Exame de Análise de Estruturas I
Licenciatura em Engenharia Civil
Responsável: Prof. Teixeira de Freitas
14 de Fevereiro de 2002
2ª Época
1º Semestre
Ano lectivo 2001-2002

Observações: Duração de 3 horas.
Consulta **apenas** do **formulário** e de **duas folhas A4**.
Inicie cada problema numa nova folha. Identifique todas as folhas.
Justifique convenientemente todas as respostas.

Grupo 1: Lajes (4 valores)

As lajes representadas nas figuras 1 e 2 são finas, com espessura constante, homogéneas, isótropas e estão sujeitas a uma carga uniforme q = 1 kPa.

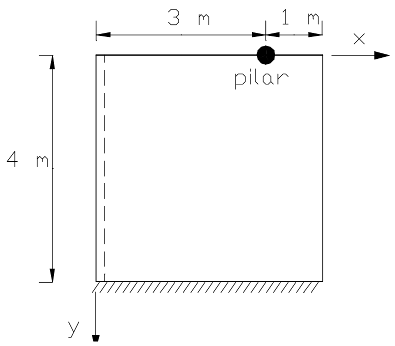


Figura 1

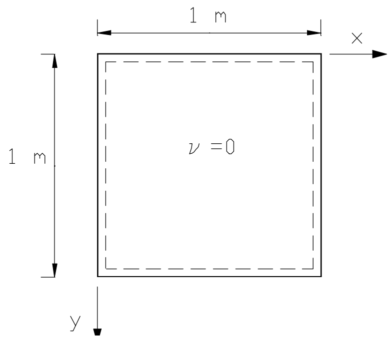


Figura 2

1a) Defina as condições de admissibilidade cinemática para a laje representada na figura 1 e apresente uma solução cinematicamente admissível.

1b) Defina as condições de admissibilidade estática para a mesma laje e apresente uma solução estaticamente admissível.

1c) Sabendo que está associada a uma solução estaticamente admissível, mostre que a solução $\chi_{xx} = \chi_{yy} = xy\,(1-x)(1-y)/D$ e $\chi_{xy} = xy\,[x(3-2x)+y(3-2y)-3]\,/\,(6D)$ não é a solução exacta para a laje simétrica representada na figura 2.

Grupo 2: Simetria (2,5 valores)

A estrutura representada na figura 3 é simétrica.

2a) Decomponha o carregamento nas parcelas simétrica e anti-simétrica.

2b) Defina a simplificação de simetria e determine o grau de hiperestatia.

2c) Defina a simplificação de anti-simetria e determine o grau de hiperestatia.

2d) Determine o deslocamento horizontal da secção E admitindo que a viga AA' é axialmente rígida, $(EA)_{viga} = \infty$.

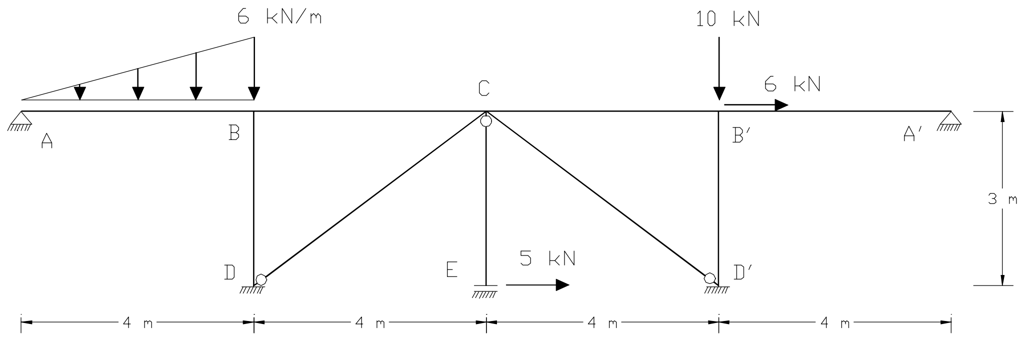
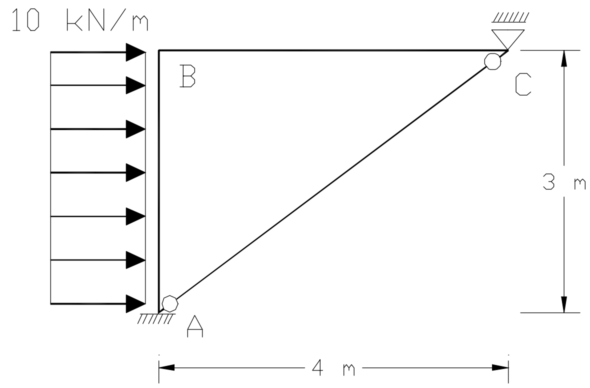


Figura 3

Grupo 3: Método das Forças (6 valores)



As barras da estrutura têm a mesma rigidez à flexão, EI (kNm^2), e à deformação axial, EA = 6EI (kN).

3a) Determine o grau de indeterminação estática da estrutura representada na figura 4 e um sistema-base para a análise pelo método das forças ($\mathbf{F}\ \mathbf{p} + \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$).

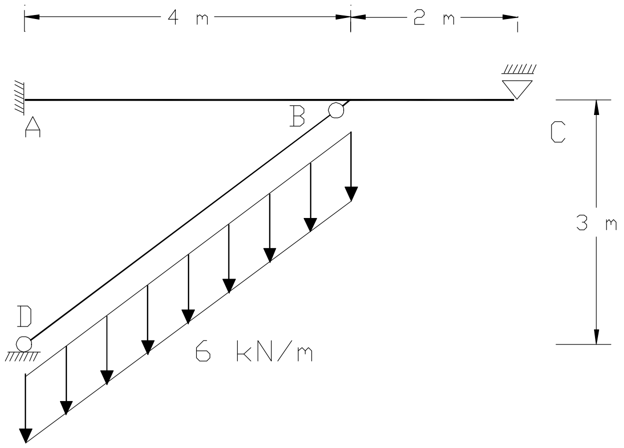
3b) Determine a matriz de equilíbrio da solução complementar, **B**.

3c) Determine o vector de equilíbrio da solução particular, $\mathbf{X}_0$.

3d) Represente aproximadamente a deformada para a solução particular e identifique as componentes do vector das descontinuidades, $\mathbf{v}_0$.

3e) Determine os diagramas de momentos flectores e de esforços transversos sabendo que os esforços axiais nas barras AB, BC e AC são 0,344, –8,667 e 10,834 kN, respectivamente.

Grupo 4: Método dos Deslocamentos/Pórticos (5 valores)



A viga ABC da estrutura representada na figura 5 tem rigidez à flexão constante, 2EI (kNm^2) e é axialmente rígida, $(EA)_{ABC} = \infty$. A barra BD tem rigidez à flexão EI e é axialmente deformável, $(EA)_{BD}$ = 10EI (kN).

Figura 5

4a) Defina o grau de indeterminação cinemática da estrutura representada na figura 5 e os deslocamentos independentes para a análise pelo método dos deslocamentos ($\mathbf{K}\,\mathbf{d} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_N$).

4b) Trace e caracterize a deformada associada a cada um desses deslocamentos, indicando os valores dos deslocamentos dependentes.

4c) Defina a coluna da matriz de rigidez da estrutura, **K**, associada a uma translação do nó B.

4d) Trace os diagramas de esforços (M,V,N) correspondentes a essa translação.

Grupo 5: Método dos Deslocamentos/Grelhas (2,5 valores)

As barras da grelha representada na figura 6 têm o mesmo comprimento, L = 3m, e a mesma rigidez à flexão, EI (kNm^2), e à torção, GJ = 1/2 EI

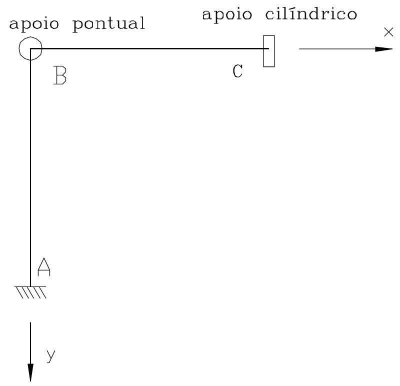


Figura 6

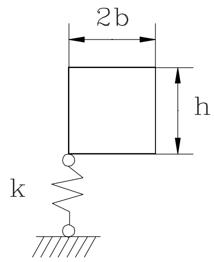


Figura 7

5a) Defina o grau de indeterminação cinemática da grelha e os deslocamentos independentes para a análise pelo método dos deslocamentos ($\mathbf{K}\,\mathbf{d} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_N$).

5b) Escreva uma das equações de equilíbrio do sistema do método dos deslocamentos para uma força concentrada transversal de 10 kN aplicada a meio-vão da barra BC.

5c) Suponha que o encastramento na secção A da grelha representada na figura 6 é substituído por uma mola com rigidez k = 3EI (kN/m) fixada num vértice da secção transversal, como se indica na figura 7. Defina os deslocamentos independentes da grelha para estas condições de apoio e determine a(s) coluna(s) da matriz de rigidez da grelha associada(s) ao(s) deslocamento(s) independente(s) do nó A.

Formulário

Lajes

Eq. de Lagrange: $$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Equação de equilíbrio: $$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q$$

Relações constitutivas: $$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu^2)D} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix},$$

Rigidez de flexão da laje: $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$

Relação curvatura-deslocamento:

$$\chi_x = -\partial^2 w / \partial x^2$$
$$\chi_y = -\partial^2 w / \partial y^2$$
$$\chi_{xy} = -\partial^2 w / \partial x \partial y$$

Esforço transverso: $$v_x = \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} \quad v_y = \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right)_{y=a}$$

Esforço transverso efectivo: $$r_x = v_x + \left. \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right|_{x=a} . \quad r_y = v_y + \left. \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right|_{y=a} .$$

Condições de fronteira:

encastramento, $w = \overline{w}$, $\theta_n = \overline{\theta}_n$

apoio simples, $w = \overline{w}$, $m_n = \overline{m}_n$

bordo livre, $r_n = \overline{r}_n$, $m_n = \overline{m}_n$

Formulário

Matriz de flexibilidade elementar: $$\underline{F} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ & & 6I/A \end{bmatrix}$$

Relação deformações-esforços: $\underline{u} = \underline{F}\underline{X} + \overline{\underline{u}}$

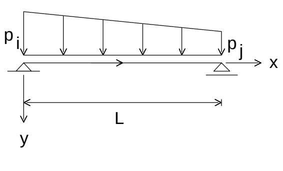
Deslocamentos: $\delta = \mathbf{B}_0^{\mathbf{T}} \mathbf{u} - \mathbf{B}_{0\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{r}$

Eq. do Método das Forças: $\mathbf{F}_* \mathbf{p} + \mathbf{v_0} = \mathbf{0}$

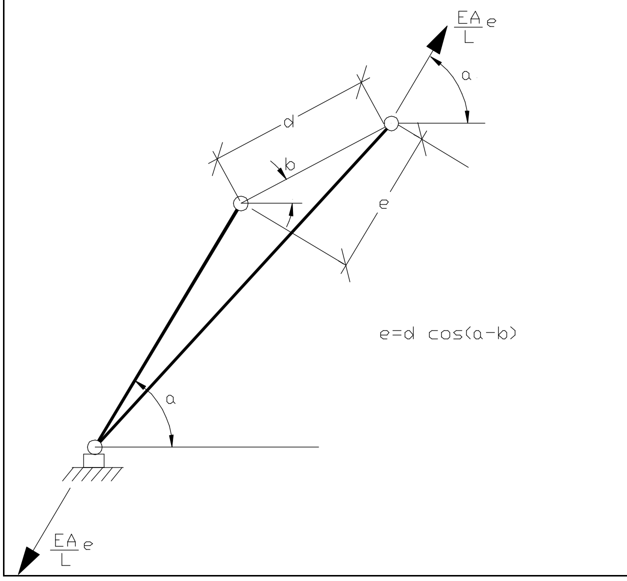
Matriz de flexibilidade global: $\mathbf{F}_* = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \mathbf{F} \mathbf{B}$

Vector das descontinuidades: $\mathbf{v_0} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \mathbf{u_0} - \mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{r}$

T2 Deformações independentes em barras com cargas de vão - Termos correctores

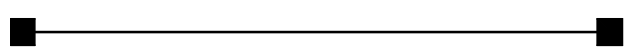
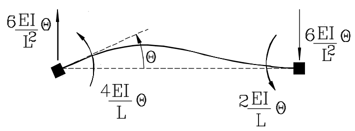
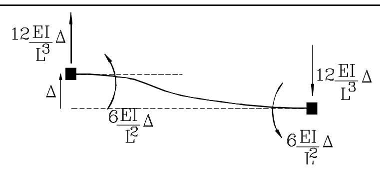
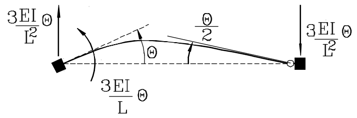
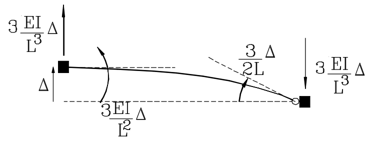
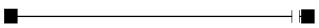
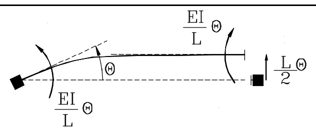
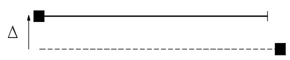
Carga de vão	$\overline{\theta_i}$	$\overline{\theta_j}$	$\overline{e_j}$
	$\frac{1}{EI}\left[p_i \frac{8L^3}{360} + p_j \frac{7L^3}{360} \right]$	$\frac{1}{EI}\left[p_i \frac{7L^3}{360} + p_j \frac{8L^3}{360} \right]$	0
	Caso particular $p_i = p_j$ $\frac{p_i L^3}{24EI}$	Caso particular $p_i = p_j$ $\frac{p_i L^3}{24EI}$	

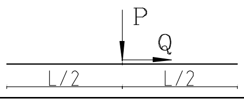
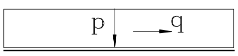
Deformada da barra bi-articulada

	Força de fixação para torção imposta: $\varphi \dfrac{GJ}{L}$

Eq. do Método dos Deslocamentos: $\mathbf{Kd} + \mathbf{F_0} = \mathbf{F_N}$

Esforços finais: $\mathbf{X_f} = \mathbf{X_0} + \mathbf{X_c d}$

Tipo de barra	Imposição de rotação à esquerda	Imposição de deslocamento transversal
bi-encastrada 		
encastrada-rotulada		
encastrada-enc desliz. 		

Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra encastrada-rotulada						
	M_A	θ_B	V_A	V_B	N_A	N_B
	$\dfrac{3PL}{16}$	$\dfrac{PL^2}{32EI}$	$\dfrac{11P}{16}$	$\dfrac{5P}{16}$	$-\dfrac{Q}{2}$	$-\dfrac{Q}{2}$
	$\dfrac{pL^2}{8}$	$\dfrac{pL^3}{48EI}$	$\dfrac{5pL}{8}$	$\dfrac{3pL}{8}$	$-\dfrac{qL}{2}$	$-\dfrac{qL}{2}$