{N}_* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_\gamma^t & 0 & -\mathbf{b}_c \\ -\mathbf{B}_v & \mathbf{B}_\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{N}_*^t & 0 & 0 & -\mathbf{H}_* & 0 \\ 0 & -\mathbf{b}_c^t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{p}_\gamma \\ \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{e}_* \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_e^* \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \Phi_* - \mathbf{R}_\Phi^* \\ -\Delta \bar{w}_* \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

$$\Phi_* + \Delta \Phi_* \leq 0; \quad \begin{cases} \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 \\ \Delta \Phi_*^t \Delta \mathbf{e}_* = 0 \end{cases}; \quad \Delta \mathbf{e}_* \geq 0.$$

3.9 Análise incremental

3.9.1 Descrição geral do algoritmo

Descreve-se agora o algoritmo que permite efectuar a análise elastoplástica incremental resolvendo os sistemas de equações e inequações não-lineares que regem o comportamento do modelo discreto de elementos finitos híbrido-mistos.

Para não tornar demasiadamente extensa a apresentação, introduz-se apenas o algoritmo que possibilita a resolução do sistema governativo apresentado em (3.68) e (3.69) e que corresponde a um problema de forças impostas num modelo de equilíbrio. No entanto, os conceitos e métodos em que tal algoritmo se baseia podem ser generalizados, de uma forma imediata, a qualquer outro dos sistemas não-lineares atrás apresentados.

A análise elastoplástica incremental pode ser codificada através do seguinte problema de programação matemática:

Maximizar $\Delta\lambda$ sujeito às restrições (3.68) e (3.69).

Utilizando o método das perturbações [99], este problema não linear pode ser transformado numa sequência equivalente de *Problemas de Linearidade Complementar* (*Linear Complementarity Problems* ou *LCP*). Expandindo os incrementos de cada uma das variáveis (aqui genericamente denotadas por v) numa série de potências,

$$\Delta v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^{(n)} \tau^n}{n!}, \quad (3.80)$$

onde τ denota um parâmetro não-negativo arbitrário, e igualando de seguida os termos da mesma ordem, o sistema (3.68) é transformado numa sequência infinita de problemas lineares. A estrutura dos sistemas lineares que resultam daquela expansão é em tudo idêntica à do sistema (3.68), com os incrementos de cada variável Δv e os resíduos \mathbf{R}^* , substituídos pelas sua derivadas de ordem n , $v^{(n)}$ e $\mathbf{R}^{*(n)}$, respectivamente. Tem-se então:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma & \mathbf{N}_* & 0 \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_e \\ \mathbf{N}_*^t & 0 & 0 & -\mathbf{H}_* & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_e^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(n)} \\ \mathbf{q}_v^{(n)} \\ \mathbf{q}_\gamma^{(n)} \\ \mathbf{e}_*^{(n)} \\ \lambda^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_e^{*(n)} \\ 0 \\ 0 \\ -\mathbf{R}_\Phi^{*(n)} \\ \bar{w}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

É importante sublinhar desde já que os sistemas (3.81) são recursivos, uma vez que as derivadas de ordem n dos resíduos, $\mathbf{R}^{*(n)}$, são obtidas a partir do conhecimento do valor de derivadas de ordem inferior dos campos de tensões e dos parâmetros plásticos. No apêndice A são apresentadas as equações que permitem definir as componentes das derivadas de cada um dos vectores resíduo utilizados.

O procedimento aqui utilizado para efectuar a análise incremental está descrito de uma forma geral em [63] e encontra-se particularizado em [64, 71] para o caso da análise física e geometricamente não linear de estruturas reticuladas. O algoritmo baseia-se numa extensão directa do método de Simplex. Em cada incremento, o sistema (3.81) é obtido e resolvido apenas para os modos de cedência que se encontram activos (para os quais se verifica $\Delta\Phi_* = 0$). O *comprimento do passo* é automaticamente ajustado por forma a permitir a activação do próximo modo de cedência. O valor do passo é ainda condicionado pela necessidade de se limitarem os erros de truncatura resultantes do facto de se utilizar apenas um número finito de termos na expansão em série dos incrementos das variáveis envolvidas no processo. As descargas plásticas são também detectadas e tratadas de uma forma bastante simples e natural, como adiante se verá.

Para evitar eventuais dificuldades no controle do *carácter monotónico* do processo, escolhe-se para parâmetro de perturbação o incremento do trabalho unitário provocado pelas tracções aplicadas na fronteira. Tem-se então $\tau = \Delta\bar{w}$, pelo que se pode escrever $\bar{w}^{(n)} = \delta_{1n}$.

A análise elastoplástica incremental pode ser decomposta em duas fases distintas. Na primeira, é efectuada uma análise elástica linear e é obtido o valor do parâmetro de carga associado à activação do primeiro modo de cedência. É a chamada *fase elástica* e envolve apenas a realização de um incremento de carga. É então que se inicia a *fase plástica*, descrita pelo sistema equações e inequações apresentado em (3.68) e (3.69). Apresentam-se de seguida as operações básicas envolvidas na resolução de cada uma daquelas fases.

3.9.2 Fase elástica

O processo inicia-se com a execução de uma análise elástica linear envolvendo a utilização do sistema governativo apresentado em (3.53) e considerando um valor unitário para o parâmetro de carga, $\lambda = 1$. Com base nos valores desta forma obtidos, determina-se de seguida o valor do parâmetro de carga necessário para activar cada um dos possíveis modos de cedência. Tendo em atenção que estamos a assumir um comportamento elástico para o material, aquele cálculo pode ser efectuado com base na seguinte expressão,

$$\lambda_i \hat{\Phi}_*^{(i)} - \Phi_0^{(i)} = 0 ,$$

onde

$$\hat{\Phi}_*^{(i)} = \int P_*^{t(i)} (\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma})^{1/2} dV \quad , \quad \Phi_0^{(i)} = \int P_*^{t(i)} \sigma_0 dV .$$

O valor do parâmetro de carga no limite da fase elástica corresponderá ao menor dos diferentes λ_i obtidos. Considerando

$$\lambda_e = \min(\lambda_i) , i = 1, n \text{modos}$$

garante-se que a condição de cedência é verificada para todos os modos.

No limite da fase elástica, o valor do potencial plástico generalizado associado a cada modo pode ser obtido através da igualdade

$$\Phi_*^{(i)} = \lambda_e \widehat{\Phi}_*^{(i)} - \Phi_0^{(i)} .$$

Os valores dos campos de tensões e de deslocamentos no início da fase plástica podem ser calculados multiplicando directamente por λ_e os resultados obtidos através da análise linear, realizada considerando $\lambda = 1$.

3.9.3 Fase plástica

No início de cada um dos incrementos de carga é necessário recalculer alguns dos operadores estruturais presentes na matriz dos coeficientes do sistema (3.81). Note-se que os operadores elásticos permanecem inalterados ao longo de todo o processo. Apenas as matrizes \mathbf{N}_* e \mathbf{H}_* necessitam de ser refeitas em cada passo, pois dependem dos valores actuais do campo de tensões e dos parâmetros plásticos.

O sistema (3.81) é escrito e resolvido apenas considerando os modos de cedência que se encontram activos no início do incremento de carga em causa, impondo-se ainda a condição $\Delta\Phi_* = 0$ de uma forma explícita. Desta forma, a condição de complementaridade (3.48) é verificada para cada um daqueles modos.

Uma vez actualizados os operadores estruturais determina-se, através da resolução dos sistemas (3.81), o valor das derivadas de cada uma das variáveis envolvidas no processo. Para cada valor de n , os termos independentes são calculados a partir do conhecimento das derivadas (de ordem inferior) dos campos de tensões e dos parâmetros plásticos. São utilizadas neste cálculo as definições apresentadas no apêndice A. É usual considerarem-se apenas os três primeiros termos do desenvolvimento em série apresentado em (3.80). Cada passo envolve então a resolução de três sistemas de equações lineares. A matriz dos coeficientes destes é sempre a mesma, variando apenas os termos independentes de caso para caso.

O facto dos operadores elásticos permanecerem inalterados ao longo de toda a análise permite melhorar a eficiência numérica do processo de cálculo através da condensação do sistema (3.81) na forma:

$$\mathbf{K}_p \mathbf{X}_p^{(n)} = \mathbf{T}_p^{(n)} , \quad (3.82)$$

com

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_*^t & 0 & & \\ 0 & 0 & & \mathbf{a}_e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_* & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{X}_p^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_*^{(n)} \\ \lambda^{(n)} \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{T}_p^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_*^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_e^{*(n)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_\Phi^{*(n)} \\ \bar{w}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

A factorização da sub-matriz elástica é efectuada apenas uma vez e os factores obtidos podem ser sucessivamente reutilizados ao longo de todo o processo. Isto pode traduzir-se numa apreciável economia em termos de tempo de cálculo. É ainda de salientar que a utilização da forma condensada (3.82) permite obter sistemas de equações de dimensões bastante reduzidas na fase inicial do comportamento elasto-plástico. Tal acontece porque a dimensão de tal sistema será igual ao número de modos de cedência activos mais um (correspondente à derivada do parâmetro de carga). Obtidos os valores das derivadas dos parâmetros plásticos e do parâmetro de carga, as derivadas das tensões e deslocamentos generalizados são obtidas através da igualdade:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(n)} \\ \mathbf{q}_v^{(n)} \\ \mathbf{q}_\gamma^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_e^{*(n)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_* & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_*^{(n)} \\ \lambda^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Resolvidos os sistemas (3.81) ou (3.82), ficam conhecidas as derivadas dos campos de tensões, deslocamentos, parâmetros plásticos e parâmetro de carga. O valor das derivadas dos potenciais plásticos generalizados para os modos não activos pode agora ser calculado através de:

$$\Phi_*^{(n)} = \mathbf{N}_*^t \mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{R}_\Phi^{*(n)}.$$

Estes valores assumem um papel de grande relevo na determinação da dimensão do passo a efectuar.

A detecção e implementação das descargas plásticas é efectuada de uma forma bastante simples e natural. A tendência para se originar uma descarga plástica é identificada quando a resolução do sistema (3.82) fornece, para um dos modos de cedência activos, um valor negativo para a primeira derivada do parâmetro plástico correspondente, $e_*^{(1)}$. Retira-se esse modo da *base*, recalculam-se os operadores plásticos presentes no sistema (3.82) e reinicia-se todo o processo. Quando são vários os modos que apresentam valores $e_*^{(1)}$ negativos, deve sair da base aquele que apresentar o valor mais negativo. Se quando se reiniciar o processo ainda subsistirem valores $e_*^{(1)}$ negativos volta a retirar-se da base um outro modo de cedência. Este procedimento será repetido até que todos os valores das primeiras derivadas dos parâmetros plásticos sejam não-negativos, sinal de que o algoritmo de cálculo pode prosseguir normalmente.

São três as condições que permitem obter o valor do parâmetro de perturbação, τ , e por consequência estimar automaticamente a dimensão do passo em cada uma das

etapas do processo iterativo utilizado na análise elastoplástica incremental. O valor de τ deve ser escolhido por forma a:

1. Activar o próximo modo de cedência, sem que tal implique a violação da condição de cedência em nenhum dos outros modos que já se encontrem activos;
2. Limitar o erro de truncatura que surge quando se toma apenas um número finito de termos nas expansões em série utilizadas para representar a variação das diferentes grandezas intervenientes no processo;
3. Garantir que a variação dos parâmetros plásticos seja sempre positiva.

A primeira condição impõe que se deva calcular, para cada modo não-activo, o valor do parâmetro de perturbação que permita obter

$$\Phi_*^{(i)} + \Delta\Phi_*^{(i)} = 0 .$$

Considerando a expansão em série de potências do incremento do potencial plástico generalizado, a igualdade anterior pode ser escrita na forma:

$$\Phi_*^{(i)} + \Phi_*^{(1,i)}\tau + \Phi_*^{(2,i)}\frac{\tau^2}{2} + \Phi_*^{(3,i)}\frac{\tau^3}{6} = 0 . \quad (3.83)$$

O valor do parâmetro de perturbação que permite a activação do modo i é então igual à menor das raízes reais do polinómio de terceiro grau acima indicado, (3.83). Para garantir que a condição de cedência continua a ser respeitada para todos os modos, há que escolher o valor de τ de modo a que

$$\tau_a = \min(\tau_i) \quad , \quad i = 1, n_{\text{modos}} .$$

A segunda condição envolvida no cálculo do valor do passo tem a ver com a necessidade de se limitar o valor do erro resultante da truncatura da expansão em série (3.80). Quando se consideram n termos, admite-se que o erro de truncatura é da mesma ordem de grandeza do último termo não desprezado [64], ou seja,

$$\text{erro} \approx \frac{|v^{(n)}| \tau^{(n)}}{n!} .$$

Quando se pretende garantir que o erro cometido na expansão em série seja sempre inferior a um dado valor de tolerância TOL , obtém-se a seguinte condição, referente a cada uma das variáveis envolvidas no processo:

$$\tau_j \leq \left(\frac{TOL \times n!}{|v_j^{(n)}|} \right)^{\frac{1}{n}} .$$

Para que a desigualdade anterior seja satisfeita para todas as variáveis, o valor do parâmetro de perturbação deve ser escolhido por forma a verificar:

$$\tau_b = \min(\tau_j) \quad , \quad j = 1, n \text{ variáveis} .$$

Para garantir que num dado incremento de carga a variação dos parâmetros plásticos é positiva, é necessário impor que para cada modo de cedência activo, a função

$$\Delta e_* = e_*^{(1)}\tau + e_*^{(2)}\frac{\tau^2}{2} + e_*^{(3)}\frac{\tau^3}{6}$$

seja crescente. Para simplificar a apresentação, assume-se que se utiliza na expansão apenas os três primeiros termos da série.

A função Δe_* é crescente sempre que a sua primeira derivada for positiva. Torna-se então necessário garantir que,

$$\frac{\partial \Delta e_*}{\partial \tau} \geq 0 \Rightarrow e_*^{(1)} + e_*^{(2)}\tau + e_*^{(3)}\frac{\tau^2}{2} \geq 0 . \quad (3.84)$$

Recorde-se que a primeira variação do parâmetro plástico, $e_*^{(1)}$, deve ter um valor não negativo, para garantir a condição de escoamento. Quando $e_*^{(1)} = 0$, é necessário garantir que seja não negativa a segunda derivada do parâmetro plástico, $e_*^{(2)}$. Caso contrário, deverá considerar-se a existência de uma descarga plástica.

Para determinar o valor do parâmetro de perturbação que respeita a condição (3.84), pode ser utilizado o seguinte algoritmo:

1. Se $e_*^{(1)} = 0$,
 - (a) Se $e_*^{(3)} > 0$, o polinómio presente em (3.84) toma sempre valores positivos. Não é introduzida qualquer restrição ao valor do parâmetro de perturbação.
 - (b) Se $e_*^{(3)} < 0$,

$$\tau_c < -\frac{2e_*^{(2)}}{e_*^{(3)}} .$$

2. Se $e_*^{(1)} > 0$,
 - (a) Calcular as raízes do polinómio do segundo grau definido em (3.84);
 - (b) Se não existirem raízes reais positivas, o polinómio (3.84) toma sempre valores positivos, pelo que não é introduzida qualquer limitação ao valor do parâmetro de perturbação. Caso contrário, deverá verificar-se a condição

$$\tau_c < x_r^+ ,$$

onde x_r^+ denota a menor das raízes positivas de (3.84).

Para que se verifiquem em simultâneo as três equações atrás enunciadas, o valor de τ a adoptar é então dado por:

$$\tau = \min(\tau_a, \tau_b, \tau_c) .$$

Uma vez determinado o parâmetro de perturbação, o incremento de cada uma das variáveis é obtido através da aplicação da expansão em série definida em (3.80). Torna-se então possível actualizar os valores dos campos de tensões, deslocamentos, potenciais plásticos, parâmetros plásticos e do parâmetro de carga, e iniciar um novo passo no processo incremental.

A análise elastoplástica incremental termina quando é activado um dos critérios de paragem adoptados. Embora estes critérios possam ser de natureza diversa, os que foram adoptados neste trabalho relacionam-se directamente com o valor do parâmetro de carga e das suas derivadas. Considera-se que o processo incremental termina quando se verifica pelo menos uma das condições seguintes:

$$\lambda^{(1)} \leq 0 ; \Delta\lambda \leq 0 ; \Delta\lambda \leq Tol .$$

Do que anteriormente foi apresentado, em especial no que respeita à determinação do valor do parâmetro de perturbação e ao controle e implementação das descargas plásticas, resulta que as condições de cedência (3.46) e escoamento (3.42) do modelo discreto são automaticamente verificadas.

A condição de complementaridade (3.47) é verificada quando se garante que o desenvolvimento de deformações plásticas se inicia apenas quando se activa o modo de cedência em causa ou seja, quando se anula o valor do potencial plástico generalizado correspondente.

A segunda condição de complementaridade (3.48) é também satisfeita. Para os modos activos há lugar a um aumento do valor das deformações plásticas, mas garante-se que o incremento dos potenciais plásticos generalizados seja nulo. Por outro lado, quando se originam descargas plásticas, o valor dos potenciais plásticos regista um alteração, mas permanecem inalterados os valores dos parâmetros plásticos associados aos modos que descarregam.

3.10 Teorema dos trabalhos virtuais

A dualidade estática-cinemática é preservada nos modelos híbrido-mistos de elementos finitos aqui apresentados. Com efeito, verifica-se com facilidade que as condições discretas de compatibilidade e de equilíbrio anteriormente obtidas (equações (3.26) e (3.17) no caso do modelo de equilíbrio, (3.33) e (3.20) no modelo de compatibilidade) são representadas por transformações lineares duais.

O teorema dos trabalhos virtuais pode ser interpretado neste contexto como sendo a representação energética da dualidade estática-cinemática. Para se ilustrar esta

afirmação, recupera-se de seguida o teorema de trabalhos virtuais efectuando, para cada modelo, o produto interno das equações de equilíbrio com a versão incremental das condições de compatibilidade.

3.10.1 Modelo de equilíbrio

Efectuando o produto interno das condições (3.17) com a versão incremental de (3.26) vem,

$$\left[\begin{array}{c} -\mathbf{A}_v^t \\ \mathbf{A}_\gamma^t \end{array} \right] \mathbf{X}^t \delta(\mathbf{e} + \mathbf{e}_{pp} - \mathbf{e}_\gamma) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_\gamma - \mathbf{Q}_{\gamma p} \end{array} \right]^t \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{A}_v & \mathbf{A}_\gamma \end{array} \right] \delta \left[\begin{array}{c} \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{array} \right].$$

Desenvolvendo a igualdade anterior e simplificando obtém-se:

$$\mathbf{X}^t \delta \mathbf{e} + \mathbf{X}^t \delta \mathbf{e}_{pp} - \mathbf{X}^t \delta \mathbf{e}_\gamma = \mathbf{Q}_v^t \delta \mathbf{q}_v + \mathbf{Q}_p^t \delta \mathbf{q}_\gamma + \mathbf{Q}_\gamma^t \delta \mathbf{q}_\gamma - \mathbf{Q}_{\gamma p}^t \delta \mathbf{q}_\gamma. \quad (3.85)$$

Tendo em conta definição dos operadores presentes na igualdade anterior e relembrando as aproximações efectuadas, é possível recuperar o teorema dos trabalhos virtuais expresso na forma,

$$\int \boldsymbol{\sigma}^t \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int \mathbf{b}^t \delta \mathbf{u} dV + \int \mathbf{t}^t \delta \mathbf{u} d\Gamma. \quad (3.86)$$

No apêndice A são apresentados os cálculos que permitem obter a expressão do teorema dos trabalhos virtuais a partir da simplificação da igualdade (3.85).

3.10.2 Modelo de compatibilidade

O produto interno das condições de equilíbrio (3.20) com a versão incremental das condições de compatibilidade (3.33) conduz a:

$$\left[\begin{array}{cc} -\mathbf{B}_v & \mathbf{B}_\gamma \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{X} \\ \mathbf{p}_\gamma \end{array} \right]^t \delta \left[\begin{array}{c} \mathbf{e}_{pc} - \mathbf{e} \\ \mathbf{v}_\gamma - \mathbf{v}_{\gamma p} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{Q}_{vp} - \mathbf{Q}_v & -\mathbf{Q}_{v\gamma} \end{array} \right]^t \left[\begin{array}{c} -\mathbf{B}_v^t \\ \mathbf{B}_\gamma^t \end{array} \right] \delta \mathbf{q}_v.$$

O desenvolvimento e simplificação da igualdade anterior permite obter,

$$\mathbf{X}^t \delta \mathbf{e}_p - \mathbf{X}^t \delta \mathbf{e} + \mathbf{p}_\gamma^t \delta \mathbf{v}_\gamma - \mathbf{p}_\gamma^t \delta \mathbf{v}_{\gamma p} = \mathbf{Q}_{vp}^t \delta \mathbf{q}_v - \mathbf{Q}_v^t \delta \mathbf{q}_v - \mathbf{Q}_{v\gamma}^t \delta \mathbf{q}_v.$$

Tal como se encontra demonstrado no apêndice A, a simplificação da igualdade anterior permite recuperar de novo a expressão do teorema dos trabalhos virtuais (3.86).

3.11 Teoremas energéticos - Modelo elástico

A aplicação de alguns teoremas da Programação Matemática ao sistema governativo do modelo de elementos finitos permite recuperar os teoremas energéticos enunciados no capítulo anterior.

Considere-se o seguinte sistema simétrico de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^t & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{Bmatrix}. \quad (3.87)$$

Este tipo de sistema pode ser identificado como um *Problema Linear*, o qual pode ser interpretado como representando as condições de Karush-Kuhn-Tucker [111, 113] associadas ao seguinte par de programas quadráticos duais:

i) Programa Primal

$$\min Z = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{G} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{x}^t \mathbf{y}_0 \quad (3.88)$$

sujeito a:

$$\mathbf{G} \mathbf{y} + \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \quad (3.89)$$

ii) Programa Dual

$$\min T = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{G} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{H} \mathbf{x} - \mathbf{y}^t \mathbf{x}_0 \quad (3.90)$$

sujeito a:

$$\mathbf{M}^t \mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{y}_0 \quad (3.91)$$

Se as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} forem pelo menos positivas semi-definidas, então qualquer solução do sistema (3.87) é também solução dos programas quadráticos equivalentes.

Importa sublinhar que caso as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} sejam indefinidas, então apenas se pode garantir a estacionaridade (e já não a minimização) do funcional definido pela função objectivo de cada um dos programas equivalentes.

3.11.1 Modelo de equilíbrio

O sistema governativo não-condensado (3.53) pode ser escrito na forma (3.87), considerando-se para tal:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}; \mathbf{H} = \mathbf{0}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \end{bmatrix}; \quad (3.92)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix}; \mathbf{x}_0 = (\mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_{pp}); \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_p \\ -\mathbf{Q}_\gamma + \mathbf{Q}_{\gamma p} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Os programas quadráticos equivalentes podem ser obtidos substituindo as igualdades (3.92) e (3.93) nas definições (3.88-3.91). Obtém-se então:

i) Programa Primal

$$\min Z = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{F} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_p \\ -\mathbf{Q}_\gamma + \mathbf{Q}_{\gamma p} \end{bmatrix}, \quad (3.94)$$

sujeito a,

$$\mathbf{F} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} = \mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_{pp}. \quad (3.95)$$

ii) Programa Dual

$$\min T = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{F} \mathbf{X} - \mathbf{X}^t (\mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_{pp}), \quad (3.96)$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_v^t \\ -\mathbf{A}_\gamma^t \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_p \\ -\mathbf{Q}_\gamma + \mathbf{Q}_{\gamma p} \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

Desenvolvendo a função objectivo do programa primal obtém-se,

$$Z = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{F} \mathbf{X} - \mathbf{q}_v^t \mathbf{Q}_v - \mathbf{q}_p^t \mathbf{Q}_p - \mathbf{q}_\gamma^t \mathbf{Q}_\gamma + \mathbf{q}_{\gamma p}^t \mathbf{Q}_{\gamma p}.$$

A substituição na expressão anterior das definições e aproximações definidas anteriormente permite obter, após algumas simplificações,

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^t (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) dV - \int \mathbf{b}^t \mathbf{u} dV - \int \mathbf{t}_\gamma^t \mathbf{u} d\Gamma_\sigma \\ & + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}_p dV + \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \boldsymbol{\varepsilon}_\theta dV + \int \mathbf{b}^t \mathbf{u}_p dV + \int \mathbf{u}_p^t \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}_p dV - \int \mathbf{u}_\gamma^t \mathbf{t}_p d\Gamma_u, \end{aligned} \quad (3.98)$$

onde se reconhece de imediato a soma da expressão da energia potencial total do sistema com uma parcela constante. A sequência de operações que permite obter a equação (3.98) encontra-se apresentada no apêndice A. Pode então escrever-se,

$$Z = \Pi_p + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}_p dV + \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \boldsymbol{\varepsilon}_\theta dV + \int \mathbf{b}^t \mathbf{u}_p dV + \int \mathbf{u}_p^t \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}_p dV - \int \mathbf{u}_\gamma^t \mathbf{t}_p d\Gamma_u.$$

Como a existência de uma parcela constante em nada afecta a minimização de um dado funcional, a minimização de Z é equivalente à minimização de Π_p . Tendo ainda em conta que as restrições (3.95) estabelecem as condições de admissibilidade cinemática, conclui-se que o programa primal representa o teorema do mínimo da energia potencial total.

Desenvolvendo a função objectivo do programa dual vem:

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{F} \mathbf{X} - \mathbf{X}^t \mathbf{e}_\gamma + \mathbf{X}^t \mathbf{e}_\theta + \mathbf{X}^t \mathbf{e}_{pe} + \mathbf{X}^t \mathbf{e}_{pp}.$$

A sequência de operações indicada no apêndice A permite obter,

$$T = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^t (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) dV - \int \mathbf{t}^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u$$

$$- \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}_p dV + \int \mathbf{t}_p^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u - \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \boldsymbol{\varepsilon}_\theta dV - \int \mathbf{b}^t \mathbf{u}_p dV - \int (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}_p)^t \mathbf{u}_p dV ,$$

onde se reconhece de imediato a soma da expressão da energia potencial complementar do sistema com uma parcela constante. Pode então escrever-se,

$$T = \Pi_c - \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}_p dV + \int \mathbf{t}_p^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u - \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \boldsymbol{\varepsilon}_\theta dV - \int \mathbf{b}^t \mathbf{u}_p dV - \int (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}_p)^t \mathbf{u}_p dV .$$

A minimização do funcional T é perfeitamente equivalente à minimização de Π_c . Tendo ainda em conta que as restrições (3.97) estabelecem as condições de admissibilidade estática, conclui-se que o programa dual representa o teorema do mínimo da energia potencial complementar.

Os teoremas do mínimo da energia potencial e do mínimo da energia potencial complementar foram recuperados isolando, no sistema governativo (3.53), as condições de admissibilidade cinemática e estática, as quais foram utilizadas para definir os espaços das soluções admissíveis dos programas primal e dual, respectivamente.

Qualquer outro critério de separação das condições do sistema governativo permite gerar um novo conjunto de programas matemáticos equivalentes. É este o caminho a seguir quando se pretende recuperar o teorema misto de Hellinger-Reissner. Considere-se então a seguinte partição do sistema (3.53):

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} = \mathbf{x} = \mathbf{y}_0 = \mathbf{0} ; \quad (3.99)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} ; \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_{pp} \\ -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_p \\ -\mathbf{Q}_\gamma + \mathbf{Q}_{\gamma p} \end{bmatrix} . \quad (3.100)$$

Do par de programas quadráticos duais que se podem obter substituindo em (3.88-3.91) as igualdades (3.99) e (3.100), apenas interessa neste caso considerar o programa dual, uma vez que é aquele que não fica sujeito a quaisquer restrições. Uma vez que a matriz \mathbf{G} deixa de ser semi-definida, apenas se pode garantir a estacionaridade (já não se garante a minimização) dos funcionais definidos pelas funções objectivo de cada um dos programas. O programa dual em causa pode ser escrito na forma:

$$\min T_h = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^t & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_{pe} - \mathbf{e}_{pp} \\ -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_p \\ -\mathbf{Q}_\gamma + \mathbf{Q}_{\gamma p} \end{bmatrix}$$

Após algumas simplificações, a função objectivo T_h aparece escrita na forma,

$$T_h = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{F} \mathbf{X} + \mathbf{X}^t \mathbf{A}_v \mathbf{q}_v - \mathbf{X}^t \mathbf{A}_\gamma \mathbf{q}_\gamma - \mathbf{X}^t \mathbf{e}_\gamma + \mathbf{X}^t \mathbf{e}_\theta + \mathbf{X}^t \mathbf{e}_{pe} + \mathbf{X}^t \mathbf{e}_{pp}$$

$$+ \mathbf{q}_v^t \mathbf{Q}_v + \mathbf{q}_p^t \mathbf{Q}_p + \mathbf{q}_\gamma^t \mathbf{Q}_\gamma - \mathbf{q}_\gamma^t \mathbf{Q}_{\gamma p} .$$

Substituindo na igualdade anterior as definições anteriormente apresentadas para cada um dos operadores estruturais e tendo ainda em conta as condições de equivalência energética e as aproximações efectuadas no modelo, é possível obter (ver apêndice A):

$$\begin{aligned} T_h = & \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^t (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) dV - \int \mathbf{t}^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u + \int \mathbf{u}^t (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dV - \int \mathbf{u}^t (\mathbf{t} - \mathbf{t}_\gamma) d\Gamma_\sigma \\ & - \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}_p dV - \int \boldsymbol{\sigma}_p^t \boldsymbol{\varepsilon}_\theta dV - \int \mathbf{b}^t \mathbf{u}_p dV - \int \mathbf{u}_p^t \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}_p dV + \int \mathbf{t}_p^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u . \end{aligned}$$

Da análise da equação anterior facilmente se reconhece que o funcional T_h pode ser obtido somando uma parcela constante à forma complementar do funcional de Hellinger-Reissner definida em (2.43), Π_{hr}^* . Assim sendo, a estacionaridade da função objectivo do programa dual implica a estacionaridade do funcional Π_{hr}^* . A interpretação física do programa dual permite recuperar o enunciado do teorema misto de Hellinger-Reissner.

A recuperação dos teoremas energéticos associados ao modelo de compatibilidade é apresentada no apêndice A.

3.12 Teoremas energéticos- Modelo elastoplástico

3.12.1 Modelo de equilíbrio

Para recuperar o enunciado dos teoremas energéticos que estabelecem o comportamento dos meios contínuos em regime elastoplástico considere-se o sistema governativo (3.65). Considerando apenas o primeiro termo da expansão em série de Taylor das grandezas intervenientes em (3.65) e considerando a partição definida por:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} ; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_* \end{bmatrix} ; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma & \mathbf{N}_* \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{y} = \dot{\mathbf{X}} ; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} ; \mathbf{x}_0 = [\dot{\mathbf{e}}_\gamma] ; \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{Q}}_v \\ -\dot{\mathbf{Q}}_\gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

os programas quadráticos equivalentes podem ser escritos na forma:

i) Programa Primal

$$\min Z = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{Q}}_v \\ -\dot{\mathbf{Q}}_\gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} ,$$

sujeito a,

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma & \mathbf{N}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} = [\dot{\mathbf{e}}_\gamma] . \quad (3.101)$$

ii) Programa Dual

$$\min T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{X}}^t \dot{\mathbf{e}}_\gamma ,$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_v^t \\ -\mathbf{A}_\gamma^t \\ \mathbf{N}_*^t \end{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{Q}}_v \\ -\dot{\mathbf{Q}}_\gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (3.102)$$

Desenvolvendo a função objectivo do programa primal obtém-se,

$$Z = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_*^t \mathbf{H}_* \dot{\mathbf{e}}_* - \dot{\mathbf{q}}_v^t \dot{\mathbf{Q}}_v - \dot{\mathbf{q}}_\gamma^t \dot{\mathbf{Q}}_\gamma .$$

A substituição, na expressão anterior, das definições dos diferentes operadores estruturais e das aproximações efectuadas permite recuperar:

$$Z = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^t h_* dV - \int \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{b}} dV - \int \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{t}}_\gamma d\Gamma_\sigma$$

Tendo ainda em conta que as restrições (3.101) estabelecem as condições de admissibilidade cinemática, conclui-se que o programa primal representa o primeiro dos teoremas de Maier-Capurso.

Desenvolvendo a função objectivo do programa dual vem:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_*^t \mathbf{H}_* \dot{\mathbf{e}}_* - \dot{\mathbf{X}}^t \dot{\mathbf{e}}_\gamma ,$$

o que é equivalente a:

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^t h_* dV - \int \dot{\mathbf{t}}^t \dot{\mathbf{u}}_\gamma d\Gamma_u$$

Tendo agora em conta que as restrições (3.102) estabelecem as condições de admissibilidade estática, conclui-se que o programa dual representa o segundo dos teoremas de Maier-Capurso.

O teorema misto de Hellinger-Reissner pode ser recuperado se se considerar a seguinte partição para o sistema governativo:

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} = \mathbf{x} = \mathbf{y}_0 = \mathbf{0} ;$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma & \mathbf{N}_* \\ \mathbf{A}_v^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_*^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{H}_* \end{bmatrix}; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}; \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_\gamma \\ -\dot{\mathbf{Q}}_v \\ -\dot{\mathbf{Q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{0}} \end{bmatrix}.$$

Do par de programas quadráticos duais que se podem obter, apenas interessa neste caso considerar o programa dual. A correspondente função objectivo pode ser apresentada na forma:

$$\min T_h = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma & \mathbf{N}_* \\ \mathbf{A}_v^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\gamma^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_*^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{q}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_\gamma \\ -\dot{\mathbf{Q}}_v \\ -\dot{\mathbf{Q}}_\gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Após algumas simplificações, a função objectivo T_h aparece escrita na forma,

$$T_h = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{A}_v \dot{\mathbf{q}}_v - \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{A}_\gamma \dot{\mathbf{q}}_\gamma + \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{N}_* \dot{\mathbf{e}}_* - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_*^t \mathbf{H}_* \dot{\mathbf{e}}_* \\ - \dot{\mathbf{X}}^t \dot{\mathbf{e}}_\gamma + \dot{\mathbf{q}}_v^t \dot{\mathbf{Q}}_v + \dot{\mathbf{q}}_\gamma^t \dot{\mathbf{Q}}_\gamma.$$

Substituindo na igualdade anterior as definições anteriormente apresentadas para cada um dos operadores estruturais e tendo ainda em conta as condições de equivalência energética e as aproximações efectuadas no modelo, é possível obter:

$$T_h = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \int (\mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\sigma}})^t \dot{\mathbf{u}} dV - \int \dot{\mathbf{t}}^t \dot{\mathbf{u}} d\Gamma_\sigma + \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t \mathbf{n}_* \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* dV - \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^t h_* dV \\ - \int \dot{\mathbf{t}}^t \dot{\mathbf{u}}_\gamma d\Gamma_u + \int \dot{\mathbf{b}}^t \dot{\mathbf{u}} dV + \int \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{t}}_\gamma d\Gamma_\sigma.$$

ou ainda:

$$T_h = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \int \dot{\mathbf{u}}^t (\mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}}) dV - \int \dot{\mathbf{t}}^t \dot{\mathbf{u}}_\gamma d\Gamma_u - \int \dot{\mathbf{u}}^t (\dot{\mathbf{t}} - \dot{\mathbf{t}}_\gamma) d\Gamma_\sigma \\ - \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^t \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* h_*}{2} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t \mathbf{n}_* \right) dV.$$

Recupera-se deste modo a forma complementar do funcional misto de Hellinger-Reissner definida em (2.53).

3.12.2 Modelo de compatibilidade

Considerando o primeiro termo da expansão em série de Taylor das grandezas intervenientes no sistema governativo (3.73) e considerando a partição definida por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_* \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_v^t & \mathbf{N}_* \\ \mathbf{B}_\gamma^t & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{v}}_\gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{Q}}_v - \dot{\mathbf{Q}}_{v\gamma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

obtêm-se os seguintes programas quadráticos equivalentes:

i) Programa Primal

$$\begin{aligned} \min Z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{Q}}_v - \dot{\mathbf{Q}}_{v\gamma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_v^t & \mathbf{N}_* \\ \mathbf{B}_\gamma^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{v}}_\gamma \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

ii) Programa Dual

$$\begin{aligned} \min T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{v}}_\gamma \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_v & \mathbf{B}_\gamma \\ \mathbf{N}_*^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{Q}}_v - \dot{\mathbf{Q}}_{v\gamma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

Desenvolvendo a função objectivo do programa primal obtém-se:

$$Z = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_*^t \mathbf{H}_* \dot{\mathbf{e}}_* - \dot{\mathbf{q}}_v^t \dot{\mathbf{Q}}_v - \dot{\mathbf{q}}_v^t \dot{\mathbf{Q}}_{v\gamma}.$$

A substituição na igualdade anterior das definições dadas para os diferentes operadores estruturais e das aproximações consideradas conduz a:

$$Z = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^t h_* dV - \int \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{b}} dV - \int \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{t}}_\gamma d\Gamma_\sigma.$$

Atendendo ainda a que as restrições (3.103) estabelecem as condições de admissibilidade cinemática, conclui-se que o programa primal representa o primeiro teorema de Maier Capurso.

O desenvolvimento da função objectivo do programa dual permite obter:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_*^t \mathbf{H}_* \dot{\mathbf{e}}_* - \dot{\mathbf{p}}_\gamma^t \dot{\mathbf{v}}_\gamma$$

o que permite recuperar:

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^t h_* dV - \int \dot{\mathbf{t}}^t \dot{\mathbf{u}}_\gamma d\Gamma_u.$$

Tendo em conta que as restrições (3.104) estabelecem as condições de admissibilidade estática, conclui-se que o programa dual representa o segundo teorema de Maier Capurso.

Para se conseguir recuperar o teorema misto de Hellinger-Reissner, considere-se a seguinte partição do sistema governativo (3.73):

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} = \mathbf{x} = \mathbf{y}_0 = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_v^t & \mathbf{N}_* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_\gamma^t & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_v & \mathbf{B}_\gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_*^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{H}_* \end{bmatrix}; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}; \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{v}}_\gamma \\ -\dot{\mathbf{Q}}_v - \dot{\mathbf{Q}}_{v\gamma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

A função objectivo do programa dual pode ser escrita na forma:

$$\min T_h = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_v^t & \mathbf{N}_* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_\gamma^t & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_v & \mathbf{B}_\gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_*^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{H}_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{p}}_\gamma \\ \dot{\mathbf{q}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_* \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{v}}_\gamma \\ -\dot{\mathbf{Q}}_v - \dot{\mathbf{Q}}_{v\gamma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A simplificação da função objectivo permite obter:

$$T_h = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{B}_v^t \dot{\mathbf{q}}_v + \dot{\mathbf{p}}_\gamma^t \mathbf{B}_\gamma^t \dot{\mathbf{q}}_v + \dot{\mathbf{X}}^t \mathbf{N}_*^t \dot{\mathbf{e}}_* - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_*^t \mathbf{H}_* \dot{\mathbf{e}}_* \\ - \dot{\mathbf{p}}_\gamma^t \dot{\mathbf{v}}_\gamma + \dot{\mathbf{p}}_\gamma^t \dot{\mathbf{v}}_{\gamma p} + \dot{\mathbf{q}}_v^t \dot{\mathbf{Q}}_p + \dot{\mathbf{q}}_v^t \dot{\mathbf{Q}}_{v\gamma}.$$

A substituição na igualdade anterior da definição dos operadores estruturais, das condições de equivalência energéticas e das aproximações efectuadas permite obter:

$$T_h = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}} dV + \int \dot{\mathbf{b}}^t \dot{\mathbf{u}} dV + \int \dot{\mathbf{t}}_\gamma^t \dot{\mathbf{u}} d\Gamma_\sigma + \int \dot{\mathbf{t}}^t (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_\gamma) d\Gamma_u \\ - \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^t \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^t h_*}{2} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t \mathbf{n}_* \right) dV.$$

A interpretação física do programa dual permite recuperar desta forma o enunciado do teorema misto de Hellinger-Reissner (2.52).

