



Exame de Análise de Estruturas I
Licenciatura em Engenharia Civil
Responsável: Prof. Teixeira de Freitas
22 de Janeiro de 2002
1ª Época
1º Semestre
Ano lectivo 2001-2002

Observações: Duração de 3 horas.

Consulta **apenas** do **formulário** e de **duas folhas A4**.

Inicie cada problema numa nova folha. Identifique todas as folhas.

Justifique convenientemente todas as respostas.

Grupo 1: Lajes (4 valores)

As lajes representadas nas figuras 1 e 2 são finas, com espessura constante, homogéneas, isotropas e estão sujeitas a uma carga uniforme $q = 1 \text{ kPa}$.

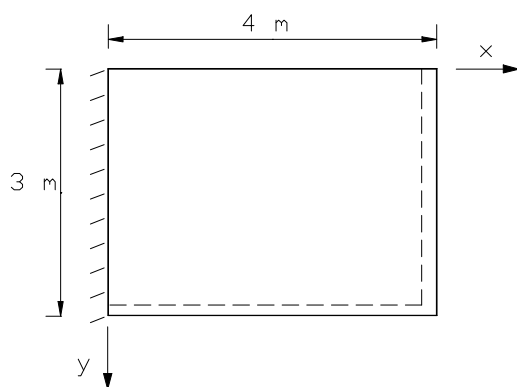


Figura 1

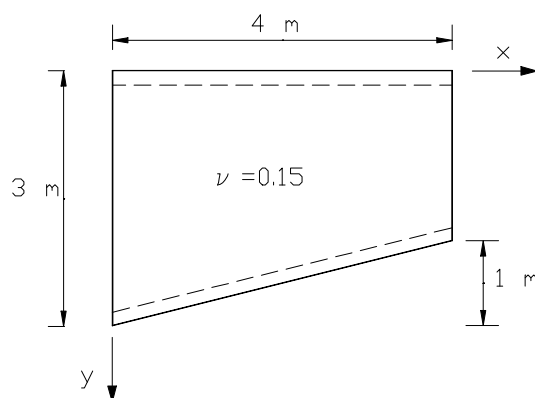


Figura 2

1a) Defina as condições de admissibilidade cinemática para a laje representada na figura 1 e apresente uma solução cinematicamente admissível.

1b) Defina as condições de admissibilidade estática para a mesma laje e apresente uma solução estaticamente admissível.

1c) Mostre que a solução $m_{xx} = 0$, $m_{yy} = y(12 - x - 4y)/8$ e $m_{xy} = 0$ é estaticamente admissível para a laje representada na figura 2

Grupo 2: Simetria (2,5 valores)

A estrutura representada na figura 3 é simétrica, à excepção das condições de apoio.

2a) Determine o grau de indeterminação estática da estrutura.

2b) Calcule a reacção horizontal no apoio fixo e substitua-o por um apoio móvel com a reacção aplicada.

2c) Recorrendo às simplificações de simetria e anti-simetria, trace os diagramas de esforços (M,V,N) na estrutura representada na figura 3.

2d) Determine os diagramas de esforços (M,V,N) e os deslocamentos nos nós da mesma estrutura devidos a uma variação uniforme de temperatura de $+10^{\circ}\text{C}$ na barra AB e de -10°C na barra BC ($\alpha = 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$).

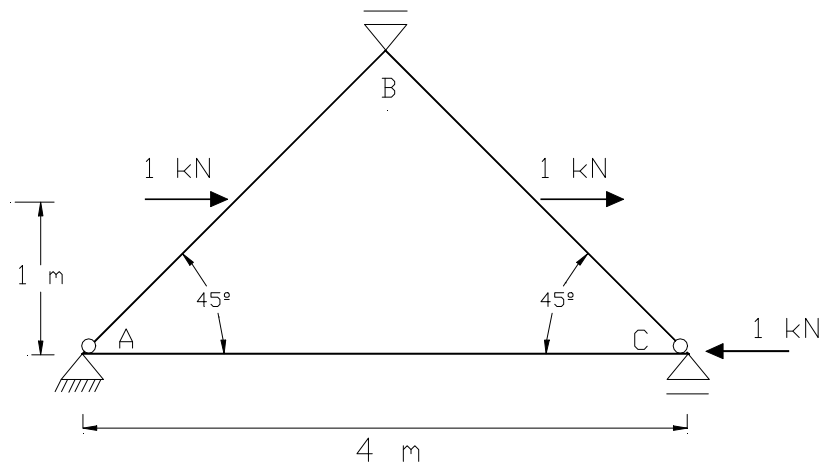


Figura 3

Grupo 3: Método das Forças (6 valores)

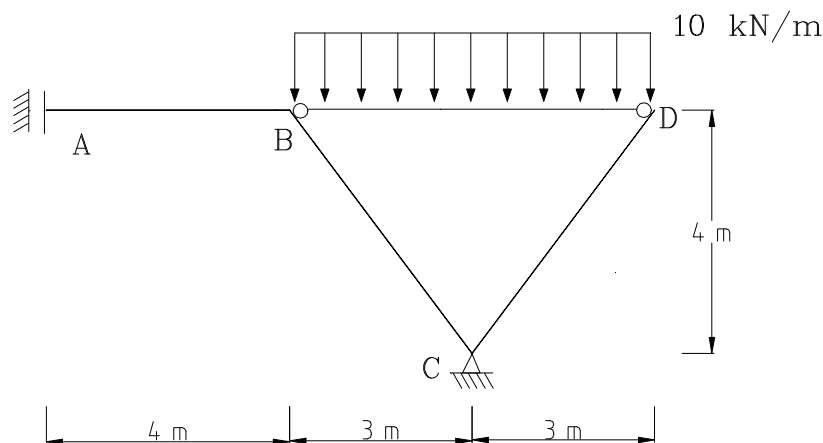


Figura 4

Todas as barras da estrutura representada na figura 4 têm rigidez à flexão constante, EI (kNm^2).

Admita que é desprezável ($EA \approx \infty$) a deformabilidade axial da barra ABCD e que a rigidez axial da barra BD é $4EI$ (kN).

3a) Determine o grau de indeterminação estática da estrutura e um sistema-base para a análise pelo método das forças $\mathbf{F} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$.

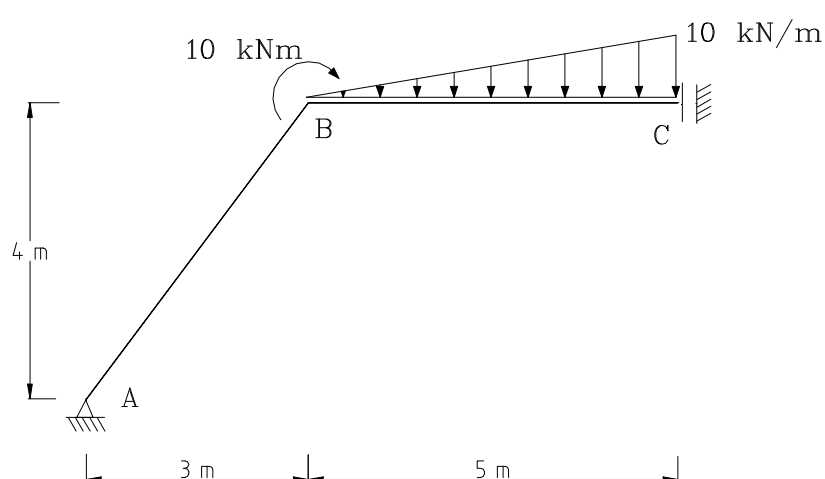
3b) Determine a matriz de equilíbrio da solução complementar, $\mathbf{B}$.

3c) Determine o vector de equilíbrio da solução particular, $\mathbf{X}_0$.

3d) Calcule e represente graficamente a contribuição da barra BD para o vector das descontinuidades, $\mathbf{v}_0$.

3e) Suponha que os esforços e as deformações independentes na estrutura foram calculados e agrupados nos vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{u}$, respectivamente. Que verificações deveria fazer para confirmar se a solução encontrada é a solução correcta do problema?

Grupo 4: Método dos Deslocamentos/Pórticos (5,5 valores)



A barra ABC da estrutura representada na figura 5 tem rigidez à flexão constante, EI (kNm^2), e rigidez axial $5EI$ (kN).

Figura 5

- 4a) Defina o grau de indeterminação cinemática da estrutura representada na figura 5 e os deslocamentos independentes para a análise pelo método dos deslocamentos $\mathbf{Kd} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_N$.
- 4b) Trace e caracterize a deformada associada a cada um desses deslocamentos, indicando os valores dos deslocamentos dependentes.
- 4c) Defina a coluna da matriz de rigidez da estrutura, $\mathbf{K}$, associada a uma translação do nó B.
- 4d) Defina a expressão que permite calcular o momento flector na secção B da barra AB da mesma estrutura depois de determinados os deslocamentos independentes.
- 4e) A barra ABC da estrutura representada na figura 6 tem rigidez à flexão constante, EI (kNm^2). A barra AB é axialmente rígida e rigidez axial da barra BC é $5EI$ (kN). Determine o diagrama de esforços axiais na estrutura sabendo que o valor do deslocamento vertical no apoio C é $45/EI$, no sentido da carga.

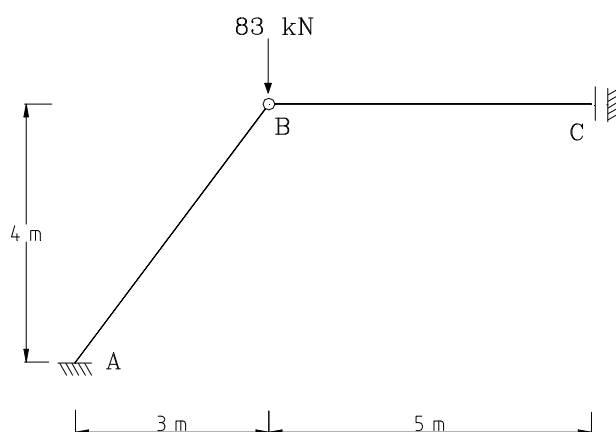


Figura 6

Grupo 5: Método dos Deslocamentos/Grelhas (2 valores)

As barras da grelha representada na figura 7 têm o mesmo comprimento, $L = 3\text{m}$, e a mesma rigidez à flexão, EI (kNm^2), e à torção, $GJ = EI/2$.

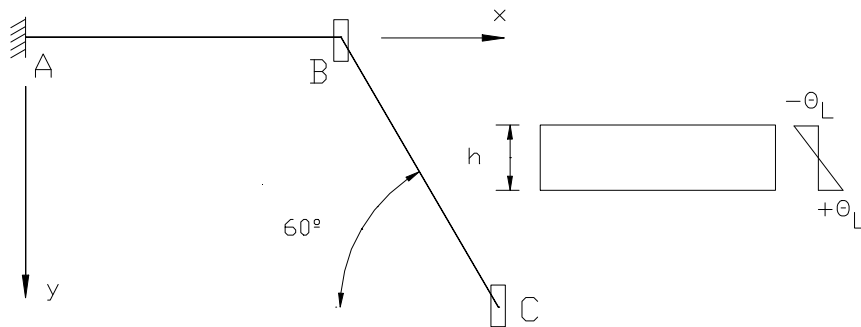


Figura 7

5a) Defina o grau de indeterminação cinemática da grelha e os deslocamentos independentes para a análise pelo método dos deslocamentos $\mathbf{Kd} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_N$.

5b) Escreva uma das equações de equilíbrio do sistema do método dos deslocamentos para a variação temperatura indicada, aplicada a ambas as barras da grelha ($\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$).

Formulário

Lajes

Eq. de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q$$

Relações constitutivas:
$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1 - \nu^2)D} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}$$

Rigidez de flexão da laje:

$$D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$$

Relação curvatura-deslocamento:

$$\chi_x = -\partial^2 w / \partial x^2$$

$$\chi_y = -\partial^2 w / \partial y^2$$

$$\chi_{xy} = -\partial^2 w / \partial x \partial y$$

Esforço transversal:

$$v_x = \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a}, \quad v_y = \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right)_{y=a}$$

Esforço transversal efectivo:

$$r_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Big|_{x=a}, \quad r_y = v_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \Big|_{y=a}$$

Condições de fronteira:

encastramento, $w = \bar{w}$, $\theta_n = \bar{\theta}_n$

apoio simples, $w = \bar{w}$, $m_n = \bar{m}_n$

bordo livre, $r_n = \bar{r}_n$, $m_n = \bar{m}_n$

Formulário

Matriz de flexibilidade elementar:

$$\underline{F} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ & & 6I/A \end{bmatrix}$$

Relação deformações-esforços:

$$\underline{u} = \underline{F}\underline{X} + \underline{\bar{u}}$$

Deslocamentos:

$$\underline{\delta} = \underline{B}_0^T \underline{u} - \underline{B}_{0R}^T \underline{r}$$

Eq. do Método das Forças:

$$\underline{F}_* \underline{p} + \underline{v}_0 = \underline{0}$$

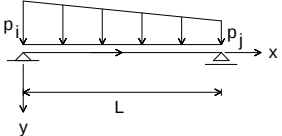
Matriz de flexibilidade global:

$$\underline{F}_* = \underline{B}^T \underline{F} \underline{B}$$

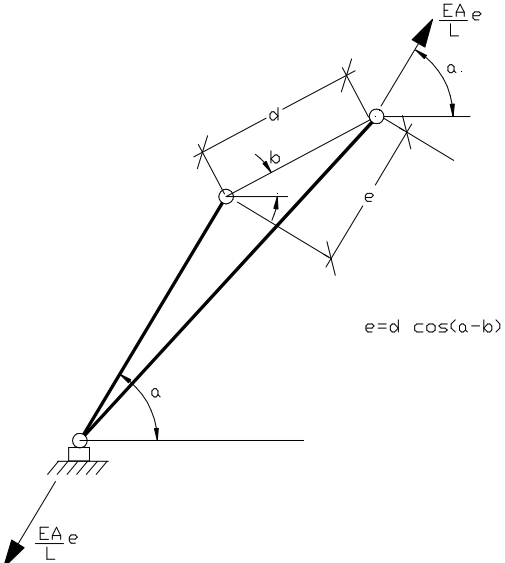
Vector das descontinuidades:

$$\underline{v}_0 = \underline{B}^T \underline{u}_0 - \underline{B}_R^T \underline{r}$$

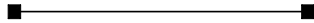
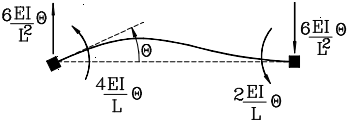
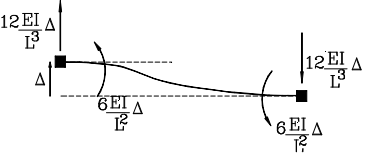
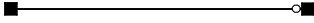
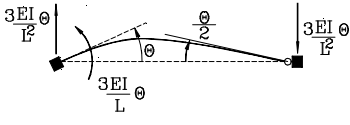
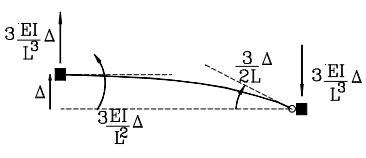
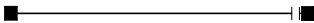
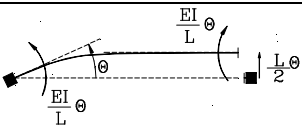
T2 Deformações independentes em barras com cargas de vão - Termos correctores

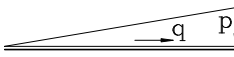
Carga de vão	$\bar{\theta}_i$	$\bar{\theta}_j$	$\bar{e}_j$
	$\frac{1}{EI} \left[p_i \frac{8L^3}{360} + p_j \frac{7L^3}{360} \right]$	$\frac{1}{EI} \left[p_i \frac{7L^3}{360} + p_j \frac{8L^3}{360} \right]$	0
	Caso particular $p_i = p_j$ $\frac{p_i L^3}{24 EI}$	Caso particular $p_i = p_j$ $\frac{p_i L^3}{24 EI}$	
Varição de temperatura uniforme no vão	$\frac{\alpha \theta_L L}{h}$	$\frac{\alpha \theta_L L}{h}$	$\alpha \theta_U L$

Deformada da barra bi-articulada

 $e = d \cos(\alpha - b)$	Força de fixação para torção imposta: $\varphi \frac{GJ}{L}$
--	---

Eq. do Método dos Deslocamentos: $\mathbf{Kd} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_N$
 Esforços finais: $\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_c \mathbf{d}$

Tipo de barra	Imposição de rotação à esquerda	Imposição de deslocamento transversal
bi-encastada 		
encastrada-rotulada 		
encastrada-enc desliz. 		

Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra bi-encastada						
	M_A	M_B	V_A	V_B	N_A	N_B
ΔT 	$\frac{2\alpha\theta_L EI}{h}$	$-\frac{2\alpha\theta_L EI}{h}$	0	0	$\alpha\theta_U EA$	$-\alpha\theta_U EA$
Forças de fixação devidas a cargas de vão na barra encastrada-encastada deslizante						
	M_A	M_B	V_A	δ_B	N_A	N_B
	$\frac{5pL^2}{24}$	$\frac{3pL^2}{24}$	$\frac{pL}{2}$	$\frac{7pL^4}{240EI}$	$-\frac{qL}{6}$	$-\frac{qL}{3}$