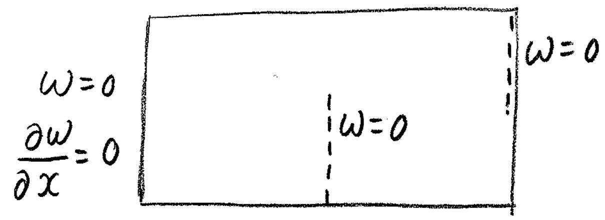
Exame de Análise de Estruturas I (11/1/2003)

Problema 1

1. a) Admissibilidade cinemática

Fronteira



Domínio

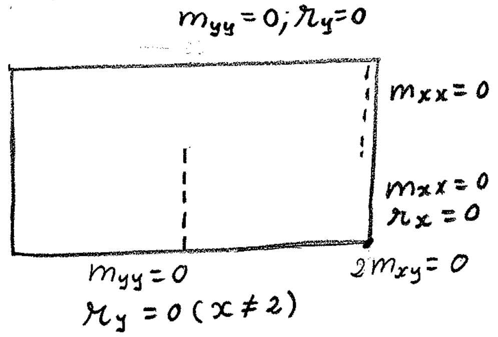
$w(x,y) \in C^1$

Solução cinemáticamente admissível:

$w(x,y) = K x^2 (x-2)(x-4)$

1. b) Admissibilidade estática

Fronteira



Domínio

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0,$$

excepto em $\{(x,y): x=2 \wedge 0<y<2\}$

Solução estaticamente admissível

$$\begin{cases} m_{xx} = 8 - 4x + x^2/2 \\ m_{yy} = m_{xy} = 0 \end{cases}$$

1. c) Ao longo do bordo $x=0$ tem-se:

$$w(0,y) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \chi_{yy}(0,y) = 0$$

Através da relação constitutiva ter-se-ia

$$\left.\chi_{yy}\right|_{x=0} = \frac{1}{D_f(1-\nu^2)}(-\nu\, m_{xx} + m_{yy}) = \frac{1}{D_f(1-\nu^2)}(-\nu \cdot 8 + 0) \neq 0,$$

logo a solução não é a exacta.

1. d) Para que a solução dada seja estaticamente admissível deve satisfazer as condições definidas em b).

A partir da condição de equilíbrio no domínio, m_{yy} deve ser da forma

$$m_{yy}(x,y) = -\frac{y^2}{2} + f(x)\,y + g(x) + C.$$

Como $r_x = 0$ para $x = 4$ e

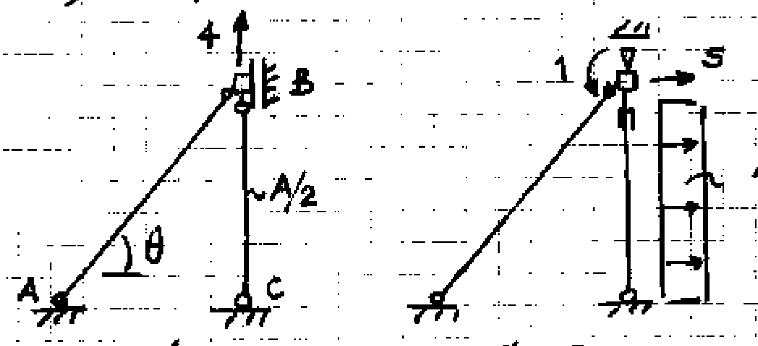
$$r_x = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + 2\,\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 2 \quad \text{para qualquer } x,$$

a solução não é estaticamente admissível, independentemente da expressão de m_{yy}.

Problema 2

a) Hiperestatia: $\alpha = 1$

b) Simplificação



$\alpha = 1$ $\qquad\qquad$ $\alpha = 0$

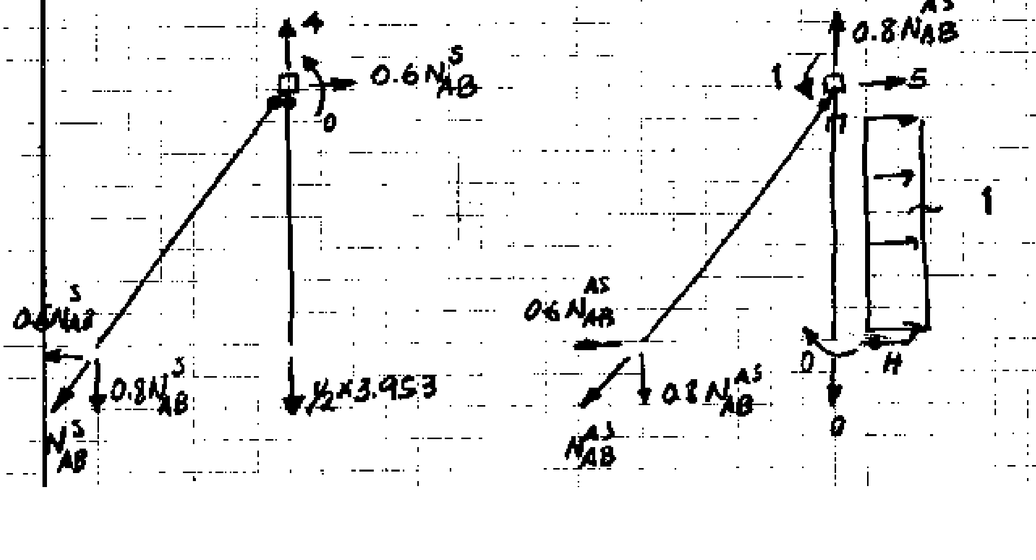
$\cos\theta = 3/5$

$\operatorname{sen}\theta = 4/5$

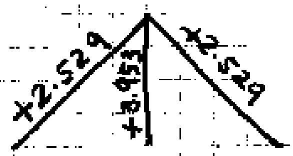
c) Diagrama de esforço normal

Se $e_{BC} = 3.953/_{EI} \Rightarrow N_{BC} = \left(\frac{e \cdot EA}{L}\right)_{BC} = 3.953$ kN

Parcela simétrica $\qquad\qquad$ Parcela antissimétrica



Da parcela simétrica:



$\sum F_y = 0 \Rightarrow N^{S}_{AB} = 2.529$

Da parcela antissimétrica:

$M_B = 1 \Rightarrow H = 225$

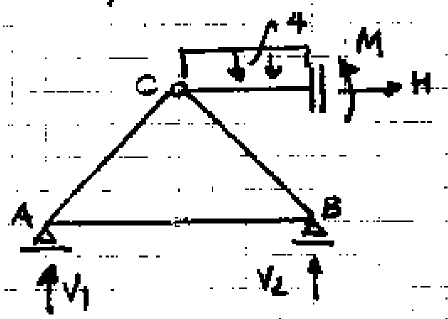
$\sum F_x = 0 \Rightarrow N^{AS}_{AB} = 11.25$

Diagrama de esforço:

$N_{AB} = 11.25 + 2.529$; $N_{AC} = +3.953$; $N_{AD} = 2.529 - 11.25$

Problema 3 (Sem simplificação)

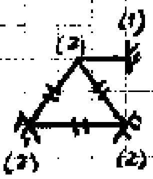
3a) Hiperestática e sistema-base



$\alpha_e = 4 - 3 = 1$

$\alpha_i = 3 - 2 = 1$

$\alpha = 3\times 3 - (2+2+2+1) = 2$



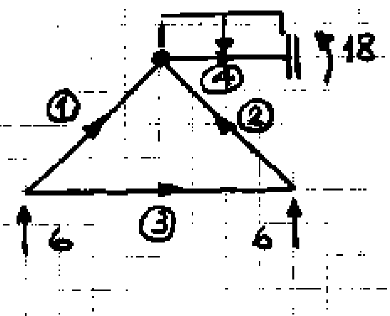
Nenhuma das reacções pode ser escolhida para força hiperestática (são todas determináveis pelas condições de equilíbrio):

$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 = 12$

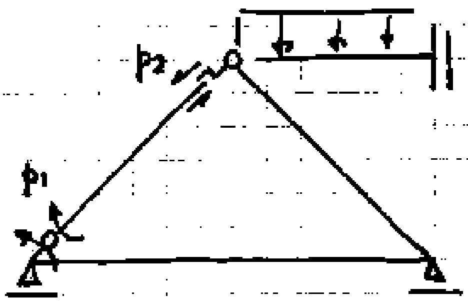
$\sum F_H = 0 \Rightarrow H = 0$

$M_C = 0 \Rightarrow M = 18$

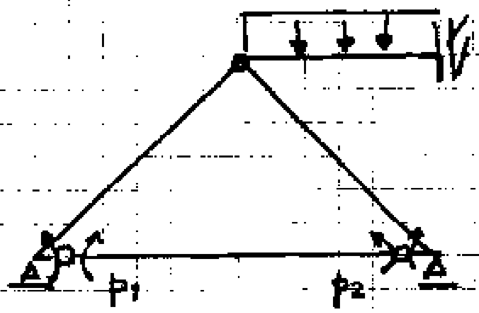
$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_1 = 6$



É necessário tomar esforços para forças hiperestáticas, abrindo a malha (p. ex. sistema 1) ou soltando a malha (p. ex. sistema 2).

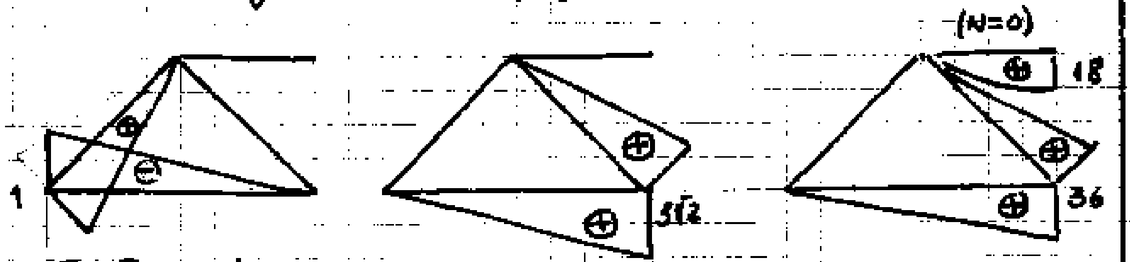


Sistema 1



Sistema 2

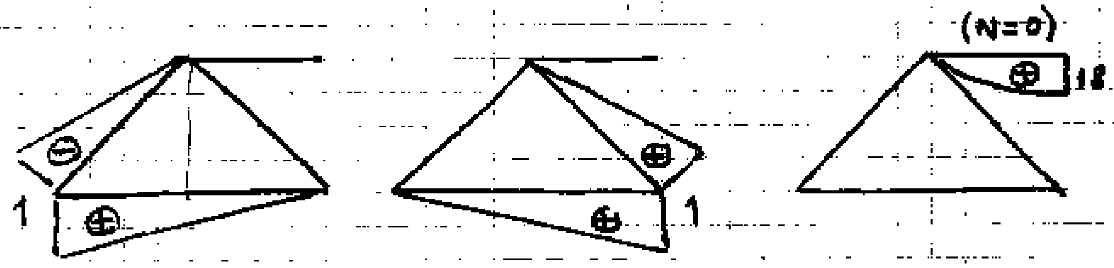
3b) e c) Matriz B e vetor X_0



Sistema 1:

$$\underline{B}^t = \begin{bmatrix} +1 & 0 & | & 0 & 0 & | & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 3\sqrt{2} & 0 & | & 0 & 3\sqrt{2} & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{X}_0^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 36 & 0 & | & 0 & 36 & | & 0 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$



Sistema 2:

$$\underline{B}^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 & | & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{X}_0^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

3d) Deformações devidas a f_1 (Sistema 2)

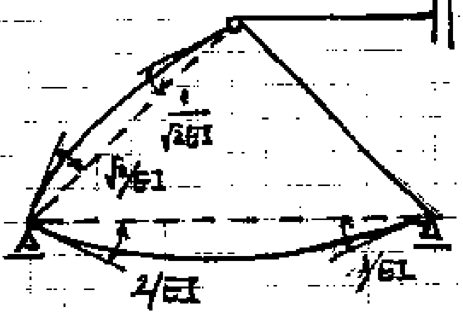
$$\underset{\sim}{u}_{1} = \frac{3\sqrt{2}}{6EI}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}EI}\begin{Bmatrix}-2\\ -1\end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{u}_{2}^{t} = \{0 \quad 0\}$$

$$\underset{\sim}{u}_{3} = \frac{6}{6EI}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}2\\ 1\end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{u}_{4}^{t} = \{0 \quad 0 \quad 0\}$$

3e) e f) Deformação e termos de f_{i1}

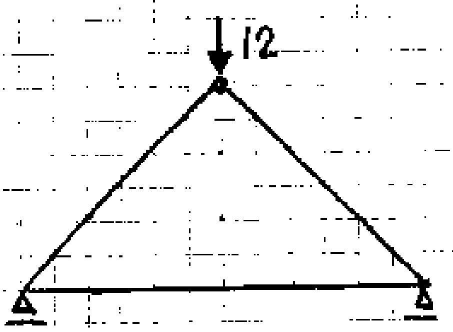


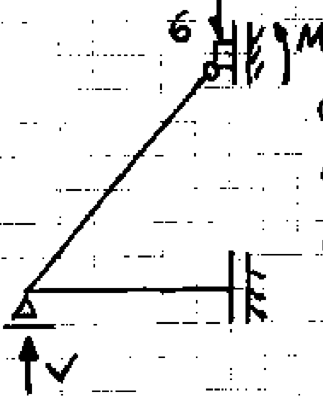
$$f_{11} = \frac{\sqrt{2}}{EI} + \frac{2}{EI}$$

$$f_{21} = \frac{1}{EI}$$

Problema 3 (Com simplificação)

Retirar viga isostática: Usar simetria





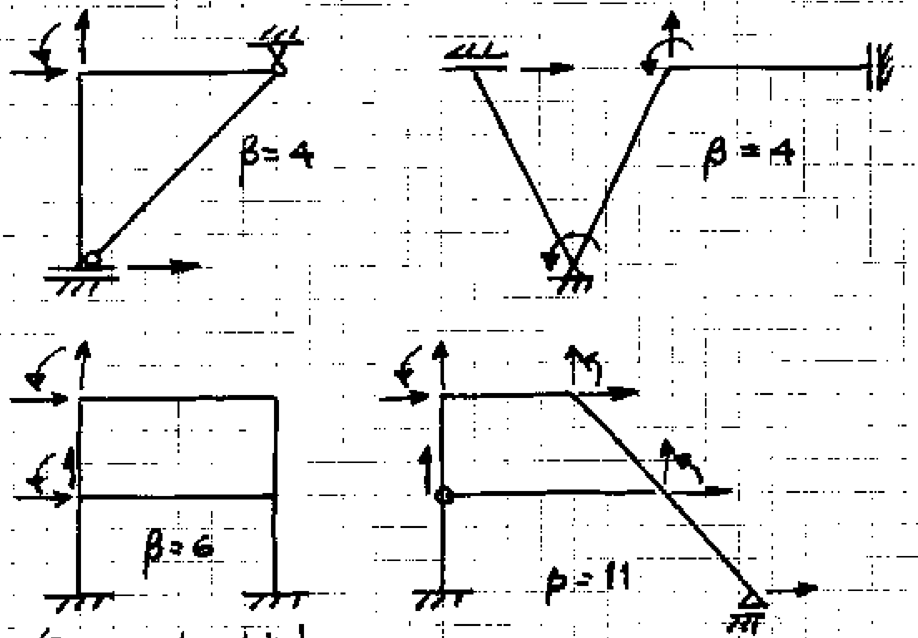
$\alpha_e = 5-3 = 2$

$\alpha_i = -1$

$\alpha = 1$

$$\left.\begin{array}{l} M = 0 \\ V = 6 \end{array}\right\}$$ Não podem ser usadas para forças hiperestáticas

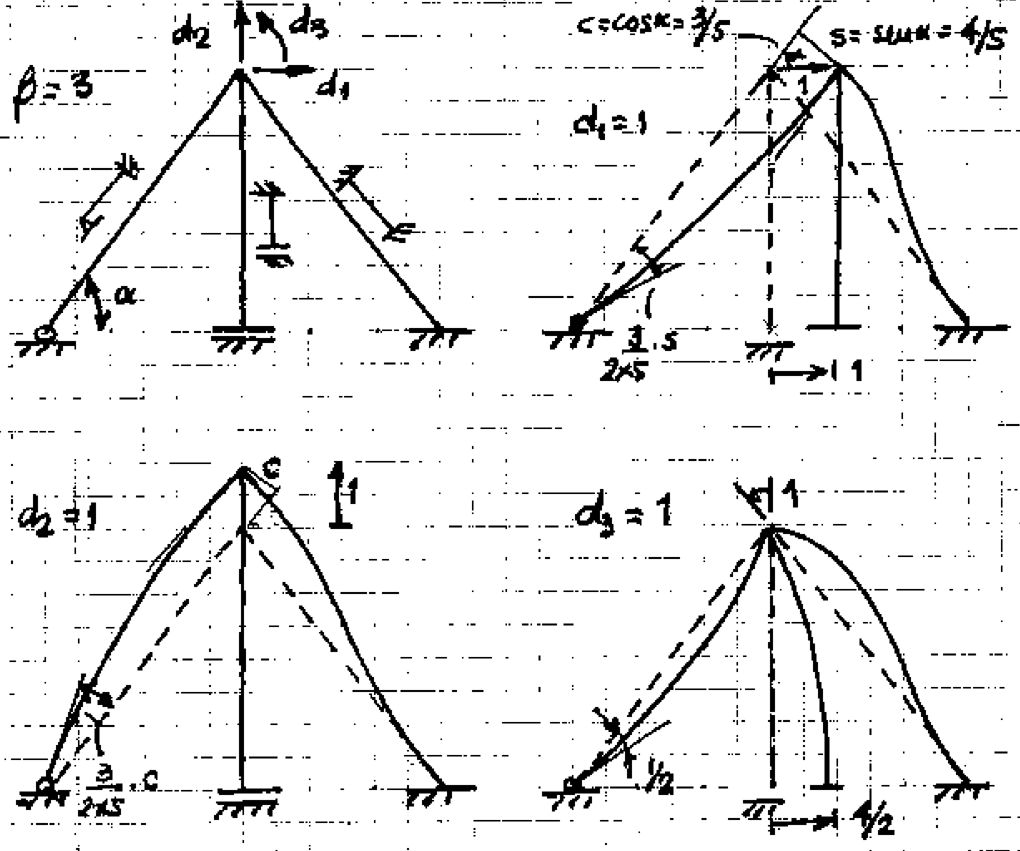
Problema 4



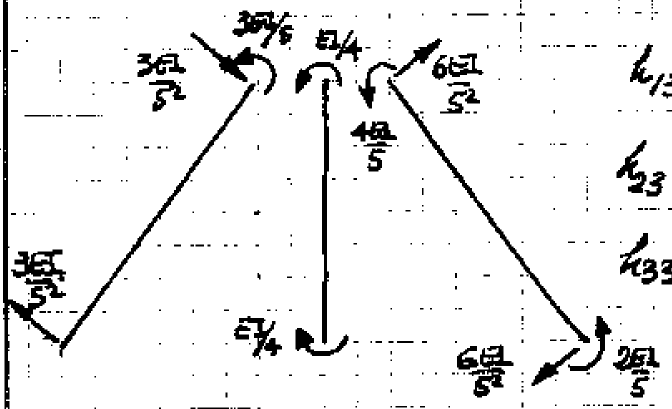
(3 graus por piso)

Problema 5

5a) Deslocamentos independentes e deformadas



5b) Coluna 3 de K ($d_3 = 1$)



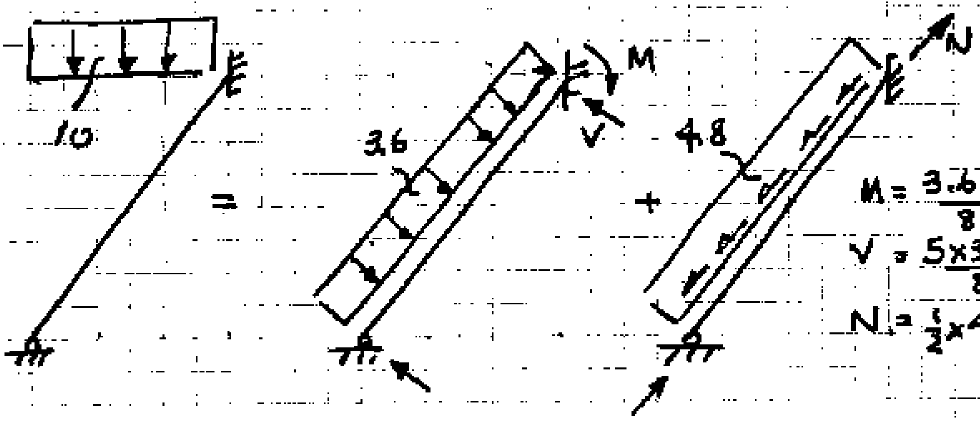
$$k_{13} = \frac{3EI}{5^2} \times (s) + \frac{6EI}{5^2} \times (s) = 0.288\,EI$$

$$k_{23} = \frac{3EI}{5^2} \times (-c) + \frac{6EI}{5^2} \times (c) = 0.072\,EI$$

$$k_{33} = \frac{3EI}{5} + \frac{EI}{4} + \frac{4EI}{5} = 1.65\,EI$$

5c) Forças nodais e forças de fixação

$$\underset{\sim}{f}_N = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \underset{\sim}{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} V \times (-s) + N \times (c) \\ V \times (s) + N \times (s) \\ -M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.8 \\ 16.35 \\ 11.25 \end{Bmatrix}$$



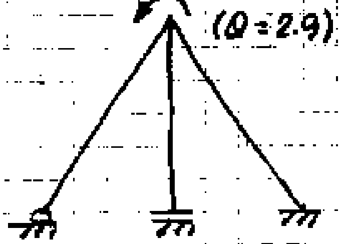
$$M = \frac{3.6 \times 5^2}{8} = 11.25$$

$$V = \frac{5 \times 3.6 \times 5}{8} = 11.25$$

$$N = \frac{1}{2} \times 4.8 \times 5 = 12$$

5d) Barras rígidas (AD e CD)

O único deslocamento indeterminado é a rotação d_3 ($d_1 = d_2 = 0$ por as barras AD e CD serem axialmente rígidas).



A equação resolvente é:

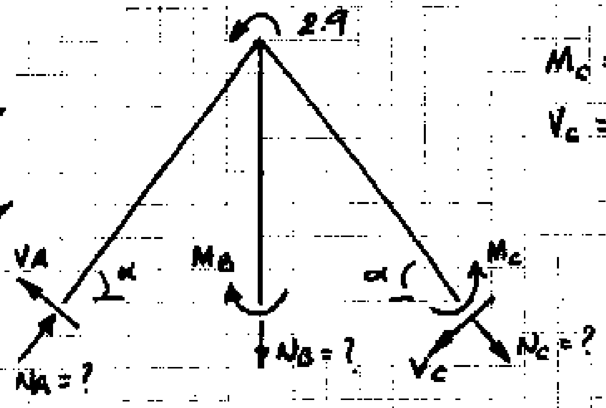
$Kq + Q_0 = Q$, com

$$\left.\begin{array}{l} K = k_{33} = 1.65\,EI \\ Q_0 = 0 \\ Q = 2.9 \end{array}\right\} q = \frac{1.7576}{EI}$$

O diagrama de corpo livre da estrutura é obtido do resultado de 5b) para $d_3 = q = 1.7576/EI$:

$V_A = \frac{3EI}{25} q$

$M_B = \frac{EI}{4} q$



$M_C = \frac{2EI}{5} q$

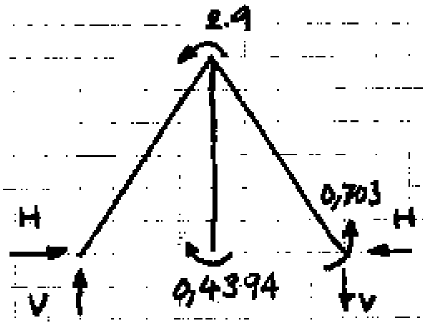
$V_C = \frac{6EI}{25} q$

Como BD é axialmente indeformável e $d_2 = 0$: $e_{BD} = 0 \Rightarrow N_B = 0$

N_A e N_C podem ser calculados fazendo equilíbrio de momentos flectores em C e A, respectivamente:

$$6 N_A \sin\alpha + 6 V_A \cos\alpha + M_B - 2.9 = M_C \Rightarrow N_A = 0.5009 \text{ kN}$$

$$6 N_C \sin\alpha + 6 V_C \cos\alpha + M_B - 2.9 - M_C = 0 \Rightarrow N_C = 0.3427 \text{ kN}$$



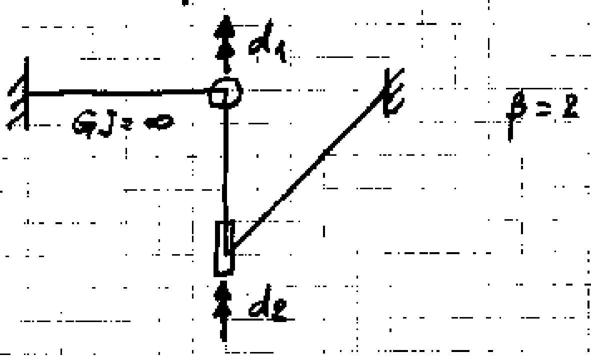
Podia ser verificado o equilíbrio da estrutura no referencial global.

$V = 0.5273$

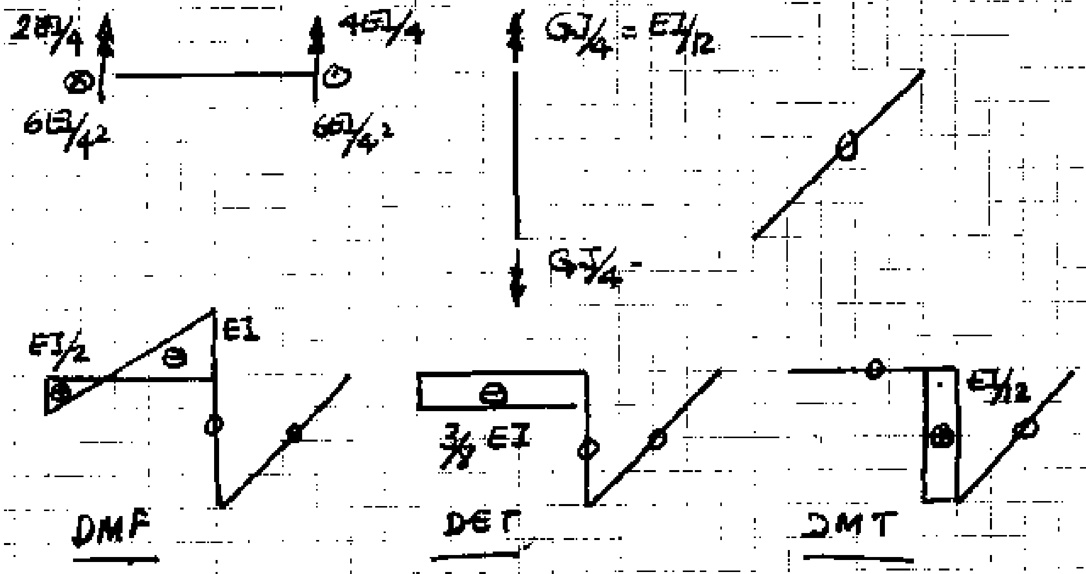
$H = 0.1318$

Problema 6

6a) Indeterminação cinemática e deslocamentos independentes



6b) Esforços para $d_1 = 1$



6c) Equações do sistema resolvente

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_N$$

Para a primeira equação $f_{1_0} = f_{1_N} = 0$, pelo que,

$$(k_{11})\, d_1 + (k_{12})\, d_2 = 0$$

$$k_{11} = 4EI/4 + GJ/4 = 13/12\, EI$$

$$k_{12} = -GJ/4 = -1/12\, EI$$