

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A necessidade de se resolverem problemas cada vez mais complexos e de maiores dimensões, aliada ao extraordinário crescimento da capacidade dos meios de cálculo automático, tem motivado, nas últimas décadas, o desenvolvimento de uma enorme gama de técnicas e ferramentas numéricas.

O *Método dos Elementos Finitos* [202, 203] é porventura o mais divulgado dos métodos utilizados na resolução de problemas da Mecânica dos Meios Contínuos. Permite realizar de uma forma simples e elegante a análise de uma enorme variedade de sistemas estruturais e possibilita a simulação de uma grande multiplicidade de regimes de comportamento. Muito embora a percepção intuitiva dos fenómenos e a interpretação do significado físico das grandezas envolvidas tenham constituído a base inicial para o desenvolvimento deste método, não tardou a que a fundamentação matemática dos elementos finitos fosse estabelecida de uma forma clara e rigorosa [6, 10, 182].

Os *modelos de compatibilidade*, baseados na modelação directa das grandezas cinemáticas e na verificação local das condições de compatibilidade, foram os primeiros a ser estabelecidos. Constituem sem dúvida o tipo de elementos mais popular e o que maior aceitação tem por parte da comunidade técnica e científica. A simplicidade e a elegância conceptual, aliadas à robustez que resulta da consistência matemática da formulação, fizeram com que os elementos de compatibilidade se tornassem numa técnica de referência.

A generalidade dos resultados obtidos através de uma utilização cuidada do método dos elementos finitos é, na grande maioria das situações, perfeitamente adaptada à natureza e objectivo da análise em causa. Existem, no entanto, algumas limitações e desvantagens decorrentes da utilização dos elementos de compatibilidade que importa salientar.

Uma das primeiras dificuldades com que o utilizador de um programa de elementos finitos se depara reside na *geração da malha*. Regra geral, a obtenção de uma solução de qualidade passa pela necessidade de se utilizar um grande número de elementos finitos na discretização das zonas onde existem gradientes elevados, ou mesmo singularidades, nos campos estático e/ou cinemático. Sendo impensável efectuar a definição manual da malha, torna-se indispensável o desenvolvimento de algoritmos que permitam realizar uma *geração automática* [88]. Se para problemas planos e geometrias regulares a construção de algoritmos de geração não apresenta dificuldades de maior [118, 166], quando se pretendem definir domínios tridimensionais delimitados por superfícies de forma genérica, a complexidade da tarefa cresce de uma forma significativa. São de tal forma complexos alguns dos problemas respeitantes à geração automática da malha, que o seu estudo e desenvolvimento se autonomizou em relação ao do próprio método dos elementos finitos, constituindo hoje em dia a *modelação geométrica* um domínio de investigação bastante activo.

Verifica-se que em muitas circunstâncias a capacidade de cálculo e o tempo de análise dispendido na geração e definição da malha são superiores aos do próprio processo de análise do problema por elementos finitos. Por outro lado, a detecção e tratamento de erros de dados surgidos durante o processo de geração é bastante dificultado pela enorme quantidade de informação que é armazenada e tratada. Para contornar estas dificuldades, seria bom que pudessem existir modelos que permitissem obter soluções de qualidade equivalente, mas envolvendo na análise um número reduzido de elementos na definição da malha.

Outra das características marcantes dos elementos de compatibilidade reside no modo como são impostas, numa *forma fraca* [202], as condições de equilíbrio. A satisfação local destas condições, tanto no domínio quanto na fronteira, não é imposta pelo modelo, sendo garantida apenas a verificação do equilíbrio das *forças nodais equivalentes*. Em consequência, a solução é caracterizada pela existência de descontinuidades no campo de tensões nas fronteiras inter-elementares e pela dificuldade na recuperação das condições reais de carga, surgindo *valores espúrios* para as forças de massa e para as tracções na fronteira. Verifica-se também que as grandezas cinemáticas são modeladas de uma forma muito mais precisa do que as grandezas estáticas, muito embora existam processos de *extrapolação e adoçamento* que permitem obter uma distribuição para o campo de tensões de melhor qualidade do que aquela que é obtida directamente a partir das aproximações efectuadas [44]. Estes factos podem originar alguns problemas quando se utilizam este tipo de elementos em análises nas quais é essencial conhecer com precisão o valor das tensões em qualquer um dos pontos pertencentes ao domínio. Será por exemplo o caso das análises fisicamente não-lineares e dos processos de optimização que envolvem valores limites do campo de tensões como restrições para o problema. A introdução de tensões espúrias pode condicionar os resultados obtidos com este tipo de análise, podendo mesmo originar uma diminuição da qualidade das soluções obtidas [41, 43].

Na análise elastoplástica, e uma vez que estes modelos verificam *a priori* as condições de admissibilidade cinemática, o valor do parâmetro de carga no colapso é

um majorante do *verdadeiro* parâmetro de colapso. A solução obtida está *contra a segurança*, o que pode ser condicionante em alguns problemas de Engenharia.

Outra das conhecidas limitações dos modelos de compatibilidade surge quando se pretendem efectuar análises envolvendo fenómenos de *fendilhação*. O desenvolvimento de fendas introduz uma descontinuidade local no campo de deslocamentos. Deste modo, a continuidade imposta pela aplicação de formulações de compatibilidade impossibilita um *tratamento natural* deste tipo de fenómenos. Torna-se então necessário utilizar um conjunto de artifícios que permita a modelação numérica reproduzir de uma forma mais eficaz o comportamento *real* das estruturas nestas circunstâncias.

Por último, refira-se a existência de uma grande relação de dependência entre o carregamento e a malha de elementos finitos considerada na análise. O estudo do efeito de cargas diferentes pode exigir a consideração de malhas substancialmente diferentes. Se se pretender por exemplo utilizar o método directo na determinação de uma *linha ou superfície de influência*, a cada nova posição da carga concentrada deve corresponder uma nova malha envolvendo a utilização de um número elevado de elementos na aproximação do campo de deslocamentos na vizinhança do ponto de aplicação da força.

Para tentar encontrar uma resposta para algumas das questões levantadas nos parágrafos anteriores e limitar os inconvenientes associados à aplicação dos elementos de compatibilidade, têm vindo a ser apresentados vários modelos alternativos, sem que contudo nenhum deles possa reclamar para si uma aceitação e divulgação generalizadas. Esses modelos são baseados fundamentalmente na utilização de elementos de equilíbrio ou de elementos híbridos/mistos [24, 163, 176]. Nos elementos de equilíbrio são modeladas directamente as grandezas estáticas e é imposta *a priori* a verificação local das condições de equilíbrio. Já nos modelos híbridos e mistos são aproximados, de uma forma completamente independente, dois (ou mais) campos ao nível de cada elemento finito [155].

O relativo insucesso dessas formulações alternativas é devido, pelo menos em parte, às limitações induzidas pelo facto de todas elas procurarem reproduzir o *formato* utilizado pelos elementos de compatibilidade. Como consequência, são obtidas formulações menos intuitivas e menos robustas não havendo, salvo raras excepções, ganhos acrescidos associados à sua utilização [190, 181].

O recente aparecimento das chamadas *formulações não-convencionais* de elementos híbridos/mistos [75, 77] veio possibilitar a resolução de alguns dos problemas associados à utilização das formulações clássicas. A remoção de algumas das restrições usualmente consideradas como indispensáveis, veio flexibilizar *de facto* a utilização dos elementos finitos e potenciar o desenvolvimento de novos algoritmos robustos e eficazes que permitem contornar com sucesso os problemas e inconvenientes listados nos parágrafos anteriores. A génese das formulações não-convencionais de elementos finitos pode ser encontrada nos trabalhos de Munro e Smith [137, 180], ainda que

apenas para o caso de estruturas reticuladas. A sua generalização e adaptação para problemas bidimensionais pode ser encontrada nos trabalhos de Freitas [68, 70], Fonseca [61] e Moitinho de Almeida [132].

1.2 Objecto

A remoção do conceito de *interpolação nodal* e a não imposição *a priori* das condições do problema são as características mais marcantes dos *modelos híbrido-mistos*. Como consequência, é introduzida uma enorme flexibilidade na escolha das funções a utilizar nas aproximações, facto que possibilita desde logo o aparecimento de um vasto campo de investigação. Corresponde este ao desenvolvimento e caracterização de modelos baseados na utilização de diferentes tipos de funções e na exploração das propriedades destas na obtenção de algoritmos elegantes, robustos e eficazes.

O sucesso que tem caracterizado a recente utilização de sistemas de funções alternativos na análise e processamento de sinais motivou o trabalho que aqui se apresenta; testar a utilização de *funções digitais de Walsh* e de *sistemas de wavelets* na determinação e representação gráfica dos estados de tensão e deformação em estruturas planas.

As funções digitais de Walsh [192] formam um conjunto ordenado de ondas rectangulares apresentando apenas duas amplitudes possíveis, $+1$ e -1 . Definem séries completas de funções ortonormais e a facilidade com que podem ser geradas e manipuladas constitui uma das grandes vantagens associadas à sua utilização. A sua origem já não é recente, datando o trabalho original de Walsh de 1923. Foi no entanto apenas há poucos anos, com a evolução da tecnologia digital, que as suas potencialidades foram reconhecidas e a sua utilização generalizada.

Bem mais recentes são os chamados sistemas de wavelets [130]. As bases que permitem o desenvolvimento deste tipo de funções foram estabelecidas de uma forma rigorosa com o aparecimento da teoria conhecida na literatura como *Análise Multi-resolução* [124, 130]. Desde então, e em especial desde que Daubechies [52] definiu os seus sistemas de funções no final da década de 80, não tem parado de crescer a aceitação e a popularidade das wavelets.

É tal o interesse gerado por estes novíssimos sistemas de funções que já há quem as considere como as novas *funções de estimação* dos matemáticos [25]. Possuem um conjunto de propriedades que torna a sua utilização extremamente atractiva num vasto leque de domínios. São utilizadas em campos tão diferenciados como o tratamento matemático teórico, a resolução numérica de equações diferenciais, ou ainda a análise e processamento de sinais. É neste último domínio que se têm registado os resultados mais significativos e espectaculares decorrentes da sua aplicação. O seu *carácter local*, tanto no *domínio da frequência* quanto no *domínio do tempo*, potencia o desenvolvimento de algoritmos especialmente eficazes para o tratamento,

compressão e transmissão de informação.

1.3 Objectivo

O objectivo central desta tese consiste na utilização de séries digitais de Walsh e de sistemas de wavelets na construção de modelos híbrido-mistos de elementos finitos para a análise elástica e elastoplástica de placas e lajes.

A obtenção de modelos eficientes passa pelo estudo e conveniente exploração das propriedades que caracterizam cada um dos tipos de funções utilizadas. Especial cuidado deve ser colocado na determinação de expressões analíticas que permitam calcular directamente, sem o recurso a quaisquer esquemas de integração numérica, os elementos constituintes dos diferentes operadores estruturais. Devem ainda ser optimizados os processos envolvidos na combinação linear deste tipo de funções, por forma a simplificar e acelerar as operações de pós-processamento.

Sendo a rapidez do processo de cálculo fortemente condicionada pela eficiência dos algoritmos utilizados na resolução dos sistemas governativos globais, é de capital importância o estudo e a implementação de métodos especialmente talhados para lidar com o tipo de sistemas que é característico destes modelos. O *índice de esparsidade* é sempre bastante elevado, mas a distribuição dos coeficientes não-nulos é tal que impossibilita a utilização dos métodos tradicionais de armazenamento, baseados na consideração da *semi-banda* ou do *perfil* [103] do sistema. Na selecção dos algoritmos de resolução, é preciso ter também em atenção que o número de graus de liberdade envolvido na análise pode ser muito elevado, em especial nos casos em que se utilizam funções de Walsh nas aproximações.

Para além da construção das ferramentas numéricas de análise, é necessário efectuar todo um trabalho de caracterização do comportamento dos modelos e de validação das soluções obtidas. É também importante caracterizar a eficácia dos modelos, traduzida pela relação *custo/benefício*. Esta tarefa envolve a execução de um conjunto cuidado e variado de testes numéricos que possibilitem aferir o desempenho do modelo quando comparado com as formulações clássicas de elementos finitos e com outros modelos pertencentes à mesma *família* de formulações não-convencionais.

1.4 Metodologia

Quando se utilizam modelos híbrido-mistos, os campos de tensões e de deslocamentos no domínio são modelados de uma forma completamente independente. A selecção da grandeza a aproximar na fronteira dos elementos conduz à obtenção de duas formulações alternativas; a aproximação do campo de deslocamentos na fronteira estática dá origem ao modelo *híbrido-misto de equilíbrio*, enquanto que a

aproximação do campo de tracções ao longo da fronteira cinemática permite obter o modelo *híbrido-misto de compatibilidade*. Cada uma destas variantes está associada a uma forma diferente de tratamento e imposição das condições de equilíbrio e de compatibilidade.

Para modelar os fenómenos locais associados à plasticidade, cada elemento finito é subdividido num conjunto de *células críticas* nas quais se permite o desenvolvimento de *deformações plásticas*. Em cada uma destas células, a distribuição do incremento dos parâmetros plásticos é aproximada através da utilização de um conjunto completo de funções polinomiais que possuem valores não negativos em todo o seu domínio de definição.

Os modelos são deduzidos a partir dos princípios fundamentais da Mecânica [68, 70], não sendo utilizados para o efeito quaisquer teoremas energéticos. Os teoremas variacionais associados às formulações híbridas-mistas podem ser recuperados *a posteriori* através da aplicação da teoria da equivalência da Programação Matemática [68, 69, 30].

As condições de fronteira cinemática, nos modelos de equilíbrio, e as condições de fronteira estática, nos modelos de compatibilidade, são localmente impostas. De igual modo, a condição de escoamento plástico é verificada *a priori*. As restantes equações de campo e condições de fronteira são impostas na forma de resíduos pesados. Esta imposição ponderada deve ser realizada de forma a assegurar que no modelo discreto se preserve a *dualidade estática-cinemática*, a *reciprocidade elástica* e a *plasticidade associada*, características presentes na caracterização do meio contínuo que se pretende modelar. Em consequência, as matrizes de equilíbrio e compatibilidade são a transposta uma da outra, o operador de elasticidade é simétrico e as taxas de variação das deformações plásticas são ortogonais à superfície de cedência considerada. O sistema governativo é obtido através da combinação das descrições discretas das condições de equilíbrio, compatibilidade, elasticidade e plasticidade.

Para a resolução dos sistemas de equações que resultam das análises em regime elástico linear são utilizados tanto métodos directos quanto métodos iterativos. Na selecção e implementação dos algoritmos de resolução, especial cuidado é posto na forma como é efectuado o armazenamento e tratamento de matrizes esparsas de grandes dimensões. Os métodos directos baseiam-se na aplicação de processos de *factorização* [87, 165]. São precedidos por uma *reordenação simétrica* da matriz dos coeficientes cuja principal finalidade reside na minimização do fenómeno de *fill-in* [59]. Os métodos iterativos implementados utilizam o algoritmo dos *gradientes conjugados* [98, 103] e um conjunto de técnicas de *aceleração da convergência* baseadas na consideração de métodos de *pré-condicionamento* global [146].

Recorrendo a um algoritmo simples do método das perturbações [63], o sistema de equações e inequações não-lineares que regem o comportamento elastoplástico do modelo é transformado numa sequência recursiva de *problemas simétricos de complementaridade linear*. Isto é conseguido efectuando-se a expansão em série de Taylor

dos incrementos de cada uma das variáveis envolvidas no processo e igualando-se posteriormente os termos de igual ordem em ambos os membros do sistema governativo [64]. Neste algoritmo de resolução incremental, a dimensão do passo é automaticamente ajustada de forma a permitir não só a detecção da célula crítica onde é activado o *modo de cedência* seguinte, mas também o controlo e implementação das *descargas plásticas*. A dimensão do passo é ainda condicionada pela necessidade de se limitar a acumulação de erros de truncatura da série [63, 64].

1.5 Organização

No segundo capítulo são apresentadas as variáveis que surgem na formulação do problema de análise elastoplástica incremental e as condições que as relacionam. A descrição é efectuada de uma forma muito genérica de modo a que seja possível a sua adaptação aos diferentes tipos de estrutura aqui tratados. O principal objectivo deste capítulo não reside na apresentação completa e formal de todos os aspectos relacionados com as teorias da elasticidade e plasticidade, mas na discussão dos conceitos essenciais e na interpretação do significado físico das grandezas e equações utilizadas.

Os modelos de elementos finitos são introduzidos no terceiro capítulo. É apresentada logo de início uma breve resenha histórica onde se relata o aparecimento e o desenvolvimento das formulações híbridas/mistas não-convencionais aqui utilizadas. É efectuada em simultâneo uma breve descrição dos seis modelos que resultam da combinação dos elementos *híbrido-mistos*, *híbridos* e *híbridos de Trefftz*, com as formulações de equilíbrio e de compatibilidade.

A apresentação dos sistemas governativos é precedida pelo tratamento, em separado, das condições de compatibilidade, equilíbrio e relações constitutivas. A teoria da equivalência da Programação Matemática é utilizada para recuperar *a posteriori* os teoremas energéticos que são habitualmente utilizados no estabelecimento de modelos de elementos finitos. É por fim apresentado em detalhe o algoritmo utilizado na resolução do problema de análise elastoplástica incremental.

As séries digitais de Walsh e os sistemas de wavelets são apresentados no quarto e no quinto capítulo. Para cada tipo de função são discutidas as suas propriedades e características mais marcantes. São definidos os diferentes métodos de geração e o modo através do qual podem ser executadas algumas operações básicas envolvendo aquelas funções. São apresentados os algoritmos que permitem efectuar a expansão em série de um dado sinal ou função, sendo a sua eficiência demonstrada através da apresentação de alguns exemplos muito simples.

A definição dos conjuntos completos de funções de Walsh e wavelets a considerar na aproximação dos campos de tensões e de deslocamentos é o primeiro aspecto a ser tratado no sexto capítulo. É também discutida a selecção dos polinómios

não-negativos utilizados para modelar os incrementos dos parâmetros plásticos. São depois definidas as equações que permitem determinar os elementos constituintes de cada uma das matrizes estruturais. Especial atenção é dedicada à obtenção das soluções analíticas que permitem a resolução directa dos integrais envolvidos no cálculo daqueles elementos. É discutida ainda a metodologia que possibilita a consideração de elementos com forma genérica. O capítulo termina com a apresentação de alguns testes numéricos que permitem ilustrar não só a dimensão e a esparsidade dos sistemas governativos, mas também a eficiência com que os seus coeficientes podem ser calculados.

O armazenamento e a manipulação de matrizes esparsas são tratados no sétimo capítulo. Especial atenção é dedicada ao estudo dos métodos de resolução de sistemas de equações de grandes dimensões e caracterizados por uma matriz dos coeficientes com um elevado índice de esparsidade. É testada a utilização de métodos directos e iterativos na resolução das formas *não-condensada* e *condensada* dos sistemas governativos globais. A comparação da eficiência e do desempenho dos diferentes algoritmos implementados é efectuada com base na realização de uma série de testes numéricos. Embora não seja possível estabelecer um critério único que permita a clara opção por um determinado algoritmo, é tecido no final do capítulo um conjunto de recomendações que tem como finalidade servir de guia na selecção do método de resolução a utilizar em função do tipo de análise que se pretende realizar.

No oitavo capítulo é ilustrado o comportamento dos modelos híbrido-mistos de elementos finitos. São salientadas as potencialidades e as vantagens decorrentes da utilização deste tipo de modelos, assim como são apontadas algumas das suas limitações e aspectos menos positivos. Para além da definição das características gerais dos modelos, são estudados os processos de refinamento p - e h - hierárquicos e é avaliada a influência que a distorção da malha de elementos finitos pode vir a ter na qualidade da solução obtida.

No nono capítulo são utilizados os modelos apresentados na análise elastoplástica de placas. Através da apresentação e discussão dos resultados referentes a um conjunto de testes variados, são caracterizadas as soluções obtidas com base na utilização de séries de Walsh e wavelets. É discutido o efeito introduzido pela consideração de soluções clássicas da teoria da elasticidade na modelação de singularidades no campo de tensões, é ilustrada a utilização de elementos com forma não-rectangular e é exemplificada a utilização de uma solução particular na modelação do campo de tensões na vizinhança do ponto de aplicação de uma carga concentrada.

O capítulo termina com a realização de uma análise elastoplástica incremental de uma consola quadrada. Para além da ilustração da capacidade das formulações desenvolvidas na modelação do comportamento fisicamente não linear de placas, é estudada a influência que o número de possíveis modos de cedência pode ter na qualidade da solução e na eficiência do processo de análise incremental.

Os modelos que permitem a análise de lajes baseiam-se na aplicação da teoria de Reissner-Mindlin [175, 131] e da teoria de ordem superior desenvolvida por Pereira [147]. A sua utilização é ilustrada no décimo capítulo, onde um conjunto de testes numéricos permite aferir as capacidades e potencialidades apresentadas pelos modelos desenvolvidos para a análise deste tipo de estruturas. Para além do tipo de testes efectuados no capítulo precedente, é apresentado um exemplo que permite verificar a ausência de fenómenos de *locking*.

No décimo primeiro e último capítulo são enunciadas algumas conclusões finais que resumem os comentários e observações efectuados ao longo de todo o texto. É por fim listado um conjunto de ideias que resumem algumas das extensões naturais para o trabalho desenvolvido e que se espera possam vir a ser exploradas e desenvolvidas num futuro próximo.

