<u>Etapa 4</u> – Matriz de rigidez do elemento
– Vector das forças nodais equivalentes

$$K^{(1)} = \frac{EA}{3\times 1}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$p^{(1)} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 2(0+p) \\ p \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 2p \\ p \end{bmatrix}$$

<u>Etapa 5</u> – Operação de "espalhamento": Determinação da matriz de rigidez da estrutura e do vector das forças nodais equivalentes globais.

$$\mathbb{K}_{11} = \mathbb{K}_{22}^{(1)} = \frac{EA}{3}\times 16$$

(utilizando a informação contida na tabela de incidências)

$$F_1 = F_2^{(1)} = \frac{2p}{6} = \frac{p}{3}$$

(utilizando de novo a tabela de incidência)

<u>Etapa 6</u> – Resolução da equação do M.E.F.

$$\mathbb{K}_{11} d_1 = F_1 \Rightarrow \frac{EA}{3}\times 16\, d_1 = \frac{p}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_1 = \frac{p}{16EA}}$$

<u>Nota</u>: O facto de se ter obtido de novo o valor exacto para o deslocamento "nodal" deve ser encarado mais uma vez como "coincidência".

Os deslocamentos nodais obtidos através de aplicação do MEF não correspondem, regra geral, aos valores exactos.

<u>Etapa 7</u> - Condensação da solução aproximada

Da aproximação definida no elemento (1) tem-se

$$u^{(1)}(x) = 4\,x(1-x) \times \frac{P}{16EA}$$

$$\boxed{u^{(1)}(x) = \left(4x - 4x^2\right)\frac{P}{16EA}}$$

Aplicando as condições de compatibilidade resulta que:

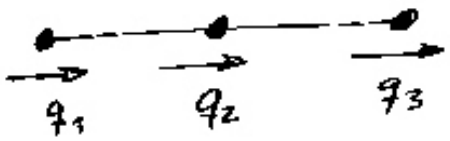
$$\varepsilon^{(1)}(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{P}{16EA}\left(4 - 8x\right)$$

A aplicação das relações de elasticidade conduz a

$$\boxed{N^{(1)}(x) = EA\,\varepsilon^{(1)}(x) = \frac{P}{16}\left(4 - 8x\right)}$$

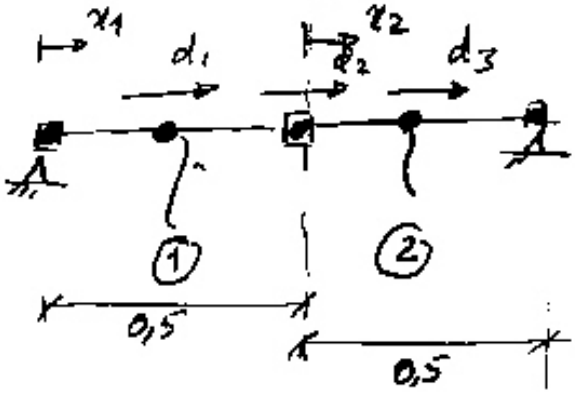
III.5 Resolução do problema com uma discretização envolvendo apenas 2 elementos finitos.

Etapa 1 - Escolha do tipo de elemento finito



[elemento com aproximação de 2º grau]

Etapa 2 - Escolha da malha de elementos finitos
- Identificação dos deslocamentos independentes



$\beta = 3$

Etapa 3 - Definição das aproximações em cada elemento
- Definição das tabelas de incidências

Elemento 1

q	q_1	q_2	q_3
d	X	d_1	d_2

$$u^{(1)}(x_1) = \psi_1(x_1)\underbrace{q_1}_{=0} + \psi_2(x_1)\underbrace{q_2}_{=d_1} + \psi_3(x_1)\underbrace{q_3}_{=d_2}$$

$$\boxed{u^{(1)}(x_1) = -\frac{4}{0{,}5^2}(x_1)\left(x_1-\frac{1}{2}\right)d_1 + \frac{2}{0.5^2}(x_1)\left(x_1-\frac{0{,}5}{2}\right)d_2}$$

No elemento 2 tem-se

q	q_1	q_2	q_3
d	d_2	d_3	X

$$u^{(2)}(x_2) = \psi_1(x_2)\underbrace{q_1}_{=d_2} + \psi_2(x_2)\underbrace{q_2}_{=d_3} + \psi_3(x_2)\underbrace{q_3}_{=0}$$

$$\boxed{u^{(2)}(x_2) = \frac{2}{0{,}5^2}\left(x_2-\frac{0.5}{2}\right)(x_2-0.5)\,d_2 - \frac{4}{0{,}5^2}(x_2)\left(x_2-\frac{0.5}{2}\right)d_3}$$

<u>Etapa 4</u> – Matrizes de rigidez elementares
– Vector das forças nodais equivalentes

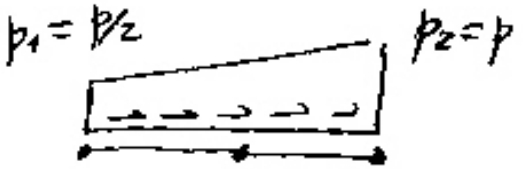
Elemento 1

$$\mathbb{K}^{(1)} = \frac{EA}{3\times 0{,}5}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$F^{(1)} = \frac{0{,}5}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ p \\ p/2 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

$$\mathbb{K}^{(2)} = \frac{EA}{3\times 0{,}5}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$



$$F^{(2)} = \frac{0{,}5}{6}\begin{bmatrix} p/2 \\ 3p \\ p \end{bmatrix}$$

<u>Etapa 5</u> – Matriz de rigidez global

Vector das forças nodais equivalente

• Cálculo utilizando apenas as tabelas de incidências

$$\mathbb{K}_{11} = K_{22}^{(1)} = \frac{EA}{1{,}5}(16)$$

$$\mathbb{K}_{12} = K_{23}^{(1)} = \frac{EA}{1{,}5}(-8)$$

$$\mathbb{K}_{13} = 0$$

$$\mathbb{K}_{22} = K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} = \frac{EA}{1{,}5}(7+7)$$

$$\mathbb{K}_{23} = K_{12}^{(2)} = \frac{EA}{1{,}5}(-8)$$

$$\mathbb{K}_{33} = K_{22}^{(2)} = \frac{EA}{1{,}5}(16)$$

3.16

$$\mathbb{K} = \frac{EA}{1{,}5}\begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 14 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

matriz de rigidez da estrutura

$$F_1 = F_2^{(1)} = \frac{0{,}5}{6} \times p$$

$$F_2 = F_3^{(1)} + F_1^{(2)} = \frac{0{,}5}{6} \times p/2 + \frac{0{,}5}{6} \times p/2 = \frac{0{,}5}{6} \times p$$

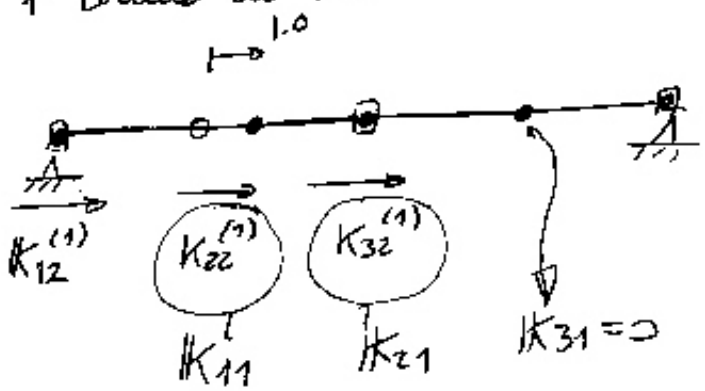
$$F_3 = F_2^{(2)} = \frac{0{,}5}{6} \times 3p$$

$$F = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} p \\ p \\ 3p \end{bmatrix}$$

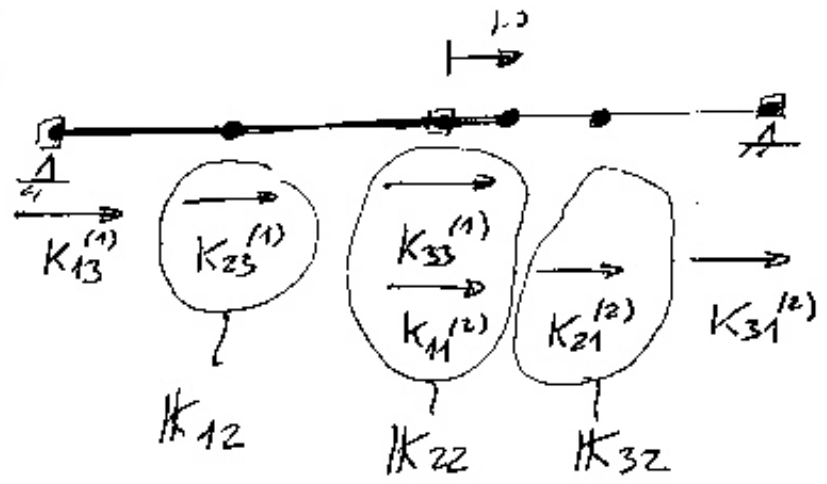
Forças nodais equivalentes globais

- Cálculo utilizando-se o significado físico de cada um dos operadores

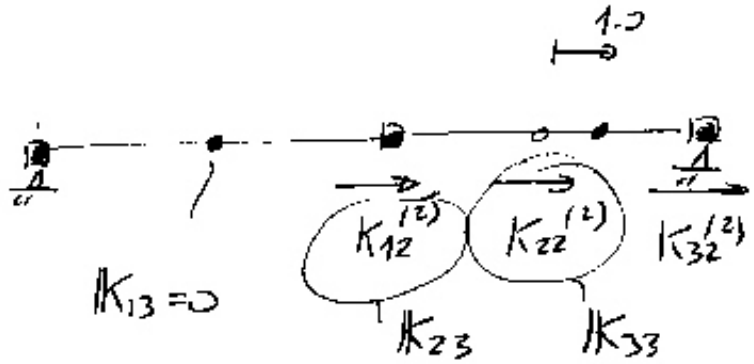
1ª coluna de $\mathbb{K}$



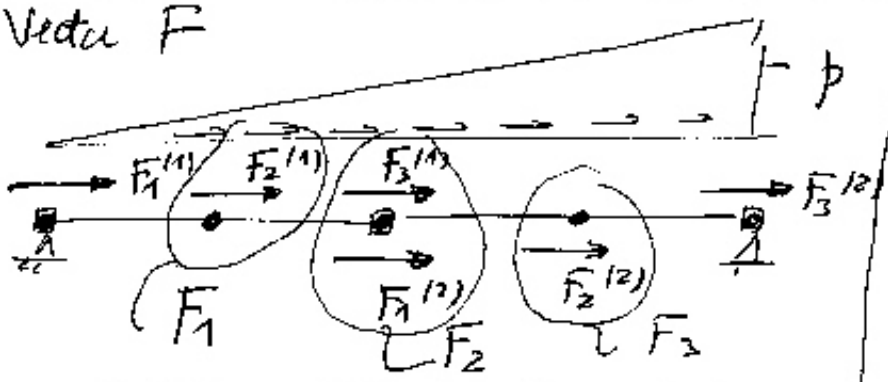
2.ª Coluna de $\mathbb{K}$



3.ª Coluna de $\mathbb{K}$



Vector F



Etapa 6 - Resolução da equação do MEF

$$\underline{\mathbb{K}}\,\underline{d} = \underline{F}$$

$$\frac{EA}{1{,}5}\begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 14 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \frac{P}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA}\begin{bmatrix} 0{,}0391 \\ 0{,}0625 \\ 0{,}0547 \end{bmatrix}$$

Etapa 7 - Caracterização da Solução Aproximada

Elemento 1

$$u^{(1)}(x) = \psi_1(x)\underbrace{q_1}_{=0} + \psi_2(x)\overbrace{q_2}^{=d_1} + \psi_3(x)\overbrace{q_3}^{=d_2}$$

Substituindo valores resulta

$$u^{(1)}(x) = \frac{1}{EA}\left[0{,}1878\,x_1 - 0{,}1256\,x_1^2\right]$$

$$\varepsilon^{(1)}(x) = \frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{EA}\left[0{,}1878 - 0.2512\,x_1\right]$$

$$N^{(1)}(x) = EA\;\varepsilon^{(1)}(x) = 0.1878 - 0.2512\,x_1$$

Elemento 2

$$u^{(2)}(x) = \psi_1(x)\underbrace{q_1}_{=d_2} + \psi_2(x)\underbrace{q_2}_{=d_3} + \psi_3(x)\underbrace{q_3}_{=0}$$

$$u^{(2)}(x) = \frac{1}{EA}\left[0.0625 + 0.0626\,x - 0.375\,x^2\right]$$

$$\varepsilon^{(2)}(x) = \frac{1}{EA}\left[0.0626 - 0.75\,x\right]$$

$$N^{(2)}(x) = 0.0626 - 0.75\,x$$