



Exame de Análise de Estruturas I
Licenciatura em Engenharia Civil
Responsável: Prof. J. A. Teixeira de Freitas
11 de Janeiro de 2003
1ª Época
1º Semestre

Observações: Duração de 3 horas.

Consulta **apenas** do **formulário** e de **duas folhas A4**.

Inicie cada **problema** numa nova folha. Identifique todas as folhas.

Justifique convenientemente todas as respostas.

Problema 1: Lajes (3,5 valores)

Considere a laje fina representada na figura 1.

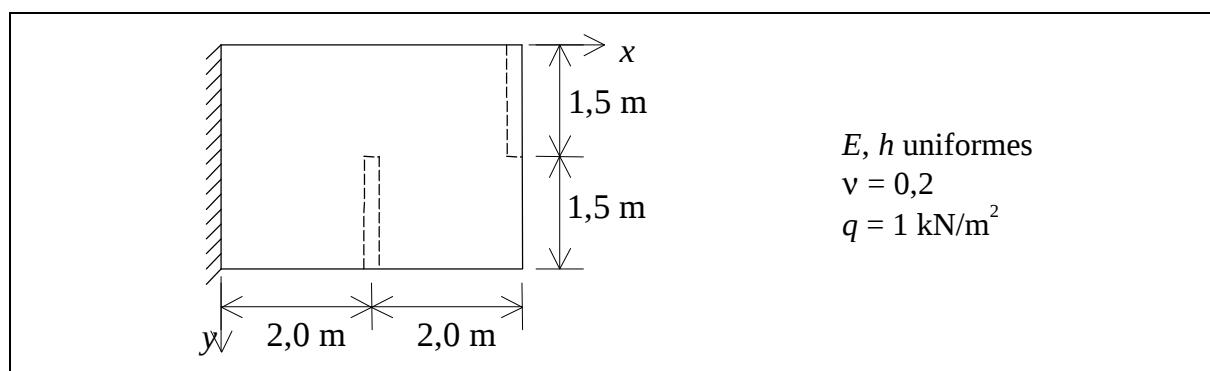


Figura 1

- 1.a) Defina as condições de admissibilidade cinemática da laje e indique uma solução cinematicamente admissível.
- 1.b) Defina as condições de admissibilidade estática da laje e indique uma solução estaticamente admissível.
- 1.c) Verifique se a solução da alínea b) é a solução exacta.
- 1.d) Se se admitir que $m_{xx} = (4x - x^2)/2$ e $m_{xy} = xy/2$, será possível determinar um campo de momentos m_{yy} de modo a obter uma solução estaticamente admissível?

Problema 2: Simetria (2,5 valores)

A estrutura representada na figura 2 é simétrica.

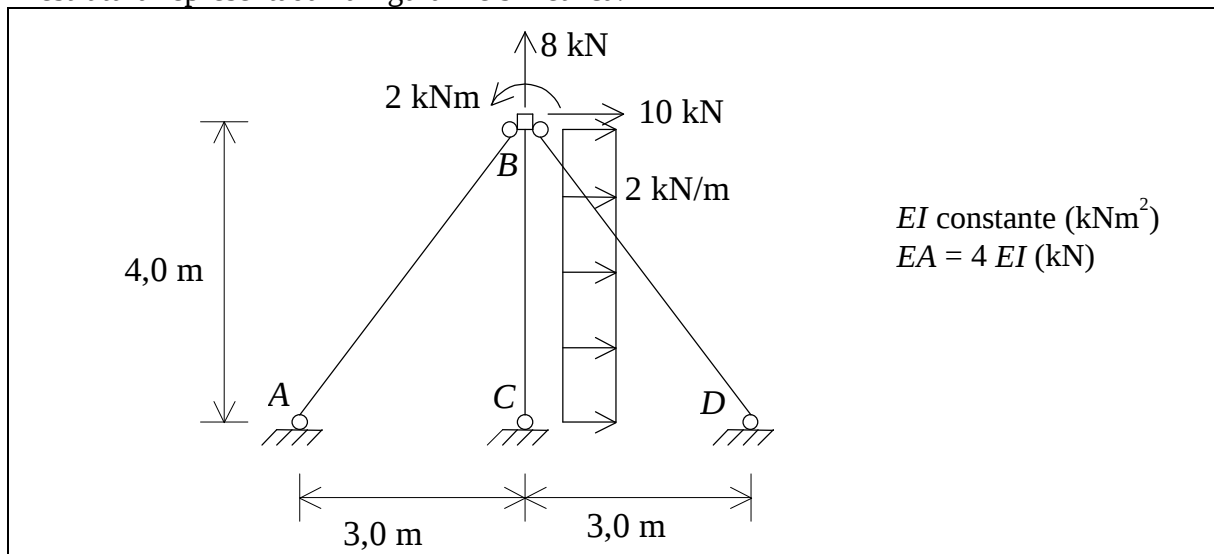


Figura 2

- Determine o grau de hiperestatia da estrutura.
- Recorrendo a simplificações de simetria e antissimetria, defina as estruturas simplificadas e os carregamentos e graus de hiperestatia respectivos.
- Trace o diagrama de esforço normal na estrutura original, sabendo que a deformação axial na barra CB é $3,953/EI$ (m).

Problema 3: Método das Forças (5 valores)

Considere a estrutura representada na figura 3.

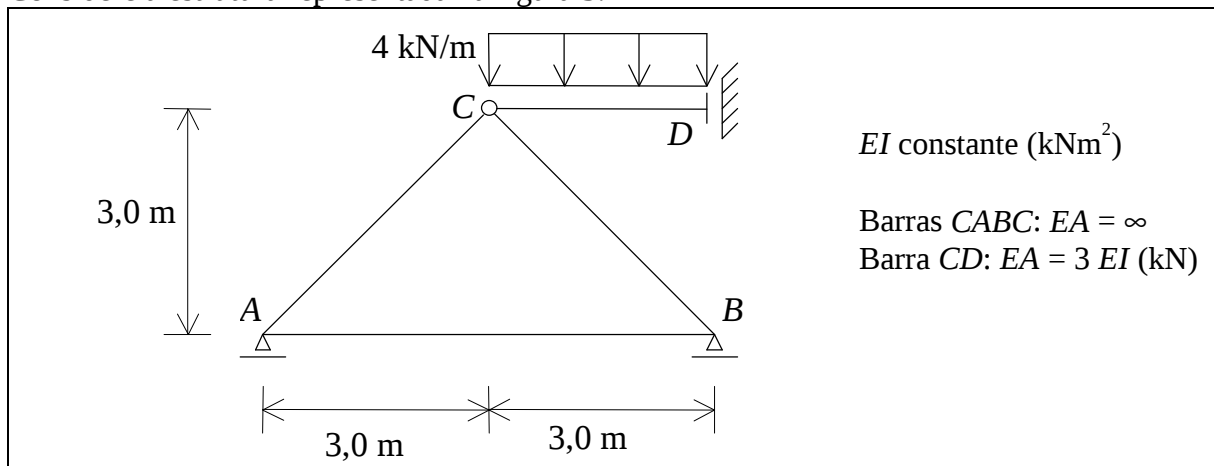


Figura 3

- Determine o grau de hiperestatia da estrutura e defina um sistema base para a análise pelo Método das Forças ($F_p + v_0 = 0$).
- Determine a matriz de equilíbrio da solução complementar, B .
- Determine o vector de equilíbrio da solução particular, X_0 . Trace os diagramas de esforços (M, V, N) correspondentes.
- Calcule as deformações independentes devidas à acção de uma das incógnitas hiperestáticas.

- 3.e) Trace a deformada aproximada provocada por essa incógnita hiperestática e identifique aí as deformações calculadas na alínea anterior.
- 3.f) Identifique nessa deformada os correspondentes coeficientes F_{*ij} da matriz de flexibilidade.

Problema 4: Método dos Deslocamentos (1,5 valores)

Identifique os deslocamentos independentes das estruturas representadas na figura 4. Considere que EI e EA são constantes, a menos que indicado na figura.

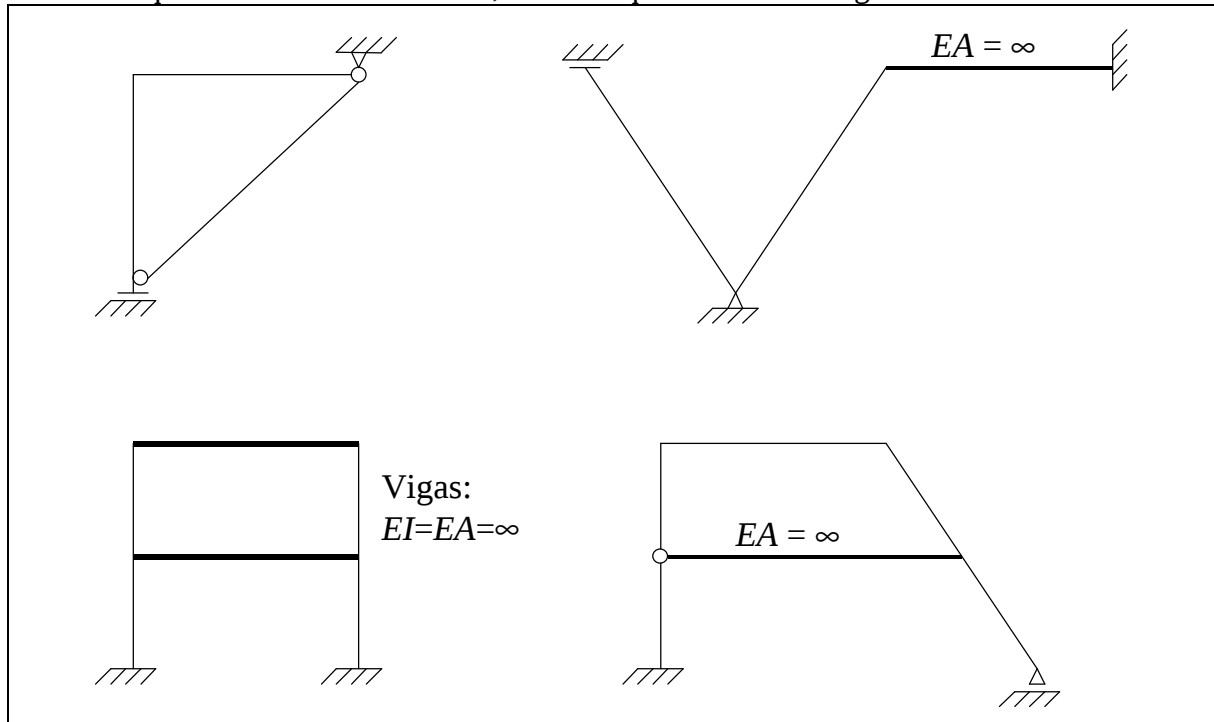


Figura 4

Problema 5: Método dos Deslocamentos (5 valores)

Considere a estrutura representada na figura 5.

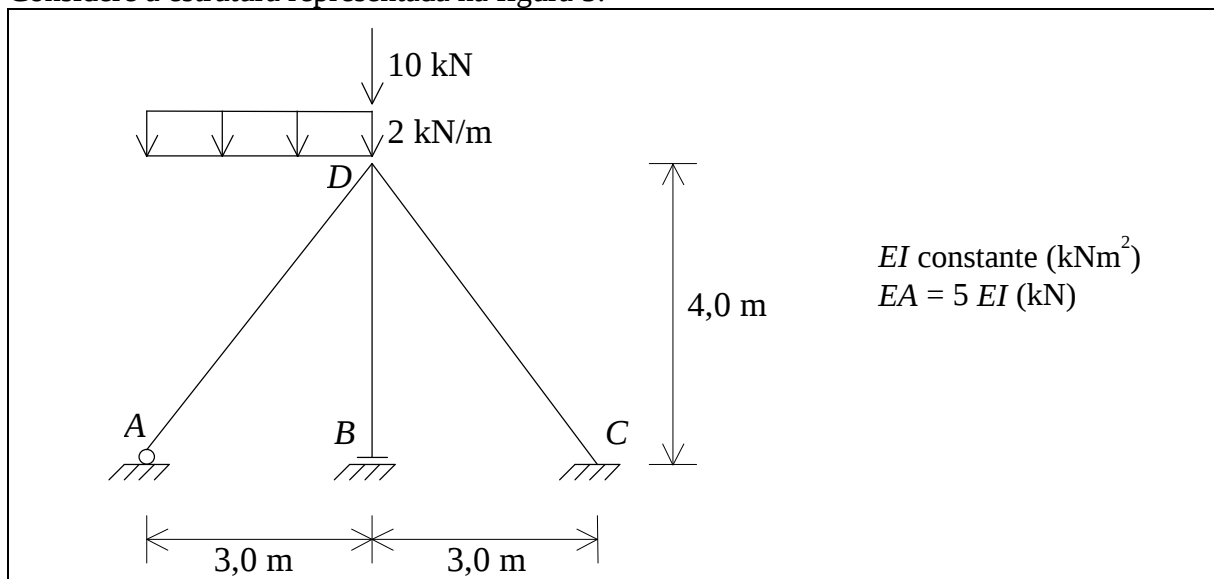


Figura 5

- 5.a) Defina o grau de indeterminação cinemática da estrutura, indique os deslocamentos independentes e trace as deformadas correspondentes, assinalando os valores dos deslocamentos dependentes.
- 5.b) Defina uma coluna da matriz de rigidez, $\mathbf{K}$, associada a uma rotação.
- 5.c) Defina os vectores de forças nodais aplicadas, $\mathbf{F}_N$, e de forças nodais de fixação, $\mathbf{F}_0$.
- 5.d) Determine as reacções nos apoios devidas a um momento de 2,9 kNm aplicado no nó D, quando se admite que as barras AD e CD são axialmente rígidas.

Problema 6: Grelhas (2,5 valores)

A barra CD da grelha representada na figura 6 está sujeita a uma carga uniformemente distribuída com intensidade 2kN/m.

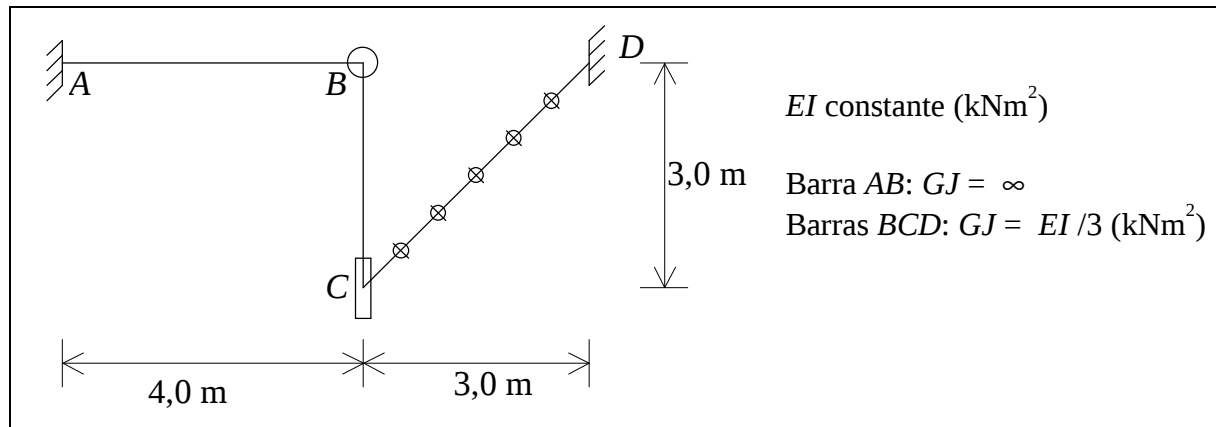


Figura 6

- 6.a) Defina o grau de indeterminação cinemática da estrutura e indique os deslocamentos independentes.
- 6.b) Determine os diagramas de esforços (M , V , T) para um dos deslocamentos independentes.
- 6.c) Defina uma equação do sistema do Método dos Deslocamentos.

Formulário

Eq. de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q$$

Relações constitutivas:
$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1 - \nu^2)D} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix},$$

Rigidez de flexão da laje:

$$D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$$

Relação curvatura-deslocamento:

$$\begin{aligned}\chi_x &= -\partial^2 w / \partial x^2 \\ \chi_y &= -\partial^2 w / \partial y^2 \\ \chi_{xy} &= -\partial^2 w / \partial x \partial y\end{aligned}$$

Esforço transverso:

$$v_x = \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} \quad v_y = \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right)_{y=a}$$

Esforço transverso efectivo:

$$r_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Big|_{x=a} \quad r_y = v_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \Big|_{y=a}$$

Condições de fronteira:

encastramento, $w = \bar{w}$, $\theta_n = \bar{\theta}_n$
apoio simples, $w = \bar{w}$, $m_n = \bar{m}_n$
bordo livre, $r_n = \bar{r}_n$, $m_n = \bar{m}_n$

Matriz de flexibilidade elementar:

$$\mathbf{F} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ & 6I/A \end{bmatrix}$$

Relações deformações-esforços:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \bar{\mathbf{u}}$$

Deslocamentos:

$$\delta = \mathbf{B}_0^T \mathbf{u} - \mathbf{B}_{0R}^T \mathbf{r}$$

Eq. do Método das Forças:

$$\mathbf{F}_* \mathbf{p} + \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$$

Matriz de flexibilidade global:

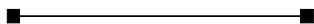
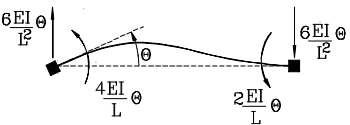
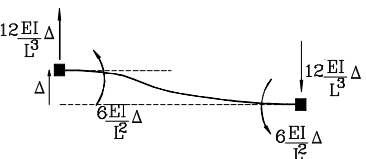
$$\mathbf{F}_* = \mathbf{B}^T \mathbf{F} \mathbf{B}$$

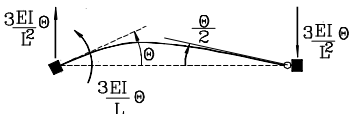
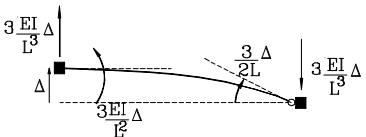
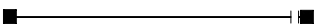
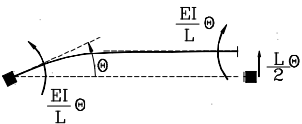
Vector das descontinuidades:

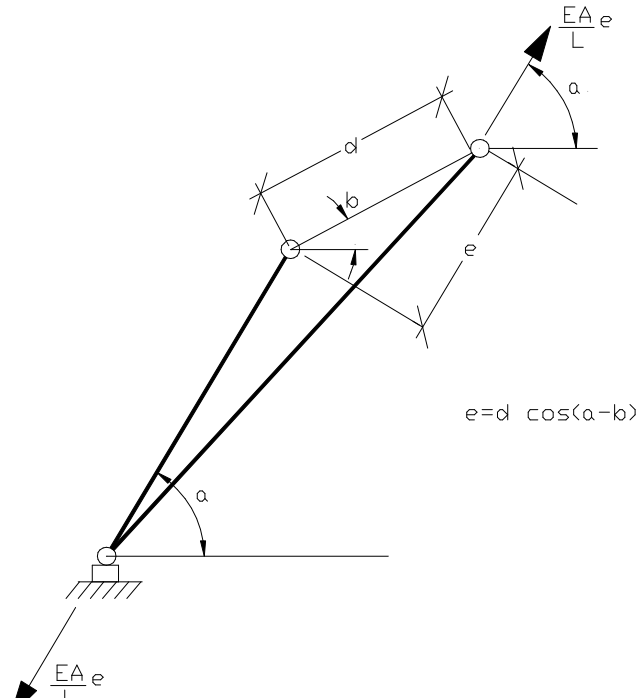
$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{B}^T \mathbf{u}_0 - \mathbf{B}_R^T \mathbf{r}$$

$$\mathbf{Kd} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_N$$

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_c \mathbf{d}$$

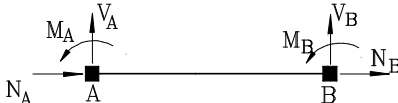
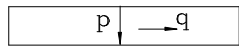
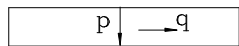
Tipo de barra	Imposição de rotação à esquerda	Imposição de deslocamento transversal
bi-encastada 		

encasturada-rotulada 		
encasturada-enc. desliz. 		



$e = d \cos(\alpha - b)$

Força de fixação para torção imposta: $\varphi \frac{GJ}{L}$

Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra bi-encasturada						
	M_A	M_B	V_A	V_B	N_A	N_B
	$\frac{pL^2}{12}$	$-\frac{pL^2}{12}$	$\frac{pL}{2}$	$\frac{pL}{2}$	$-\frac{qL}{2}$	$-\frac{qL}{2}$
Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra encasturada-rotulada						
	M_A	θ_B	V_A	V_B	N_A	N_B
	$\frac{pL^2}{8}$	$\frac{pL^3}{48EI}$	$\frac{5pL}{8}$	$\frac{3pL}{8}$	$-\frac{qL}{2}$	$-\frac{qL}{2}$

