

Capítulo 11

Conclusões e desenvolvimentos futuros

11.1 Conclusões

O objectivo inicial do trabalho que agora se conclui residia no estudo e aproveitamento das características e propriedades de dois sistemas alternativos de funções, as séries de Walsh e os sistemas de wavelets, no desenvolvimento de modelos numéricos para a análise fisicamente não-linear de estruturas planas.

A experiência entretanto acumulada e os resultados obtidos, possibilitam não só a confirmação das enormes potencialidades que estes sistemas de funções possuem, como permitem ainda antever as vantagens que podem advir da sua aplicação na resolução de problemas na área da Mecânica Computacional.

Foi de igual forma realçada ao longo de todo este trabalho a enorme versatilidade das formulações não-convencionais de elementos finitos híbrido-mistos. É graças à capacidade que este tipo de modelos tem de possibilitar a incorporação de virtualmente qualquer *espécie* de funções que se torna possível o recurso a séries de funções digitais e a sistemas de wavelets na modelação dos campos estático e cinemático.

É conveniente sistematizar agora os comentários e apreciações efectuados ao longo de todo o texto. De uma forma sucinta, são listadas primeiro as características gerais dos modelos híbrido-mistos utilizados, discutindo-se as principais vantagens e os inconvenientes associados à sua utilização. São apresentados posteriormente os aspectos particulares que resultam da utilização específica de funções de Walsh ou de sistemas de wavelets.

Os benefícios decorrentes da utilização de formulações de elementos finitos híbrido-mistos podem ser sumarizados nos seguintes aspectos essenciais:

- O tratamento *em separado* das condições fundamentais do problema, equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas, faz com que seja fácil e *natural* a generalização da formulação a vários tipos de estrutura e a diferentes regimes de comportamento;
- A remoção do conceito de *interpolação nodal* e o facto de não haver a necessidade de garantir *a priori* nenhuma das condições do problema, possibilita a consideração de uma gama variadíssima de funções para efectuar as aproximações;
- É facilitada a utilização de *macro-elementos*, nos quais o grau das funções utilizadas para efectuar as aproximações pode crescer sem outra restrição que não seja a estabilidade numérica das expansões em série consideradas e a eficiência do processo de cálculo;
- O facto das discretizações se basearem na utilização de um número pequeno de macro-elementos facilita as operações de pré-processamento. A definição da malha vem muito simplificada, libertando o utilizador de uma tarefa geralmente trabalhosa e muito sujeita à introdução de erros de dados;
- O refinamento da solução pode ser conseguido através da implementação de processos *p-* e/ou *h-* adaptativos. É necessário contudo definir estratégias *equilibradas* por forma a não degradar o tempo de execução através da utilização de elementos com um número exagerado de graus de liberdade, nem a perder a enorme vantagem que reside na utilização de malhas constituídas por um pequeno número de macro-elementos;
- A incorporação de soluções clássicas da Teoria da Elasticidade nas aproximações permite modelar, de uma forma eficaz e precisa, os campos de tensões e de deslocamentos nas regiões onde existam cunhas, cantos reentrantes, fendas, orifícios e mudanças nas condições de apoio. Permite ainda o tratamento eficaz de situações de carga particulares, como são por exemplo as que decorrem da existência de forças concentradas aplicadas à estrutura;
- A malha utilizada é independente do carregamento, o que facilita a análise de uma mesma estrutura sujeita à acção de vários casos de carga diferentes;
- A utilização de funções ortogonais nas aproximações permite, regra geral, a obtenção de soluções analíticas para os diferentes operadores envolvidos na definição dos elementos das matrizes estruturais, sendo evitado desta forma o recurso a quaisquer esquemas de integração numérica;
- As operações de pós-processamento vêm facilitadas, uma vez que tanto o campo de deslocamentos quanto o campo de tensões são directamente aproximados;
- A utilização de modelos de equilíbrio permite obter uma muito boa aproximação para a distribuição das tensões em todo o domínio dos elementos. Este

facto é de capital importância para as análises que necessitam de uma informação fiável em relação aos valores das tensões na estrutura, como é o caso da análise elastoplástica;

- As soluções não são sensíveis à distorção das malhas e na análise de problemas de lajes não surgem fenómenos de *locking*;
- O carácter local das aproximações efectuadas, onde apenas alguns dos graus de liberdade referentes a aproximações na fronteira são partilhados por elementos adjacentes, favorece a adaptação deste tipo de modelos a *ambientes* com processamento paralelo;

Muito embora algumas das vantagens listadas nos parágrafos anteriores sejam de facto bastante significativas, é importante não esquecer as limitações e inconvenientes associados à utilização deste tipos de modelos. Estes aspectos menos positivos podem ser condensados nos seguintes pontos:

- As formulações híbridas/mistas não são tão intuitivas quanto as formulações clássicas de elementos finitos, baseadas nos modelos de deslocamento;
- A sua utilização de uma forma correcta e eficiente exige alguma profundidade na compreensão não só da formulação, mas também no conhecimento das características e propriedades das funções utilizadas;
- O tipo e a taxa de convergência não podem ser estabelecidas *a priori*;
- Podem surgir *modos espúrios*, traduzidos pela existência de dependências no sistema governativo global. Para os evitar, deve efectuar-se uma escolha criteriosa dos graus das funções envolvidos nas aproximações. Para além disso, é necessário prever o desenvolvimento de mecanismos que possibilitem a sua detecção automática e subsequente tratamento aquando da resolução dos sistemas de equações. É importante ter sempre presente que mesmo quando existem, os modos espúrios não destroem por completo a solução do problema. O seu efeito é regra geral localizado, reflectindo-se no campo de deslocamentos na fronteira (nos modelos de equilíbrio) e no campo de tracções (nos modelos de compatibilidade). Desta forma, as aproximações obtidas para os campos de tensões e de deslocamentos no domínio têm sempre significado.

A utilização de funções de Walsh nas aproximações conduz ao desenvolvimento de modelos naturalmente adaptativos, onde as tensões, deformações e deslocamentos são constantes em determinadas regiões do domínio. Essas regiões não são fixadas *a priori*, sendo definidas de uma forma automática pelo grau das funções utilizadas. Para além das características gerais dos modelos híbrido-mistos, a utilização de séries digitais assume alguns aspectos particulares que importa salientar. Os estudos efectuados ao longo dos capítulos precedentes permitem estabelecer que:

- A geração e manipulação das funções de Walsh podem ser efectuadas através da utilização de algoritmos que envolvem apenas operações e procedimentos muito simples, baseados alguns deles na aplicação de conceitos de lógica elementar;
- As operações envolvendo funções de Walsh podem, na maioria dos casos, ser reduzidas a uma sequência apropriada de trocas de sinal, dada a sua natureza muito particular. Verifica-se por outro lado que o produto de duas funções de Walsh dá origem a uma terceira função de Walsh. Este aspecto é especialmente importante quando se pretendem obter soluções analíticas para os integrais envolvendo este tipo de funções;
- A utilização de funções de Walsh nas aproximações possibilita sempre a resolução analítica dos integrais presentes na definição dos operadores estruturais, mesmo no caso em que os elementos possuem uma forma não-rectangular;
- A obtenção de "boas" soluções requer a utilização de um número muito elevado de graus de liberdade. Em consequência, os modelos baseados na utilização de séries de Walsh estão associados a sistemas governativos de grande dimensão, mas onde o índice de esparsidade é sempre muito elevado;
- O desempenho destes modelos é superior quando se utilizam malhas constituídas por elementos com forma rectangular. Quando os elementos têm outras formas, o índice de esparsidade diminui significativamente, o que não só aumenta bastante a capacidade de armazenamento necessária, como degrada de uma forma muito forte a rapidez com que a análise é executada. Verifica-se por outro lado que dada a natureza das funções de Walsh, a *qualidade* da solução é afectada quando se utilizam malhas onde existem elementos muito distorcidos;
- A execução de transformadas de Walsh pode ser efectuada de uma forma muito simples e extremamente eficaz através da utilização de algoritmos apropriados, conhecidos normalmente pela designação genérica de *FWT (Fast Walsh Transform)*. Este facto é bastante importante, pois permite que o cálculo dos termos independentes e a recomposição dos campos durante as operações de pós-processamento se possa operar de uma forma eficiente.

Os sistemas de wavelets constituem bases de funções naturalmente hierárquicas e possuem algumas características únicas que as tornam numa das ferramentas matemáticas mais estudadas e investigadas nos dias que correm. Os modelos híbrido-mistos baseados na utilização de wavelets beneficiam de algumas das vantagens associadas ao uso dessas funções, embora seja importante sublinhar que a exploração das potencialidades que advêm da sua utilização se encontra longe de estar esgotada. Os modelos numéricos construídos com base na utilização de wavelets possuem as seguintes características específicas:

- A geração das wavelets e das suas derivadas é efectuada de uma forma recursiva;
- A execução de operações envolvendo este tipo de funções não é tão simples quanto no caso das funções digitais de Walsh.
- São utilizadas nas aproximações apenas funções de escala com diferentes graus de refinamento;
- O refinamento p - hierárquico pode ser conseguido de duas formas alternativas. Ou através do aumento do grau de refinamento das funções de escala utilizadas, ou através da consideração de famílias de wavelets caracterizadas por um coeficiente N superior;
- Quando se definem as funções de aproximação truncando as wavelets que possuem valores não-nulos fora do intervalo de definição, é destruída, pelo menos parcialmente, a ortogonalidade existente quando se considera a recta dos reais. Este facto impossibilita a obtenção de soluções analíticas para os integrais existentes na definição dos coeficientes dos diferentes operadores estruturais. A sua resolução passa necessariamente pela implementação de processos de integração numérica. São utilizados os métodos de quadratura de Newton-Côtes. A utilização do método de Gauss é desaconselhada não só pela irregularidade das funções, mas porque o valor das wavelets apenas é conhecido nos pontos diádicos, o que não possibilita a sua determinação exacta nos pontos de integração;
- O processo seguido na selecção e tratamento das funções de aproximação não possibilita por outro lado a utilização de algoritmos de *transformada rápida*, o que torna mais lento o processo de determinação dos termos independentes e a sobreposição dos campos durante as operações de pós-processamento;
- Nas zonas onde existem singularidades no campo de tensões é visível a indução de uma certa oscilação no campo de tensões, semelhante ao efeito de Gibbs que caracteriza as aproximações com séries trigonométricas. Esta perturbação é ainda em parte imputável à forma como é efectuado o tratamento das wavelets por forma a definir as aproximações num intervalo limitado. Este efeito é atenuado quando se incrementa o grau de refinamento das funções de aproximação utilizadas. Outra forma de contornar o problema, para além da possibilidade de se virem a utilizar sistemas de wavelets definidos especificamente *no intervalo*, consiste na incorporação na aproximação de soluções clássicas da Teoria da Elasticidade;
- O número de graus de liberdade envolvidos na obtenção de soluções de qualidade não é tão grande quanto no caso dos modelos baseados em séries de Walsh;
- Como resultado do desaparecimento das condições de ortogonalidade, o índice de esparsidade é bastante inferior ao que é característico nos modelos baseados

em séries digitais. Em contrapartida, a diminuição do índice de esparsidade aquando da consideração de elementos com forma não-rectangular não é neste caso tão significativo;

- As soluções obtidas são praticamente insensíveis à distorção dos elementos existentes na malha considerada.

Embora não constituísse à partida um dos objectivos principais deste trabalho, o estudo e a utilização de algoritmos para permitir o armazenamento e tratamento eficazes de matrizes esparsas passou a ser essencial para assegurar um bom desempenho para os modelos baseados na utilização de funções de Walsh. Sem a aplicação de métodos especialmente desenvolvidos para efectuar a resolução de sistemas esparsos de grandes dimensões, não teria sido possível a utilização destes modelos na obtenção de soluções refinadas.

Os testes numéricos efectuados mostraram que não é fácil a escolha entre os métodos directos e iterativos. No entanto, podem ser extraídas dos exemplos apresentados as seguintes indicações:

- A eficiência dos métodos utilizados na resolução de sistemas esparsos depende fundamentalmente do número de coeficientes não-nulos armazenados. No caso dos algoritmos de resolução directa, a eficiência do processo de cálculo é ainda fortemente dependente da distribuição desses coeficientes;
- Para garantir que o índice de esparsidade se mantenha tão baixo quanto possível, é fundamental que a utilização dos métodos directos seja precedida pela aplicação de algoritmos que, ao efectuar uma reordenação simétrica da matriz dos coeficientes, permitam minimizar o desenvolvimento de *fill-in* no subsequente processo de eliminação;
- Torna-se mais eficiente efectuar a resolução directa da forma condensada do sistema governativo quando existem na malha grupos de elementos com características geométricas e mecânicas idênticas;
- Embora não seja garantida de um ponto de vista teórico uma vez que a matriz dos coeficientes é indefinida, a convergência do método dos gradientes conjugados foi sempre conseguida e o número de iterações envolvido é substancialmente inferior à dimensão do sistema;
- A aplicação do algoritmo dos gradientes conjugados só por si não é de todo eficiente, sendo essencial a utilização de métodos de pré-condicionamento eficazes. Quando se resolve a forma não-condensada do sistema governativo, é a aplicação de uma factorização incompleta da matriz dos coeficientes o processo que permite obter o pré-condicionador associado a uma maior redução, quer no número de iterações, quer no tempo de execução;

- A convergência do algoritmo dos gradientes conjugados é caracterizada por uma variação muito irregular da norma do vector resíduo calculada em cada um dos passos do processo iterativo. Os métodos que permitem *suavizar* este comportamento conduzem a tempos de execução superiores, não sendo portanto vantajosa a sua utilização;
- Confirma-se que a convergência do método de Lanczos é muito semelhante à dos gradientes conjugados;
- O algoritmo de resolução iterativa mais eficaz é o que aplica o método dos gradientes conjugados com um pré-condicionamento quase-diagonal na resolução da forma condensada do sistema governativo;
- Quando se pretende seleccionar o método de resolução a utilizar com base exclusivamente num critério de minimização de memória, a escolha deve recair sobre os algoritmos iterativos;
- Quando esta selecção se efectua com base no desempenho global, a escolha já não é tão imediata. Para malhas constituídas apenas por um elemento ou por vários elementos todos eles com características geométricas e/ou mecânicas diferentes, é aconselhável a utilização de um método iterativo. A utilização de um método directo é mais vantajosa quando existem grupos de elementos com propriedades idênticas ou quando se tem que estudar a mesma estrutura sujeita a um conjunto de carregamentos diferentes. Esta é a situação da análise elastoplástica incremental onde, para cada um dos passos do processo de carga, se tem que resolver repetidas vezes o mesmo sistema de equações, variando apenas o vector dos termos independentes.

A caracterização do comportamento do algoritmo utilizado para efectuar a análise elastoplástica incremental merece de igual forma os seguintes comentários finais:

- A determinação do passo de carga, ao ser efectuado de uma forma automática, permite maximizar o *incremento* que pode ser dado em regiões onde o comportamento da estrutura é quase linear. É também automática a detecção dos instantes em que o andamento é fortemente não-linear, o que provoca de imediato uma diminuição substancial no valor do passo a realizar;
- A eficiência do processo de cálculo é condicionada pelo número de células críticas existentes e pelo grau dos polinómios utilizados na aproximação dos incrementos dos parâmetros plásticos. Um número excessivamente elevado de potenciais modos de cedência torna o processo incremental desnecessariamente pesado e lento, perdendo-se as vantagens associadas à utilização de um algoritmo que permite o ajuste automático da dimensão do passo de carga. É preciso no entanto não esquecer que a consideração de um número muito pequeno de modos de cedência pode dar origem a resultados demasiadamente grosseiros;

- O facto de não ser necessário efectuar uma *linearização* da superfície de cedência origina uma assinalável economia em termos de variáveis a armazenar e a tratar. Elimina também as descargas plásticas que são induzidas de uma forma artificial pela introdução dessa linearização;
- Este algoritmo, ao garantir que os pontos situados no espaço das tensões nunca se *deslocam* para fora da superfície de cedência, permite evitar o recurso a quaisquer esquemas de *return mapping* [141];
- O estabelecimento dos critérios de paragem é em geral uma tarefa delicada. A detecção do colapso não se pode basear apenas num simples critério. Em determinadas circunstâncias, sobretudo quando o passo de carga é muito pequeno, um ou vários dos testes de paragem são artificialmente activados. Devem então ser estabelecidos mecanismos que permitam detectar se se trata na realidade da situação de colapso ou apenas de um estágio intermédio no processo elastoplástico incremental;
- A distribuição do campo de tensões é em geral caracterizada pela existência de uma perturbação nas regiões onde existem modos de cedência activos. Esta perturbação é explicada em grande parte pela restrição que é imposta à variação daqueles campos e que se traduz na garantia que, em média, os pontos que representam as tensões apenas se podem *movimentar* sobre a superfície de cedência.

11.2 Desenvolvimentos futuros

Demonstrou-se a versatilidade e a eficiência dos modelos híbrido-mistos de elementos finitos baseados em aproximações com séries de Walsh e sistemas de wavelets. As potencialidades evidenciadas por estes modelos numéricos não foram ainda no entanto exploradas na sua totalidade. Muitos são os aspectos ainda não contemplados e que podem conduzir a uma melhoria sensível da eficiência dos modelos desenvolvidos.

Os desenvolvimentos previstos passam não só pela melhoria de alguns dos algoritmos implementados, como também pelo estudo e posterior utilização de novas ferramentas numéricas e a generalização das formulações a outro tipo de problemas e estruturas. Os trabalhos a desenvolver num futuro próximo podem ser muito sumariamente descritos por:

- Utilização de sistemas completos de wavelets nas aproximações;
- Estudo de novas famílias de wavelets com especial ênfase para os sistemas definidos especificamente num intervalo limitado;

- Melhoria do desempenho dos modelos através da utilização de algoritmos mais eficientes, em especial no que diz respeito à resolução de sistemas esparsos de equações lineares;
- Paralelização dos algoritmos;
- Desenvolvimento de modelos híbridos e híbridos de Trefftz baseados na utilização de sistemas de wavelets;
- Generalização da formulação por forma a ser possível a realização de outro tipo de análises.

A utilização de sistemas completos de wavelets nas aproximações contempla a possibilidade de se utilizarem não só as funções de escala, como também as wavelets propriamente ditas. Desta forma passará a ser possível efectuar o refinamento hierárquico de uma forma mais elegante e provavelmente mais eficaz.

Neste trabalho utilizam-se as wavelets propostas por Daubechies [52]. No entanto, muitos outros sistemas de wavelets têm vindo a ser propostos na literatura [130, 37, 53, 54, 21]. Será importante explorar as vantagens que podem advir da utilização desses sistemas alternativos. Em especial é de capital importância a utilização de sistemas definidos num dado intervalo limitado [9, 38]. Estas funções, ao apresentarem no intervalo considerado as mesmas propriedades e características que as funções de Daubechies apresentam na recta dos reais, permitirão contornar os problemas associados à forma como são truncadas as wavelets na definição das aproximações em cada um dos elementos.

A melhoria do tempo de execução associado à aplicação dos modelos numéricos, passa necessariamente pela utilização de algoritmos mais sofisticados na resolução dos sistemas de equações. Como exemplo, e ainda recorrendo apenas a processamento sequencial, refira-se a possibilidade de se testar a eficiência de outros métodos de pré-condicionamento [146, 139, 125].

A eficácia do processo de análise elastoplástica incremental pode ser melhorado através de uma selecção prévia das zonas onde se deve considerar a existência de células críticas. Para que tal selecção seja possível, pode ser adoptado um processo automático de refinamento da malha de células críticas. Tal procedimento envolverá um primeiro processo de cálculo incremental envolvendo um número pequeno de células críticas em cada um dos elementos constituintes da malha. Esta análise, que conduzirá inevitavelmente à obtenção de resultados grosseiros, fornecerá no entanto uma informação preciosa quanto às regiões onde se poderão desenvolver deformações plásticas. Bastará então considerar células críticas nos elementos localizados naquelas zonas. O procedimento poderá ser repetido até se obter uma malha equilibrada de células críticas, onde todo o esforço de cálculo se concentra na região crítica previamente identificada.

Um desenvolvimento natural e desejado de um ponto de vista numérico consiste na paralelização dos algoritmos entretanto desenvolvidos. Para o realizar, está prevista a utilização de um *ambiente paralelo virtual* criado pelo sistema *PVM (Parallel Virtual Machine)* [86] e constituído por uma rede de estações de trabalho. Dada a natureza dos modelos híbrido-mistos utilizados, a paralelização deve abranger a totalidade do algoritmo [136] e não apenas a parte envolvendo a resolução de sistemas de equações.

Outra das extensões naturais deste trabalho consistirá em utilizar os sistemas de wavelets no desenvolvimento de modelos híbridos e híbridos de Trefftz. Em paralelo, será desejável efectuar a generalização da formulação por forma a que seja possível a realização de outro tipo de análises. Especial interesse terá o desenvolvimento de modelos que permitam a consideração de efeitos geometricamente não-lineares. As análises dinâmicas e os problemas de optimização constituem também campos onde a aplicação deste tipo de ferramenta numérica poderá trazer algumas vantagens.

Por fim, haverá que ter a preocupação de procurar adequar todos os modelos numéricos de modo a que a sua utilização na resolução de problemas específicos da Engenharia possa ser uma realidade.