PROBLEMA PROPOSTO 1

1. As condições de admissibilidade cinemática para este problema são as seguintes:

a) O deslocamento transversal, $w(x,y)$, deve ser contínuo e ter primeira derivada (rotações) contínua no domínio da laje;

b) O deslocamento e as rotações devem satisfazer as seguintes condições de fronteira:

$$w=0 \text{ e } \theta_x=-\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{para } x=4 \text{ e } 0\le y\le 3$$
$$w=0 \quad \text{para } y=0 \text{ e } 2\le x\le 4$$
$$w=0 \quad \text{para } x=0 \text{ e } y=0$$
$$w=0 \quad \text{para } x=0 \text{ e } y=3$$

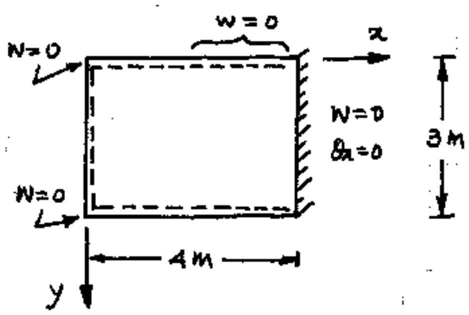
Para satisfazer estas condições é suficiente que:

a) O deslocamento w seja o produto de um polinómio em x de grau 3, ou superior, por um polinómio em y de grau 2, ou superior;

b) O deslocamento w satisfaça as seguintes condições:

$$w=0 \text{ e } \frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{para } x=4 \text{ e } 0\le y\le 3$$
$$w=0 \quad \text{para } y=0 \text{ e } 0\le x\le 4 \qquad (\text{em vez de } 2\le x\le 4)$$
$$\left.\begin{array}{l} w=0 \quad \text{para } x=0 \text{ e } 0\le y\le 3 \\ w=0 \quad \text{para } y=3 \text{ e } 0\le x\le 4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{l}\text{em vez de } x=y=0 \\ \text{e } x=0 \text{ e } y=3\end{array}\right)$$

Estas condições correspondem a uma laje encastrada num bordo e apoiada nos restantes. São admissíveis para o problema porque incluem as condições de apoio dadas.



Uma solução polinomial que satisfaz estas condições de admissibilidade cinemática é a seguinte, em que k é uma constante com dimensão $[m^{-4}]$ para que w tenha dimensão $[m]$:

$$\boxed{w(x,y) = k \cdot x \cdot (4-x)^2 \cdot y \cdot (3-y)}$$

— para que $w=0$ em $y=3$

— $w=0$ em $y=0$

para que $w=0$ em $x=0$

— $w=0$ e $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ em $x=4$

As rotações e as curvaturas que são compatíveis com esta solução são as seguintes:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} = k\,y\,(y-3)(x-4)(3x-4)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} = k\,x\,(2y-3)(x-4)^2$$

$$\chi_{xx} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = 2k\,y\,(y-3)(3x-8)$$

$$\chi_{yy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = 2kx\,(x-4)^2$$

$$\chi_{xy} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) = k\,(2y-3)(x-4)(3x-4)$$

2. Os momentos flectores e o momento torsor devidos às curvaturas calculadas na alínea anterior são determinados pelas relações de elasticidade:

$$\boxed{\begin{aligned} m_{xx} &= D_f\,(\chi_{xx} + \nu \chi_{yy}) = 0.4k\left[5y(y-3)(3x-8) + x(x-4)^2\right] \\ m_{yy} &= D_f\,(\chi_{yy} + \nu \chi_{xx}) = 0.4k\left[y(y-3)(3x-8) + 5x(x-4)^2\right] \\ m_{xy} &= D_f\,(1-\nu)\,\chi_{xy} = 0.8k\,(x-4)(3x-4)(2y-3) \end{aligned}}$$

O esforço transverso que equilibra esta distribuição de momentos é dado por:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 2k\left[3y(y-3) + (x-4)(3x-4)\right] \\ v_y &= \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = 2k\,(2y-3)(3x-8) \end{aligned}}$$

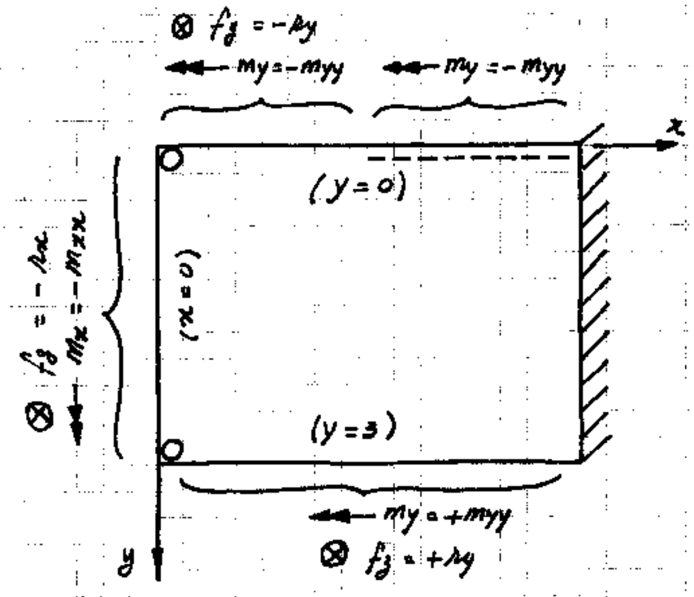
A carga de vão que equilibra esta distribuição de esforço transverso é dada por:

$$\boxed{q = -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = 8k\,(8-3x)}$$

Esta carga pode ser calculada directamente a partir da equação de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q/D_f$$

Para além da carga de vão, q, é preciso determinar as forças e os momentos aplicados nos bordos da laje que garantem que a solução seja equilibrada.



Sendo o esforço transverso equivalente dado por,

$$\boxed{\begin{aligned} r_x &= v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 6k\left[y(y-3)+0.6(x-4)(3x-4)\right] \\ r_y &= v_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = 3.6\,k\,(2y-3)(3x-8) \end{aligned}}$$

as condições de fronteira estáticas são as seguintes:

$$\underline{\text{Para } x=0} \quad \begin{cases} m_x = -M_{xx}(x=0) = 16ky(y-3) & \text{para } 0<y<3 \\ f_z = -r_x(x=0) = -1.2k(5y^2-15y+48) & \text{para } 0<y<3 \end{cases}$$

$$\underline{\text{Para } y=0} \quad \begin{cases} m_y = -m_{yy}(y=0) = -2kx(x-4)^2 & \text{para } 0<x<4 \\ f_z = -r_y(y=0) = -10.8k(3x-8) & \text{para } 0<x<2 \end{cases}$$

$$\underline{\text{Para } y=3} \quad \begin{cases} m_y = +m_{yy}(y=3) = 2kx(x-4)^2 & \text{para } 0<x<4 \\ f_z = +r_y(y=3) = 10.8k(3x-8) & \text{para } 0<x<4 \end{cases}$$

3. As condições de admissibilidade estática para este problema, se a única carga aplicada for a carga de vão uniforme $q=1$, são as seguintes:

a) Os momentos fletores e torsor devem satisfazer a seguinte equação de equilíbrio em todo o domínio da laje, $0 \le x \le 4$ e $0 \le y \le 3$:

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} = -1$$

b) Os momentos fletores e o esforço transverso efectivo devem satisfazer as seguintes equações de equilíbrio na fronteira da laje:

$m_x = -m_{xx} = 0$ para $x=0$ e $0 \le y \le 3$

$f_3 = -v_x = 0$ para $x=0$ e $0 < y < 3$

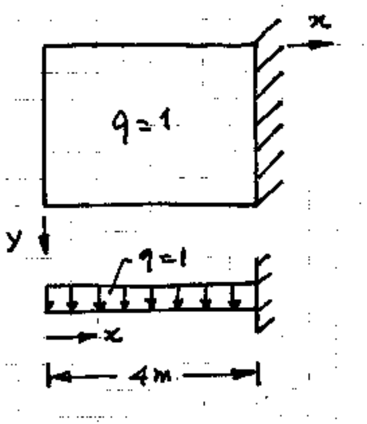
$m_y = -m_{yy} = 0$ para $y=0$ e $0 \le x < 4$

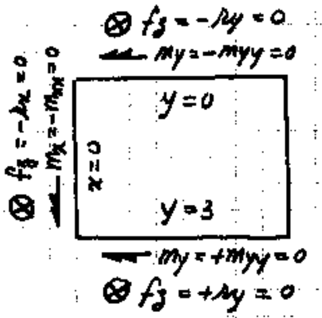
$f_3 = -v_y = 0$ para $y=0$ e $0 < x < 2$

$m_y = +m_{yy} = 0$ para $y=3$ e $0 \le x < 4$

$f_3 = +v_y = 0$ para $y=3$ e $0 \le x < 4$

Uma solução que satisfaz estas condições corresponde a equilibrar a carga numa laje em consola, em flexão cilíndrica.





A distribuição de momentos é a que se obtém na viga em consola, lançada na direcção x:

$$\boxed{\begin{aligned} m_{xx} &= -\tfrac{1}{2}x^2 \\ m_{yy} &= 0 \\ m_{xy} &= 0 \end{aligned}}$$

sendo a seguinte o esforço transverso em equilíbrio:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -x \\ v_y &= \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = 0 \end{aligned}}$$

Sendo o esforço transverso equivalente dado por,

$$\boxed{\begin{aligned} r_x &= v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -x \\ r_y &= v_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = 0 \end{aligned}}$$

conclui-se que a distribuição de esforços escolhida satisfaz as condições de equilíbrio no domínio e na fronteira da laje, para o carregamento $q = +1$.

4. Se $m_{xx} = m_{yy} = 0$ no domínio da laje, as condições de admissibilidade estática definidas na alínea anterior simplificam-se para:

a) $$2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -1$$

b) $$\begin{cases} r_x = 0 & \text{para } x=0 \text{ e } 0 \le y \le 3 \\ r_y = 0 & \text{para } y=0 \text{ e } 0<x<2 \\ r_y = 0 & \text{para } y=3 \text{ e } 0<x<4 \end{cases}$$

A distribuição que satisfaz a equação de equilíbrio no domínio da laje é,

$$\boxed{m_{xy}(x,y) = -\tfrac{1}{2}\,xy + f(x) + g(x) + c}$$

em que $f(x)$ e $g(y)$ são funções apenas de x e de y, respectivamente, e c é uma constante.

O esforço transverso equivalente é definido por:

$$\boxed{\begin{aligned} s_x &= v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + 2\cdot\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -x + 2\cdot\frac{dg}{dy} \\ s_y &= v_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + 2\cdot\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -y + 2\cdot\frac{df}{dx} \end{aligned}}$$

Quando se aplicam as condições de equilíbrio de forças na fronteira, para determinar $f(x)$, $g(y)$ e c, obtém-se,

$$s_x(x=0) = 0 + 2\cdot\frac{dg}{dy} = 0 \implies g(y) = 0$$

$$s_y(y=0) = 0 + 2\cdot\frac{df}{dx} = 0 \implies f(x) = 0$$

$$s_y(y=3) = -3 + 2\cdot\frac{df}{dx} = 0 \implies f(x) = \tfrac{3}{2}\,x$$

pelo que se conclui que não é possível equilibrar a carga de vão $q = 1$ para as condições de fronteira estáticas dadas fazendo $m_{xx} = m_{yy} = 0$ no domínio da laje.