

Capítulo 2

Formulação do problema

2.1 Considerações iniciais

Os modelos de elementos finitos que se apresentam neste trabalho permitem efectuar a análise elastoplástica incremental de estruturas planas. São neste capítulo definidas as variáveis que surgem na formulação deste problema (*deslocamentos, deformações, tensões e forças*), assim como as condições que as relacionam (*equilíbrio, compatibilidade e elastoplasticidade*). São também apresentados os teoremas energéticos que permitem estabelecer a forma através da qual as soluções aproximadas possíveis convergem para a solução do problema.

As várias condições são descritas de uma forma bastante genérica para facilitar a sua adaptação aos diferentes tipos de estruturas aqui considerados. A particularização das definições e relações apresentadas de seguida aos problemas de placas (estados planos de tensão e de deformação) e lajes espessas (lajes de Mindlin e lajes de ordem superior) é efectuada nos capítulos em que se estuda cada um destes problemas.

Não se pretende efectuar uma apresentação completa e minuciosa dos aspectos teóricos das Teorias da Elasticidade e da Plasticidade. Apenas se introduzem alguns conceitos básicos e são salientados os aspectos essenciais e com relevância para o desenvolvimento do trabalho. Especial atenção é dedicada à interpretação do significado físico das variáveis envolvidas no problema e das equações que as relacionam, havendo o cuidado de deixar claro quais as hipóteses em que se baseiam.

Os aspectos matemáticos associados à caracterização do comportamento de estruturas em regime elastoplástico são tratados de uma forma completa na literatura da especialidade. Excelentes tratados sobre a Teoria da Elasticidade podem ser encontrados em [7, 85, 91, 116, 119, 188, 191], enquanto que a Teoria Matemática da Plasticidade é tratada com profundidade em [13, 46, 49, 109, 120, 194].

Ao longo de todo o trabalho considera-se que o material é isotrópico. Admite-se

ainda como válida a hipótese da *linearidade geométrica*, segundo a qual os deslocamentos sofridos pela estrutura são muito pequenos quando comparados com a sua menor dimensão, de tal forma que a configuração deformada se confunde com a configuração inicial. Ainda de acordo com a mesma hipótese, as derivadas dos deslocamentos são tão pequenas que as suas potências se podem desprezar.

A resposta do material é decomposta em duas fases distintas. Numa primeira etapa, a *fase elástica*, considera-se que o material apresenta um comportamento elástico linear em que, por definição, as deformações são reversíveis. Uma vez atingida a tensão de cedência (ou seja, esgotada a capacidade de resposta do material em regime elástico) inicia-se a *fase elastoplástica*, caracterizada pelo aparecimento de deformações permanentes instaladas na estrutura.

Adopta-se uma descrição cinemática para as relações de plasticidade [49, 132]. As deformações são decompostas em duas parcelas, uma elástica e reversível, uma outra plástica e irreversível. É utilizada uma *lei de escoamento associada* [120] e a verificação das condições de cedência é efectuada segundo o *critério de Mises-Hencki* [194] com endurecimento linear.

2.2 Condições de equilíbrio

Considere-se um domínio V , limitado pela fronteira Γ e referido a um sistema de eixos cartesiano. Seja Γ_σ $\{\Gamma_u\}$ a região da fronteira onde são impostos os valores das tracções {deslocamentos}.

O estado de tensão em cada ponto do domínio V é caracterizado por um tensor simétrico de segunda ordem. A componente σ_{ij} deste tensor representa a tensão aplicada segundo a direcção j , numa faceta perpendicular à direcção i . As equações diferenciais de equilíbrio, (2.1), podem ser obtidas estabelecendo o equilíbrio de forças num elemento de volume infinitesimal [7, 188]:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 . \quad (2.1)$$

Na equação anterior, onde se utiliza a convenção de Einstein, b_j representa a componente segundo j das forças de massa. A simetria do tensor das tensões é estabelecida quando, para o mesmo elemento de volume infinitesimal, se escrevem as condições de equilíbrio de momentos.

A condição de equilíbrio ao longo da fronteira estática, Γ_σ , pode ser escrita na forma [7, 188]:

$$\sigma_{ij} n_i = t_{\gamma j} , \quad (2.2)$$

onde n_i $\{t_{\gamma j}\}$ denota a componente segundo i $\{j\}$ do versor da normal exterior à fronteira {da tracção aplicada na fronteira}.

Tanto as condições de equilíbrio no domínio (2.1), quanto as condições de fronteira estática (2.2), podem ser escritas em forma matricial:

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ em } V, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_\gamma \text{ em } \Gamma_\sigma. \quad (2.4)$$

Nas equações anteriores, o vector $\boldsymbol{\sigma}$ reúne as componentes independentes do tensor das tensões, enquanto que nos vectores \mathbf{b} e \mathbf{t}_γ se listam as componentes das forças de massa e das tracções aplicadas ao longo da fronteira estática, respectivamente.

Em (2.4), \mathbf{N} denota a matriz onde se reúnem as componentes do versor da normal exterior unitária associadas aos operadores da matriz diferencial de equilíbrio \mathbf{D} , presente em (2.3).

2.3 Condições de compatibilidade

O estado de deformação em cada ponto do domínio V é caracterizado por um tensor simétrico de segunda ordem, ε_{ij} . O valor duma componente com índices iguais do tensor das deformações, ε_{ii} , representa a *extensão linear* de um segmento de recta infinitesimal que antes da deformação é paralelo ao eixo i . As restantes componentes, ε_{ij} com $i \neq j$, representam metade da variação do ângulo formado por duas fibras infinitesimais, inicialmente ortogonais e dispostas segundo a direcção dos eixos cartesianos i e j , respectivamente. É muito usual utilizar-se nos cálculos o valor total de tal variação angular, a *distorção*, definida através da igualdade

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}.$$

As componentes do tensor das deformações podem ser obtidas a partir das derivadas do campo de deslocamentos [7, 188]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.5)$$

onde u_i denota a componente segundo i do campo de deslocamentos. Admite-se que em regime elastoplástico as deformações possam ser decompostas em duas parcelas, uma parcela elástica e reversível, $\varepsilon_{ij}^{(e)}$, uma outra plástica e irreversível, $\varepsilon_{ij}^{(p)}$.

Ao longo da fronteira cinemática, Γ_u , são especificados os valores do campo de deslocamentos. A condição de fronteira respectiva pode ser então escrita na forma

$$u_i = u_{\gamma i}, \quad (2.6)$$

onde $u_{\gamma i}$ representa o valor da componente segundo i dos deslocamentos impostos.

A condição de compatibilidade no domínio (2.5) e as condições de fronteira cinemática (2.6) podem também ser escritas em forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{D}^*\mathbf{u} \text{ em } V, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\gamma \text{ em } \Gamma_u. \quad (2.8)$$

Na equação (2.7), o vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ reúne as componentes independentes do tensor das deformações (extensões lineares e distorções angulares), enquanto que as componentes do campo de deslocamentos se encontram listadas no vector \mathbf{u} .

Como consequência da linearidade geométrica admitida, os operadores diferenciais \mathbf{D}^* e \mathbf{D} são lineares e adjuntos. Verifica-se desta forma que as equações de equilíbrio (2.3) e de compatibilidade (2.7) são lineares e representam transformações conjugadas.

2.4 Relações constitutivas

As relações constitutivas estabelecem as leis que permitem relacionar os campos estático e cinemático. O comportamento de uma classe importante de materiais estruturais pode considerar-se dividido em duas fases distintas, a fase *elástica linear* e a fase *elastoplástica*. Na primeira, as deformações são reversíveis e a relação tensões-deformações é linear. Na segunda, que se inicia quando as tensões instaladas na estrutura atingem um determinado valor limite, a resposta do material sofre alterações visíveis decorrentes da instalação de deformações irreversíveis. A descrição das relações constitutivas torna-se não-linear.

As relações definidas pela teoria clássica da plasticidade baseiam-se num certo número de hipóteses sobre o comportamento do material, algumas das quais foram já introduzidas ao longo deste texto. No entanto, não deixa de ser importante sublinhar que as relações constitutivas que aqui se apresentam são obtidas admitindo que:

- O material é inicialmente *isotrópico*;
- As deformações são muito pequenas (infinitesimais) e podem ser decompostas nas suas parcelas elástica e plástica;
- O material é *plasticamente incompressível*, sendo nulo o primeiro invariante do tensor das deformações plásticas, $\varepsilon_{kk}^{(p)} = 0$;
- Não se considera a possibilidade da existência de *histerese*, não havendo dissipação de energia durante o processo de descarga plástica e permanecendo inalteradas as características elásticas do material ao longo de todo o processo de deformação;
- O processo de deformação é *isotérmico* e o valor da temperatura não influencia os parâmetros definidores do comportamento do material;
- Existem postulados (os postulados de Drucker, por exemplo) que permitem estabelecer o tipo de relações admissíveis em regime elastoplástico.

Estas hipóteses de comportamento foram alvo de discussão e verificação experimental por parte de um grande número de investigadores [49, 109, 194]. Hoje em dia são correntemente aceites, desde que o carregamento seja quase estático, o número de ciclos de carga pequeno e as variações da temperatura ambiente desprezáveis.

Admite-se por fim que o processo de deformação é independente do tempo. A evolução dos valores dos diferentes campos utilizados para caracterizar o estado de tensão e de deformação na estrutura depende apenas da história do carregamento. No entanto, tendo em atenção que o processo de aplicação de cargas é gradual, desenvolvendo-se ao longo de um certo intervalo de tempo, é usual descrever a resposta da estrutura em função de um parâmetro pseudo-temporal, aqui designado por *tempo convencional da plasticidade*, τ_* . Seja v uma das grandezas envolvidas no processo de deformação. Ao longo de todo este capítulo, considera-se que \dot{v} corresponde à taxa de variação dessa mesma grandeza em relação a τ_* . Assim sendo,

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial \tau_*} .$$

2.4.1 Fase elástica

Em regime elástico linear, a parcela elástica das deformações relaciona-se com o campo de tensões através da igualdade [7, 188]

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{\theta} , \quad (2.9)$$

onde E representa o módulo de elasticidade de material, ν o coeficiente de Poisson e $\varepsilon_{ij}^{\theta}$ um campo de deformações térmicas generalizadas. Tal como no caso das restantes condições, também a definição (2.9) se pode escrever numa forma matricial,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta} , \quad (2.10)$$

onde o operador \mathbf{f} representa uma matriz simétrica e positiva definida onde se reúnem os parâmetros que permitem caracterizar as propriedades elásticas do material, e $\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta}$ é um vector onde se reúnem as componentes independentes das deformações térmicas generalizadas.

2.4.2 Fase plástica

Para descrever o comportamento do material em regime elastoplástico é necessário especificar [8, 112]:

1. A *condição de cedência inicial*, a qual permite definir o limite de capacidade de carga da estrutura em regime elástico;

2. Uma *lei de endurecimento*, utilizada para estabelecer a posição e a forma da superfície de cedência ao longo de todo o processo de deformação;
3. Uma *lei de escoamento* que permita obter uma relação entre os incrementos de deformação plástica e o valor do campo de tensões e seus incrementos.

Condição de cedência inicial

A condição de cedência inicial é uma relação escalar que permite estabelecer o limite de capacidade de carga do material em regime elástico e determinar o instante a partir do qual se geram deformações plásticas no material. Esta condição define uma superfície no espaço das tensões, a *superfície de cedência*. Para pontos interiores a essa superfície, o comportamento do material processa-se em regime elástico e a variação de deformações plásticas é nula. Para que esta última seja diferente de zero, é necessário que o ponto em causa se encontre sobre a superfície de cedência. Todo o espaço exterior a esta corresponde a um domínio inacessível ao material.

Caso o material apresente um *comportamento elastoplástico perfeito* (ausência de endurecimento), a superfície de cedência permanece inalterada (em forma e posição) ao longo de todo o processo de deformação. Tendo em conta que se utiliza uma *lei de escoamento associada* [120, 194], as superfícies de cedência são utilizadas como *potenciais plásticos*.

A condição de Mises-Hencki está associada a um valor limite para a energia de deformação, ou de uma forma equivalente, a um limite para o valor da *tensão octaédrica* [13]. Define-se desta forma:

$$\phi_*(\sigma) = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}k_0 . \quad (2.11)$$

Na definição anterior, ϕ_* representa o valor do potencial plástico e k_0 representa a tensão de cedência num ensaio de corte uniaxial. Muitas vezes, a superfície de cedência inicial é definida em função da tensão de cedência num ensaio de tracção simples, σ_0 . É possível estabelecer que [142]:

$$\sigma_0 = \sqrt{3}k_0 . \quad (2.12)$$

O potencial plástico apresentado em (2.11) foi definido no espaço das tensões principais. É no entanto muito usual escrever a condição de Mises-Hencki no espaço definido pelos invariantes do tensor das *tensões deviatóricas*. Estas últimas são definidas através da igualdade [120]:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} .$$

Os invariantes deste tensor são definidos por:

$$J_1 = 0 ;$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} ;$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} .$$

A condição de Mises-Hencki pode ser escrita num formato bastante simples e compacto [46, 120]:

$$\phi_* = \sqrt{3J_2} - \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \sigma_0 , \quad (2.13)$$

ou, em forma matricial,

$$\phi_* = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}} - \sigma_0 . \quad (2.14)$$

A matriz \mathbf{M} é uma matriz simétrica que pode ser obtida a partir da matriz de flexibilidade elástica definida em (2.10), considerando um módulo de elasticidade unitário e um coeficiente de Poisson para meios incompressíveis:

$$\mathbf{M} = \mathbf{f} \quad (E = 1.0 ; \nu = 0.5) . \quad (2.15)$$

A *condição de cedência*, escrita na forma

$$\phi_* \leq 0 , \quad (2.16)$$

ao obrigar o valor do potencial plástico a ser não positivo, impede que existam estados de tensão que correspondam a pontos exteriores à superfície de cedência.

Lei de endurecimento

Quando existe endurecimento, a forma e/ou a posição da superfície de cedência no espaço das tensões vai sofrendo constantes alterações. Estas alterações de configuração são função não só do valor do campo de tensões, mas também de variáveis internas que se encontram associadas ao valor das deformações plásticas e a uma função escalar κ , o *parâmetro de endurecimento* [120], que depende da história do processo de deformação.

O estabelecimento das *leis de endurecimento* é um dos problemas mais delicados e complexos da teoria da plasticidade [194]. Para se estimar o valor dos parâmetros que permitem caracterizar o endurecimento do material, é usual o recurso a ensaios experimentais. Para tornar possível a utilização da informação obtida experimentalmente, são introduzidos os conceitos de *tensão efectiva* e de *deformação plástica efectiva*, $\bar{\sigma}_e$ e $\bar{\varepsilon}_p$, respectivamente. Estes parâmetros são definidos pelas igualdades [194]:

$$\bar{\sigma}_e = \sqrt{3}k_0 = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}} ; \quad (2.17)$$

$$\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^{(p)} \varepsilon_{ij}^{(p)}} . \quad (2.18)$$

Para caracterizar o endurecimento do material, é necessário estabelecer a relação existente entre os incrementos dessas duas grandezas. Quando se efectua um ensaio de tracção simples, verifica-se que $\bar{\sigma}_e = \sigma$ e $d\bar{\varepsilon}_p = d\varepsilon_p$ [142], onde $d\varepsilon_p$ corresponde ao aumento de deformação plástica na direcção do carregamento. O *módulo de plasticidade*, H' , pode ser então expresso na forma:

$$H'(\bar{\varepsilon}_p) = \frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\varepsilon}_p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}. \quad (2.19)$$

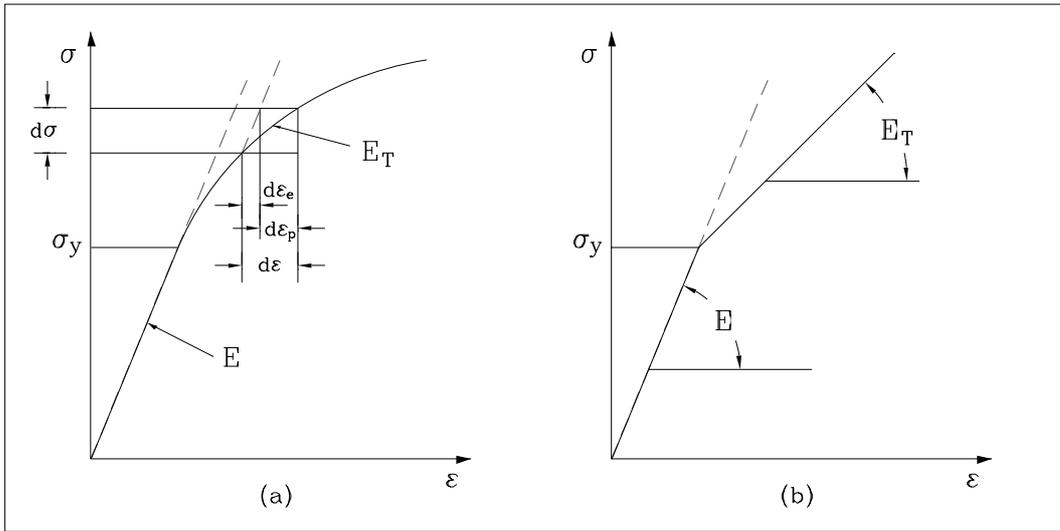


Figura 2.1: Definição do módulo de plasticidade.

A análise da figura 2.1 a) permite escrever [142]:

$$H'(\bar{\varepsilon}_p) = \frac{E_t(\varepsilon_p)}{1 - \frac{E_t(\varepsilon_p)}{E}}, \quad (2.20)$$

onde $E_t(\varepsilon_p)$ é o chamado *módulo elastoplástico* que corresponde ao valor do declive da curva tensão/deformação total. Admite-se neste trabalho que H' possui um valor constante durante todo o processo de deformação. Isto corresponde a um endurecimento linear, tal como se encontra esquematicamente representado na figura 2.1 b). É contudo possível generalizar o modelo de endurecimento aqui adoptado por forma a possibilitar a caracterização de relações constitutivas descritas por um qualquer número finito de troços lineares.

O parâmetro de endurecimento κ , necessário para se definir a evolução da forma e da posição da superfície de cedência, pode ser definido como correspondendo à deformação plástica efectiva (*strain hardening*),

$$d\kappa = d\bar{\varepsilon}_p, \quad (2.21)$$

ou, em alternativa, como representando a dissipação plástica (*work hardening*),

$$d\kappa = dW_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \bar{\sigma}_e d\bar{\varepsilon}_p . \quad (2.22)$$

Verifica-se no entanto que quando se utiliza o critério de cedência de Mises-Hencki as duas definições, (2.21) e (2.22), são equivalentes, conduzindo na prática aos mesmos resultados [142, 194].

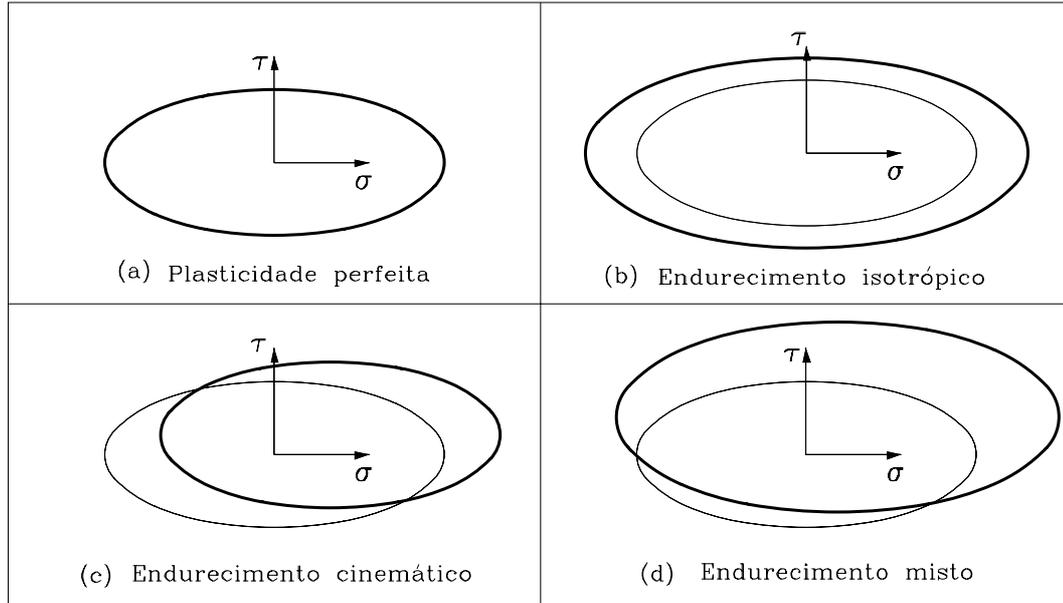


Figura 2.2: *Leis de endurecimento.*

A figura 2.2 ilustra, de uma forma bastante simplificada, as leis de endurecimento mais utilizadas na teoria da plasticidade [46, 194]. O *endurecimento isotrópico* é caracterizado por uma expansão uniforme da superfície de cedência inicial. Esta variação de dimensão, controlada pelo valor do parâmetro κ , não é acompanhada de qualquer translação. Esta é a lei de endurecimento mais simples, mas que no entanto não permite modelar convenientemente alguns dos fenómenos observados em ensaios experimentais, como é o caso do chamado *efeito de Bauschinger* [109, 194]. Todavia, nas situações em que há a garantia de que as cargas são aplicadas de uma forma monotónica, os resultados fornecidos pela lei de endurecimento isotrópico são satisfatórios e a sua utilização é bastante frequente.

Quando se considera um *endurecimento cinemático*, a superfície de cedência mantém a forma, dimensão e orientação, mas sofre uma translação no espaço das tensões. A lei de *endurecimento misto* resulta da combinação das duas leis anteriormente descritas.

Admitindo uma lei de endurecimento isotrópico, os potenciais plásticos podem ser escritos na forma

$$\phi_* = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \bar{\sigma}_e(\bar{\varepsilon}_p) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}} - \bar{\sigma}_e . \quad (2.23)$$

Se não houver endurecimento, o material apresenta um comportamento elastoplástico perfeito e $\bar{\sigma}_e = \sigma_0$, recuperando-se a definição apresentada em (2.14) para a superfície de cedência inicial.

Lei de escoamento

A lei de escoamento permite relacionar os incrementos das deformações plásticas com o campo de tensões e seus incrementos. Esta lei é aqui obtida admitindo como válido o *postulado de Drucker*, também conhecido como *critério da estabilidade do material* [112]. Segundo este postulado, o material é estável quando o incremento da dissipação plástica, realizada durante um ciclo fechado de tensões, é não-negativo. Deverá verificar-se [13, 46, 194],

$$dW_p^* = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^{(p)} + d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{(p)} \geq 0 ,$$

onde o significado de cada um dos termos da desigualdade anterior se pode extrair da análise da figura 2.3, que também se refere a um ensaio de tracção uniaxial.

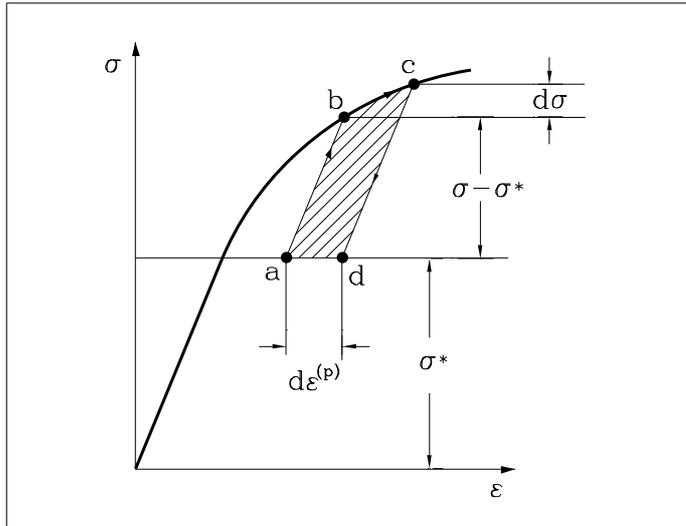


Figura 2.3: *Dissipação plástica durante um ciclo fechado de tensões.*

São duas as propriedades que surgem como consequência directa do postulado de Drucker. Quando se admite que o material é estável, verifica-se que:

1. As superfícies de cedência são convexas;
2. O vector dos incrementos das deformações plásticas, $d\varepsilon_{ij}^{(p)}$, é normal à superfície de cedência [112, 120],

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_* , \text{ com } d\varepsilon_* \geq 0 . \quad (2.24)$$

Esta equação define a lei de escoamento pretendida. A ε_* é usual chamar *parâmetro plástico*. Tendo agora em conta a definição (2.13), a *condição de normalidade* (2.24) pode ser escrita na forma

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\bar{\sigma}_e} d\varepsilon_* , \quad (2.25)$$

ou, utilizando a notação matricial,

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{n}_* d\varepsilon_* , \quad (2.26)$$

com

$$\mathbf{n}_* = \frac{\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}}{\bar{\sigma}_e} . \quad (2.27)$$

A *condição de escoamento plástico*,

$$d\varepsilon_* \geq 0 , \quad (2.28)$$

impõe que a variação da deformação plástica seja exterior à superfície de cedência.

Para definir completamente o comportamento do material em regime elastoplástico, há ainda que estabelecer a relação entre os potenciais plásticos, ϕ_* , e os incrementos dos parâmetros plásticos correspondentes, $d\varepsilon_*$. Estas relações, designadas normalmente por *condições de complementaridade*, podem ser escritas na forma [194]:

$$\phi_* d\varepsilon_* = 0 ; \quad (2.29)$$

$$d\phi_* d\varepsilon_* = 0 . \quad (2.30)$$

A primeira destas condições, (2.29), estabelece que só é possível o desenvolvimento de deformações plásticas para pontos situados sobre a superfície de cedência, para os quais é nulo o valor do potencial plástico respectivo. A segunda das condições de complementaridade é escrita em função dos incrementos dos parâmetros e potenciais plásticos. Tal é efectuado para que se possa ter em conta a possibilidade de se produzirem descargas plásticas durante o processo de deformação.

Tendo em conta (2.23), os incrementos dos potenciais plásticos podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned} d\phi_* &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)^t d\sigma_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\varepsilon}_p} d\bar{\varepsilon}_p \\ &= \mathbf{n}_*^t d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\varepsilon}_p} d\bar{\varepsilon}_p . \end{aligned} \quad (2.31)$$

É possível simplificar o segundo termo do segundo membro da igualdade anterior e obter [46, 142, 194]

$$d\phi_* = \mathbf{n}_*^t d\boldsymbol{\sigma} - h_* d\varepsilon_* , \quad (2.32)$$

com

$$h_* = H' . \quad (2.33)$$

Considere-se então um estado de tensão correspondente a um ponto situado sobre a superfície de cedência. De acordo com a primeira das condições de complementaridade (2.29), já se poderá ter iniciado o processo de deformação plástica nesse mesmo ponto. São então três as situações reguladas pela condição (2.30):

1. Para que o processo de deformação plástica continue activo, é necessário que o ponto permaneça sobre a superfície de cedência, superfície esta que se encontra em *movimento* no espaço das tensões se se considerar a existência de endurecimento. A esta situação corresponderá

$$d\varepsilon_* > 0 \text{ e } d\phi_* = 0 .$$

De acordo com (2.32), verifica-se ainda que

$$\mathbf{n}_*^t d\boldsymbol{\sigma} > 0 .$$

É de salientar que caso não haja endurecimento, a desigualdade anterior transforma-se em

$$\mathbf{n}_*^t d\boldsymbol{\sigma} = 0 ,$$

o que permite afirmar que o vector incremento de tensão é neste caso tangente à superfície de cedência e, como consequência, perpendicular ao vector incremento de deformação plástica.

2. Quando se origina uma descarga plástica, há uma variação no valor do potencial plástico, mas são nulos os incrementos dos parâmetros plásticos. A esta situação corresponde

$$d\phi_* < 0 \text{ e } d\varepsilon_* = 0 .$$

As descargas plásticas realizam-se em regime elástico e a variação das deformações pode ser obtido através da relação (2.10).

3. A terceira situação possível (apenas para materiais com endurecimento) corresponde a

$$d\phi_* = 0 \text{ e } d\varepsilon_* = 0 .$$

Chama-se a esta, situação de *carregamento neutro*. Embora o ponto correspondente ao estado de tensão permaneça sobre a superfície de cedência, não se geram deformações plásticas adicionais. De acordo com (2.32), verifica-se então que

$$\mathbf{n}_*^t d\boldsymbol{\sigma} = 0 ,$$

o que implica que nesta situação a variação do campo de tensões é tangente à superfície de cedência.

Integração das relações constitutivas

A descrição do comportamento do material em regime elastoplástico está agora completa. As relações constitutivas são estabelecidas pela definição do potencial plástico e seus incrementos, equações (2.23) e (2.32), pela condição de normalidade, (2.26), e pelas condições de cedência, (2.16), escoamento, (2.28) e complementaridade, (2.29) e (2.30).

Estas condições encontram-se escritas em termos de variações infinitesimais de cada uma das variáveis. No entanto, para efectuar uma análise elastoplástica incremental é conveniente exprimir aquelas mesmas relações em função de incrementos finitos de cada uma das variáveis envolvidas na definição das relações constitutivas. Tal pode ser efectuado através de uma integração ao longo de um intervalo de tempo convencional da plasticidade, τ_* . Para o caso da variação da deformação plástica pode por exemplo escrever-se:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \int_{\tau_*}^{\tau_* + \Delta \tau_*} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p d\tau_* .$$

A condição de normalidade pode ser então apresentada na forma

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{n}_* \Delta \varepsilon_* + \mathbf{R}_\varepsilon^* , \quad (2.34)$$

onde no vector \mathbf{R}_ε^* se reúnem os termos não-lineares presentes na equação. A definição das componentes deste vector depende do processo utilizado para efectuar a integração no tempo da definição (2.26). De entre os métodos utilizados para este efeito, o *método implícito de Euler* [40, 48, 141] é um dos mais divulgados. No entanto, é de referir desde já que o procedimento seguido neste trabalho é substancialmente diferente. Como se explica na secção dedicada à apresentação do algoritmo utilizado na análise incremental, o vector \mathbf{R}_ε^* é automaticamente definido quando se efectua uma expansão em série de Taylor [64] das grandezas envolvidas na equação (2.26).

Os incrementos finitos dos potenciais plásticos podem ser então calculados a partir de

$$\Delta \phi_* = \mathbf{n}_*^t \Delta \boldsymbol{\sigma} - h_* \Delta \varepsilon_* + R_\phi^* , \quad (2.35)$$

onde se reúnem, em R_ϕ^* , os termos não-lineares resultantes da integração no tempo da equação (2.32).

Finalmente, as condições de cedência, escoamento e complementaridade, escritas em termos de incrementos finitos das variáveis envolvidas, apresentam a forma:

$$\phi_* + \Delta \phi_* \leq 0 ; \quad (2.36)$$

$$\Delta \varepsilon_* \geq 0 ; \quad (2.37)$$

$$\phi_* \Delta \varepsilon_* = 0 ; \quad (2.38)$$

$$\Delta \phi_* \Delta \varepsilon_* = 0 . \quad (2.39)$$

2.5 Teoremas energéticos

Os teoremas energéticos desempenham um papel de relevo na formulação e resolução de problemas na área da Mecânica Computacional. São particularmente importantes na definição das condições de existência e unicidade das soluções e na determinação da forma através da qual as soluções aproximadas possíveis convergem para a *solução exacta* do problema em causa [45, 155, 193, 199].

De entre a enorme multiplicidade de teoremas energéticos existentes na literatura, são apresentados de seguida apenas os que são utilizados no decurso deste trabalho. Para tornar mais clara e simples a apresentação, são definidos em separado os teoremas referentes às análises em regime elástico e elastoplástico.

2.5.1 Análise elástica

Teorema do mínimo da energia potencial total

O Teorema do Mínimo da Energia Potencial [193] estabelece que de entre todos os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis, aquele que corresponde à solução exacta minimiza o funcional

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^t(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) dV - \int \mathbf{b}^t \mathbf{u} dV - \int \mathbf{t}_\gamma^t \mathbf{u} d\Gamma_\sigma . \quad (2.40)$$

O funcional π_p representa a energia potencial do sistema, podendo ser escrito na forma

$$\pi_p = U - W ,$$

onde U denota a energia de deformação interna

$$U = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^t(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) dV ,$$

e W o trabalho desenvolvido pelas forças aplicadas

$$W = \int \mathbf{b}^t \mathbf{u} dV + \int \mathbf{t}_\gamma^t \mathbf{u} d\Gamma_\sigma .$$

Uma solução diz-se ser cinematicamente admissível (em regime elástico) quando satisfaz localmente as equações de compatibilidade (2.7) e verifica as condições de fronteira cinemática (2.8).

Teorema do mínimo da energia potencial complementar

O Teorema do Mínimo da Energia Potencial Complementar [193] estabelece que de entre todos os campos de tensão estaticamente admissíveis, aquele que corresponde

à solução exacta minimiza o funcional

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^t(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) dV - \int \mathbf{t}^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u . \quad (2.41)$$

O funcional π_c representa a energia potencial complementar do sistema,

$$\pi_c = U_* - W_* ,$$

onde U_* denota a energia complementar de deformação

$$U_* = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^t(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) dV ,$$

e W_* representa o trabalho associado aos deslocamentos impostos

$$W_* = \int \mathbf{t}^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u .$$

Uma solução é estaticamente admissível (em regime elástico) quando verifica localmente as equações de equilíbrio (2.3) e satisfaz as condições de fronteira estática (2.4).

Teoremas mistos de Hellinger-Reissner

O Teorema misto de Hellinger-Reissner [193] estabelece que de entre todos os possíveis campos de tensão e de deslocamento, aqueles que correspondem à solução exacta estacionarizam o funcional

$$\begin{aligned} \pi_{HR}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = & -\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^t(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta) dV + \int \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV - \int \mathbf{b}^t \mathbf{u} dV \\ & - \int \mathbf{t}_\gamma^t \mathbf{u} d\Gamma_\sigma - \int \mathbf{t}^t(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\gamma) d\Gamma_u . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Não são impostas à partida quaisquer condições. Assume-se, no entanto, que as relações constitutivas são verificadas localmente.

O funcional de Hellinger-Reissner pode ser obtido tendo como ponto de partida a expressão da energia potencial total do sistema, definida em (2.40). Para tal, a imposição das condições de compatibilidade e de fronteira cinemática passa a ser efectuada através da sua incorporação no funcional a minimizar, através da utilização do método dos *Multiplicadores de Lagrange*. Tem-se então:

$$\pi_{HR}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \pi_p + \int \boldsymbol{\sigma}^t(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV - \int \mathbf{t}^t(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\gamma) d\Gamma_u .$$

O significado físico dos multiplicadores pode ser recuperado quando se impõe que as condições de estacionaridade permitam recuperar as restrições iniciais do problema [193]. Verifica-se então que corresponde ao campo de tensões {tracções na fronteira} o multiplicador utilizado para impor a condição de compatibilidade no

domínio {fronteira cinemática}. Não é difícil verificar que a simplificação da equação anterior permite recuperar a definição (2.42).

Integrando por partes o segundo termo do funcional definido em (2.42) obtém-se a forma complementar do teorema misto de Hellinger-Reissner,

$$\pi_{HR}^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = -U_* - \int \mathbf{u}^t (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dV + \int \mathbf{t}^t \mathbf{u}_\gamma d\Gamma_u + \int \mathbf{u}^t (\mathbf{t} - \mathbf{t}_\gamma) d\Gamma_\sigma . \quad (2.43)$$

Este funcional pode ser obtido directamente quando se incorporam as condições de admissibilidade estática na expressão da energia potencial complementar, (2.41), através do método dos multiplicadores de Lagrange. A interpretação do significado físico destes últimos permite concluir que correspondem a campos de deslocamentos.

2.5.2 Análise elastoplástica

Teorema de Greenberg

O teorema de Greenberg [112, 46, 28] generaliza o teorema da energia potencial total para problemas em regime elastoplástico. Não é contudo muito utilizado, pois exige que sejam satisfeitas, *a priori*, a totalidade das relações de plasticidade, o que na prática é bastante difícil garantir. Segundo o teorema de Greenberg, a solução do problema elastoplástico incremental minimiza o funcional

$$\pi_g(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\theta) dV - \int \dot{\mathbf{b}}^t \dot{\mathbf{u}} dV - \int \dot{\mathbf{t}}_\gamma^t \dot{\mathbf{u}} d\Gamma_\sigma , \quad (2.44)$$

sujeito às condições

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}} \text{ em } V, \quad (2.45)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_\gamma \text{ em } \Gamma_u, \quad (2.46)$$

que mais não são que a versão incremental das condições de compatibilidade e de fronteira cinemática.

Teorema de Prager-Hodge

A solução do problema elastoplástico incremental minimiza o funcional [46, 112]

$$\pi_{ph}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\theta) dV - \int \dot{\mathbf{t}}^t \dot{\mathbf{u}}_\gamma d\Gamma_u . \quad (2.47)$$

sujeito às condições

$$\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \text{ em } V, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{N}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{t}}_\gamma \text{ em } \Gamma_\sigma, \quad (2.49)$$

que correspondem à forma incremental das condições de equilíbrio no domínio e na fronteira, respectivamente. Este teorema resulta da generalização a problemas elastoplásticos do teorema da energia potencial complementar definido anteriormente para a análise elástica. Tal como o teorema de Greenberg, impõe que se verifiquem à partida todas as relações de plasticidade. Daí advém o seu pequeno interesse prático.

Teoremas de Maier-Capurso

Para ultrapassar a limitação imposta pela necessidade de se garantirem *a priori* todas as relações de plasticidade, Maier e Capurso introduziram dois teoremas alternativos [27, 28, 121, 122, 167]. Em qualquer um deles, o funcional correspondente é escrito em função de duas variáveis, sendo sempre uma delas o parâmetro plástico, que surge assim como variável independente, ao contrário do que sucede no caso dos teoremas clássicos de Greenberg e Prager-Hodge.

O primeiro destes teoremas estabelece que a solução do problema elastoplástico incremental minimiza o funcional

$$\pi_{mc}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\varepsilon}_*) = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t (\dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_\theta) dV + \frac{1}{2} \int h \dot{\varepsilon}_*^2 dV - \int \dot{\mathbf{b}}^t \dot{\mathbf{u}} dV - \int \dot{\mathbf{t}}_\gamma^t \dot{\mathbf{u}} d\Gamma_\sigma, \quad (2.50)$$

quando se impõem à partida as condições de admissibilidade cinemática. Estas passam a ser definidas não só pelas condições (2.45) e (2.46), mas também pela condição de normalidade (2.26) e pela condição de escoamento (2.28). Se se aplicar este teorema a um problema em regime elástico, verifica-se que é recuperado o teorema da energia potencial.

O segundo dos teoremas de Maier-Capurso pode ser visto como a extensão do teorema da energia potencial complementar. Estabelece que a solução do problema elastoplástico incremental minimiza o funcional

$$\pi_{mc}^*(\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\varepsilon}_*) = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t (\dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_\theta) dV + \frac{1}{2} \int h \dot{\varepsilon}_*^2 dV - \int \dot{\mathbf{t}}^t \dot{\mathbf{u}}_\gamma d\Gamma_u, \quad (2.51)$$

desde que se encontrem satisfeitas, à partida, as condições de admissibilidade estática. Estas são definidas não só pelas condições (2.48) e (2.49), mas também pela condição de cedência (2.16) em conjunto com a definição dos potenciais plásticos (2.23) e seus incrementos (2.32).

Teoremas mistos

A generalização dos teoremas mistos de Hellinger-Reissner [49, 140] permite estabelecer que a solução para o problema elastoplástico incremental estacionariza o funcional

$$\pi_{hr}^{(p)}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\varepsilon}_*) = -\frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t (\dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_\theta) dV + \int \dot{\varepsilon}_*^t \left(\frac{h_*}{2} \dot{\varepsilon}_* - \mathbf{n}_*^t \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right) dV + \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}} dV$$

$$- \int \dot{\mathbf{b}}^t \dot{\mathbf{u}} dV - \int \dot{\mathbf{t}}_\gamma^t \dot{\mathbf{u}} d\Gamma_\sigma + \int \dot{\mathbf{t}}^t (\dot{\mathbf{u}}_\gamma - \dot{\mathbf{u}}) d\Gamma_u . \quad (2.52)$$

Este funcional é escrito em função de três variáveis independentes, os deslocamentos, as tensões e os parâmetros plásticos. Pode ser obtido quando, utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, se incorpora no funcional do primeiro teorema de Maier-Capurso (2.50) a versão incremental das condições de compatibilidade no domínio e na fronteira, (2.45) e (2.46), respectivamente.

O funcional complementar de Hellinger-Reissner pode ser obtido, tal como efectuado para o caso da análise elástica, através da integração por partes do terceiro termo do segundo membro da igualdade anterior

$$\begin{aligned} \pi_{hr}^{*(p)}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*) &= -\frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\sigma}}^t (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\theta) dV + \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^t \left(\frac{h_*}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* - \mathbf{n}_*^t \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right) dV \\ &- \int \dot{\mathbf{u}}^t (\mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}}) dV + \int \dot{\mathbf{t}}^t \dot{\mathbf{u}}_\gamma d\Gamma_u + \int \dot{\mathbf{u}}^t (\dot{\mathbf{t}} - \dot{\mathbf{t}}_\gamma) d\Gamma_\sigma . \end{aligned} \quad (2.53)$$