

Capítulo 10

Análise de Lajes

10.1 Introdução

Neste capítulo são aplicados os modelos híbrido-mistos na resolução de problemas de lajes em regime elástico e elastoplástico. Uma laje pode ser definida geometricamente através da consideração de uma superfície média, conhecida normalmente como *folheto médio*, à qual se associa ponto a ponto uma espessura que corresponde à menor dimensão da peça. Embora possa ser variável, considera-se neste trabalho que a espessura da laje é constante em todo o domínio.

A análise de lajes pode ser efectuada com recurso às equações da elasticidade e plasticidade tridimensionais, sendo o seu comportamento definido em função das grandezas atrás utilizadas, tensões, deformações e deslocamentos. No entanto, tal procedimento ao não tirar partido da especificidade da estrutura em causa, torna-se desnecessariamente pesado. Têm vindo a ser propostas ao longo dos tempos diferentes teorias [131, 175, 187] que permitem tratar de uma forma eficiente os problemas de flexão de lajes. Todas elas passam pela caracterização dos campos cinemático e estático através da definição de *grandezas generalizadas*, deslocamentos, deformações independentes e esforços. O conjunto de condições que relacionam estas grandezas permite ter em conta o carácter tridimensional do comportamento das lajes, dando origem no entanto a modelos apenas bidimensionais.

A teoria clássica de lajes finas, também conhecida por *teoria de Kirchhoff* [126, 187], é o equivalente nas lajes à teoria de Euler-Bernoulli das peças lineares, não permitindo ter em conta o efeito da deformação devida ao esforço transversal. A *teoria de Reissner-Mindlin* [131, 175], ao permitir a contabilização deste efeito, é muito utilizada na análise de *lajes espessas*. Corresponde, na análise de vigas, à teoria de Timoshenko [188].

Nos últimos tempos tem-se vindo a assistir ao desenvolvimento das chamadas *teorias de ordem superior* [147, 173]. De um modo muito geral, pode dizer-se que estas

teorias permitem obter soluções mais gerais do que as conseguidas usualmente pelas teorias de primeira ordem (Kirchhoff e Reissner-Mindlin) porque permitem aumentar o grau das aproximações efectuadas ao longo da espessura das lajes. Estas teorias são de especial interesse na análise de estruturas laminadas constituídas por material compósito [147].

Os modelos híbrido-mistos utilizados na análise de lajes foram desenvolvidos com base na teoria de Reissner-Mindlin. Foi também desenvolvido um modelo que permite aplicar a teoria de ordem superior desenvolvida por Pereira [147]. Nas duas secções seguintes é efectuada a redefinição dos operadores intervenientes em cada uma das teorias de modo a permitir que a forma genérica utilizada na apresentação das condições fundamentais possa ser também utilizada na caracterização do comportamento das lajes.

Os exemplos que se apresentam têm como principal finalidade caracterizar as soluções obtidas com base na utilização de funções de Walsh e sistemas de wavelets e ilustrar as potencialidades dos modelos na análise deste tipo de estruturas. Tal como no caso das placas, são estudadas as diferentes possibilidades de refinamento hierárquico, assim como se testa a influência que a distorção da malha tem na qualidade da solução. Ilustra-se também a resolução de problemas onde a malha é constituída por elementos com forma não-rectangular. É também analisado um exemplo que permite verificar que os *fenómenos de locking* se encontram ausentes quando se utilizam modelos híbrido-mistos nas análises.

O modelo para a análise elastoplástica de lajes foi desenvolvido com base na formulação de Reissner-Mindlin. A sua aplicação é ilustrada através da análise de uma laje encastrada sujeita a uma carga uniformemente distribuída na sua face superior.

10.2 Lajes de Reissner-Mindlin

10.2.1 Condições de compatibilidade

O domínio V de uma laje pode ser descrito na forma:

$$V = \{(x, y, z) \in R^3 : z \in [-\tau/2, \tau/2], (x, y) \in \Omega \subset R^2\},$$

onde Ω e τ denotam o plano médio e a espessura da laje, respectivamente.

A teoria de Reissner-Mindlin assume que as normais à superfície média da laje ($z = 0$) antes da deformação, permanecem rectas após a deformação, mas já não necessariamente normais a essa superfície.

Sejam $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ as rotações nos planos (x, z) e (y, z) das normais à superfície média da laje no ponto (x, y) . Mantendo-se aquelas normais rectas após a

deformação, pode escrever-se:

$$u_x(x, y, z) = z \theta_x(x, y) ;$$

$$u_y(x, y, z) = z \theta_y(x, y) .$$

Considera-se por outro lado que os deslocamentos transversais não variam ao longo da espessura da laje. Tem-se desta forma,

$$u_z(x, y, z) = w(x, y).$$

Para descrever o campo de deslocamentos na laje, a teoria de Reissner-Mindlin utiliza as três grandezas cinemáticas atrás definidas, θ_x , θ_y e w .

Para caracterizar os estado de deformação da laje, são definidas como *deformações independentes* três curvaturas, χ_{xx} , χ_{yy} e χ_{xy} , e duas distorções, γ_x e γ_y , dadas respectivamente por:

$$\chi_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx}}{z} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} ;$$

$$\chi_{yy} = \frac{\varepsilon_{yy}}{z} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} ;$$

$$\chi_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{z} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} ;$$

$$\gamma_x = \gamma_{xz} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} ;$$

$$\gamma_y = \gamma_{yz} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} ;$$

As igualdades anteriores podem ser escritas matricialmente na forma:

$$\begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \\ 1 & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \cdot & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{bmatrix} .$$

Esta equação corresponde à condição de compatibilidade no domínio escrita na forma (2.7), se se considerar que

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \\ 1 & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \cdot & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} .$$

As condições de fronteira cinemática podem ser impostas na forma (2.8), onde agora se encontram listados no vector \mathbf{u}_γ os valores especificados para θ_x , θ_y e w ao longo de Γ_u .

10.2.2 Condições de equilíbrio

Os esforços independentes seleccionados para caracterizar o estado de tensão na laje, correspondem a três momentos, M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} , e a dois esforços transversos, V_x e V_y . Os momentos são definidos através das igualdades,

$$M_{xx} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} z \sigma_{xx} dz ; \quad (10.1)$$

$$M_{yy} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} z \sigma_{yy} dz ; \quad (10.2)$$

$$M_{xy} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} z \sigma_{xy} dz . \quad (10.3)$$

enquanto que os esforços transversos são dados por:

$$V_x = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sigma_{xz} dz ; \quad (10.4)$$

$$V_y = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sigma_{yz} dz . \quad (10.5)$$

Integrando na espessura da laje as condições de equilíbrio no domínio pré-multiplicadas pelo valor da coordenada z , obtêm-se as seguintes equações:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} z (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xz,z} + \sigma_{xy,y} + b_x) dz = 0 ;$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} z (\sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + \sigma_{yx,x} + b_y) dz = 0 ;$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} z (\sigma_{zz,z} + \sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + b_z) dz = 0 .$$

Desenvolvendo as três igualdades anteriores e tendo em conta as definições dadas para momentos flectores e esforços transversos, obtêm-se as condições de equilíbrio da laje. Estas podem ser escritas matricialmente na forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & & & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & & & & \\ & & \frac{\partial}{\partial x} & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \frac{\partial}{\partial x} & \\ & & & & & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau}{2} & & & & & \\ & \frac{\tau}{2} & & & & \\ & & \frac{\tau}{2} & & & \\ & & & \frac{\tau}{2} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xz}^+ \\ \sigma_{yz}^+ \\ \sigma_{xz}^- \\ \sigma_{yz}^- \\ \sigma_{zz}^+ \\ \sigma_{zz}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{m}_x \\ \bar{m}_y \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0} ,$$

onde

$$\bar{m}_x = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} z b_x dz , \quad \bar{m}_y = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} z b_y dz , \quad \bar{v} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} b_z dz ,$$

e onde $\sigma_{sz}^+ \{ \sigma_{sz}^- \}$ representa as tracções aplicadas na face superior {inferior} da laje segundo a direcção s . Verifica-se desta forma que as condições de equilíbrio podem ser reescritas na forma condensada (2.3), se se considerar que o vector σ reúne os cinco esforços independentes acima definidos e que ao vector \mathbf{b} correspondem os coeficientes resultantes da soma dos segundo e terceiro termos da equação anterior.

10.2.3 Relações constitutivas

O formato de rigidez das relações constitutivas em regime elástico pode ser escrito na forma [131, 175]:

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & \nu D_f & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu D_f & D_f & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{G\tau^3}{12} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \kappa^2 G\tau & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \kappa^2 G\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix}, \quad (10.6)$$

com

$$D_f = \frac{E \tau^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (10.7)$$

A relação entre os esforços transversos e as distorções deveria ser dada por uma igualdade do tipo:

$$V_x = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sigma_{xz} dz = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} G \gamma_x dx = G \tau \gamma_x.$$

No entanto, a teoria de Reissner-Mindlin prevê a consideração de um coeficiente minorativo na rigidez de corte, κ^2 . Este *factor de corte* tem como finalidade permitir a consideração da não uniformidade na distribuição das tensões tangenciais na espessura da laje. Segundo Reissner, o factor de corte deve valer $\kappa^2 = 5/6$, enquanto que Mindlin utiliza o mesmo coeficiente com valor $\kappa^2 = \pi^2/12$.

As relações constitutivas podem ser apresentadas também na forma (2.10) se se inverter a definição (10.6). Obtém-se deste modo:

$$\begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{E\tau^3} & -\nu \frac{12}{E\tau^3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nu \frac{12}{E\tau^3} & \frac{12}{E\tau^3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{24(1+\nu)}{E\tau^3} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\kappa^2 G\tau} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\kappa^2 G\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix}.$$

Para definir a matriz \mathbf{M} para o caso das lajes, há que seleccionar primeiro a condição de cedência a utilizar. São várias as hipóteses que se podem admitir [142]. A primeira consiste em exprimir a condição de cedência em função das componentes independentes do tensor das tensões, tal como é efectuado em problemas tridimensionais [142]. Este não é contudo o formato mais eficiente, uma vez que as grandezas estáticas envolvidas na caracterização do estado de tensão das lajes são os esforços independentes definidos em (10.1-10.5). O procedimento usual consiste então em *transferir* para os esforços a definição das condições de cedência.

Surgem ainda duas alternativas; envolver na definição de cedência a totalidade dos esforços independentes ou apenas os momentos flectores. Foi seguido neste trabalho esta última hipótese. O critério de cedência seleccionado é utilizado muito

frequentemente [36] e pode ser escrito num formato muito semelhante ao do critério Mises-Hencki:

$$\sqrt{M_{xx}^2 - M_{xx}M_{yy} + M_{yy}^2 + 3M_{xy}^2} = M_0.$$

Esta equação permite verificar que a matriz \mathbf{M} a utilizar na caracterização do comportamento das lajes em regime elastoplástico é semelhante à matriz definida para o caso dos estados planos de tensão.

10.3 Lajes de ordem superior

O modelo de lajes de ordem superior proposto por Pereira [147] baseia-se numa aproximação para o campo de deslocamentos ao longo da espessura da peça efectuada através da consideração de uma expansão em série de Taylor, e numa posterior integração por partes da equação de equilíbrio.

Esta formulação permite recuperar, como casos particulares, as teorias de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin. A notação que é aqui utilizada segue de muito perto a que é definida em [147].

O campo de deslocamentos na peça laminar é aproximado na forma:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \widehat{\mathbf{U}}_k(z) \widehat{\mathbf{u}}_k(x, y), \quad (10.8)$$

com,

$$\widehat{\mathbf{U}}_k(z) = \begin{bmatrix} \frac{z^k}{k!} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{z^k}{k!} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{u}}_k(x, y) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}_k, \quad k \geq 1. \quad (10.9)$$

A matriz $\widehat{\mathbf{U}}_k(z)$ reúne as funções de aproximação do campo de deslocamentos ao longo da espessura (coordenada z). Os valores dos deslocamentos generalizados, $\widehat{\mathbf{u}}_k(x, y)$, são função apenas das coordenadas de cada um dos pontos pertencentes ao folheto médio da laje.

O campo de deformações na laje é definido pela igualdade:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \mathbf{E}_k(z) \mathbf{e}_k(x, y), \quad (10.10)$$

com

$$\mathbf{E}_k(z) = \begin{bmatrix} \frac{z^k}{k!} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{z^k}{k!} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{z^{k-2}}{(k-2)!} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{z^k}{k!} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_k(x, y) = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{bmatrix}_k.$$

As deformações generalizadas, $\mathbf{e}_k(x, y)$, são de novo definidas apenas sobre o plano médio da laje.

10.3.1 Condições de compatibilidade

A relação entre deformações e deslocamentos generalizados vem dada pela igualdade:

$$\mathbf{e}_k = \widehat{\mathbf{D}}^* \widehat{\mathbf{u}}_k. \quad (10.11)$$

O operador diferencial de compatibilidade pode ser escrito na forma:

$$\widehat{\mathbf{D}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 1 & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \end{bmatrix}. \quad (10.12)$$

Para efectuar a imposição das condições de fronteira cinemática, considera-se a subdivisão da fronteira da laje em três sub-regiões: $\Gamma_u = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^- \cup \Gamma_u^{fm}$. O troço da fronteira cinemática pertencente à face superior{inferior} da laje é aqui representado por $\Gamma_u^+ \{\Gamma_u^-\}$, enquanto que o troço pertencente à intersecção das faces laterais da laje com o plano definido pelo folheto médio é denotado por Γ_u^{fm} .

Nas faces superior e inferior da laje, as condições de fronteira cinemática são escritas na forma:

$$\mathbf{u}_\gamma(\Gamma_u^+) = \sum_{k=0}^n \widehat{\mathbf{U}}_k(\tau/2) \widehat{\mathbf{u}}_k(x, y)$$

$$\mathbf{u}_\gamma(\Gamma_u^-) = \sum_{k=0}^n \widehat{\mathbf{U}}_k(-\tau/2) \widehat{\mathbf{u}}_k(x, y)$$

Já no plano médio da laje, a imposição das condições de fronteira deve ser efectuada em separado para cada ordem. Define-se então:

$$\mathbf{u}_{\gamma k}(\Gamma_u^{fm}) = \widehat{\mathbf{u}}_k(x, y)$$

10.3.2 Condições de equilíbrio

Os esforços generalizados, grandezas duais das deformações generalizadas introduzidas em (10.10), são definidos pela equação:

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ s_{yz} \\ s_{xz} \\ s_{xy} \end{bmatrix}_k = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \mathbf{E}_k^t \boldsymbol{\sigma} dz \quad (10.13)$$

A equação de equilíbrio no domínio apresenta o seguinte formato:

$$\widehat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_k + \left[\widehat{\mathbf{U}}_k^t \mathbf{N}_z \boldsymbol{\sigma} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} + \widehat{\mathbf{b}}_k = \mathbf{0}, \quad (10.14)$$

onde se define

$$\widehat{\mathbf{b}}_k = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \widehat{\mathbf{U}}_k^t \mathbf{b} dz.$$

A imposição das condições de fronteira estática passa de novo pela subdivisão da fronteira em três regiões, $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^+ \cup \Gamma_\sigma^- \cup \Gamma_\sigma^{fm}$. Nas faces superior e inferior da laje, a equação de equilíbrio pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_\gamma(\tau/2) \text{ em } \Gamma_\sigma^+; \quad \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_\gamma(-\tau/2) \text{ em } \Gamma_\sigma^-.$$

Substituindo agora estas igualdades na equação de equilíbrio (10.14) obtém-se

$$\widehat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_k + \mathbf{t}_{\gamma k}^{\sigma+} + \mathbf{t}_{\gamma k}^{\sigma-} + \mathbf{t}_k^{u+} + \mathbf{t}_k^{u-} + \widehat{\mathbf{b}}_k = \mathbf{0}, \quad (10.15)$$

com:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\gamma k}^{\sigma+} &= \frac{1}{n_z(\frac{\tau}{2})} \widehat{\mathbf{U}}_k^t(\frac{\tau}{2}) \mathbf{t}_\gamma(\frac{\tau}{2}) \text{ em } \Gamma_\sigma^+; \\ \mathbf{t}_{\gamma k}^{\sigma-} &= \frac{1}{n_z(-\frac{\tau}{2})} \widehat{\mathbf{U}}_k^t(-\frac{\tau}{2}) \mathbf{t}_\gamma(-\frac{\tau}{2}) \text{ em } \Gamma_\sigma^-; \\ \mathbf{t}_k^{u+} &= \frac{1}{n_z(\frac{\tau}{2})} \widehat{\mathbf{U}}_k^t(\frac{\tau}{2}) \mathbf{t}(\frac{\tau}{2}) \text{ em } \Gamma_u^+; \\ \mathbf{t}_k^{u-} &= \frac{1}{n_z(-\frac{\tau}{2})} \widehat{\mathbf{U}}_k^t(-\frac{\tau}{2}) \mathbf{t}(-\frac{\tau}{2}) \text{ em } \Gamma_u^-. \end{aligned}$$

É importante sublinhar que as tracções ao longo das fronteiras Γ_u^+ e Γ_u^- não são conhecidas à partida. Torna-se então necessário proceder à sua aproximação.

Ao nível do plano médio da laje, as condições de fronteira estática devem ser impostas em separado para cada uma das ordens. Pode escrever-se:

$$\widehat{\mathbf{N}} \mathbf{s}_k = \widehat{\mathbf{t}}_{\gamma k},$$

com

$$\widehat{\mathbf{t}}_{\gamma k} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \widehat{\mathbf{U}}_k^t \mathbf{t}_\gamma dz.$$

10.3.3 Relações constitutivas

Atendendo à definição dos esforços generalizados e à relação deformações-deformações generalizadas, o formato de rigidez das relações constitutivas é dado pela igualdade

$$\mathbf{s}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{k}_{ij} \mathbf{e}_j . \quad (10.16)$$

A matriz \mathbf{k}_{ij} permite relacionar os esforços generalizados de ordem i com as deformações generalizadas de ordem j e pode ser determinada através da integração,

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \mathbf{E}_i^t \mathbf{f}^{-1} \mathbf{E}_j dz .$$

O formato de flexibilidade pode ser obtido através da inversão de (10.16), obtendo-se

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{f}_{ij} \mathbf{s}_j = \sum_{j=0}^n \mathbf{k}_{ij}^{-1} \mathbf{s}_j .$$

10.4 Laje quadrada simplesmente apoiada

A análise da laje simplesmente apoiada representada na figura 10.1 vai servir para ilustrar a utilização dos modelos híbrido-mistos baseados em aproximações com séries de Walsh e sistemas de wavelets.

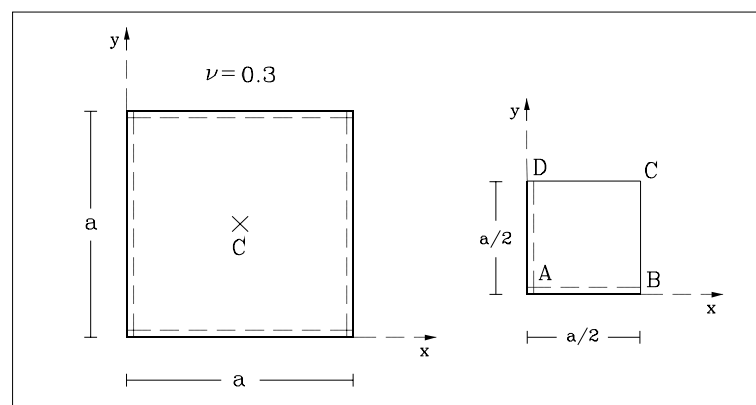


Figura 10.1: Laje simplesmente apoiada.

Devido à dupla simetria existente, apenas um quarto da laje é analisada, tal como se encontra representado na figura 10.1. É admitido que os apoios são do tipo "hard" [173]. São consideradas as três malhas de elementos finitos representadas na figura 10.2 e para cada uma delas são testados diferentes graus de aproximação. Esta

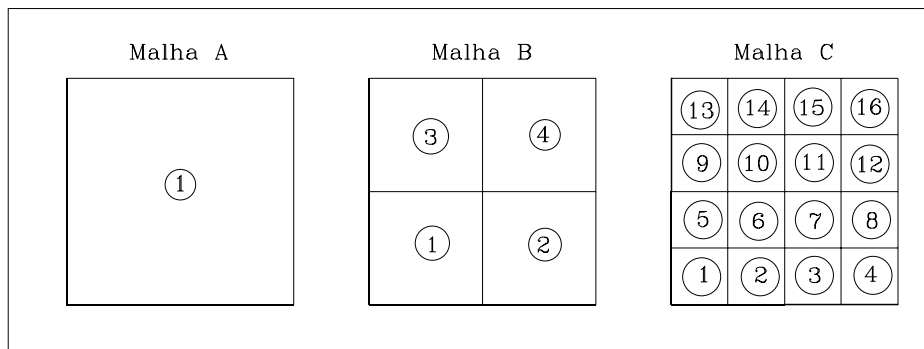


Figura 10.2: Malhas utilizadas na análise da laje simplesmente apoiada.

análise, para além de permitir a confirmação das características gerais das soluções obtidas com estes modelos numéricos, vai ainda possibilitar o estudo da eficiência com que podem ser aplicados os processos de refinamento p - e h - hierárquicos.

10.4.1 Análise com funções de Walsh

Tal como no caso das placas, o grau das funções de Walsh é descrito em função do valor do parâmetro p . Para flexibilizar a escolha das discretizações a efectuar, considera-se que o grau da aproximação dos momentos, n_{xm} , pode ser diferente do grau utilizado na aproximação dos esforços transversos, n_{xv} . Da mesma forma, efectuam-se aproximações de grau diferente para as rotações no domínio{fronteira}, $n_{v\theta}\{n_{v\gamma\theta}\}$ e para os deslocamentos transversais no domínio{fronteira}, $n_{vw}\{n_{v\gamma w}\}$.

Considera-se neste caso que:

$$n_{xm} = 2^p ; n_{xv} = \frac{1}{2}(2^p + 2^{p-1}) ;$$

$$n_{v\theta} = 2^{p-1} ; n_{vw} = 2^{p-1} ;$$

$$n_{v\gamma\theta} = 2^p - 1 ; n_{v\gamma w} = \frac{1}{2}(2^p + 2^{p-1}) - 1 ,$$

com $p = 2, \dots, 6$. Na tabela 10.1 apresenta-se o número de parâmetros de tensão e de deslocamento utilizados em cada uma das discretizações consideradas.

Na tabela 10.2 listam-se, para as discretizações envolvendo a utilização da malha A, o número de graus de liberdade, N_{gl} , e o tempo total de execução, T_{tot} , expresso em segundos. Indicam-se ainda as aproximações obtidas para os valores do momento M_{xx} e do deslocamento vertical w no ponto central da laje (ponto C na estrutura representada na figura 10.1) e o valor obtido para a energia de deformação, U . Para facilitar a comparação dos resultados obtidos com outras soluções apresentadas na literatura, foi efectuada a seguinte normalização,

	Malha A			Malha B			Malha C		
p	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ
2	66	12	16	264	48	64	1056	192	256
3	264	48	38	1056	192	152	4224	768	608
4	1056	192	82	4224	768	328	16896	3072	1312
5	4224	768	170	16896	3072	680	67584	12288	2720
6	16896	3072	346	67584	12288	1384	270336	49152	5536

Tabela 10.1: *Caracterização das discretizações consideradas na análise da laje simplesmente apoiada.*

$$\bar{w}_c = \frac{100 D_f}{q a^4} w_c ; \bar{M}_{xyc} = \frac{100}{q a^2} M_{xyc} ; \bar{U} = \frac{100^2 D_f}{q^2 a^6} U ,$$

onde D_f representa a rigidez de flexão definida em (10.7).

p	N_{gl}	\bar{w}_c	\bar{M}_{xyc}	\bar{U}	$T_{tot}(s)$
2	94	0.495763	4.254443	3.575655	0.03
3	350	0.424802	4.664553	2.401183	0.16
4	1330	0.410969	4.758581	2.190390	2.01
5	5162	0.407564	4.781237	2.144130	32.56
6	20314	0.406723	4.786802	2.133040	690.64

Tabela 10.2: *Laje simplesmente apoiada; resultados obtidos com a malha A e com funções de Walsh.*

As tabelas 10.3 e 10.4 reúnem a mesma informação, mas agora para as discretizações envolvendo as malhas B e C, respectivamente.

A análise dos valores T_{tot} listados permite desde logo verificar que as discretizações envolvendo um elevado número de graus de liberdade estão associadas a um dispêndio de tempo de CPU bastante elevado. Este facto tem duas explicações. Por um lado, o algoritmo utilizado na resolução dos sistemas de equações não é o mais eficaz. Para reduzir a capacidade de memória necessária, foi utilizado o método dos gradientes conjugados sem qualquer pré-condicionamento, a não ser a normalização da matriz dos coeficientes. Por outro lado, não foram utilizados algoritmos *FWT* na execução das combinações lineares envolvendo funções de Walsh durante a fase de pós-processamento, o que introduz também uma degradação apreciável na eficiência numérica do processo de cálculo.

A análise das tabelas 10.2, 10.3 e 10.4 permite verificar que o refinamento da solução é conseguido, de uma forma gradual e consistente, quer através do aumento do número de termos nas séries utilizadas nas aproximações, quer através do acréscimo

p	N_{gl}	\bar{w}_c	\bar{M}_{xxc}	\bar{U}	$T_{tot}(s)$
2	376	0.426199	4.660604	2.407610	0.22
3	1400	0.411045	4.758025	2.191032	2.28
4	5320	0.407574	4.781167	2.144209	29.96
5	20648	0.406725	4.786794	2.133050	381.04
6	81256	0.406515	4.788180	2.130303	6426.11

Tabela 10.3: Laje simplesmente apoiada; resultados obtidos com a malha B e com funções de Walsh.

p	N_{gl}	\bar{w}_c	\bar{M}_{xxc}	\bar{U}	$T_{tot}(s)$
2	1504	0.411298	4.756654	2.192254	2.56
3	5600	0.407599	4.780998	2.144354	31.64
4	21280	0.406728	4.786774	2.133068	321.51
5	82592	0.406515	4.788177	2.130306	3526.15
6	325024	0.406463	4.788523	2.129620	54569.45

Tabela 10.4: Laje simplesmente apoiada; resultados obtidos com a malha C e com funções de Walsh.

do número de macro-elementos considerado. Esta afirmação é de imediato confirmada pela análise dos gráficos apresentados nas figuras 10.3, 10.4 e 10.5, onde se representa o valor de \bar{U} , \bar{w}_c e \bar{M}_{xxc} para cada um dos casos de teste considerados. Os valores representados nestes gráficos foram normalizados tendo em atenção a solução "exacta", obtida na forma de uma expansão em série [187] e apresentada em [145, 204],

$$\bar{w}_{ce} = 0.40644 ; \bar{M}_{ce} = 4.78863 ; \bar{U}_e = 2.1294 .$$

O gráfico da figura 10.6 representa a evolução do erro relativo associado ao valor da energia de deformação em função do número de graus de liberdade envolvido na aproximação. A análise deste gráfico permite confirmar que discretizações com um número diferente de elementos e com diferentes graus nas funções utilizadas conduzem a soluções praticamente coincidentes quando envolvem o mesmo número de graus de liberdade.

A figura 10.7, onde se representa a distribuição de momentos M_{xx} obtida para todos os casos testados, permite verificar a forma através da qual a solução é refinada a partir de uma solução inicial bastante fraca. Numa mesma linha encontram-se representadas as soluções obtidas com uma dada malha, enquanto que numa mesma coluna se mantém como constante o grau de aproximação, p . Quase todos os comentários feitos sobre o refinamento da solução no caso das placas poderiam ser agora repetidos a propósito da análise da informação contida nesta figura.

O refinamento da solução é ilustrado também na figura 10.8 onde, para as discretizações envolvendo a utilização da malha A, se traça a evolução do deslocamento

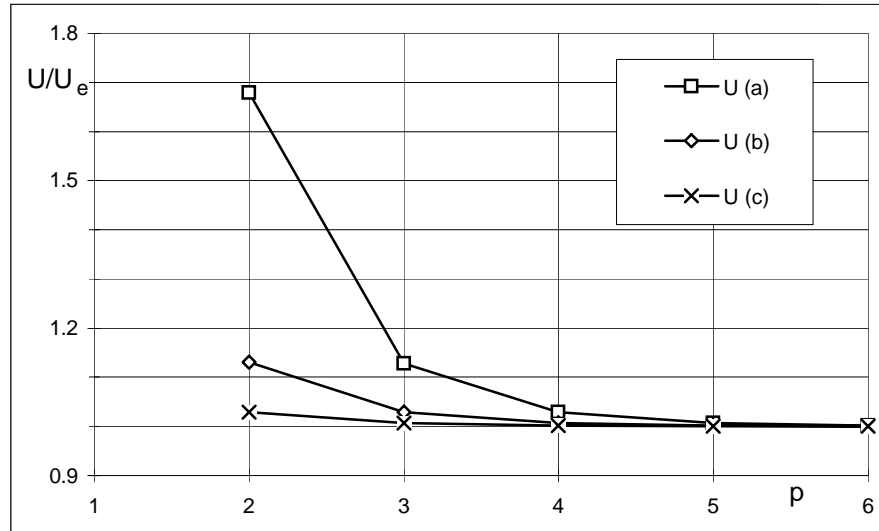


Figura 10.3: Evolução do valor da energia de deformação; solução com funções de Walsh.

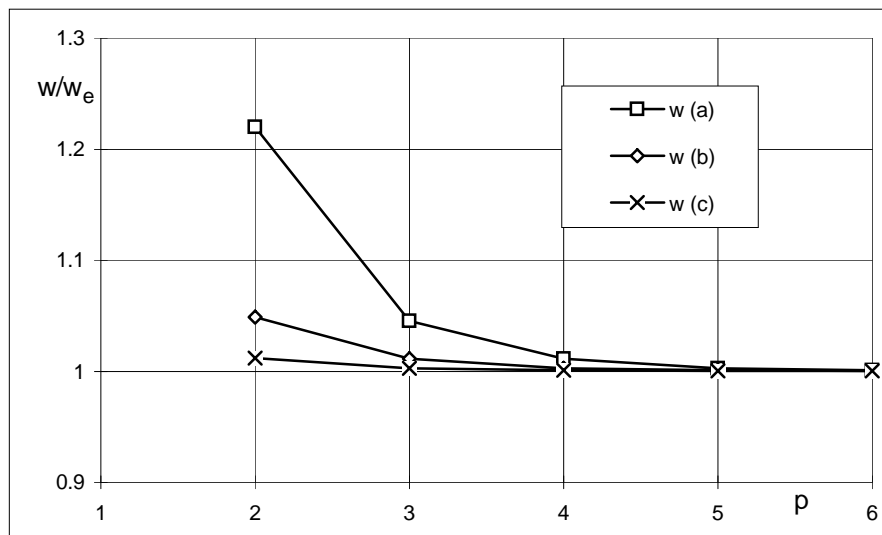


Figura 10.4: Evolução do valor do deslocamento transversal em C; solução com funções de Walsh.

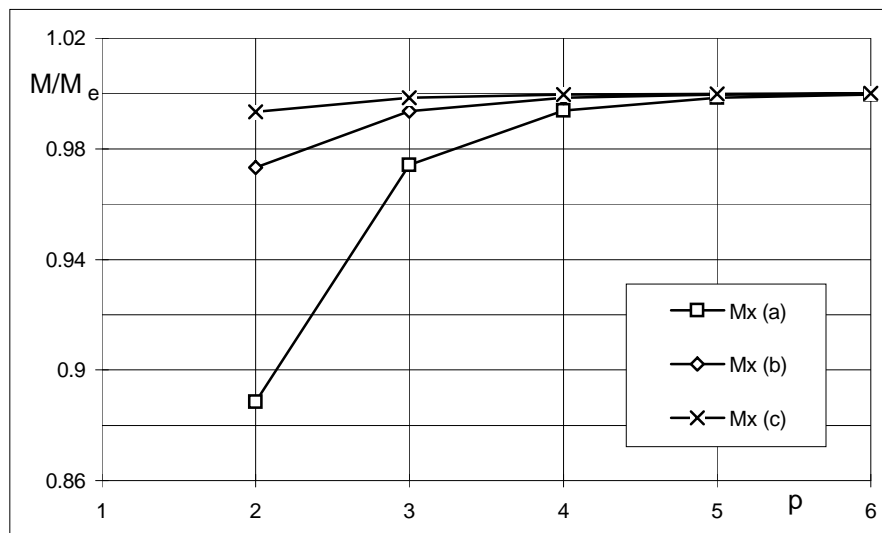


Figura 10.5: Evolução do valor do momento flector em C ; solução com funções de Walsh.

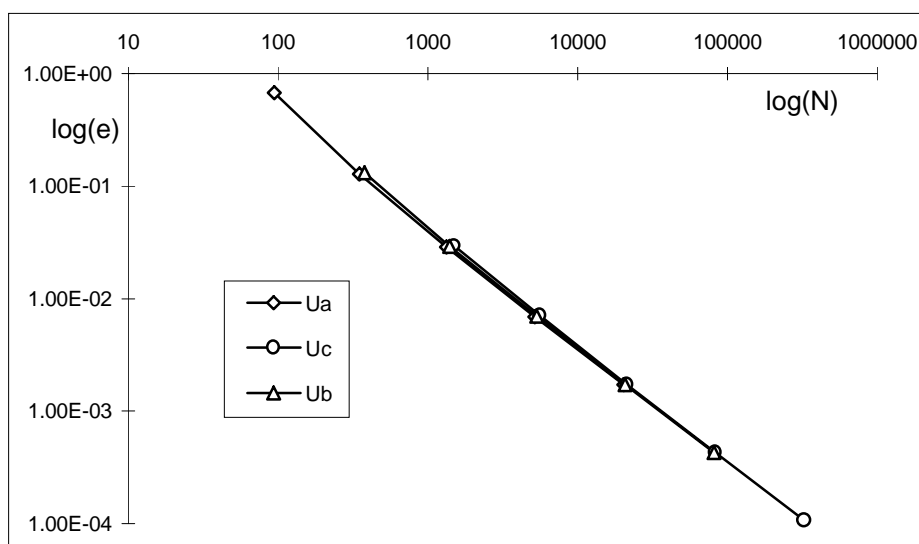


Figura 10.6: Erro relativo do valor da energia de deformação; solução com funções de Walsh.

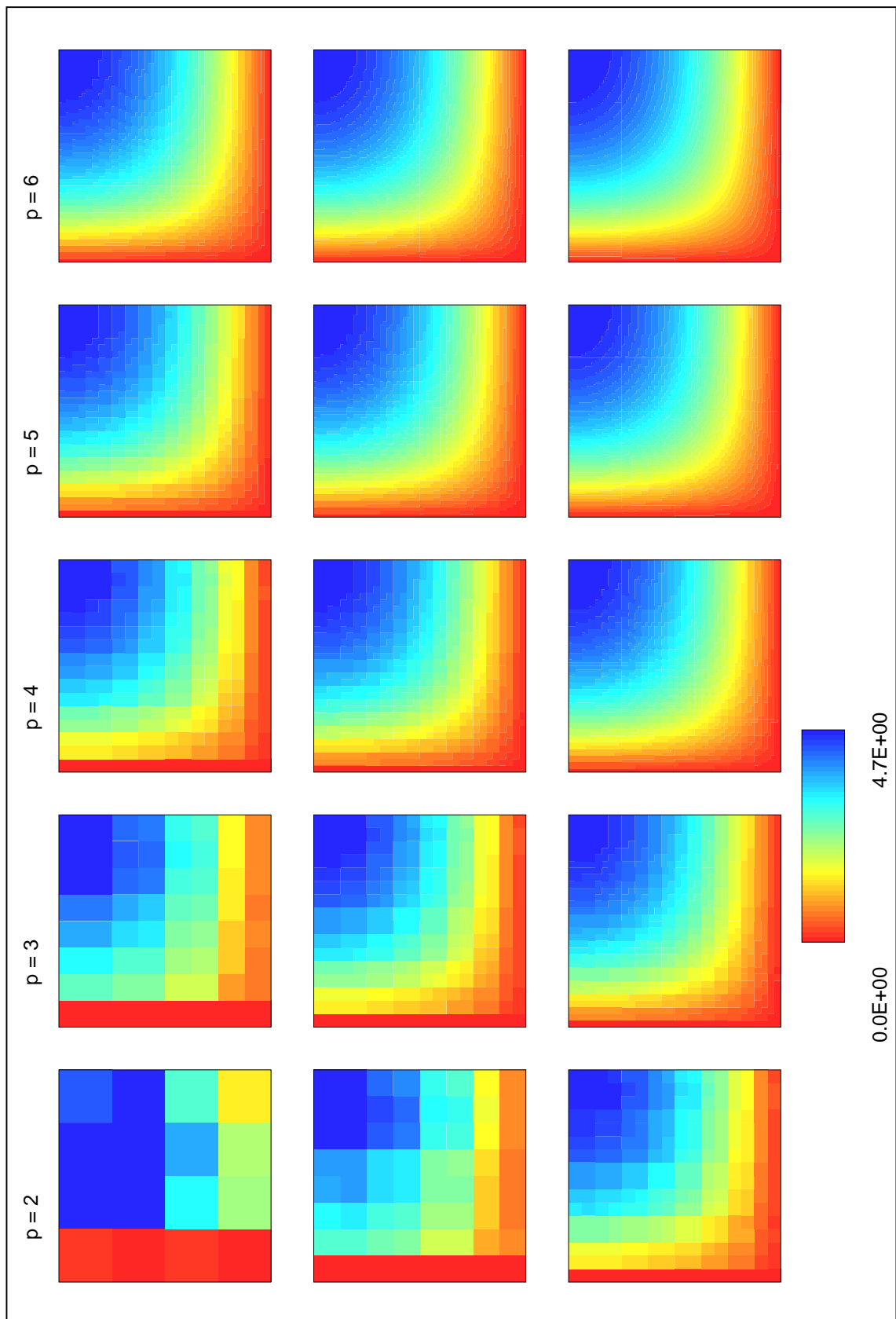


Figura 10.7: Distribuição do campo de momentos M_{xx} ; solução com funções de Walsh.

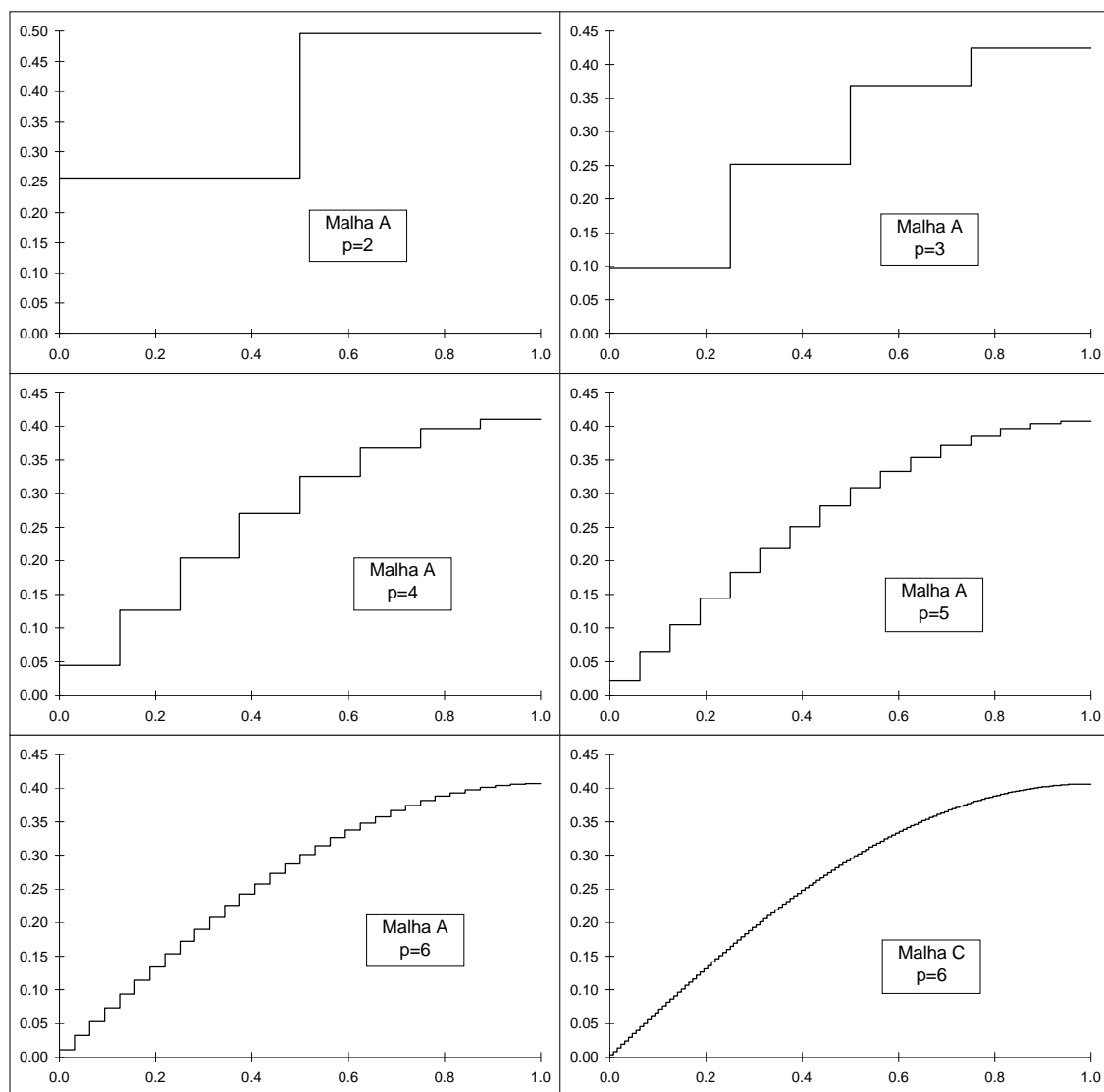


Figura 10.8: Campo de deslocamentos transversais ao longo do bordo DC; solução com funções de Walsh.

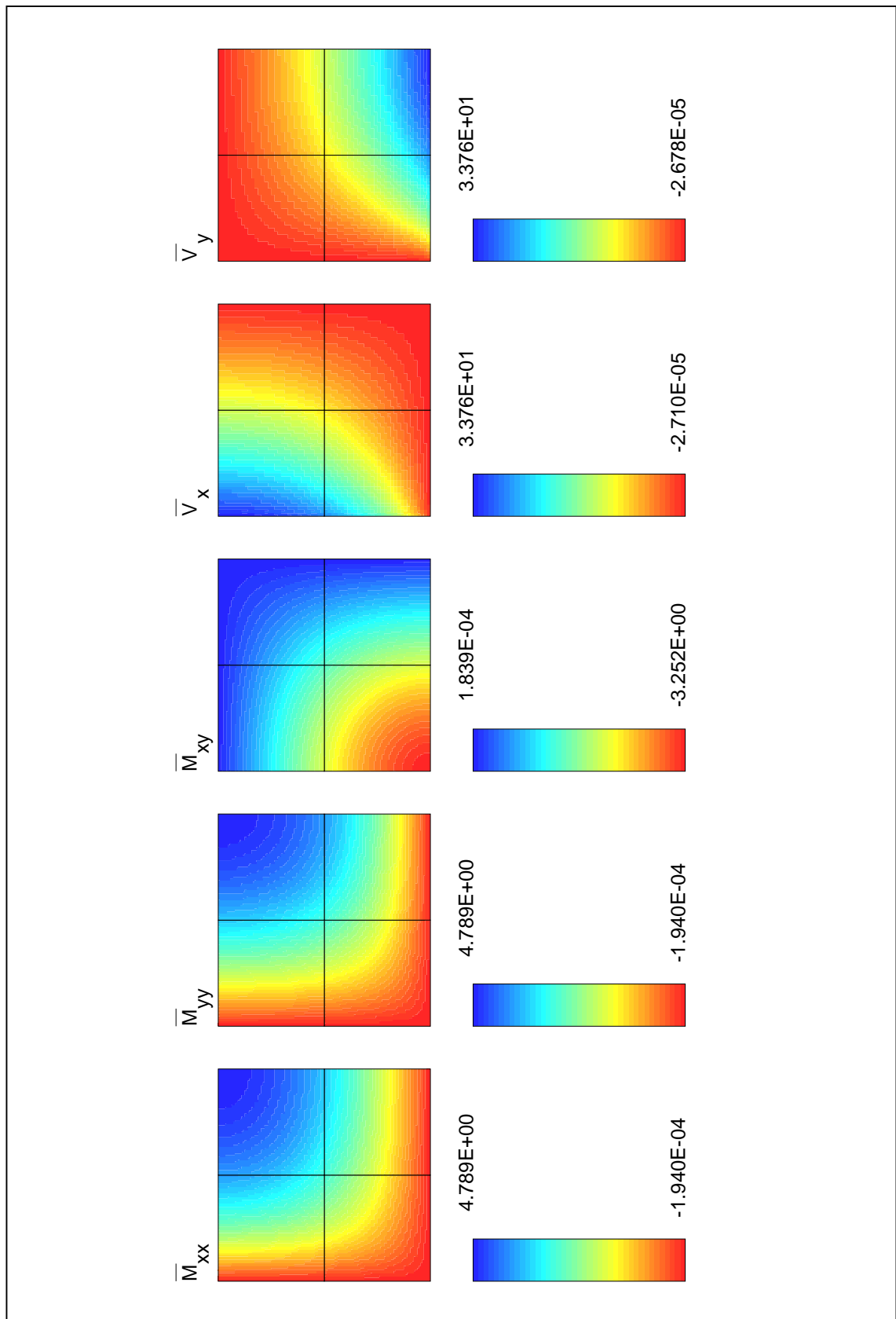


Figura 10.9: Campo de esforços obtido com a malha B e $p = 6$.

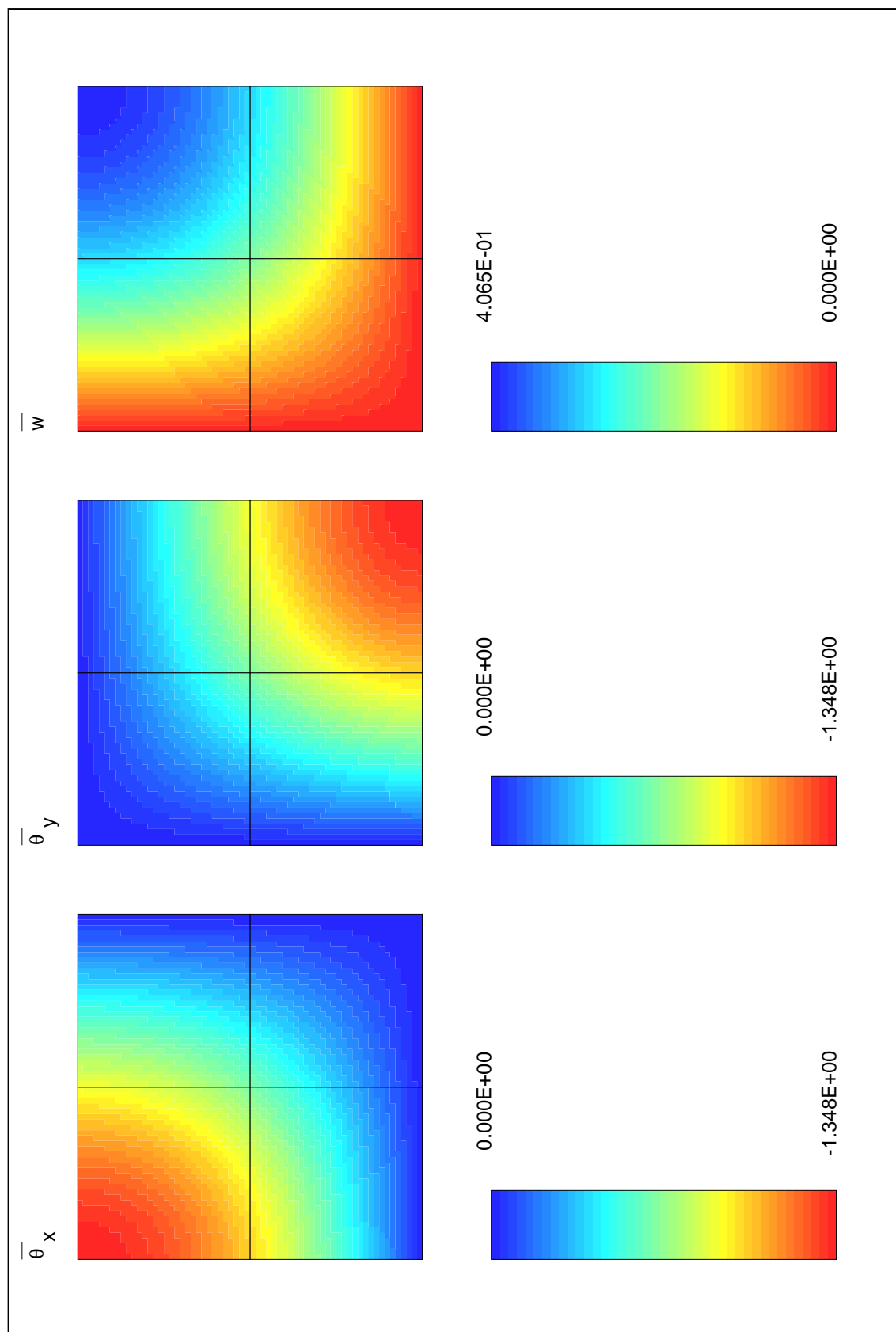


Figura 10.10: Campo de deslocamentos obtido com a malha B e $p=6$.

transversal \bar{w} ao longo do bordo \overline{DC} . Encontra-se representada na mesma figura a distribuição obtida com a malha C e o grau de aproximação $p = 6$.

Nas figuras 10.9 e 10.10 encontram-se representados os campos de esforços e de deslocamentos obtidos com a discretização envolvendo a malha B e $p=6$. Os valores representados encontram-se escalados na forma:

$$\bar{M}_{ij} = \frac{100}{q a^2} M_{ij}; \quad \bar{V}_i = \frac{100}{q a} V_i; \quad \bar{w} = \frac{100 D_f}{q a^4} w; \quad \bar{\theta}_i = \frac{100 D_f}{q a^3} \theta_i.$$

com $i, j = x, y$.

10.4.2 Análise com wavelets

A análise da laje simplesmente apoiada é agora efectuada com o modelo baseado em aproximações com sistemas de wavelets. O refinamento p - é conseguido à custa da consideração de famílias de funções com valor de N crescente.

Em todas as discretizações testadas, considera-se que $n_{xm} = n_{xv}$, $n_{vw} = n_{v\theta}$ e $n_{v\gamma w} = n_{v\gamma\theta}$. Os campos de esforços são modelados com funções de escala com *grau de refinamento* $j = 1$. Os campos de deslocamentos, no domínio e na fronteira, são aproximados com funções de escala com $j = 0$.

Na tabela 10.5 apresenta-se o valor dos parâmetros de tensão e de deslocamento associados a cada uma das discretizações consideradas.

N	Malha A			Malha B			Malha C		
	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ	α_v	β_v	β_γ
4	80	27	18	320	108	72	1280	432	288
5	180	75	30	720	300	120	2880	1200	480
6	180	75	30	720	300	120	2880	1200	480
9	245	108	36	980	432	144	3920	1728	576
10	320	147	42	1280	588	168	5120	2352	672

Tabela 10.5: *Laje simplesmente apoiada; caracterização das discretizações adoptadas.*

As tabelas 10.6, 10.7 e 10.8 reúnem a informação respeitante às discretizações envolvendo a utilização das malha A, B e C, respectivamente. Encontram-se listados o número de graus de liberdade, o tempo de CPU dispendido na análise (em segundos) e os valores obtidos para \bar{w}_c , \bar{M}_{xxc} e \bar{U} . É utilizado o código *MA47* na resolução directa da forma não-condensada do sistema governativo. É importante sublinhar que os tempos de cálculo apresentados nas tabelas 10.7 e 10.8 poderiam ser substancialmente melhorados se se efectuasse a resolução directa da forma condensada dos sistemas de equações.

N	n_{gl}	\bar{w}_c	\bar{M}_{xxc}	\bar{U}	$T_{tot}(s)$
4	125	0.512569	4.935777	2.249560	2.40
5	285	0.424900	4.866456	2.133454	4.64
6	285	0.410802	4.809562	2.129209	5.70
9	389	0.405933	4.786069	2.129803	11.64
10	509	0.405231	4.785063	2.129687	15.89

Tabela 10.6: *Laje simplesmente apoiada; resultados obtidos com a malha A e com wavelets.*

N	n_{gl}	\bar{w}_c	\bar{M}_{xxc}	\bar{U}	$T_{tot}(s)$
4	500	0.418791	4.842744	2.167346	2.91
5	1140	0.406132	4.788681	2.129992	9.72
6	1140	0.408677	4.798876	2.129425	11.88
9	1556	0.405190	4.783029	2.129571	28.31
10	2036	0.405591	4.785444	2.129541	60.48

Tabela 10.7: *Laje simplesmente apoiada; resultados obtidos com a malha B e com wavelets.*

N	n_{gl}	\bar{w}_c	\bar{M}_{xxc}	\bar{U}	$T_{tot}(s)$
4	2000	0.396931	4.810345	2.143924	5.97
5	4560	0.405347	4.785128	2.129509	54.04
6	4560	0.405595	4.783755	2.129426	66.92
9	6224	0.405227	4.784325	2.129487	188.90
10	8144	0.405571	4.785587	2.129468	669.36

Tabela 10.8: *Laje simplesmente apoiada; resultados obtidos com a malha C e com wavelets.*

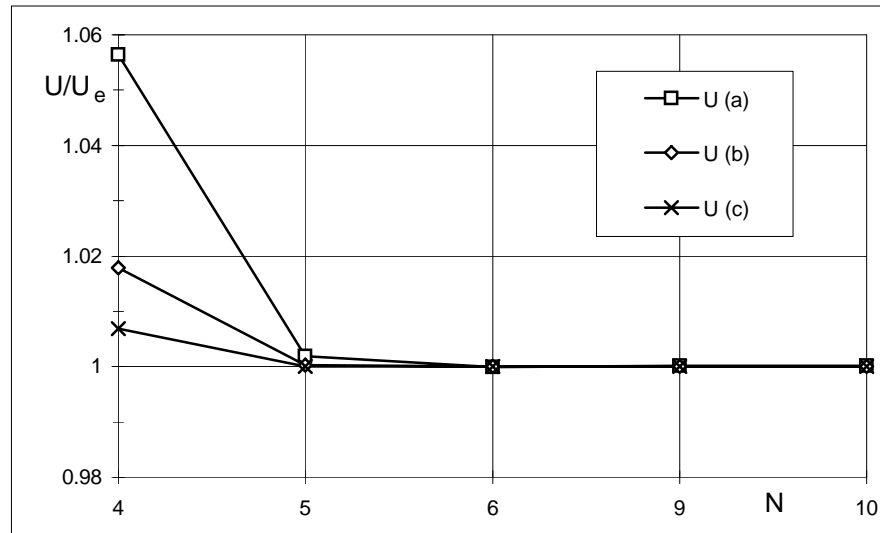


Figura 10.11: Evolução do valor da energia de deformação; solução com wavelets.

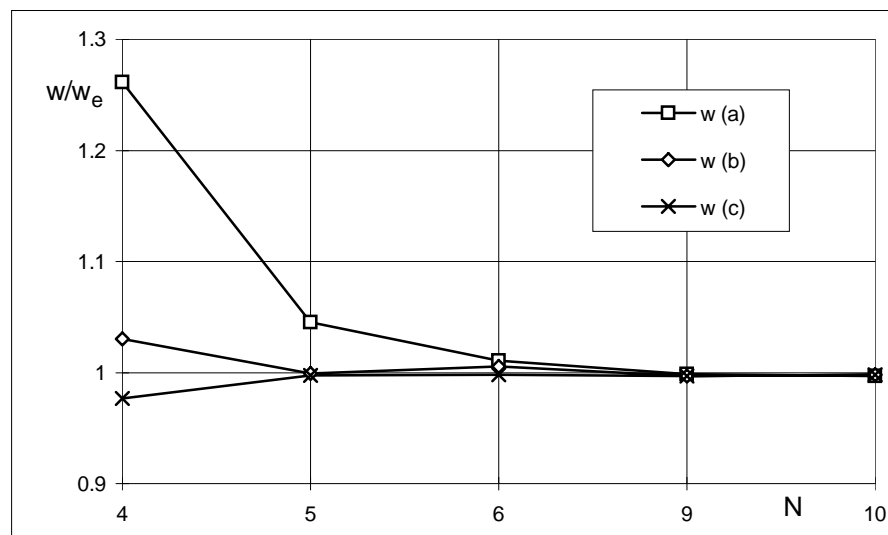


Figura 10.12: Evolução do valor do deslocamento transversal em C; solução com wavelets.

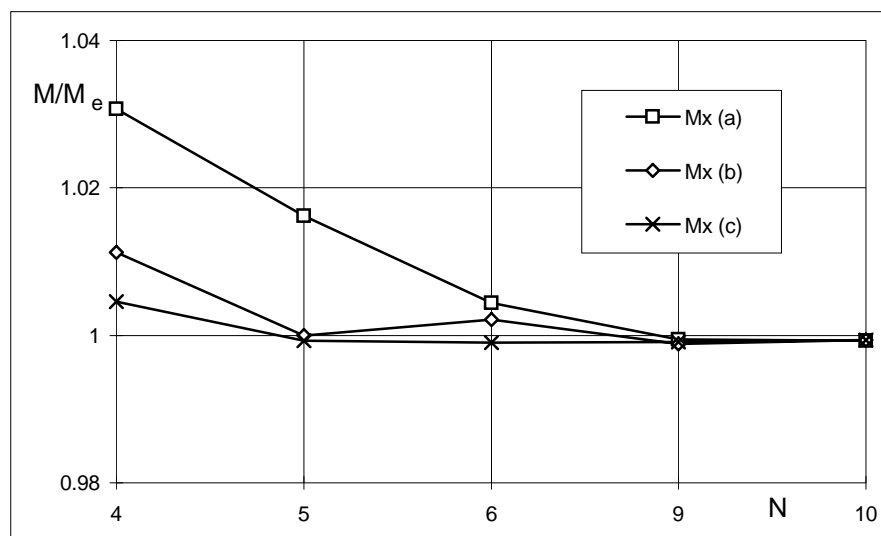


Figura 10.13: Evolução do valor do momento flector em C ; solução com wavelets.

A forma como as diferentes soluções aproximadas convergem para a solução exacta é ilustrada pelos gráficos apresentados nas figuras 10.11, 10.12 e 10.13. Nestas três figuras representa-se a evolução dos valores (normalizados em relação à solução exacta) da energia de deformação \bar{U} , do deslocamento transversal \bar{w}_c e do momento \bar{M}_{xxc} .

A convergência das soluções encontra-se ilustrada também na figura 10.14, onde se representa a aproximação do campo de momentos \bar{M}_{xx} obtida para cada uma das discretizações consideradas.

Nas figuras 10.15 e 10.16 encontram-se representados os campos de esforços e de deslocamentos obtidos com a discretização envolvendo a malha B e $N = 10$.

As distribuições de \bar{M}_{xx} , \bar{V}_x e w ao longo do bordo \overline{DC} , encontram-se representadas na figura 10.17 para o caso em que se utiliza a malha A em conjugação com aproximações com wavelets das famílias com $N = 5$ e $N = 10$. Estas soluções são comparadas com as distribuições obtidas considerando a malha C e wavelets com $N = 10$.

10.5 Efeito de locking

Um dos problemas numéricos que com maior frequência surge quando se efectuam análises de lajes baseadas na teoria de Reissner-Mindlin é o chamado *efeito de locking*. Este fenómeno numérico surge em especial na análise de lajes de pequena espessura. Quando este efeito é activado, a rigidez calculada numericamente é de tal forma elevada que destrói por completo o significado dos resultados, podendo surgir

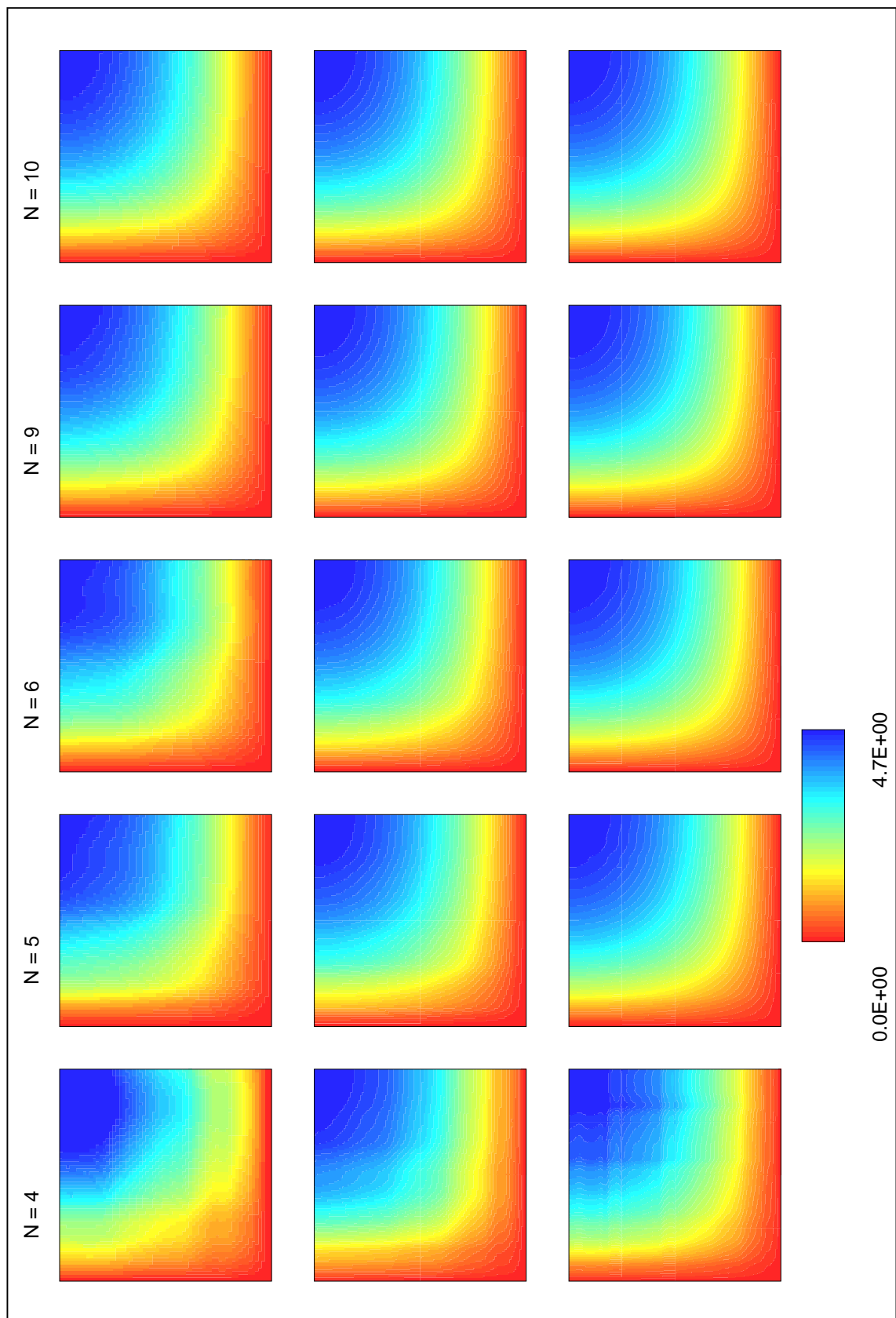


Figura 10.14: Distribuição do campo de momentos M_{xx} ; solução com wavelets.

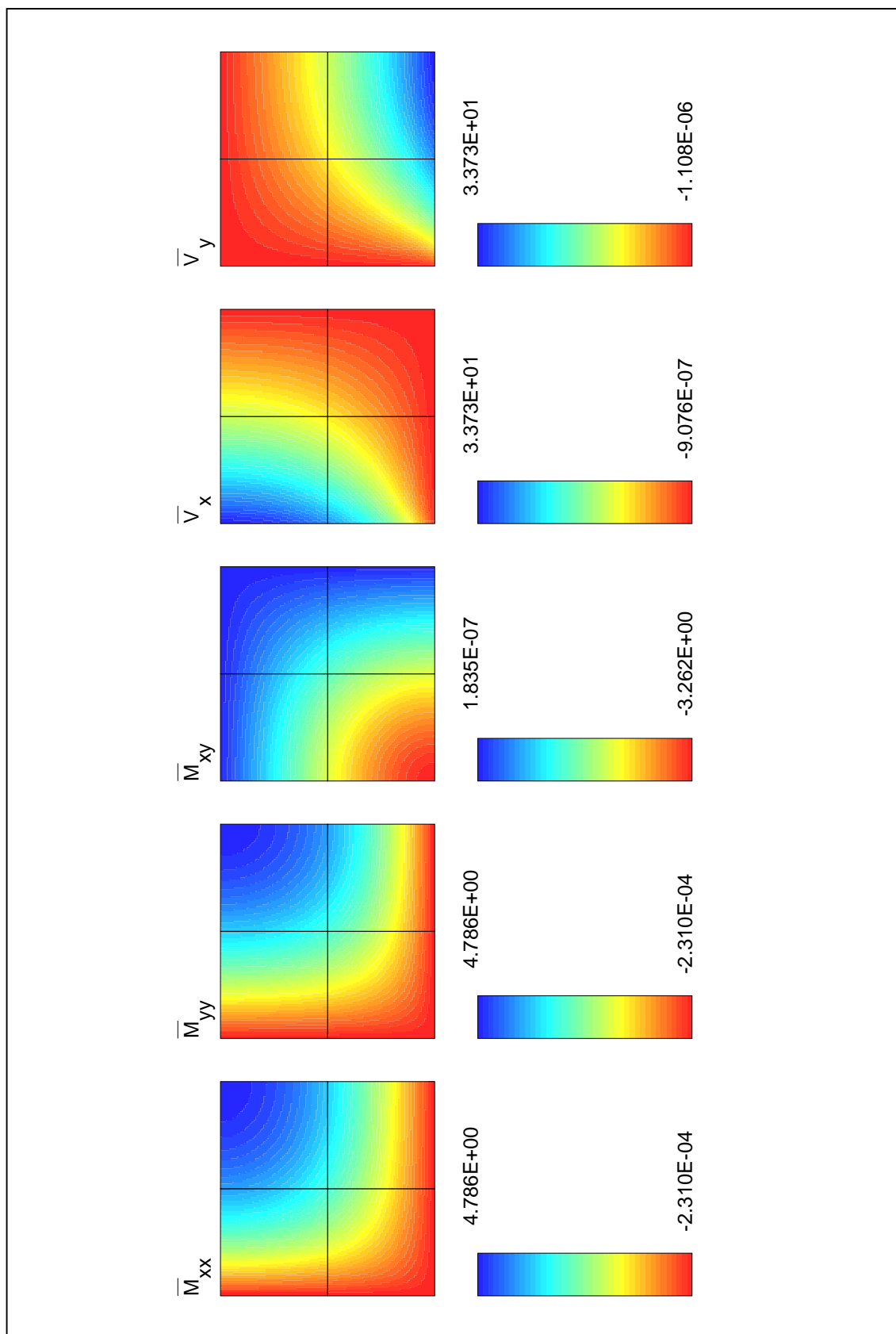


Figura 10.15: *Campo de esforços obtidos com a malha B e $N = 10$.*

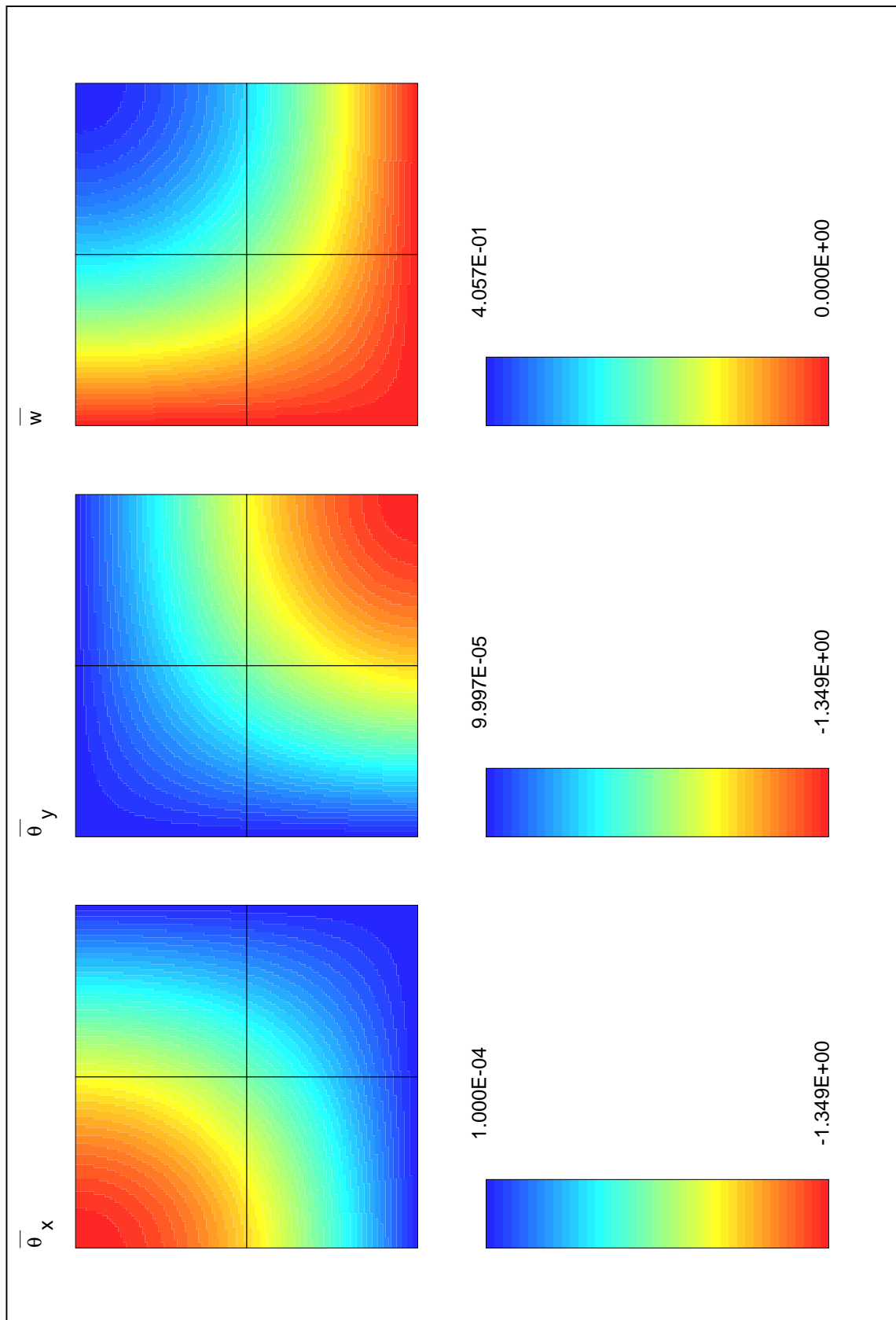


Figura 10.16: *Campo de deslocamentos obtidos com a malha B e N = 10.*

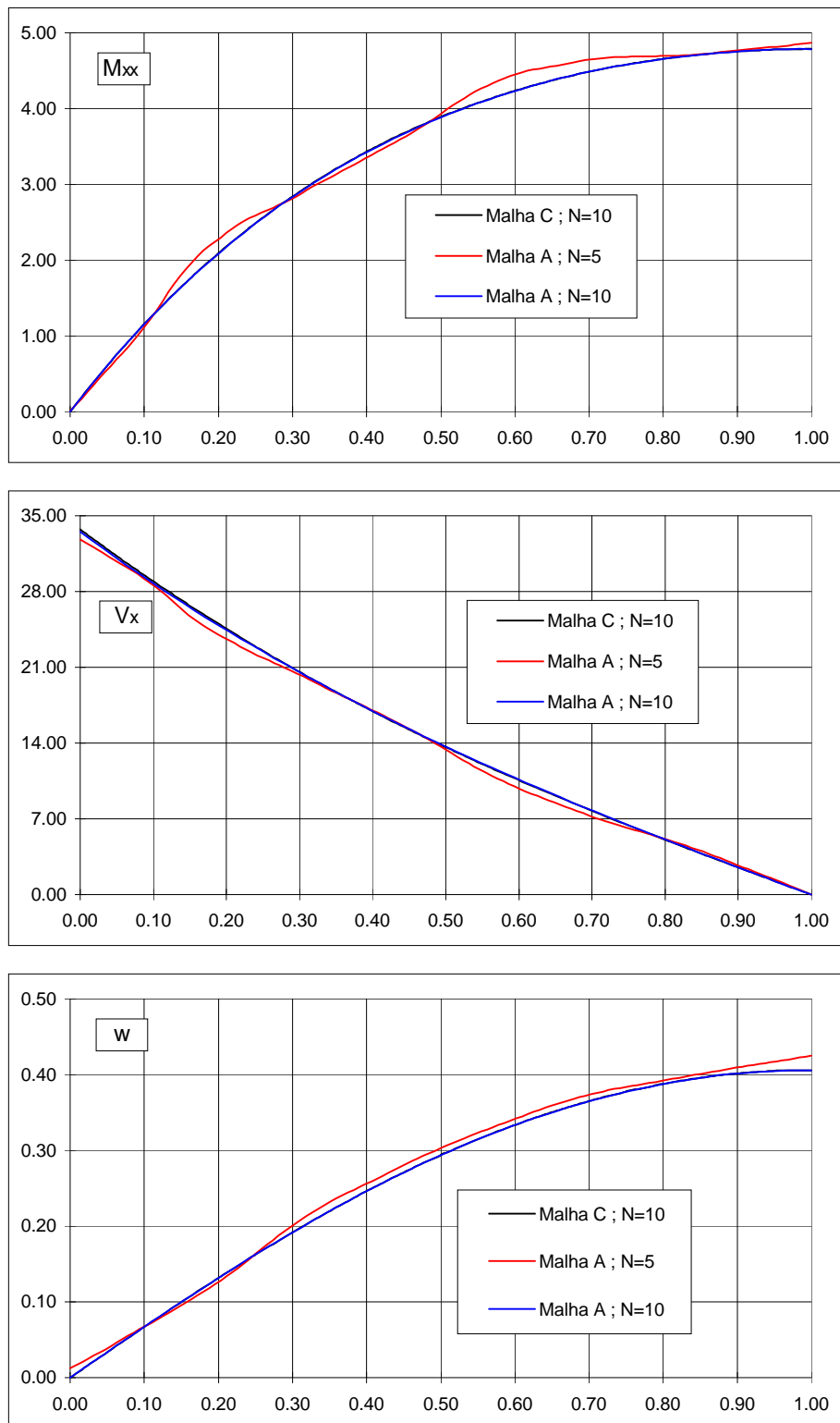


Figura 10.17: Distribuições de M_{xx} , V_x e w ao longo do bordo DC.

valores nulos para os deslocamentos transversais e demais grandezas cinemáticas.

As formulações mistas de elementos híbridos e mistos têm demonstrado [173, 150] que não são, regra geral, afectadas pelo fenómeno de locking. Esta é sem dúvida uma das importantes vantagens associadas à utilização deste tipo de modelos.

Para ilustrar que os modelos baseados na utilização de funções de Walsh e sistemas de wavelets também não são afectados por fenómenos de locking, é analisada de novo a laje simplesmente apoiada da figura 10.1.

São consideradas três discretizações, todas elas envolvendo a utilização da malha A. A primeira utiliza funções de Walsh, com o grau das aproximações definido por $p = 6$. A segunda e a terceira utilizam wavelets com $N = 5$ e $N = 10$, respectivamente.

É repetida a análise para uma gama muito variada de valores do quociente τ/a . Os valores obtidos em cada um dos casos para \bar{w}_c e $\bar{M}_c (= \bar{M}_{xxc})$ encontram-se listados nas tabelas 10.9 e 10.10.

τ/a	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05
Walsh	0.5381	0.4907	0.4539	0.4276	0.4118
Wavelet_1	0.5643	0.5145	0.4756	0.4475	0.4305
Wavelet_2	0.5364	0.4891	0.4523	0.4260	0.4103
<i>Mix_L</i>	0.5382	0.4908	0.4539	0.4276	0.4118
<i>QPL6</i>	0.539	0.491	0.453	0.427	0.411
τ/a	0.02	0.01	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
Walsh	0.4074	0.4067	0.4065	0.4065	0.4065
Wavelet_1	0.4256	0.4249	0.4247	0.4247	0.4246
Wavelet_2	0.4059	0.4052	0.4050	0.4050	0.4050
<i>Mix_L</i>	0.4074	0.4068	0.4066	0.4066	0.4066
<i>QPL6</i>	0.406	0.406	0.405	0.405	0.405

Tabela 10.9: *Variação do deslocamento transversal em função do valor da espessura da laje.*

A análise destas tabelas permite verificar que nenhum dos modelos testados apresenta indícios de se poder vir a desenvolver um fenómeno semelhante ao anteriormente descrito. O valor normalizado dos deslocamentos transversais vai decrescendo à medida que se diminui a espessura da laje até que estabiliza num determinado valor, correspondente à solução aproximada que o modelo determina no caso de lajes finas. Este efeito é ilustrado no gráficos das figuras 10.18 e 10.19 onde se traça a evolução do deslocamento normalizado (\bar{w}_c/\bar{w}_{co}) em função do valor do quociente τ/a associado a cada um dos casos testados. A tabela 10.10 permite ainda verificar que o valor dos momento flector é muito pouco afectado pela variação da espessura da laje.

Para confirmar os valores obtidos com os modelos em estudo, apresentam-se ainda

τ/a	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05
Walsh	4.7868	4.7868	4.7868	4.7868	4.7868
Wavelet_1	4.8719	4.8710	4.8696	4.8681	4.8669
Wavelet_2	4.7841	4.7842	4.7844	4.7847	4.7850
<i>Mix_L</i>	4.7895	4.7895	4.7895	4.7895	4.7894
<i>QPL6</i>	4.75	4.75	4.75	4.75	4.75
τ/a	0.02	0.01	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
Walsh	4.7868	4.7868	4.7867	4.7868	4.7868
Wavelet_1	4.8665	4.8665	4.8664	4.8665	4.8663
Wavelet_2	4.7851	4.7851	4.7851	4.7852	4.7857
<i>Mix_L</i>	4.7894	4.7894	4.7894	4.7894	4.7894
<i>QPL6</i>	4.75	4.75	4.75	4.75	4.75

Tabela 10.10: *Variação do momento flector M_{xx} em função do valor da espessura da laje.*

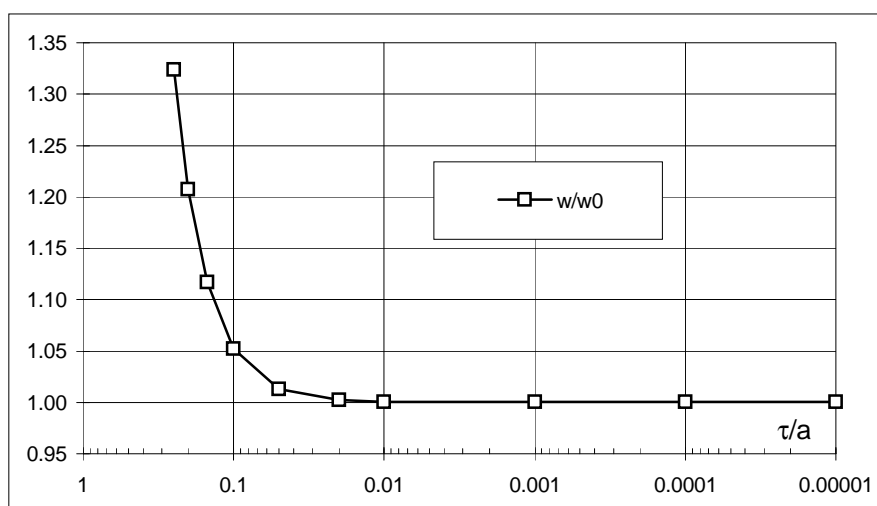


Figura 10.18: *Variação do valor do deslocamento transversal com a espessura; solução com funções de Walsh.*

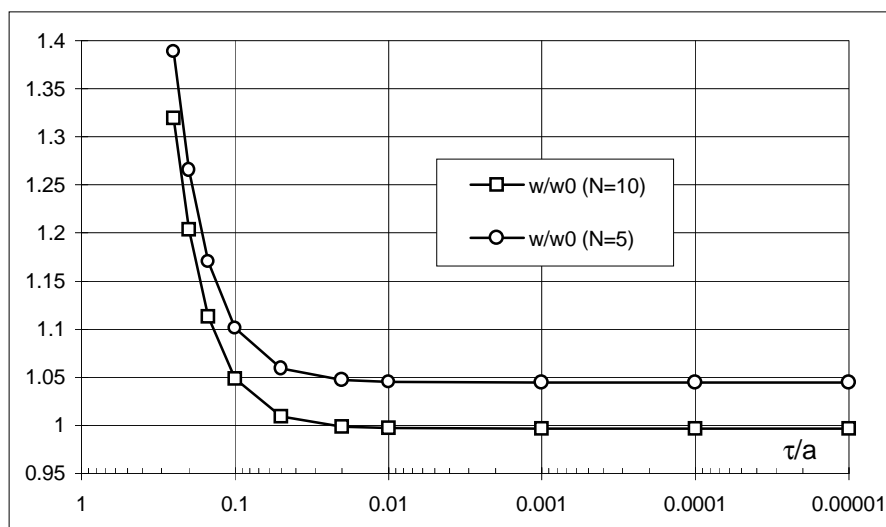


Figura 10.19: Variação do valor do deslocamento transversal com a espessura; solução com wavelets.

nas tabelas 10.9 e 10.10 os resultados obtidos com recurso a outros dois modelos de elementos finitos, *Mix-L* e *QPL6*, respectivamente. Os elementos *Mix-L* baseiam-se na formulação híbrida-mista que utiliza nas aproximações conjuntos de polinómios ortogonais de Legendre [147, 150]. Nas análises que produziram os valores listados nas tabelas anteriores, foi considerada uma malha idêntica à malha A, os esforços no domínio e os deslocamentos na fronteira foram modelados com polinómios do sexto grau e os deslocamentos no domínio foram aproximados com polinómios do quinto grau. Esta discretização envolve um total de 342 graus de liberdade [150]. O modelo *QPL6* foi proposto por Cheung e Wanji [34] e utiliza elementos híbridos. As análises com este modelo foram efectuadas com uma malha constituída por 4×4 elementos. É bem visível a boa concordância que existe entre as soluções fornecidas pela aplicação de cada um dos modelos em comparação nas tabelas 10.9 e 10.10.

10.6 Efeito da distorção da malha

A análise da laje simplesmente apoiada com a malha de elementos finitos representada na figura 10.20 é utilizada para avaliar o efeito que a distorção dos elementos introduz na qualidade da solução.

São consideradas neste estudo duas espessuras diferentes para a laje, caracterizadas respectivamente pelas relações $\tau/a = 0.1$ e $\tau/a = 0.01$. São utilizados em todos os casos wavelets com $N = 10$.

Na tabela 10.11 apresentam-se alguns valores que permitem caracterizar a solução obtida para cada um dos valores considerados para γ . São listados os momentos

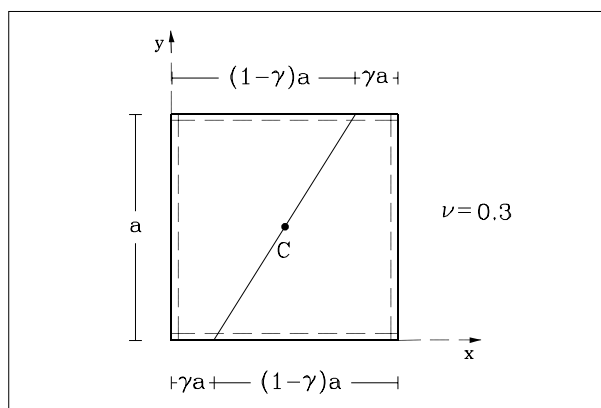


Figura 10.20: Malha utilizada no estudo da distorção.

\overline{M}_{xxc} e \overline{M}_{yyc} , o deslocamento transversal \overline{w}_c e a energia de deformação \overline{U} . Os valores dos momentos e deslocamentos verticais são obtidos efectuando a média dos valores obtidos a partir da aproximação que é efectuada em cada um dos elementos.

γ	$\tau/a = 0.1$				$\tau/a = 0.01$			
	\overline{M}_{xxc}	\overline{M}_{yyc}	\overline{w}_c	\overline{U}	\overline{M}_{xxc}	\overline{M}_{yyc}	\overline{w}_c	\overline{U}
0.01	4.7370	4.8521	0.4265	9.00414	4.6304	4.8001	0.4003	8.45698
0.05	4.7507	4.8307	0.4271	9.00791	4.6429	4.8233	0.4014	8.47108
0.10	4.7592	4.8058	0.4276	9.01083	4.6657	4.8490	0.4025	8.48297
0.15	4.7672	4.7960	0.4279	9.01243	4.6894	4.8610	0.4035	8.49193
0.20	4.7749	4.7962	0.4280	9.01330	4.7153	4.8689	0.4043	8.49918
0.25	4.7814	4.7991	0.4281	9.01377	4.7428	4.8754	0.4052	8.50479
0.30	4.7866	4.8004	0.4281	9.01405	4.7676	4.8747	0.4059	8.50928
0.35	4.7908	4.7991	0.4282	9.01423	4.7847	4.8597	0.4065	8.51273
0.40	4.7939	4.7959	0.4282	9.01435	4.7924	4.8322	0.4070	8.51525
0.45	4.7959	4.7929	0.4282	9.01443	4.7945	4.8049	0.4073	8.51684
0.50	4.7966	4.7917	0.4282	9.01446	4.7964	4.7936	0.4074	8.51738

Tabela 10.11: Soluções obtidas para diferentes valores do parâmetro de distorção.

No gráfico da figura 10.21 representa-se a evolução do valor dos momentos no ponto central da laje em função do valor do parâmetro de distorção, γ . Os valores representados foram normalizados em relação ao valor obtido para a malha não distorcida. Traça-se a evolução do quociente $M_{ii}(\gamma)/M_{ref}$, com $M_{ref} = M_{ii}(\gamma = 0.5)$.

A análise deste gráfico permite observar que o modelo em estudo não é muito sensível à distorção. Com efeito, verifica-se que $0.96 < M_{ii}(\gamma)/M_{ref} < 1.02$, qualquer que seja o valor de γ considerado. Mesmo para o caso em que $\gamma = 0.01$, os resultados obtidos pouco divergem dos que são obtidos com a malha não distorcida.

Observa-se por outro lado que a diminuição da espessura da laje faz com que aumente

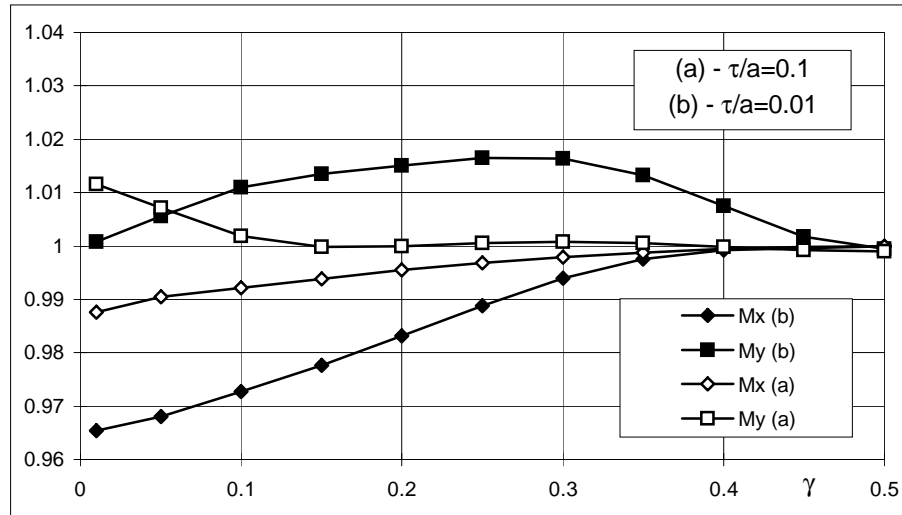


Figura 10.21: Efeito da distorção no valor dos momentos no centro da laje.

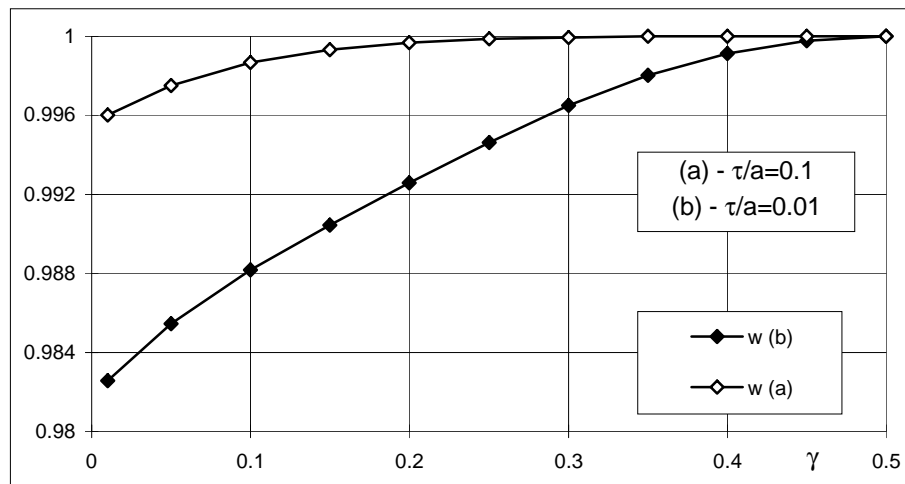


Figura 10.22: Efeito da distorção no valor do deslocamento transversal no centro da laje.

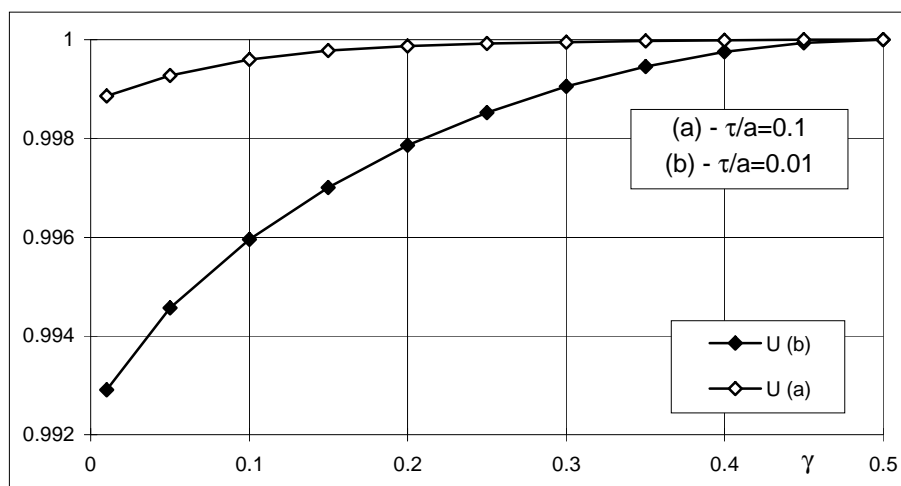


Figura 10.23: *Efeito da distorção no valor da energia de deformação.*

a sensibilidade do modelo à distorção.

As figuras 10.22 e 10.23 apresentam os gráficos onde se traça, para cada um dos valores de γ , a evolução dos valores do deslocamento transversal e da energia de deformação. A análise destes gráficos permite confirmar a grande insensibilidade dos resultados face à distorção introduzida na malha.

10.7 Laje enviezada

Para ilustrar a análise de lajes com forma não-retangular, é estudada a laje enviezada fina representada na figura 10.24. Os bordos \overline{AB} e \overline{DE} encontram-se simplesmente apoiados, enquanto que os dois bordos restantes se encontram livres. Considera-se que $\tau/L = 0.001$ e $\nu = 0.31$.

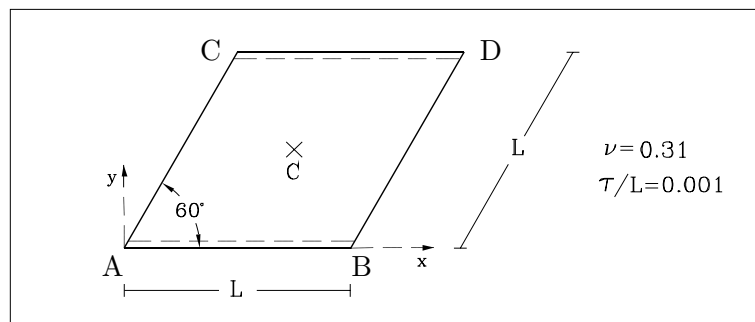


Figura 10.24: *Laje enviezada.*

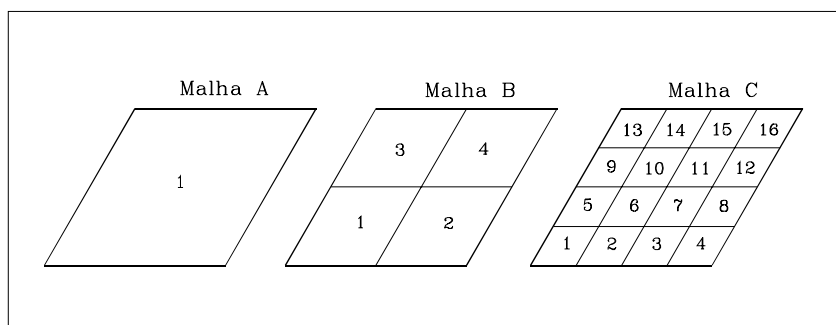


Figura 10.25: *Malhas utilizadas na análise da laje enviezada.*

Na resolução deste problema são utilizadas as três malhas de elementos finitos representadas na figura 10.25. São utilizados sistemas de wavelets com $N = 10$ na aproximação e é adoptado um modelo de equilíbrio. Na tabela 10.12 apresenta-se o número de graus de liberdade associado a cada uma das discretizações e o tempo total de resolução associado a cada uma delas, expresso em segundos. Listam-se ainda os valores obtidos para o deslocamento transversal \bar{w}_c e para o momento flector \bar{M}_{yyc} no centro da laje. Estas grandezas apresentam-se escaladas na forma:

$$\bar{w}_c = \frac{100D}{qL^4} w_c ; \bar{M}_{yyc} = \frac{100}{qL^2} M_{yyc} .$$

	n_{elem}	N_{gl}	$T_{tot}(s)$	\bar{w}_c	\bar{M}_{yyc}
Malha A	1	401	15.11	0.8096	9.819
Malha B	4	1604	33.23	0.8029	9.704
Malha C	16	6272	247.16	0.7968	9.621

Tabela 10.12: *Laje enviezada; resultados referentes a cada uma das malhas testadas.*

A solução obtida com a malha C é validada através da sua comparação com os resultados obtidos com outros modelos numéricos. Os respectivos valores encontram-se listados na tabela 10.13. Os valores de referência, D_F , são apresentados por Razaque [172] e foram obtidos através de uma análise com diferenças finitas na qual foi considerada uma malha de 16×16 nós.

	Wavelet	Mix_L	$A9$	H_T	$E16$	D_F
\bar{w}_c	0.7968	0.8023	0.7850	0.7843	0.7683	0.7945
\bar{M}_{yyc}	9.621	9.609	9.473	9.674	9.244	9.585

Tabela 10.13: *Laje enviezada; resultados obtidos com outros modelos.*

A discretização associada ao modelo Mix_L envolve a utilização de apenas um elemento finito e a consideração de polinómios de Legendre do oitavo{ sétimo} grau

na aproximação do campo de esforços no domínio e do campo de deslocamentos na fronteira{deslocamentos no domínio}.

A solução obtida por Razzaque envolve a utilização de 24 elementos triangulares *não-conformes*, *A9* [172]. O modelo *H-T* utiliza na análise 4 elementos híbridos de Trefftz desenvolvidos por Jiroušek [104]. A solução com elementos *E16* foi obtida por Roufaeil [177]. É neste caso utilizada uma malha com 64 elementos rectangulares, possuindo cada um deles 12 graus de liberdade.

Na figura 10.26 apresenta-se a distribuição do campo de momentos obtida com a malha C. São bem visíveis as singularidades existentes nos cantos B e D, assim como as perturbações que a sua existência induz no andamento do campo de esforços nas regiões vizinhas.

A figura 10.27 apresenta a distribuição dos campos de deslocamentos obtida com a mesma discretização. Os valores das rotações foram escalados na forma:

$$\bar{\theta}_i = \frac{100D_f}{qL^3} \theta_i ;$$

10.8 Laje circular

Considere-se uma laje circular com o bordo encastrado e sujeita à acção de uma carga uniformemente distribuída. Tendo em conta as condições de simetria existentes, apenas é necessário analisar um quarto da laje, tal como se encontra representado na figura 10.28.

São consideradas na análise as três malhas representadas na figura 10.29. Nas aproximações são utilizadas wavelets pertencentes a duas famílias, com $N=5$ e $N=10$, respectivamente.

Nas tabelas 10.14 e 10.15 lista-se o número de graus de liberdade envolvido em cada uma das aproximações, assim como o tempo de CPU (em segundos) gasto em cada caso. A rotina *MA47* foi utilizada na resolução directa da forma não-condensada do sistema de equações.

Foram consideradas duas espessuras diferentes nas análises. A primeira verifica a relação $2R/\tau = 10$, enquanto que a segunda impõe $2R/\tau = 100$. Pode considerar-se que o primeiro caso corresponde a uma laje espessa, enquanto que a segunda espessura seleccionada faz com que se possa classificar a laje como moderadamente fina.

Nas tabelas 10.14 e 10.15 listam-se ainda os valores obtidos para o momento flector, \bar{M}_c , e o deslocamento transversal, \bar{w}_c , no ponto central da laje. Apresenta-se também a *solução "exacta"* do problema [177, 187]. Os valores apresentados nestas

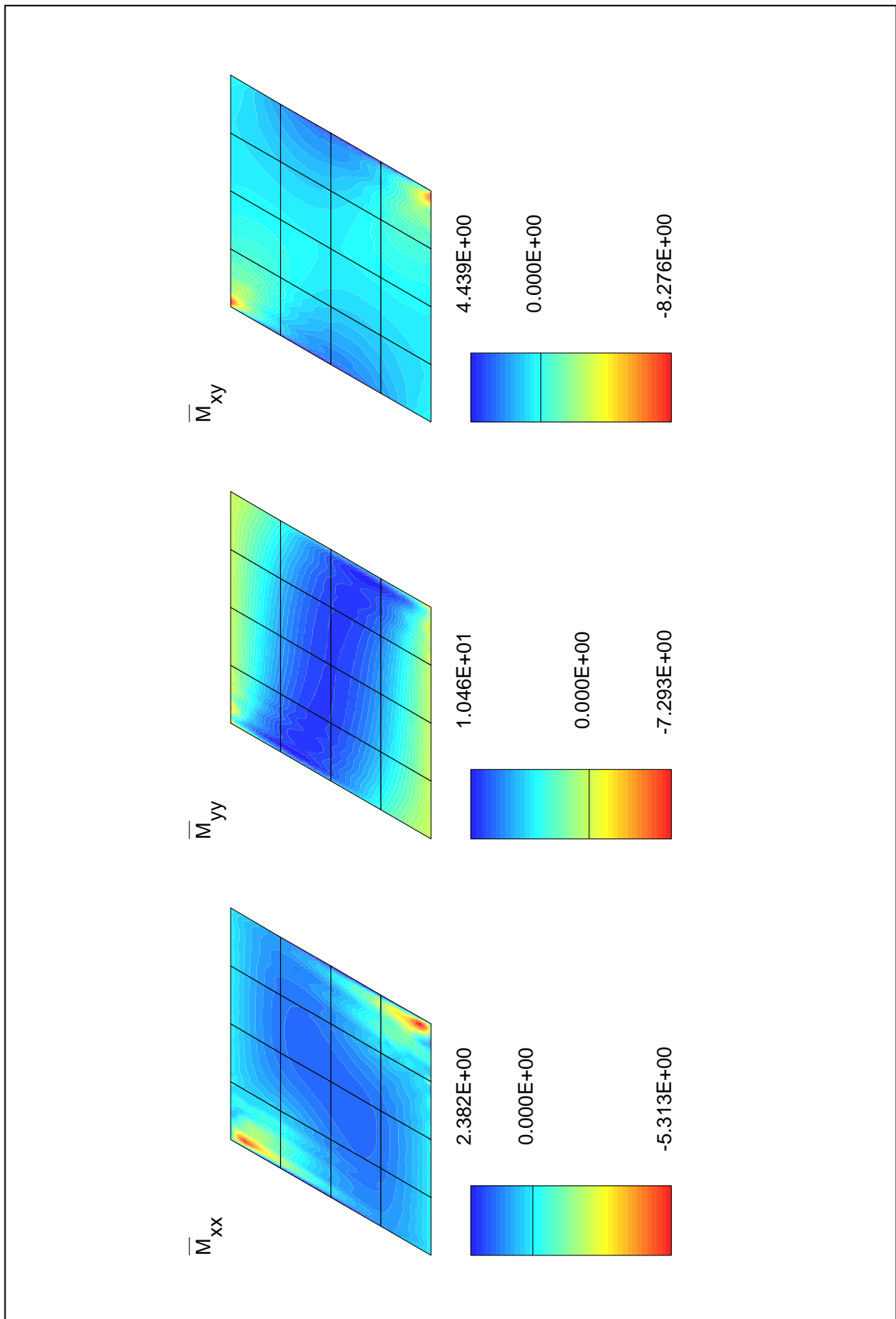


Figura 10.26: Laje enviezada; campo de esforços referente à solução com a malha C.

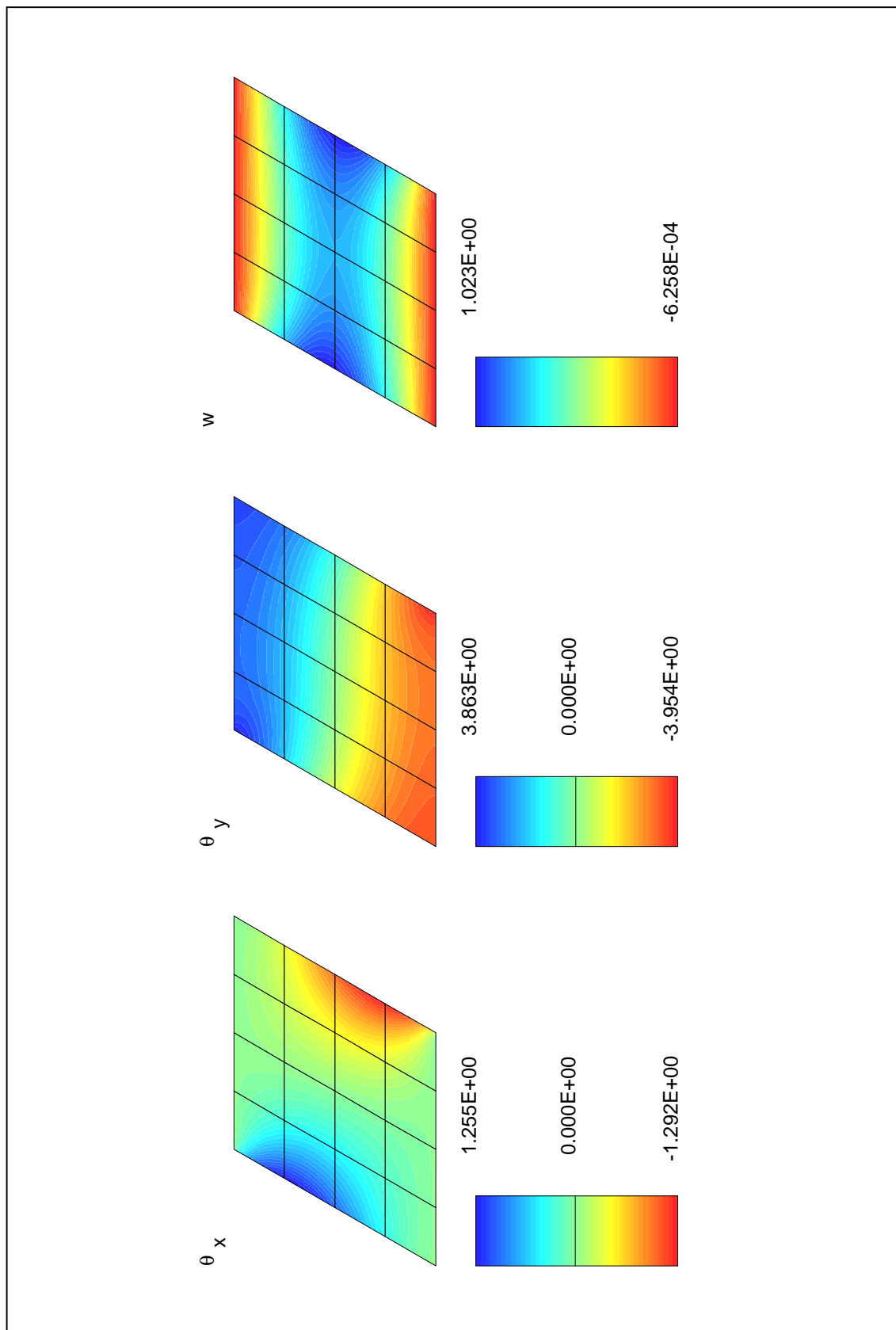


Figura 10.27: Laje enviezada; campo de deslocamentos referente à solução com a malha C .

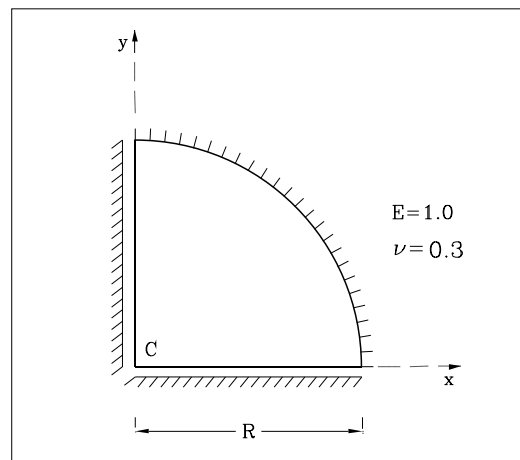


Figura 10.28: Laje circular com o bordo encastrado.

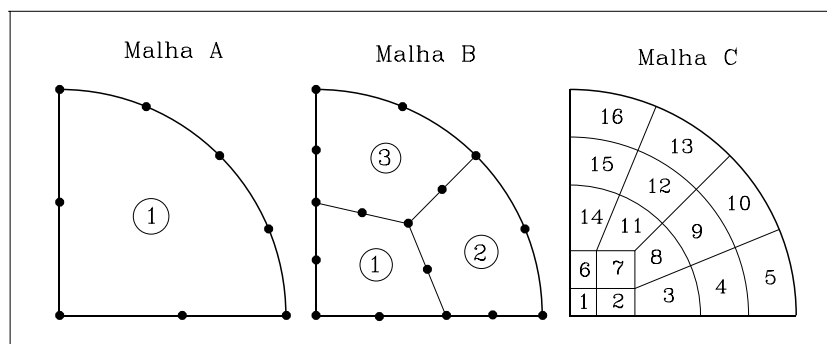


Figura 10.29: Malhas utilizadas na análise da laje circular.

	N_{gl}	$2R/\tau = 10$			$2R/\tau = 100$		
		$T_{tot}(s)$	\bar{w}_c	\bar{M}_c	$T_{tot}(s)$	\bar{w}_c	\bar{M}_c
Malha A	275	5.68	1.0750	8.603	5.64	1.2755	8.508
Malha B	850	7.08	1.0071	8.386	7.04	1.1881	8.155
Malha C	4555	40.77	0.9987	8.101	36.37	1.1806	8.113
"Exacto"			1.0018	8.125		1.1829	8.125

Tabela 10.14: Laje circular; soluções obtidas com as wavelets com $N = 5$.

	N_{gl}	$2R/\tau = 10$			$2R/\tau = 100$		
		$T_{tot}(s)$	\bar{w}_c	\bar{M}_c	$T_{tot}(s)$	\bar{w}_c	\bar{M}_c
Malha A	377	15.59	0.9977	8.121	15.79	1.1789	8.120
Malha B	1161	19.12	1.0013	8.100	20.55	1.1824	8.119
Malha C	6218	175.60	1.0030	8.128	264.16	1.1845	8.129
"Exacto"			1.0018	8.125		1.1829	8.125

Tabela 10.15: Laje circular; soluções obtidas com as wavelets com $N = 10$.

tabelas foram escalados na forma,

$$\bar{w}_c = \frac{64D_f}{qR^4} w_c ; \bar{M}_c = \frac{100}{qR^2} M_c .$$

A análise das tabelas 10.14 e 10.15 permite verificar a notável concordância existente entre a solução *exacta* e os resultados numéricos apresentados.

A informação contida na tabela 10.16 permite por seu lado comparar uma das soluções obtidas com wavelets com outros resultados numéricos apresentados na literatura. Para além dos modelos *Mix-L* [150], *Hib-T* [81] e *E16* [177] já antes referidos, são listados os valores correspondentes à utilização dos elementos *DRM*, *QUAD9* e *QBL4*.

Na solução com o modelo *Mix-L* foram utilizados polinómios de Legendre do sexto {quinto} grau na aproximação do campo de esforços no domínio e do campo de deslocamentos na fronteira{no domínio}. Esta discretização envolve ao todo 342 graus de liberdade. Já no caso do modelo híbrido de Trefftz desenvolvido por Freitas, *Hib-T* [81], os esforços no domínio são aproximados com polinómios de grau 23, enquanto que se considera que o campo de deslocamentos varia linearmente ao longo dos 14 troços em que se subdivide a fronteira estática. A discretização em causa envolve um total de apenas 151 graus de liberdade.

O modelo *DRM* (*discrete Reissner-Mindlin*) foi introduzido por Papadopoulos e Taylor [145] e utiliza elementos triangulares deduzidos a partir de uma formulação mista baseada no princípio variacional de Hu-Washizu [193]. Existem 12 graus de liberdade por elemento. A aproximação dos deslocamentos transversais é cúbica, enquanto que as rotações variam quadraticamente e as distorções γ_x e γ_y variam linearmente.

Cada um dos elementos rectangulares *QUAD9* possui 12 graus de liberdade. Este tipo de elemento é baseado numa formulação de compatibilidade onde se modela directamente o campo de deformações na laje. Foi desenvolvido por Hinton e Huang [100] com base num trabalho inicial de Bathe e Dvorkin [16].

Os elementos rectangulares *QBL4* foram introduzidos por Zienkiewicz *et al.* [204]. São também elementos mistos e a cada um deles estão associados 10 graus de liberdade. São aproximados deslocamentos, rotações e esforços transversos no domínio e têm a particularidade de considerarem que a distribuição dos deslocamentos transversais é função não só dos valores nodais de w , mas também dos valores nodais obtidos para as rotações θ_i .

A solução para a laje com $2R/\tau = 10$ obtida com a malha A e wavelets com $N = 10$ encontra-se representada nas figuras 10.30 e 10.31, onde se apresentam as distribuições obtidas para os campos de esforços e de deslocamentos, respectivamente. Os valores dos esforços transversos e das rotações foram escalados na forma:

$$\bar{V}_x = \frac{100}{qR} V_x ; \bar{\theta}_i = \frac{100D_f}{qR^3} \theta_i .$$

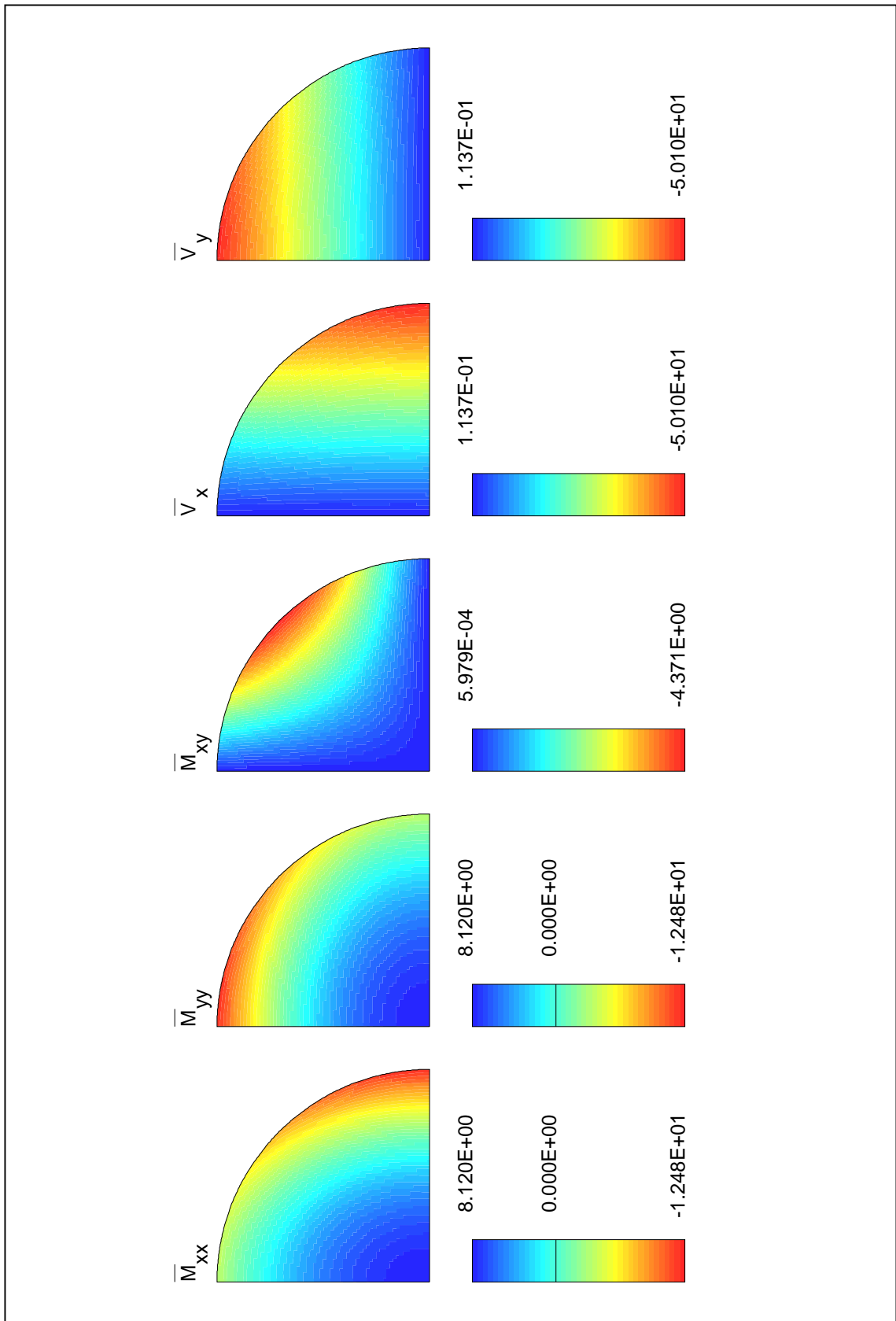


Figura 10.30: Laje circular; campo de esforços na laje com $2R/\tau = 10$.

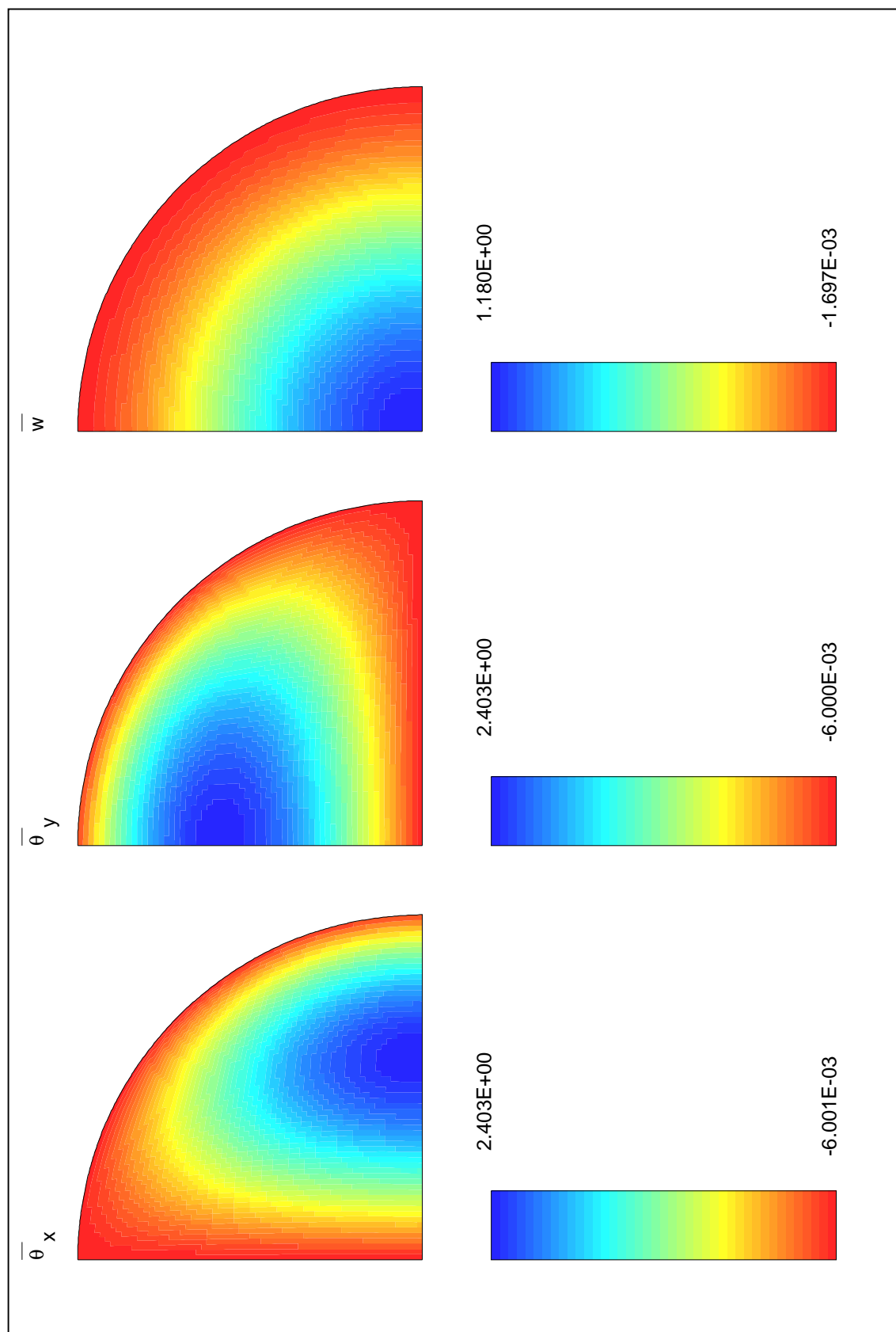


Figura 10.31: Laje circular; campo de deslocamentos na laje com $2R/\tau = 10$.

	Tipo	Wavelet	Mix_L	Hib_T	E16	DRM	QUAD9	QBL4
$2R/\tau$	n_{elem}	3	1	1	48	1536	12	486
100	\bar{w}_c	1.1845	1.1812	1.200	1.1921	1.1837	-	1.1814
	\bar{M}_c	8.129	8.122	8.203	8.144	8.120	-	8.112
10	\bar{w}_c	1.0030	1.0003	1.015	1.0086	1.0022	1.0022	1.0005
	\bar{M}_c	8.128	8.127	8.193	8.144	8.120	8.380	8.112

Tabela 10.16: Laje circular; comparação de soluções obtidas com diferentes modelos.

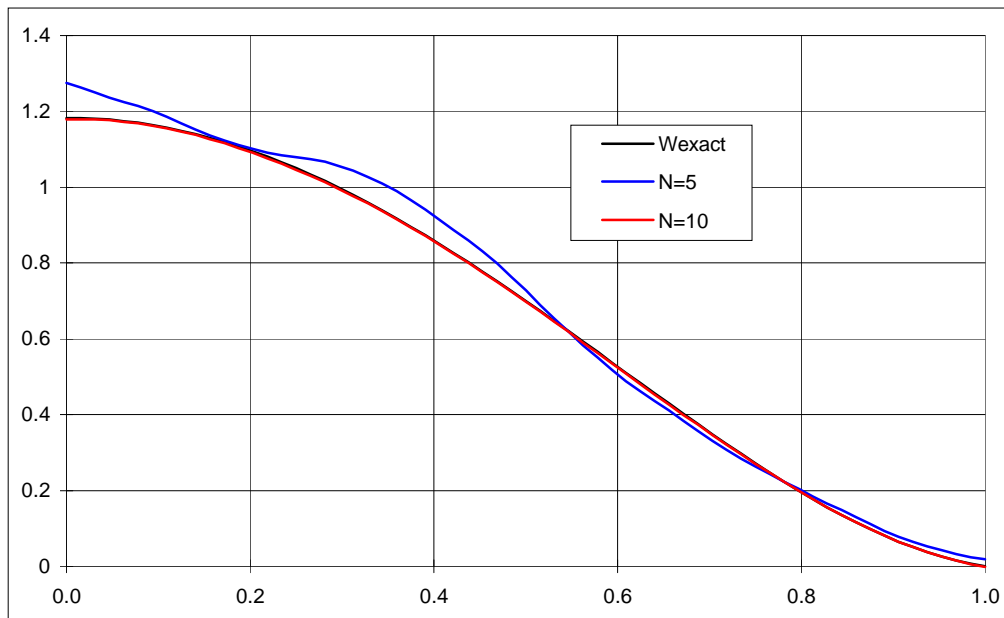


Figura 10.32: Distribuição dos deslocamentos transversais ao longo do raio da laje circular.

Para finalizar, a figura 10.32 apresenta o traçado do campo de deslocamentos transversais ao longo do raio da laje circular. É comparada a solução exacta com as aproximações obtidas com a malha A e as aproximações efectuadas com as duas famílias de wavelets testadas. Embora se possam considerar satisfatórias ambas as aproximações, é nítida a vantagem da solução obtida com as wavelets da família com $N = 10$. Tal como se pode observar na figura 10.32, esta última é praticamente coincidente com a solução exacta.

10.9 Análise de uma laje espessa encastrada

A análise da laje espessa representada na figura 10.33 permite ilustrar a aplicação da formulação de ordem superior de Pereira [147]. Convém referir que a estrutura em estudo não pode ser considerada como uma estrutura laminar corrente, uma vez que é constituída por um *cubo* encastrado ao longo de todo o seu contorno. A sua análise é no entanto por vezes utilizada [129] com o intuito de salientar algumas das vantagens e potencialidades dos modelos de ordem superior.

Devido às condições de simetria existentes, apenas é analisado 1/4 da estrutura, sendo utilizada uma malha constituída apenas por 1 elemento finito. Os campos estático e cinemático são aproximados com funções de escala pertencentes à família de wavelets com $N = 10$. Na aproximação do campo de tensões são utilizadas funções com grau de refinamento $j = 1$, enquanto que os deslocamentos são modelados por wavelets com $j = 0$.

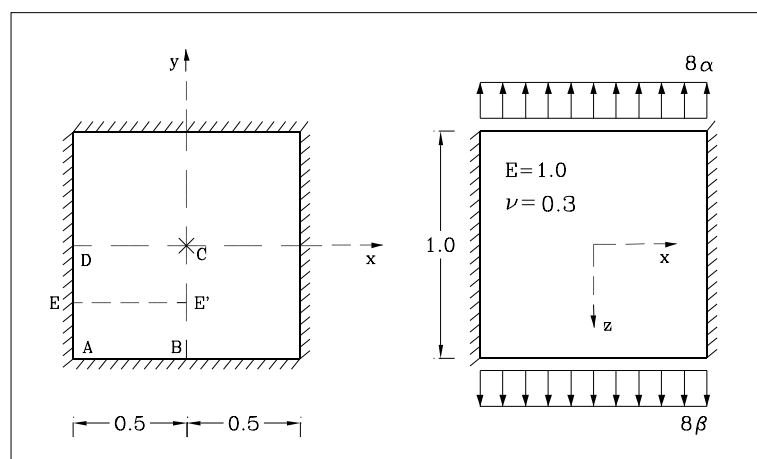


Figura 10.33: Laje espessa encastrada.

São considerados dois carregamentos diferentes: de acordo com a terminologia definida em [129], a $\alpha = -0.5$ e $\beta = -0.5$ corresponde o problema "in plane", enquanto que para $\alpha = -0.5$ e $\beta = 0.5$ se define o problema "out plane". São utilizadas nas análises dois modelos; o primeiro - modelo de *terceira ordem* - prevê a consideração

de $n = 3$ na expansão em série definida em (10.8), enquanto que o segundo - modelo de *quarta ordem* - assume que $n = 4$.

Na tabela 10.17 lista-se, para cada um dos casos considerados, o número de graus de liberdade envolvidos na análise, o índice de esparsidade do sistema governativo e o tempo total de resolução (em segundos).

<i>Grau</i>	N_{gl}	η	$T_{tot}(s)$
3	1460	0.878414	18.92
4	1886	0.882409	27.02

Tabela 10.17: *Caracterização das aproximações utilizadas na análise da laje espessa.*

A distribuição do campo de tensões na face superior da laje ($z = 0.5$) obtida com a utilização do modelo de quarta ordem encontra-se representada nas figuras 10.34 e 10.35, para os problemas "*out plane*" e "*in plane*", respectivamente.

A influência que o número de termos nas expansões em série definidas em (10.8) e (10.10) pode ter na distribuição dos campos estáticos ao longo da espessura da laje pode ser apreciado nas figuras 10.36 e 10.37, onde se representa, para o problema "*in plane*", a distribuição de tensões ao longo da secção transversal identificada a traço interrompido na figura 10.33. É interessante observar os ganhos associados à utilização do modelo de quarta ordem, nomeadamente no que diz respeito à verificação das condições de fronteira estática.

Na figura 10.38 apresentam-se as deformadas correspondentes aos problemas "*in plane*" e "*out-plane*". A malha aí traçada não corresponde a qualquer discretização da estrutura, sendo utilizada apenas para facilitar a visualização do modo de deformação da laje.

A distribuição dos deslocamentos verticais no plano médio da laje ao longo do bordo \overline{DC} encontra-se representada na figura 10.39, para o caso do problema *out plane* e considerando um modelo do 3º grau. O valor do deslocamento no ponto C, $d_v = -2.977$, aproxima-se bastante do valor obtido por Matsunaga em [129], $d_v = -2.993$.

Tendo em conta a estrutura considerada, é de esperar que a formulação de Reissner-Mindlin não seja a mais adequada para efectuar a análise, pois deixam de ser válidas algumas das hipóteses simplificativas em que esta se baseia. Para o confirmar, basta observar o gráfico "Mindlin" representado na figura 10.39. A diferença existente entre as duas soluções pode ser explicada pela grande influência que a deformabilidade por corte tem neste caso, facto este que não é *tratado* de uma forma conveniente pelo modelo de primeira ordem de Reissner-Mindlin. Se se considerar um *factor de corte* unitário, o modelo fica mais rígido e o valor dos deslocamentos transversais diminui, aproximando-se dos valores obtidos com o modelo de ordem superior, tal como o gráfico "Mindlin*" permite verificar.

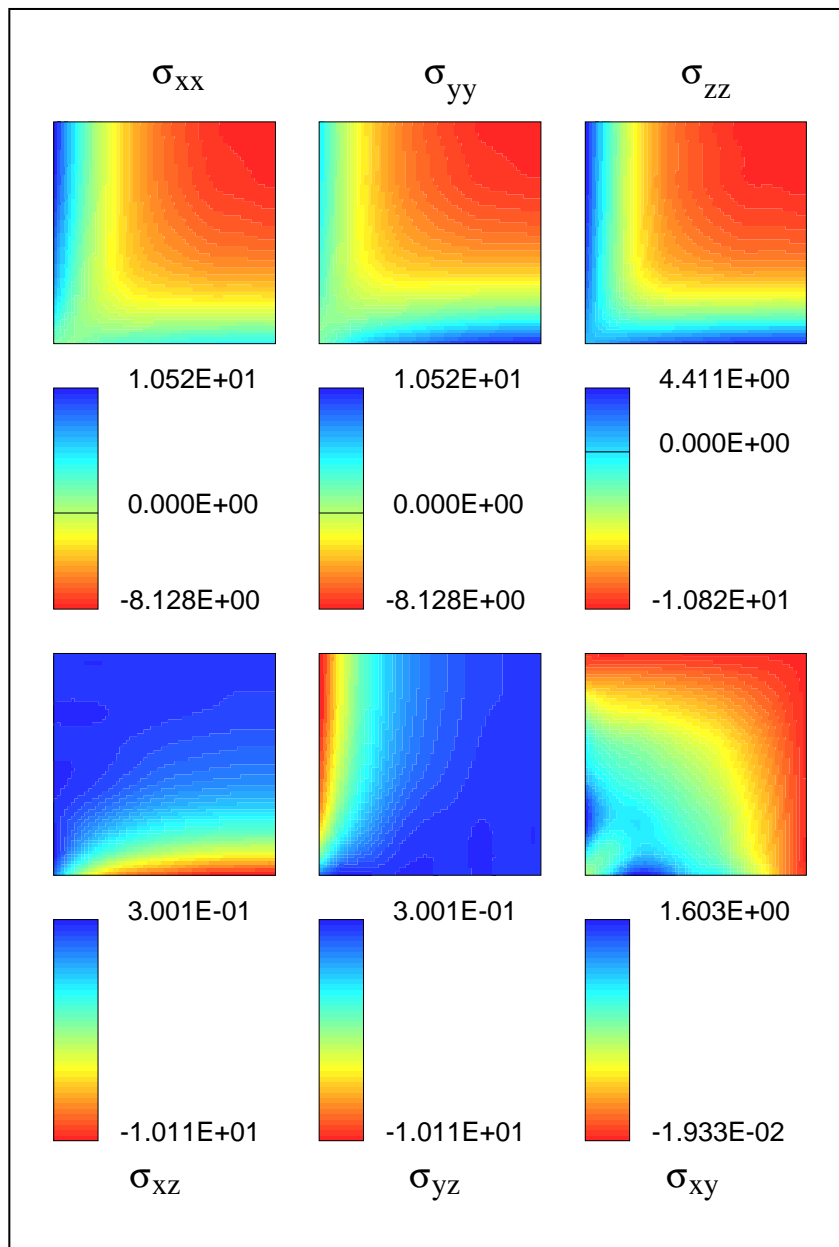


Figura 10.34: Distribuição das tensões na camada superior da laje; problema "out plane" com $N = 4$.

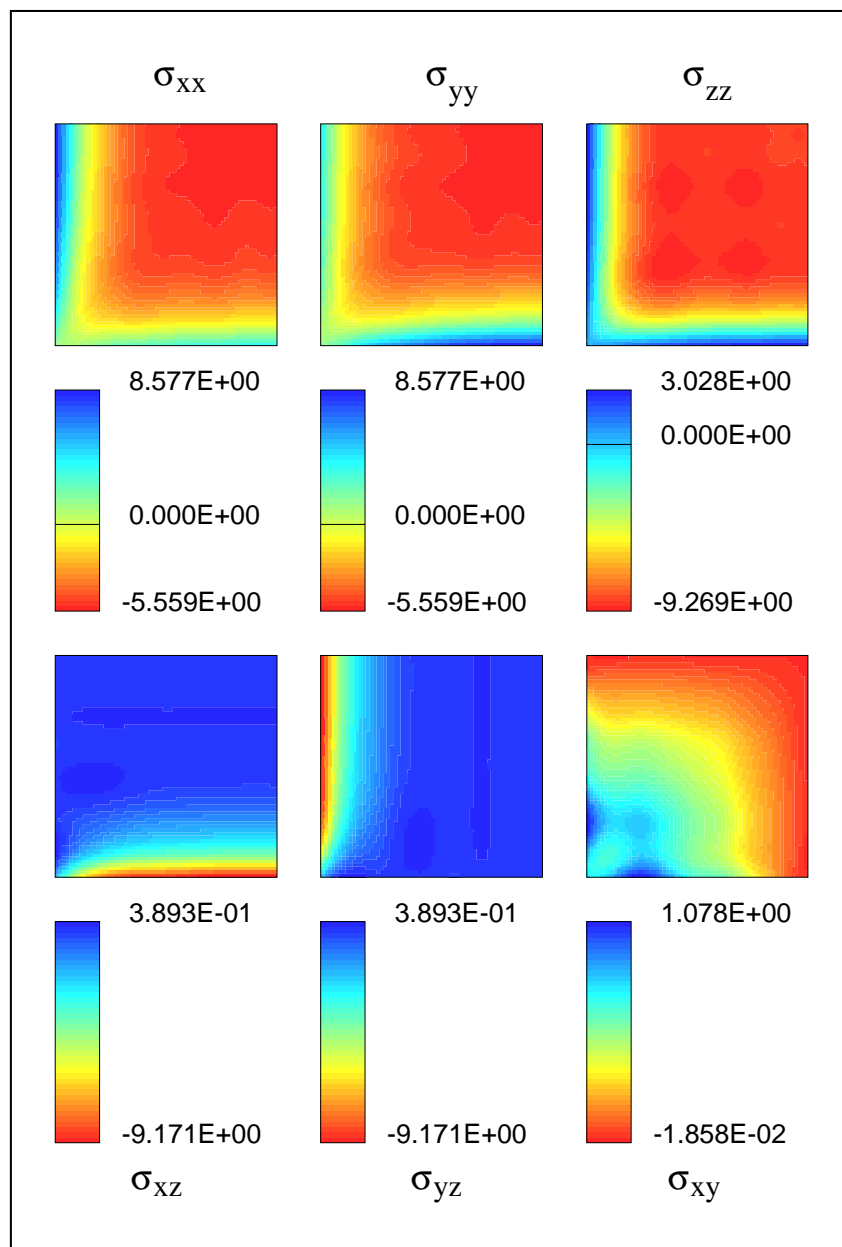


Figura 10.35: Distribuição das tensões na camada superior da laje; problema "in plane" com $N = 4$.

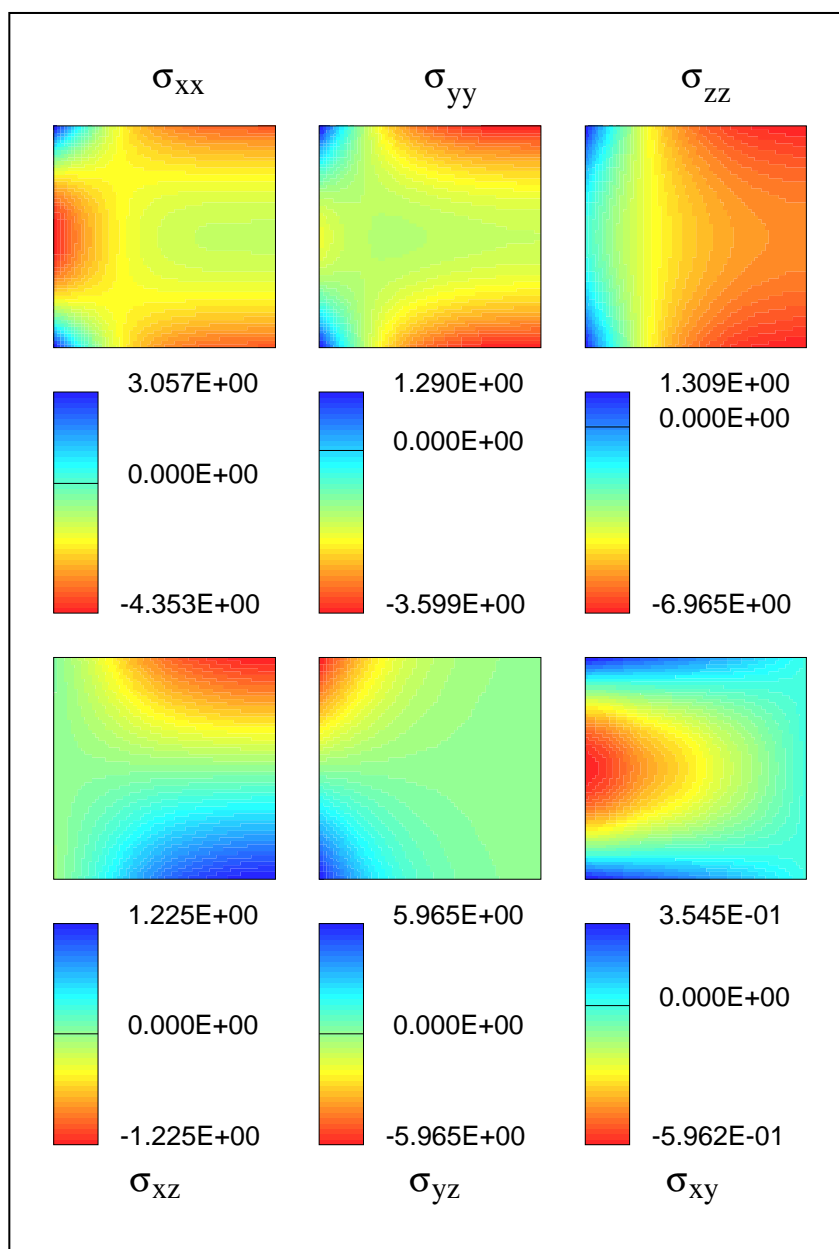


Figura 10.36: Distribuição do campo de tensões na secção EE' ; problema "in plane" com modelo do 3º grau.

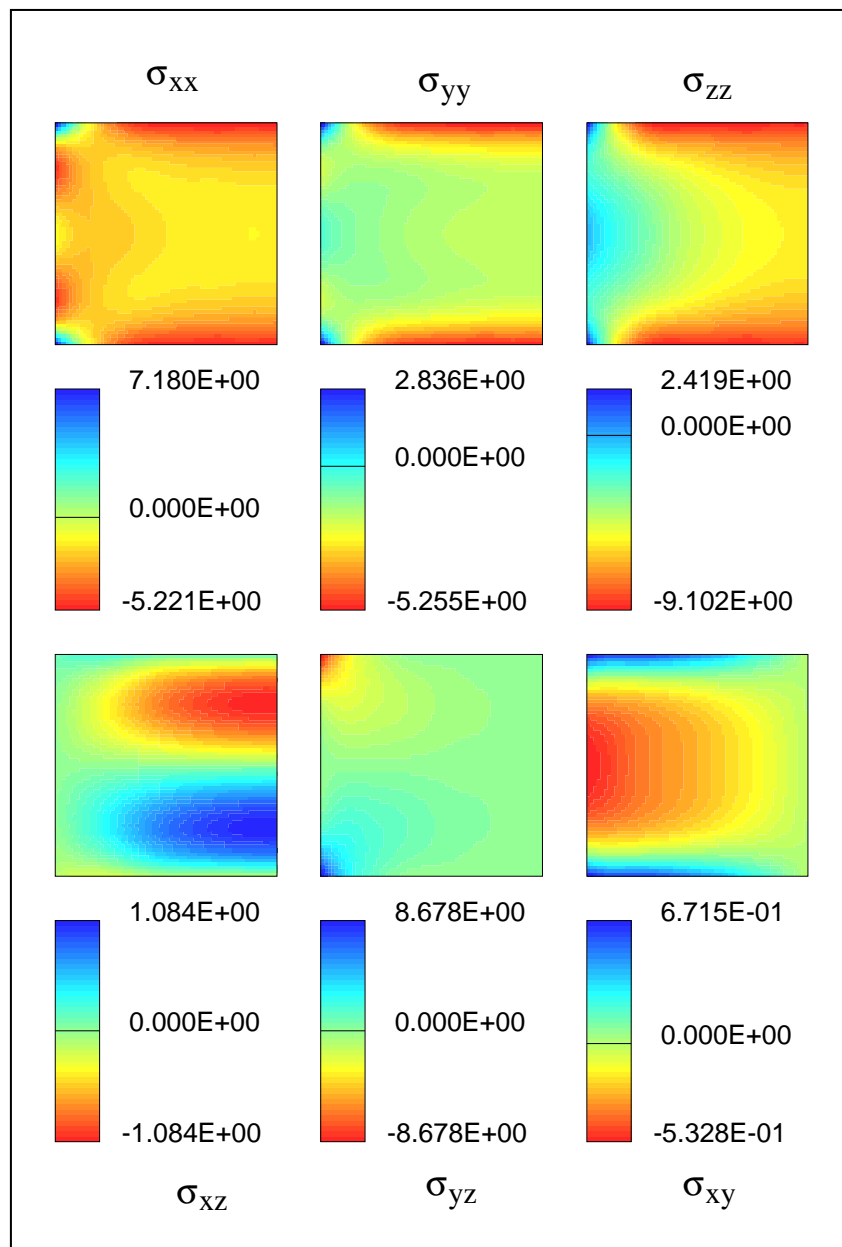


Figura 10.37: Distribuição do campo de tensões na secção EE' ; problema "in plane" com modelo do 4º grau.

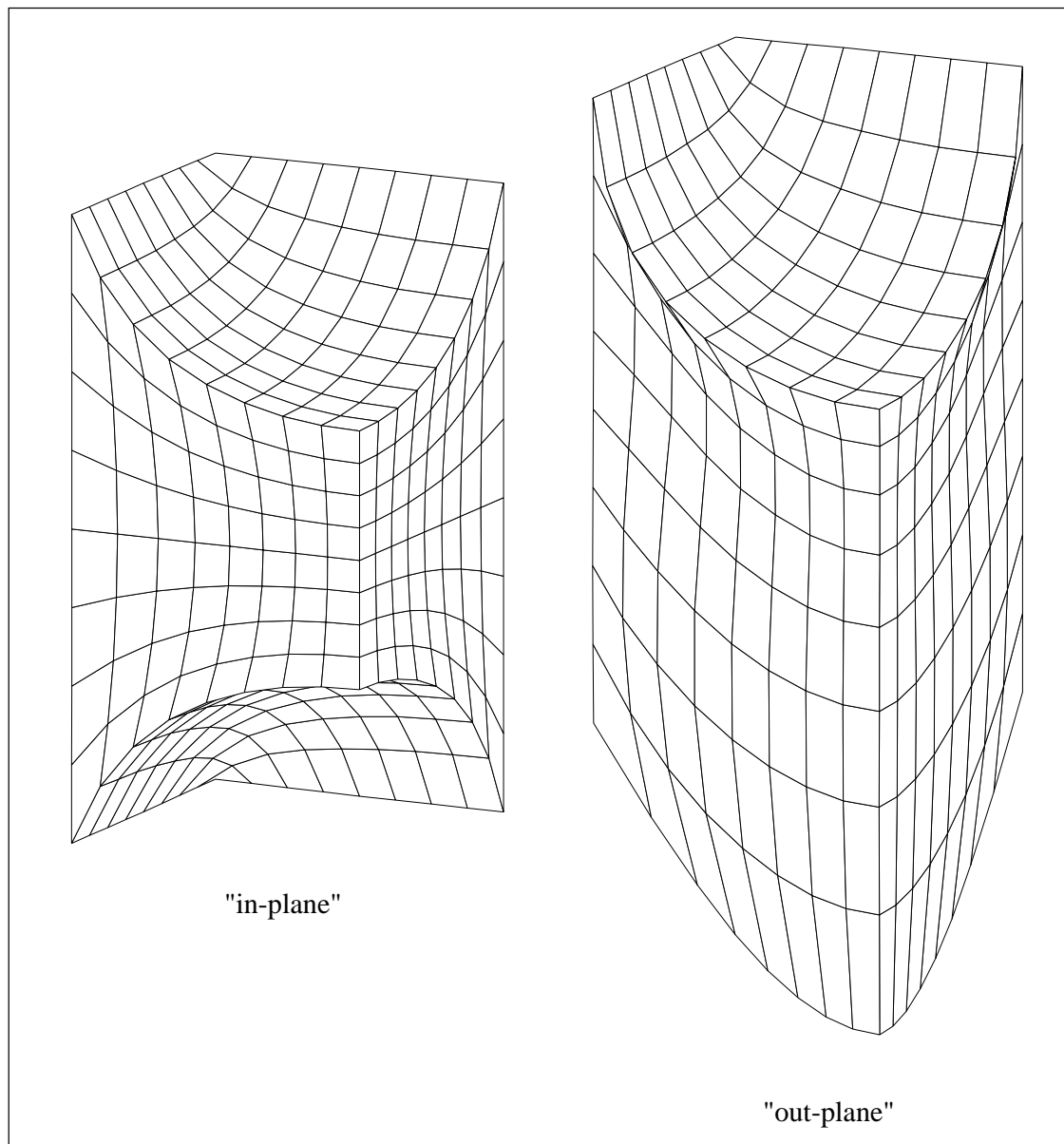


Figura 10.38: *Deformada tridimensional da laje espessa; problemas "in-plane" e "out-plane".*

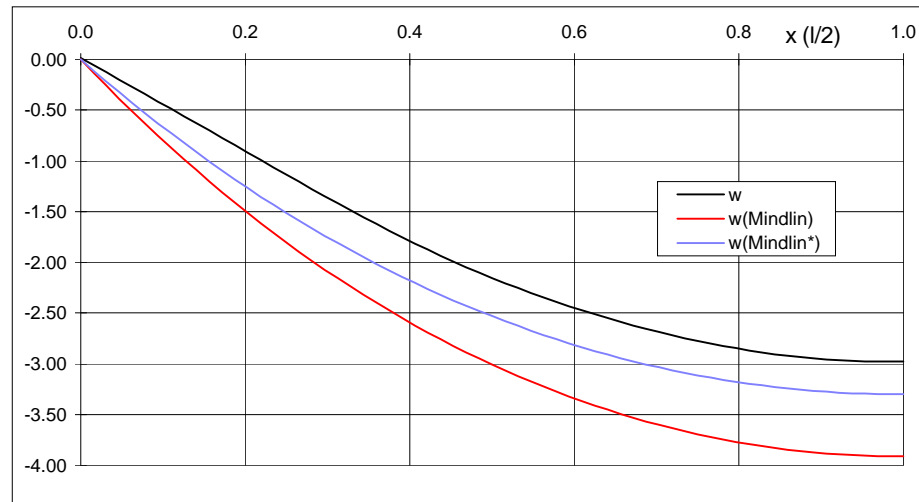


Figura 10.39: *Deslocamentos verticais do plano médio da laje ao longo do segmento de recta \overline{DC} .*

10.10 Análise elastoplástica de uma laje encastrada

Considere-se agora a laje quadrada encastrada representada na figura 10.40. Devido às condições de simetria existentes, apenas é considerado na análise 1/4 da estrutura.

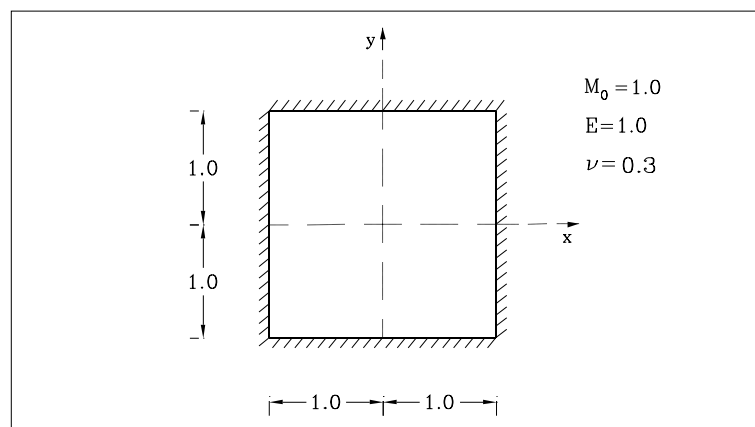


Figura 10.40: *Laje encastrada.*

É utilizado apenas um macro-elemento e as aproximações dos campos de esforços e de deslocamentos são efectuadas com wavelets pertencentes à família com $N = 10$. Tendo em conta que se utilizam funções de escala com graus de dilatação $j = 1$ para modelar os esforços no domínio e com $j = 0$ para aproximar os campos de deslocamentos, o número total de graus de liberdade é igual a 467.

Considera-se uma malha constituída por 8×8 células críticas. Em cada uma delas os incrementos dos parâmetros plásticos são aproximados através de uma combinação linear dos polinómios do primeiro grau definidos em (6.13). O número total de modos de cedência envolvido na análise elastoplástica é então definido por $8 \times 8 \times 4 = 256$.

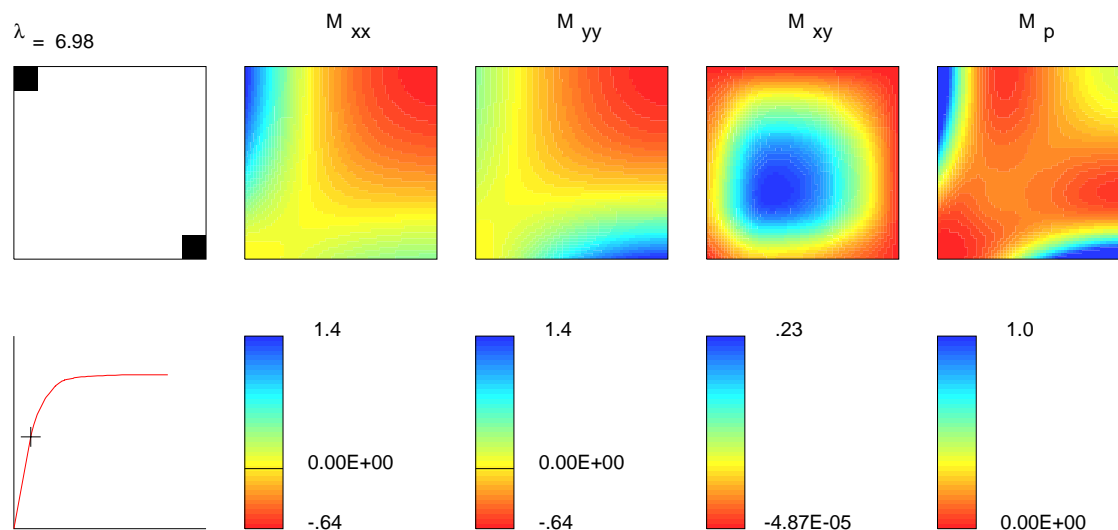


Figura 10.41: *Análise elastoplástica da laje encastrada; limite da fase elástica.*

A figura 10.41 representa a solução obtida no limite da fase elástica, que corresponde à activação dos primeiros modos de cedência, representados a negro no primeiro dos diagramas apresentados. Apresentam-se ainda as distribuições dos momentos flectores M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} , e do esforço de comparação, M_p . Este é definido na forma

$$M_p = M_0^2 - M_{xx}^2 + M_{xx}M_{yy} - M_{yy}^2 - 3M_{xy}^2,$$

e permite estabelecer, pelo menos qualitativamente, a distribuição dos potenciais plásticos nas diferentes zonas da estrutura. É ainda apresentado na mesma figura o diagrama que relaciona o valor do parâmetro de carga com o valor do deslocamento transversal no ponto central da laje.

As figuras 10.42 e 10.43 dizem respeito a duas situações intermédias no processo de análise incremental. É visível a evolução da zona plastificada e as alterações surgidas nas distribuições dos campos de esforços.

A informação referente ao instante de colapso encontra-se indicada na figura 10.44. Importa agora sublinhar que a solução obtida

$$\lambda_e = 6.98 ; \lambda_c = 11.7 ,$$

se encontra de acordo com os resultados apresentados na literatura. De facto, de acordo com os trabalhos de Belytschko e Velebit [19], os parâmetros de carga no

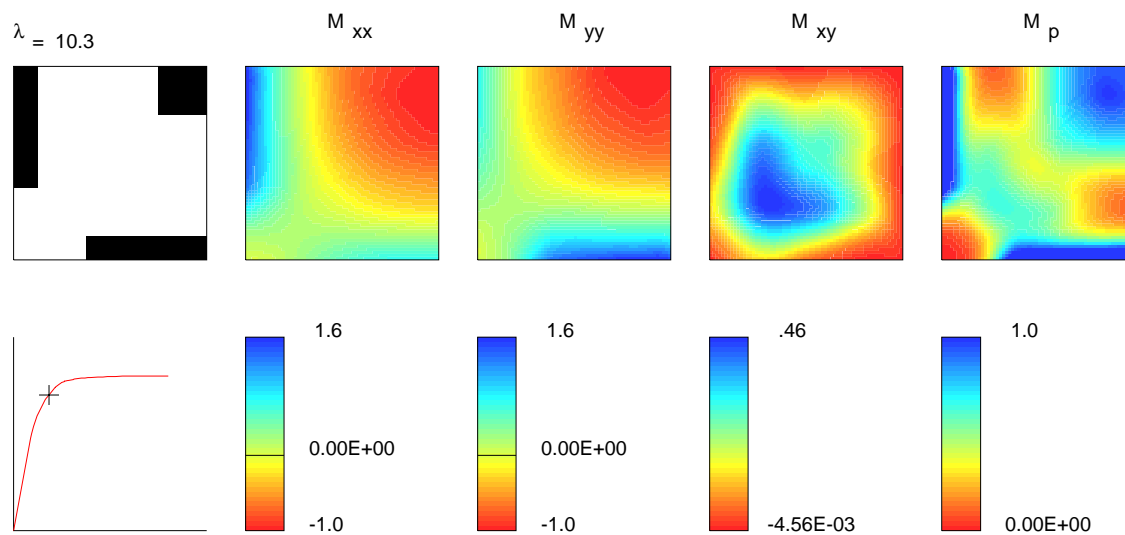


Figura 10.42: *Análise elasto-plástica da laje encastrada; fase intermédia 1.*

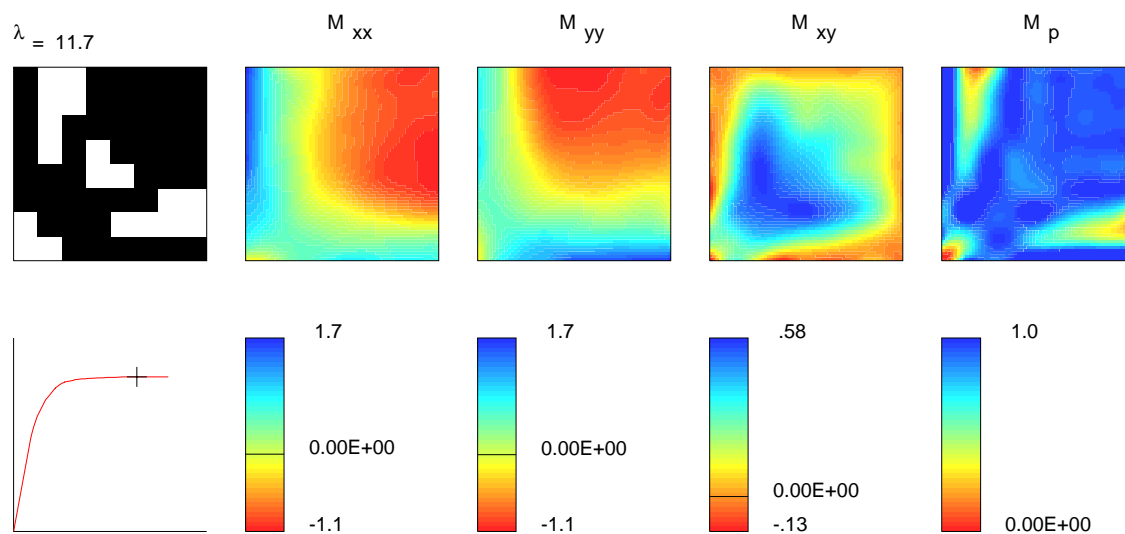


Figura 10.43: *Análise elasto-plástica da laje encastrada; fase intermédia 2.*

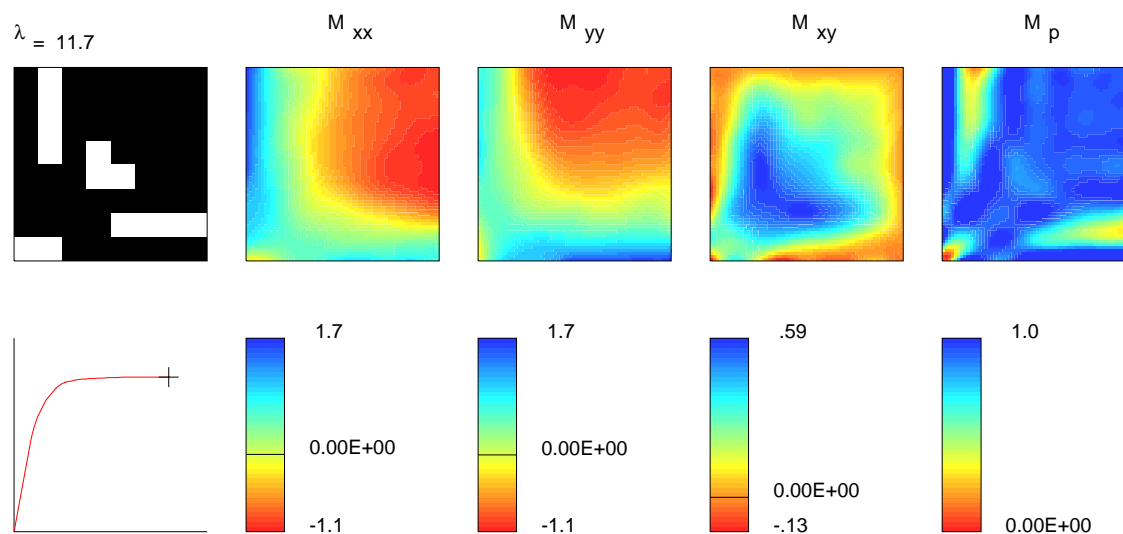


Figura 10.44: *Análise elastoplástica da laje encastrada; colapso.*

limite da fase elástica e no colapso deveriam valer $\lambda_e = 6.564$ e $\lambda_c = 11.646$, respectivamente.

Por outro lado, Hodge e Belytschko [101] estabeleceram os limites superior e inferior para o parâmetro de carga no colapso. Segundo os estudos por eles efectuados, deverá verificar-se

$$10.716 < \lambda_c < 12.312 ,$$

condição esta verificada pela solução obtida.