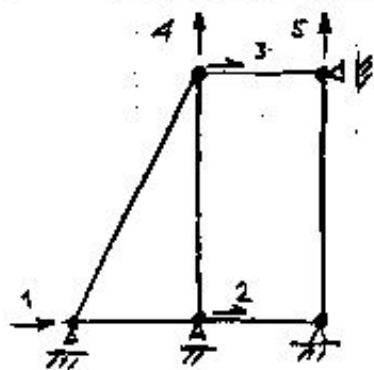


1. DISCRETIZAÇÃO (NÓS E ELEMENTOS)

2. DESLOCAMENTOS E FORÇAS NODAIS



$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}$$

3. EQUAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{F}_N + \underline{F}_L + \underline{F}_e$$

MATRIZ DE RIGIDEZ

$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$	$k_{14}$	$k_{15}$
	$k_{22}$	$k_{23}$	$k_{24}$	$k_{25}$
		$k_{33}$	$k_{34}$	$k_{35}$
			$k_{44}$	$k_{45}$
				$k_{55}$

FORÇAS NODAIS

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$  TRACÇÕES APLICADAS  
 $\rightarrow$  FORÇAS DE MASSA  
 $\rightarrow$  FORÇAS NODAIS APLICADAS

4. CORRESPONDÊNCIA ENTRE FORÇAS E DESLOCAMENTOS NODAIS NOS ELEMENTOS E NA ESTRUTURA



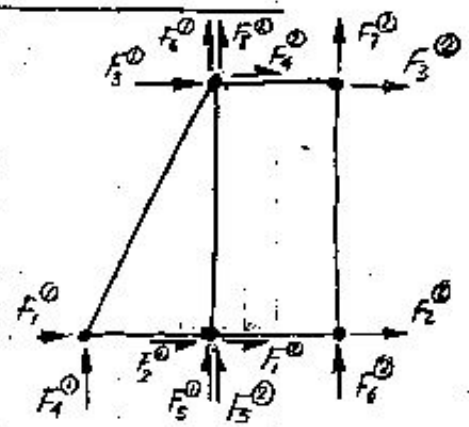
DESLOCAMENTOS E FORÇAS NOS ELEMENTOS  
CORRESPONDÊNCIA NA ESTRUTURA

EST	1	2	3	-	-	4
①	1	2	3	4	5	6

EST	2	-	-	3	-	-	5	4
②	1	2	3	4	5	6	7	8

5. DEFINIÇÃO GERAL DAS FORÇAS NA ESTRUTURA A PARTIR DAS FORÇAS NOS ELEMENTOS

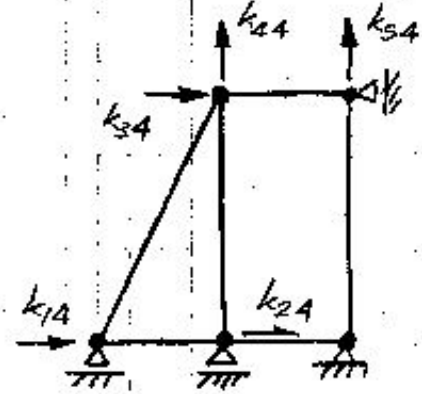
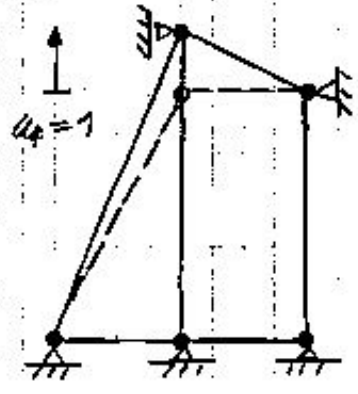
$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_1^{(1)} \\
 F_2 &= F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\
 F_3 &= F_3^{(1)} + F_4^{(2)} \\
 F_4 &= F_6^{(1)} + F_7^{(2)} \\
 F_5 &= F_7^{(2)}
 \end{aligned}$$



$$\underline{F}^t = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} & F_2^{(1)} + F_1^{(2)} & F_3^{(1)} + F_4^{(2)} & F_6^{(1)} + F_7^{(2)} & F_7^{(2)} \end{bmatrix}$$

6. DEFINIÇÃO GERAL DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA  
 A PARTIR DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

$k_{ij}$  - FORÇA  $F_i$  DEVIDA AO DESLOCAMENTO  $u_j = 1$



$k_{11} = k_{11}^{(1)} + 0$

$k_{21} = k_{21}^{(1)} + 0$

$k_{31} = k_{31}^{(1)} + 0$

$k_{41} = k_{61}^{(1)} + 0$

$k_{51} = 0 + 0$

$k_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)}$

$k_{32} = k_{32}^{(1)} + k_{41}^{(2)}$

$k_{42} = k_{62}^{(1)} + k_{21}^{(2)}$

$k_{52} = 0 + k_{71}^{(2)}$

$k_{33} = k_{33}^{(1)} + k_{44}^{(2)}$

$k_{43} = k_{63}^{(1)} + k_{54}^{(2)}$

$k_{53} = 0 + k_{74}^{(2)}$

$k_{44} = k_{66}^{(1)} + k_{88}^{(2)}$

$k_{54} = 0 + k_{78}^{(2)}$

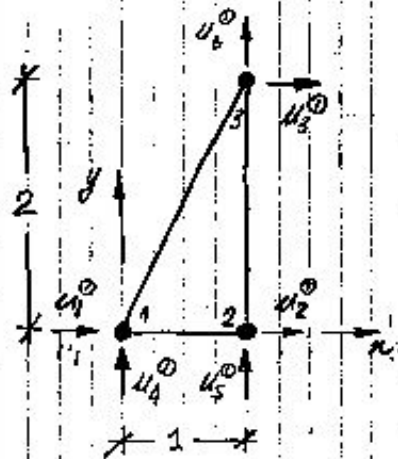
$k_{55} = 0 + k_{77}^{(2)}$

$K =$

$k_{11}^{(1)}$				
$k_{21}^{(1)}$	$k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)}$			
$k_{31}^{(1)}$	$k_{32}^{(1)} + k_{41}^{(2)}$	$k_{33}^{(1)} + k_{44}^{(2)}$		
$k_{41}^{(1)}$	$k_{62}^{(1)} + k_{21}^{(2)}$	$k_{63}^{(1)} + k_{54}^{(2)}$	$k_{66}^{(1)} + k_{88}^{(2)}$	
0	$k_{71}^{(2)}$	$k_{74}^{(2)}$	$k_{78}^{(2)}$	$k_{77}^{(2)}$

## 7. ESTUDO DO ELEMENTO ①

### 7.1 Aproximação dos deslocamentos $\underline{u} = \underline{\psi} \underline{u}^e$



$$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} \quad \text{①}$$

$$\psi_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k \quad c_i = x_k - x_j$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 1-x \\ \psi_2 &= x-\frac{1}{2}y \\ \psi_3 &= +\frac{1}{2}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &= (1-x)u_1^e + (x-\frac{1}{2}y)u_2^e + (+\frac{1}{2}y)u_3^e \\ u_y &= (1-x)u_4^e + (x-\frac{1}{2}y)u_5^e + (+\frac{1}{2}y)u_6^e \end{aligned}$$

FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

APROXIMAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

### 7.2 Aproximação das deformações $\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{u}^e$

$$\underline{\epsilon} = \underline{A} \underline{u} = \underline{A} \underline{\psi} \underline{u}^e \Rightarrow \underline{B} = \underline{A} \underline{\psi}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = (-1)u_1^e + (1)u_2^e + (0)u_3^e$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = (0)u_4^e + (-\frac{1}{2})u_5^e + (+\frac{1}{2})u_6^e$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = (0)u_1^e + (-1)u_2^e + (+1)u_3^e + (-1)u_4^e + (1)u_5^e + (0)u_6^e$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -1 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

5

7.3 Aproximacao das tensões  $\underline{s} = \underline{D} \underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e$

Estado plano de tensao:  $\underline{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$

$E = 200 \times 10^6 \text{ kPa}$   
 $\nu = 0,3$

$\underline{D} \underline{B}$

$\sigma_x$	$= E$	-1,099	1,099	0	0	-0,165	+0,165	$\text{N}^{\text{D}}$
$\sigma_y$		-0,330	0,330	0	0	-0,549	+0,549	
$\sigma_{xy}$		0	-0,192	+0,192	-0,385	0,385	0	

7.4 Matriz de rigidez  $\underline{K} = \int \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} d\Omega$

$\underline{K}^{\text{D}} = \int_0^1 \int_0^{2x} \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dy dx$

$\underline{K}^{\text{D}} = E$

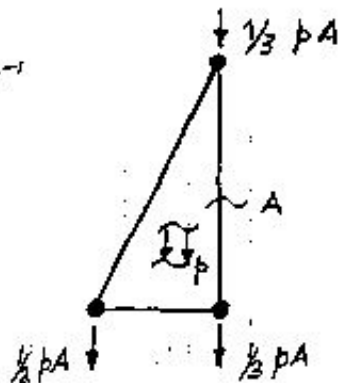
1,099							1
-1,099	1,195						2
0	0,096	0,096					3
/	/	/	/				-
/	/	/	/	/			-
-0,165	+0,165	0	/	/		0,275	4
1	2	3	-	-	4		

7.5 Forças nodais devidas as forças de massa  $\underline{F}_f = \int \underline{N}^t \underline{f} d\Omega$

$\underline{F}_f^{\text{D}} = \int_0^1 \int_0^{2x} \underline{N}^t \underline{f} dy dx$

$\underline{F} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix} \text{ kN m}^{-3}$

$$F_c^{(e)} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ - \\ - \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20/3 \\ -20/3 \\ -20/3 \end{matrix} \text{ kNm}^{-1}$$

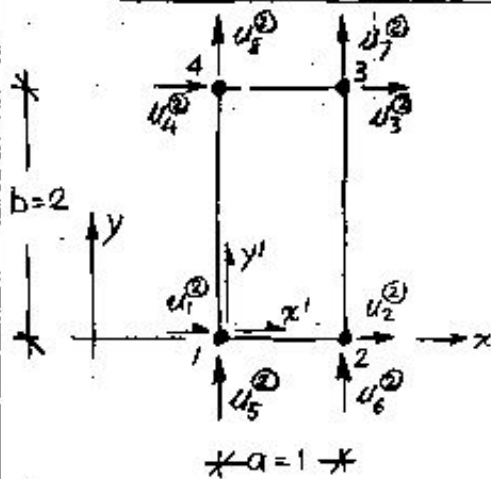


(6)

1x2  
7

### 8. ESTUDO DO ELEMENTO (2)

#### 8.1 Aproximação dos deslocamentos



$$\psi_1 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)$$

$$\xi = \frac{2x'}{a} - 1 = 2x' - 1$$

$$\eta = \frac{2y'}{b} - 1 = y' - 1$$

$$\underline{\psi} = \begin{matrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{matrix}$$

FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

$$\psi_1 = \frac{1}{2} (1-x')(2-y') \quad \psi_2 = \frac{x'}{2} (2-y') \quad \psi_3 = \frac{x'y'}{2} \quad \psi_4 = \frac{y'}{2} (1-x')$$

#### 8.2 Aproximação das deformações $\underline{e} = \underline{B} \underline{u}^{(e)}$

$$\underline{B} = \frac{1}{2} \begin{matrix} y'-2 & 2-y' & y' & -y' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & x'-1 & -x' & x' & -x' \\ x'-1 & -x' & x' & 1-x' & y'-2 & 2-y' & y' & -y' \end{matrix}$$

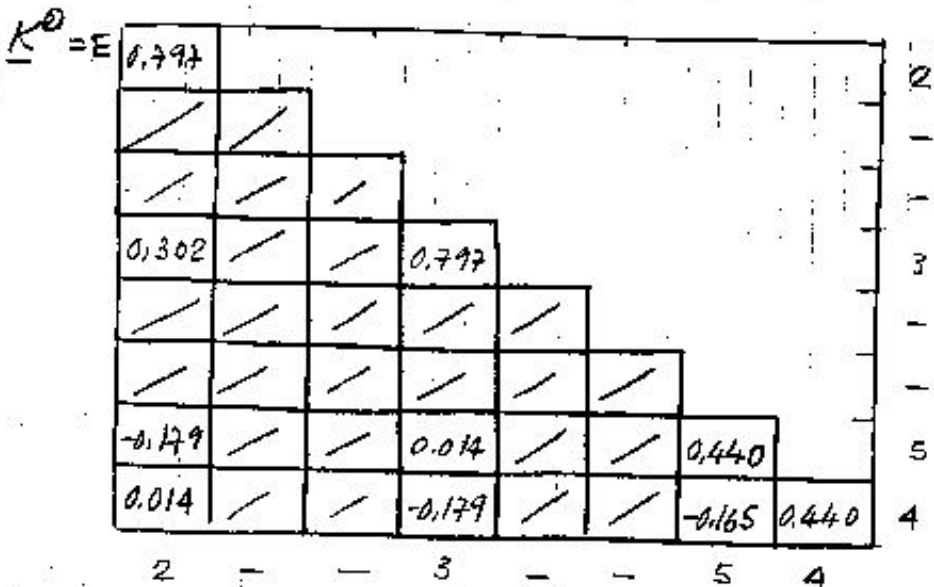
8.3 Apitrimaan dan fungsi  $s = DB da$  (7)

$DB = \frac{15E}{91}$

$\frac{10}{3}(y-2)$	$\frac{10}{3}(2-y)$	$\frac{10}{3}y'$	$-\frac{10}{3}y'$	$x-1$	$-x'$	$x'$	$1-x'$
$y'-2$	$2-y'$	$y'$	$-y'$	$\frac{10}{3}(x-1)$	$-\frac{10}{3}x'$	$\frac{10}{3}x'$	$\frac{10}{3}(1-x')$
$\frac{7}{6}(x-1)$	$-\frac{7}{6}x'$	$\frac{7}{6}x'$	$\frac{7}{6}(1-x')$	$\frac{7}{6}(y-2)$	$\frac{7}{6}(2-y)$	$\frac{7}{6}y'$	$-\frac{7}{6}y'$

8.4 Matriks dan rigidity  $K = \int B^T DB dA$

$K^{\text{el}} = \int_0^1 \int_0^2 B^T DB dy da$



51

8.5 Forças nodais dadas as forças de massa  $F_f = \int y f dy da$

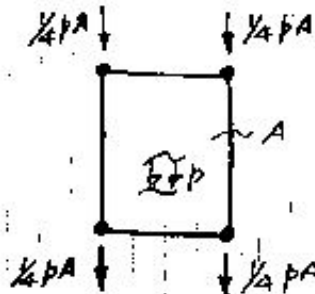
$F_f^{\text{el}} = \int_0^1 \int_0^2 y f dy da$       $f_x = 0$     $f_y = -20 \text{ kNm}^{-3}$

$\frac{20 \times 2}{4}$

$F_f^{\text{el}} =$

2	0
3	0
5	-10
4	-10

kNm<sup>-1</sup>

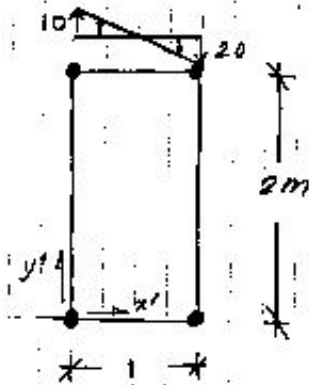


51

8.6 Forças nodais dadas as forças aplicadas  $F_t = \int \underline{\varphi}^t \underline{t} dV$  (8)

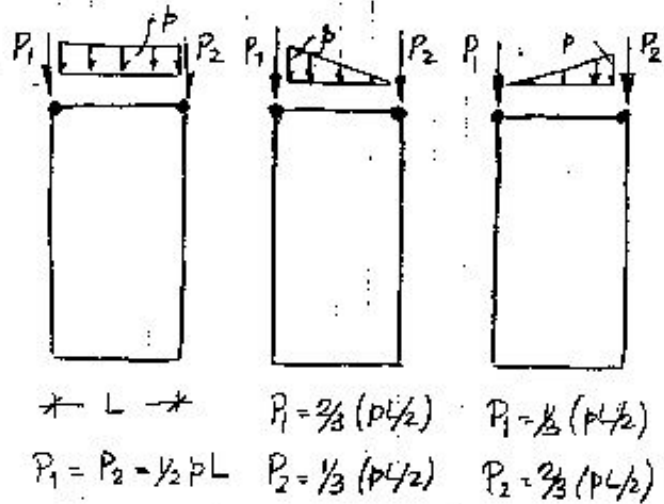
$$\underline{F}_t^{\text{el}} = \int_0^L \underline{\varphi}^t (N'=2) \underline{t} dx'$$

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10-30x' \end{bmatrix}$$



$$\underline{\varphi} (N'=2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x' & 1-x' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x' & 1-x' \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_t^{\text{el}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & - \\ 0 & - \\ 0 & 3 \\ 0 & - \\ 0 & - \\ -5 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$



9. VECTOR DAS FORÇAS NODAIS DA ESTRUTURA

$$\underline{F} = \underline{F}_N + \underline{F}_f + \underline{F}_t$$

9.1 Forças nodais aplicadas

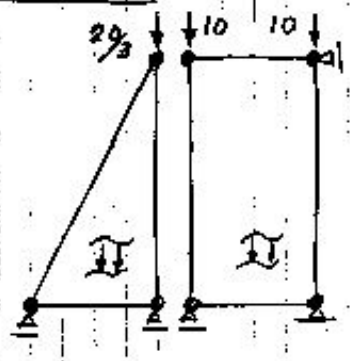
$$\underline{F}_N^{\text{el}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



9

9.2 Forças nodais devidas as forças de massa

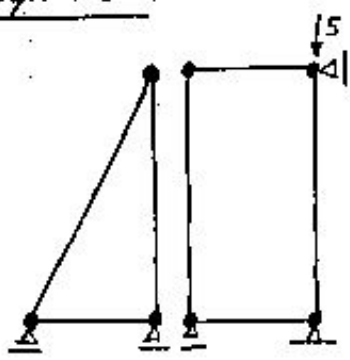
$$\frac{F}{f} = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20/3 \\ - \end{matrix} \textcircled{1} + \begin{matrix} - \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -10 \end{matrix} \textcircled{2}$$



$$\frac{F}{f} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -50/3 & -10 \end{matrix}$$

9.3 Forças nodais devidas as forças aplicadas

$$\frac{F}{t} = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \end{matrix} \textcircled{1} + \begin{matrix} - \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{matrix} \textcircled{2}$$



$$\frac{F}{t} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{matrix}$$

10. MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

$$K = E \begin{matrix} 1.099 & & & & & 1 \\ -1.099 & 1.195+0.797 & & & & 2 \\ 0 & 0.096+0.302 & 0.096+0.797 & & & 3 \\ -0.165 & +0.165+0.014 & 0 & -0.179 & 0.275+0.440 & 4 \\ & -0.179 & 0.014 & -0.165 & 0.440 & 5 \end{matrix}$$

17

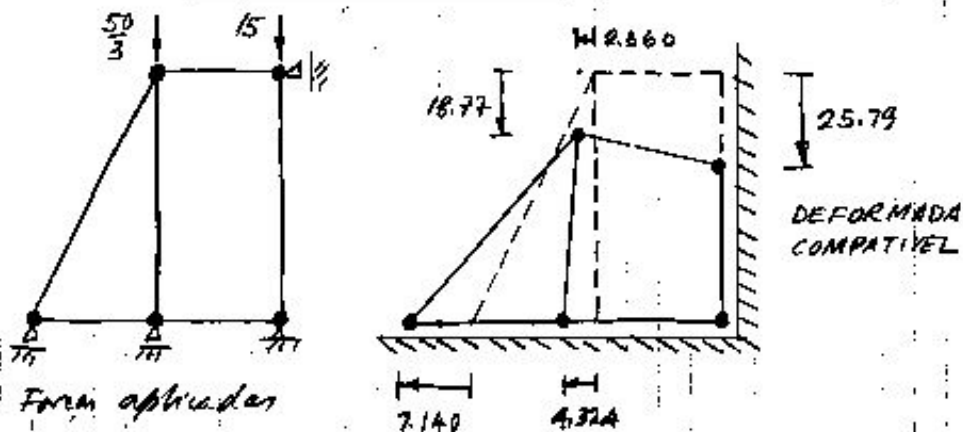
11. CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS MODAIS DA ESTRUTURA  $K_H = F$

$E$	1099	-1.099	0	-0.165	0	$u_1$	=	0
	-1.099	1992	0,206	0,179	-0,179	$u_2$		0
	0	0,206	0,893	-0,179	0,014	$u_3$		0
	-0,165	0,179	-0,179	0,715	-0,165	$u_4$		$-\frac{50}{3}$
	0	-0,179	0,014	-0,165	0,440	$u_5$		-15

219.8

$$\underline{u}^e = \begin{bmatrix} -7.140 & -4.324 & -2.360 & -18.77 & -25.79 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

12. DEFORMADA DA ESTRUTURA



13. ANÁLISE DO ELEMENTO ①

13.1 Deslocamentos nodais

$$\underline{u}^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} -7.140 & -4.324 & -2.360 & 0 & 0 & -18.77 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ m}$$

1      2      3      -      -      4

13.2 Campo de deslocamentos  $u = \psi u^e$

$$u_x = (1-x)(-7.140) + (x-\frac{1}{2}y)(-4.324) + (\frac{1}{2}y)(-2.360)$$

$$u_y = (1-x)(0) + (x-\frac{1}{2}y)(0) + (\frac{1}{2}y)(-18.77)$$

$$\begin{cases} u_x = -7.14 + 2.816x + 0.982y & (10^{-8}m) \\ u_y = -9.385y & (10^{-8}m) \end{cases}$$

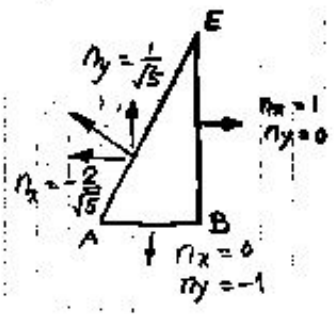
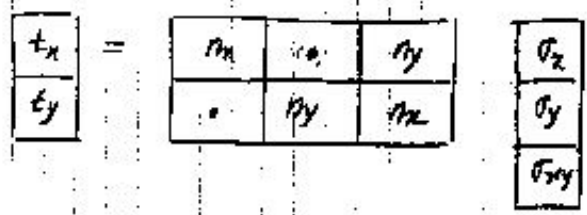
13.3 Campo de deformações  $e = B u^e$

$$\begin{cases} \epsilon_x = 2.816 & (10^{-8}) \\ \epsilon_y = -9.385 & (10^{-8}) \\ \gamma_{xy} = 0.982 & (10^{-8}) \end{cases}$$

13.4 Campo de tensões  $\sigma = DB u^e$

$$\begin{cases} \sigma_x = 0.00 & (kPa) \\ \sigma_y = -18.77 \\ \sigma_{xy} = 0.76 \end{cases}$$

13.5 Tensões em equilíbrio em as tensões  $t = Ns$



<u>AB</u>	<u>BE</u>	<u>AE</u>
$t_x = -0.76$	$t_x = 0$	$t_x = 0.34$
$t_y = 18.77$	$t_y = 0.76$	$t_y = -9.07$

(12)

13.6 Forças de massa em elementos finitos com as forças  $A^T s + f = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

14. ANÁLISE DO ELEMENTO (2) → ELEMENTO RECTANGULAR

14.1 Deslocamentos nodais

$$\underline{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} -4.324 & 0 & 0 & -2360 & 0 & 0 & -25.79 & -15.77 \end{bmatrix}$$

2      -      -      3      -      -      5      4

14.2 Campo de deslocamentos  $u = \underline{F} \underline{u}^e$

$$\begin{cases} u_x = -4.324 (1-x') + 0.982 (1-x') y' \\ u_y = -(9.385 + 3.510 x') y' \end{cases} \quad (10^{-8} m)$$

14.3 Campo de deformações  $\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{u}^e$

$$\begin{cases} \epsilon_x = 4.324 - 0.982 y' \\ \epsilon_y = -9.385 - 3.510 x' \\ \gamma_{xy} = 0.982 (1-x') - 3.510 y' \end{cases} \quad (10^{-8})$$

14.4 Campo de tensões  $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e$

$$\begin{cases} \sigma_x = 3.315 - 2.314 x' - 2.158 y' \\ \sigma_y = -17.775 - 7.714 x' - 0.647 y' \\ \sigma_{xy} = 0.9755 (1-x') - 2.697 y' \end{cases} \quad (kPa)$$

171

14.5 Tração em equilíbrio com as tensões  $\underline{t} = N/s$

(13)

BC

$$\begin{cases} t_x = -0,855 (1-x) \\ t_y = 17,775 + 7,714x \end{cases}$$

CD

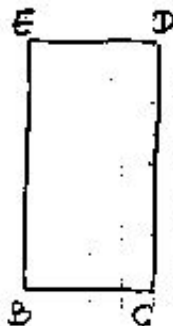
$$\begin{cases} t_x = 1,001 - 2,158y \\ t_y = -2,697y \end{cases}$$

DE

$$\begin{cases} t_x = -4,689 - 0,755x \\ t_y = -19,069 - 7,714x \end{cases}$$

BE

$$\begin{cases} t_x = -3,315 + 2,158y \\ t_y = -0,755 + 2,697y \end{cases}$$



14.5 Forças de massa em equilíbrio com as tensões  $\underline{A}^t \underline{s} + \underline{f} = \underline{0}$

$$f_x = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

$$f_y = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

$$\begin{cases} f_x = 5,008 \text{ (kNm}^{-3}\text{)} \\ f_y = 1,402 \end{cases}$$

## 15. ANÁLISE DA SOLUÇÃO

### 15.1 Admissibilidade cinemática

- As deformações são compatíveis com os deslocamentos em todos os pontos do domínio:  $\underline{\epsilon} = \underline{A} \underline{u}$  em  $\Omega$ ;
- Os deslocamentos satisfazem as condições de apoio ao longo de BCD:  $\underline{u} = \underline{u}_r$  em  $\Gamma_u$ ;
- Ha continuidade de deslocamentos entre os dois elementos, ao longo da interface BE:  $\underline{u}^{(1)} = \underline{u}^{(2)}$  em  $\Gamma_{BE}$

A solução obtida é cinematicamente admissível

15.2 Admissibilidade estática

(14)

a) As tensões calculadas não estão em equilíbrio com as forças de massa:  $\underline{A}^t + \underline{f} \neq \underline{0}$  em  $\Omega$ ,

As forças de massa dadas são  $f_x = 0, f_y = -20$ .

As forças de massa que estariam em equilíbrio com as tensões calculadas, são:

- No elemento ①,  $f_x = f_y = 0$ .

- No elemento ②,  $f_x = 5,008, f_y = 1,402$ .

b) As tensões calculadas não estão em equilíbrio com carregamento:  $\underline{N}^t \neq \underline{t}_\Gamma$  em  $\Gamma$ .

Na fronteira AE, é dado  $t_x = t_y = 0$ . As trações calculadas são  $t_x = 0,34$  e  $t_y = -9,07$ .

Na fronteira DE, é dado  $t_x = 0$  e  $t_y = 10 - 30x'$ . As trações calculadas são  $t_x = -4,639 - 0,755x'$  e  $t_y = -19,069 - 7,714x'$ .

c) As trações calculadas não estão em equilíbrio ao longo da interface BE dos elementos:  $\underline{t}^{\text{①}} + \underline{t}^{\text{②}} \neq \underline{0}$  em  $\Gamma_{BE}$ .

Na fronteira BE, do elemento ①:

$$t_x = 0$$

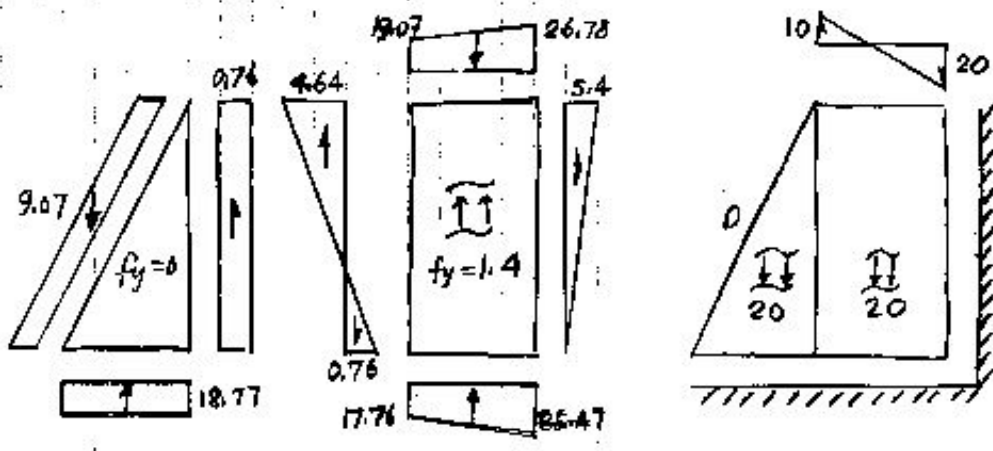
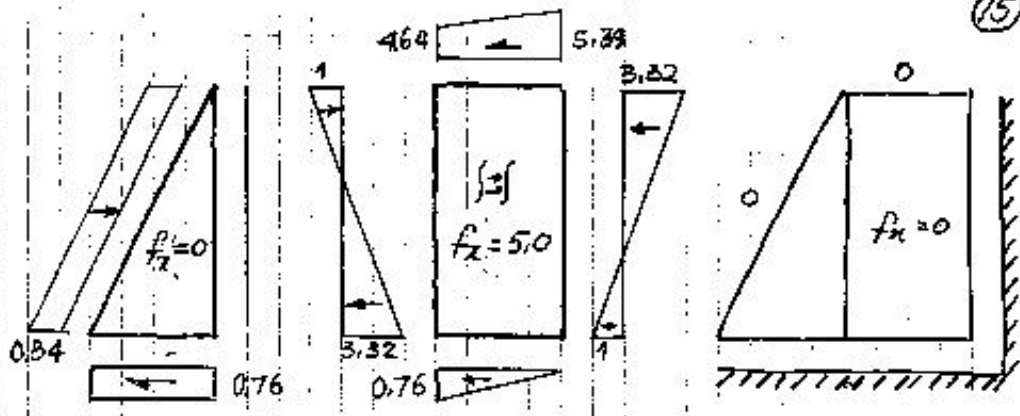
$$t_y = 0,76$$

Na fronteira BE, do elemento ②:

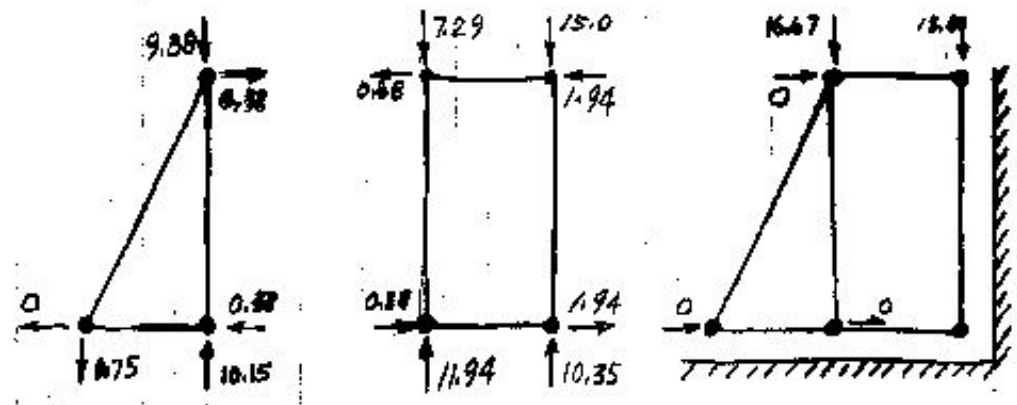
$$t_x = -9,315 + 2,158y'$$

$$t_y = -0,755 + 2,697y'$$

A solução obtida não é estaticamente admissível.



Em cada elemento verifica-se a condição de equilíbrio global:  $\Sigma F_x = 0$  ;  $\Sigma F_y = 0$  ;  $\Sigma M_3 = 0$ .



O equilíbrio verifica-se a nível das forças nodais equivalentes, em consequência da equação dos met. deslocamentos.