Exame de Análise de Estruturas I
Licenciatura em Engenharia Civil
Responsável: Prof. J. A. Teixeira de Freitas
4 de Fevereiro de 2003
2ª Época
1º Semestre

Observações: Duração de 3 horas.
Consulta **apenas** do **formulário** e de **duas folhas A4**.
Inicie cada **problema** numa nova folha. Identifique todas as folhas.
Justifique convenientemente todas as respostas.

Problema 1: Lajes (3,5 valores)

Considere as lajes finas representadas nas figuras 1 e 2.

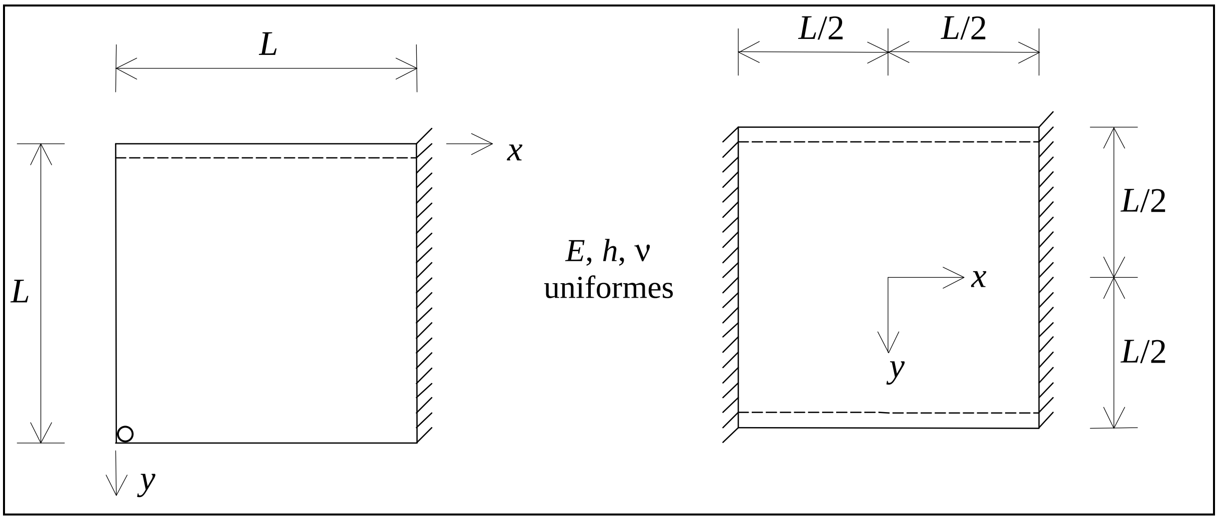


Figura 1 Figura 2

1.a) Defina as condições de admissibilidade cinemática da laje representada na figura 1.
1.b) Indique uma solução cinematicamente admissível para um assentamento Δ no pilar dessa laje.
1.c) Defina as condições de admissibilidade estática da laje representada na figura 2, para uma carga uniforme $q = 1$ kN/m^2.
1.d) Indique uma solução estaticamente admissível para a mesma laje quando a carga $q = 1$ kN/m^2 é aplicada apenas no quarto $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
1.e) Verifique se a solução da alínea d) é a solução exacta.

Problema 2: Simetria (2,5 valores)

A estrutura representada na figura 3 é simétrica.

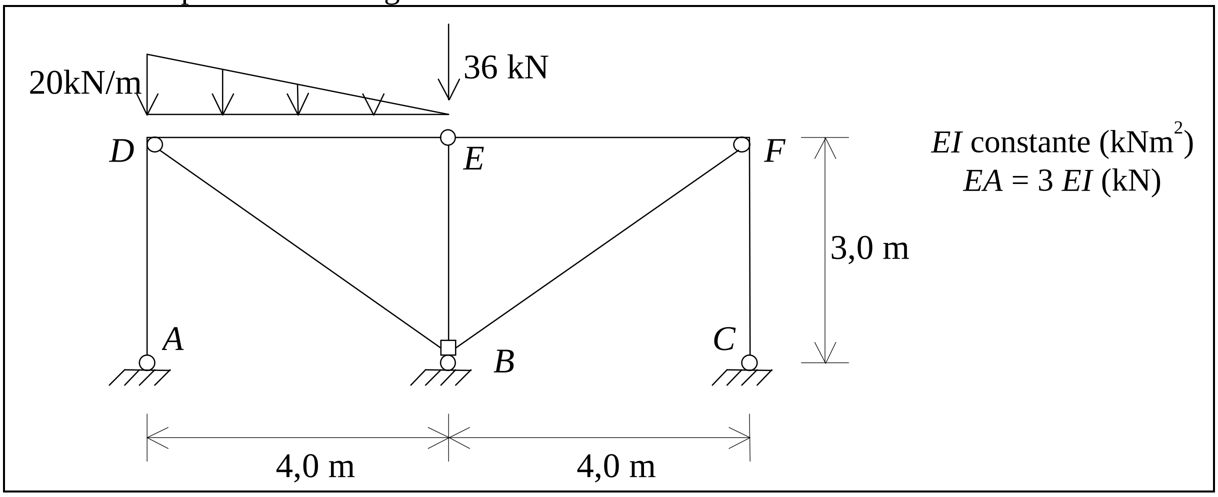


Figura 3

2.a) Determine o grau de hiperestatia da estrutura.

2.b) Recorrendo a simplificações de simetria e antissimetria, defina as estruturas simplificadas e os carregamentos e graus de hiperestatia respectivos.

2.c) Trace os diagramas de esforços (*M*, *V*, *N*) na estrutura original, devidos à carga concentrada, quando se admite que as barras *DE* e *EF* são rígidas à flexão e à deformação axial e que os pilares *AD* e *CF* são axialmente rígidos, sabendo que a rotação no nó *D* é 8,0/*EI* (rad, sentido horário).

Problema 3: Método das Forças (5 valores)

Considere a estrutura representada na figura 4.

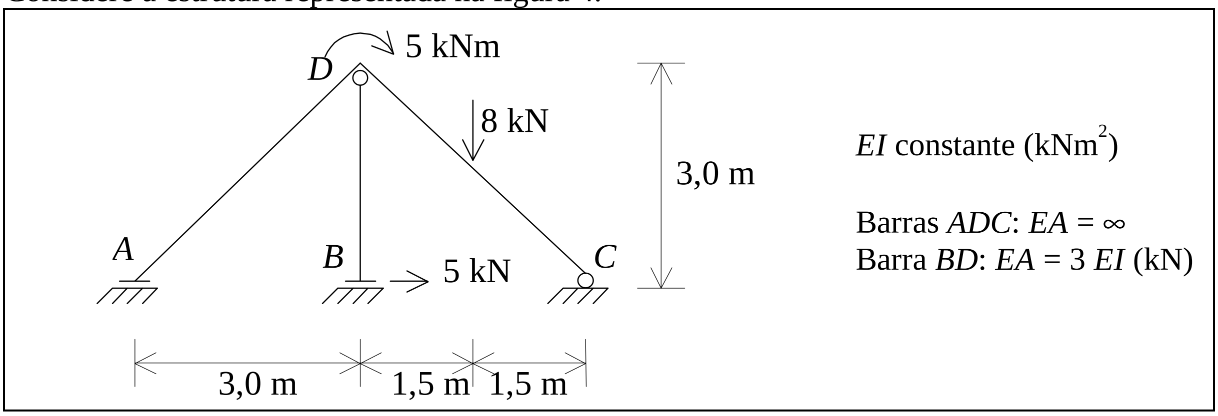


Figura 4

3.a) Determine o grau de hiperestatia da estrutura e defina um sistema base para a análise pelo Método das Forças ($\boldsymbol{Fp} + \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$).

3.b) Determine a matriz de equilíbrio da solução complementar, $\boldsymbol{B}$.

3.c) Trace os diagramas de esforços (*M*, *V*, *N*) correspondentes à acção de uma das incógnitas hiperestáticas.

3.d) Calcule as deformações independentes devidas a essa incógnita hiperestática.

3.e) Trace a deformada aproximada provocada por essa incógnita hiperestática e identifique aí as deformações calculadas na alínea anterior.

3.f) Identifique nessa deformada os correspondentes coeficientes $\boldsymbol{F}_{*ij}$ da matriz de flexibilidade.

Problema 4: Método dos Deslocamentos (1,5 valores)

Identifique os deslocamentos independentes da grelha representada na figura 5, nas seguintes condições:

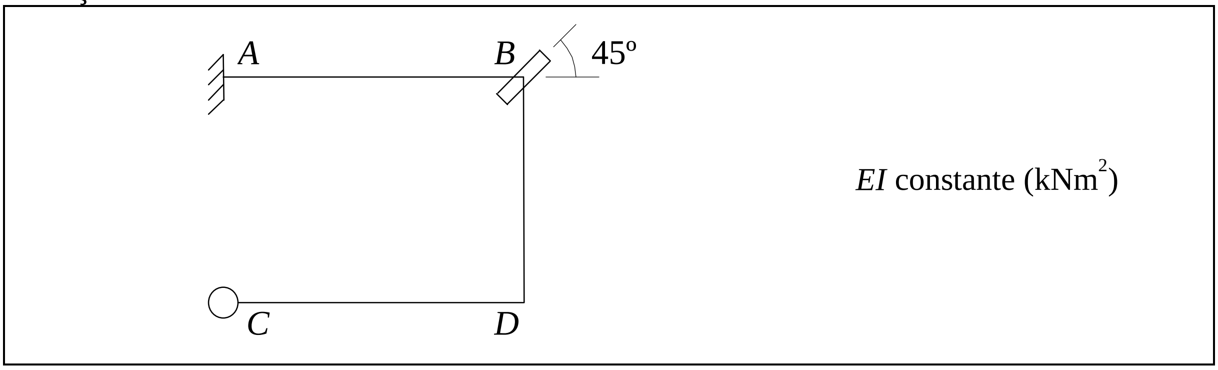


Figura 5

4.a) Barra *ABDC* deformável à torção.
4.b) Barra *AB* rígida à torção e barra *BDC* deformável à torção.
4.c) Barra *ABD* rígida à torção e barra *DC* deformável à torção.
4.d) Barra *ABDC* rígida à torção.

Problema 5: Método dos Deslocamentos (5 valores)

Considere a estrutura representada na figura 6.

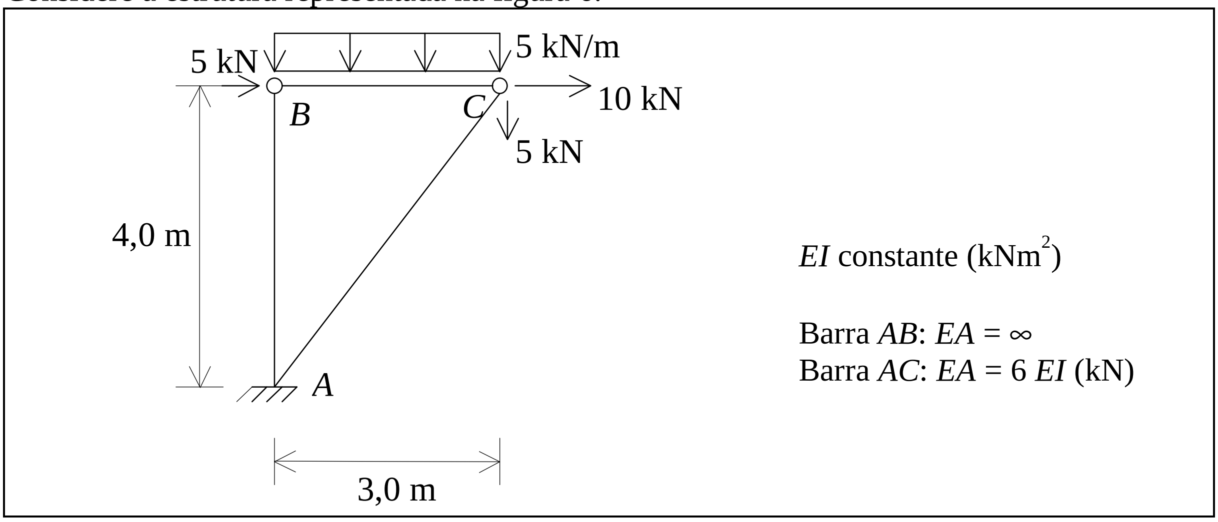


Figura 6

5.a) Admitindo que a barra *BC* tem rigidez axial $EA = 6\ EI$ (kN), defina o grau de indeterminação cinemática da estrutura, indique os deslocamentos independentes e trace as deformadas correspondentes, assinalando os valores dos deslocamentos dependentes.

5.b) Repita a alínea anterior, admitindo que a barra *BC* é axialmente rígida.

5.c) Calcule uma coluna da matriz de rigidez, $\boldsymbol{K}$, admitindo que a barra *BC* é axialmente rígida.

5.d) Nas mesmas condições, determine os vectores de forças nodais aplicadas, $\boldsymbol{F}_N$, e de forças nodais de fixação, $\boldsymbol{F}_0$.

Problema 6: Grelhas (2,5 valores)

A barra *AB* da grelha representada na figura 7 está sujeita a um momento torsor uniformemente distribuído com intensidade 2 kNm/m.

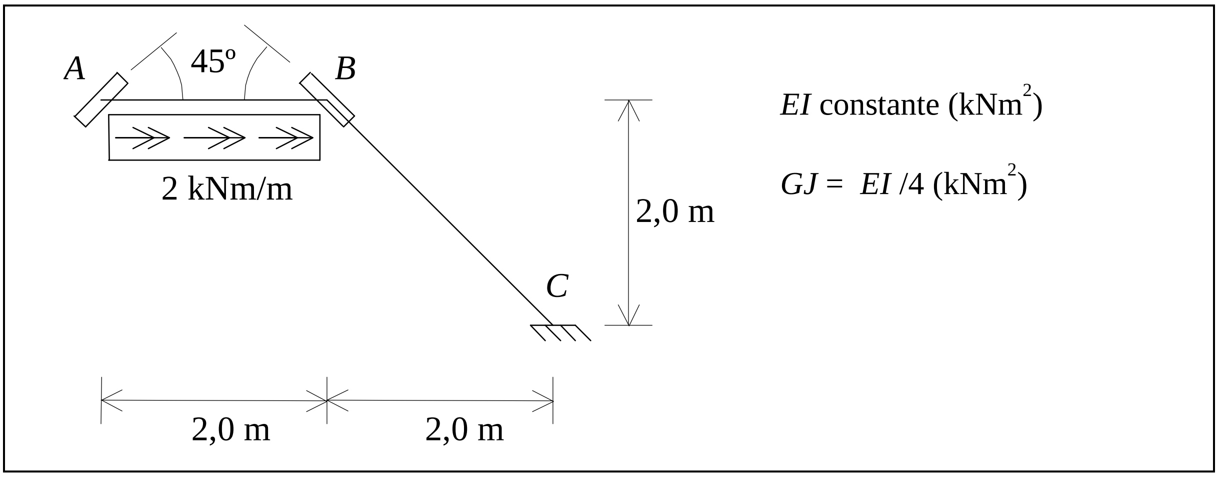


Figura 7

6.a) Defina o grau de indeterminação cinemática da estrutura e indique os deslocamentos independentes.

6.b) Determine os diagramas de esforços (*M*, *V*, *T*) correspondentes à solução particular.

6.c) Defina uma equação do sistema do Método dos Deslocamentos.

Formulário

Eq. de Lagrange:
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Equação de equilíbrio:
$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q$$

Relações constitutivas:
$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu^2)D}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix},$$

Rigidez de flexão da laje:
$$D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$$

Relação curvatura-deslocamento:

$$\chi_x = -\partial^2 w / \partial x^2$$
$$\chi_y = -\partial^2 w / \partial y^2$$
$$\chi_{xy} = -\partial^2 w / \partial x \partial y$$

Esforço transverso:

$$v_x = \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} \quad v_y = \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right)_{y=a}$$

Esforço transverso efectivo:

$$r_x = v_x + \left.\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}\right|_{x=a} . \quad r_y = v_y + \left.\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}\right|_{y=a} .$$

Matriz de flexibilidade elementar:

$$\mathbf{F} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ & & 6I/A \end{bmatrix}$$

Relações deformações-esforços:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \overline{\mathbf{u}}$$

Deslocamentos:

$$\delta = \mathbf{B_0^T u} - \mathbf{B_{0R}^T r}$$

Eq. do Método das Forças:

$$\mathbf{F_* p} + \mathbf{v_0} = \mathbf{0}$$

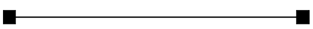
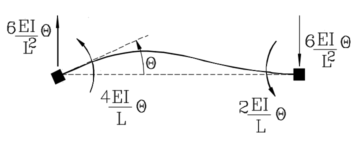
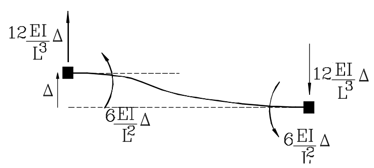
Matriz de flexibilidade global:

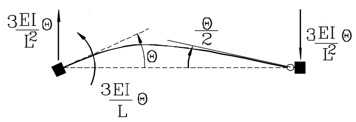
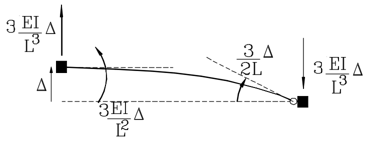
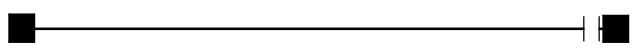
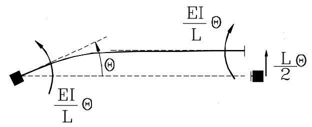
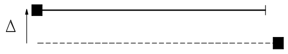
$$\mathbf{F_*} = \mathbf{B^T F B}$$

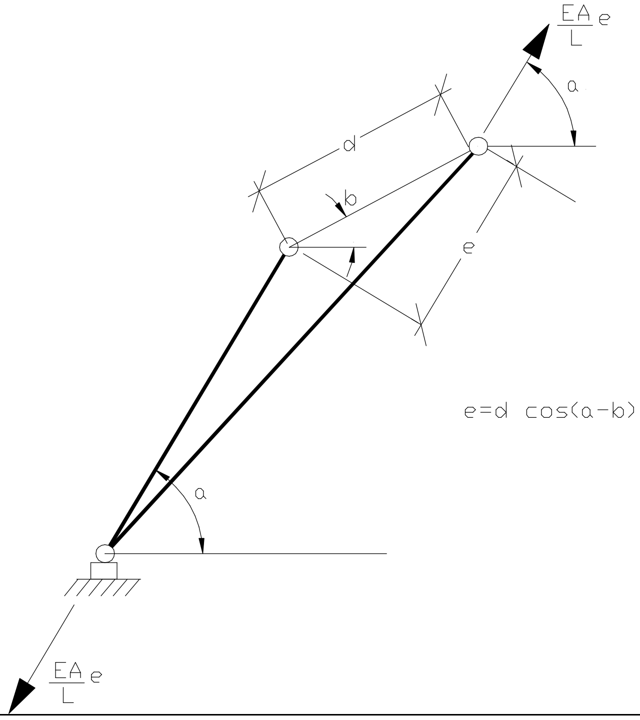
Vector das descontinuidades:

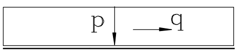
$$\mathbf{v_o} = \mathbf{B^T u_0} - \mathbf{B_R^T r}$$

$$\mathbf{Kd} + \mathbf{F_0} = \mathbf{F_N} \qquad \mathbf{X_f} = \mathbf{X_0} + \mathbf{X_c d}$$

Tipo de barra	Imposição de rotação à esquerda	Imposição de deslocamento transversal
bi-encastrada 		

encastrada-rotulada		
encastrada-enc desliz. 		

	Força de fixação para torção imposta: $\varphi\frac{GJ}{L}$

Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra bi-encastrada						
	M_A	M_B	V_A	V_B	N_A	N_B
	$\frac{pL^2}{12}$	$-\frac{pL^2}{12}$	$\frac{pL}{2}$	$\frac{pL}{2}$	$-\frac{qL}{2}$	$-\frac{qL}{2}$