Tem-se

$$[B] = [A][\Psi] = \left[\frac{d}{dx}\right]\left[\Psi_1 \,\vdots\, \Psi_2 \,\vdots\, \Psi_3\right]$$

$$[B] = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{L^2}\right)\left(x-\frac{L}{2}\right)(x-L) \,\vdots\, \frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{L^2}\right)(x)(x-L) \,\vdots\, \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{L^2}\right)(x)\left(x-\frac{L}{2}\right)\right]$$

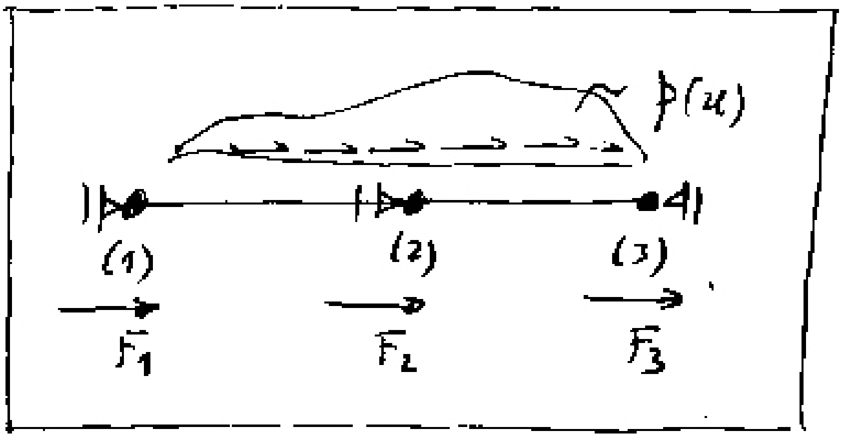
$$[B] = \left[\underbrace{\frac{1}{L^2}(4x-3L)}_{\underline{B}_1 = [A]\underline{\Psi}_1} \,\vdots\, \underbrace{\frac{4}{L^2}(L-2x)}_{\underline{B}_2 = [A]\underline{\Psi}_2} \,\vdots\, \underbrace{\frac{1}{L^2}(4x-L)}_{\underline{B}_3 = [A]\underline{\Psi}_3}\right]$$

A matriz de rigidez elementar é dada por

$$\underline{K}^{(e)} = \int_0^L \underline{B}^T \underline{D}\, \underline{B}\, dx$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2}(4x-3L) \\ \frac{4}{L^2}(L-2x) \\ \frac{1}{L^2}(4x-L) \end{bmatrix} [EA] \left[\frac{1}{L^2}(4x-3L) \,\vdots\, \frac{4}{L^2}(L-2x) \,\vdots\, \frac{1}{L^2}(4x-L)\right] dx$$

$$= \frac{EA}{3L} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} q_1=1 & q_2=1 & q_3=1 \\ q_2=q_3=0 & q_1=q_3=0 & q_1=q_2=0 \end{array} \end{array}$$



III.3 → determinação das forças nodais equivalentes

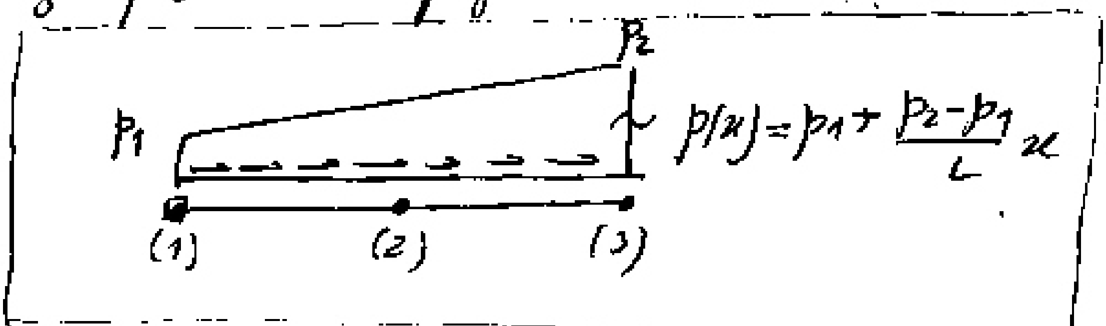
Para se determinar o valor das forças nodais equivalentes, é necessário resolver:

$$F_1 = \int_0^L \psi_1(x)\, p(x)\, dx$$

$$F_2 = \int_0^L \psi_2(x)\, p(x)\, dx$$

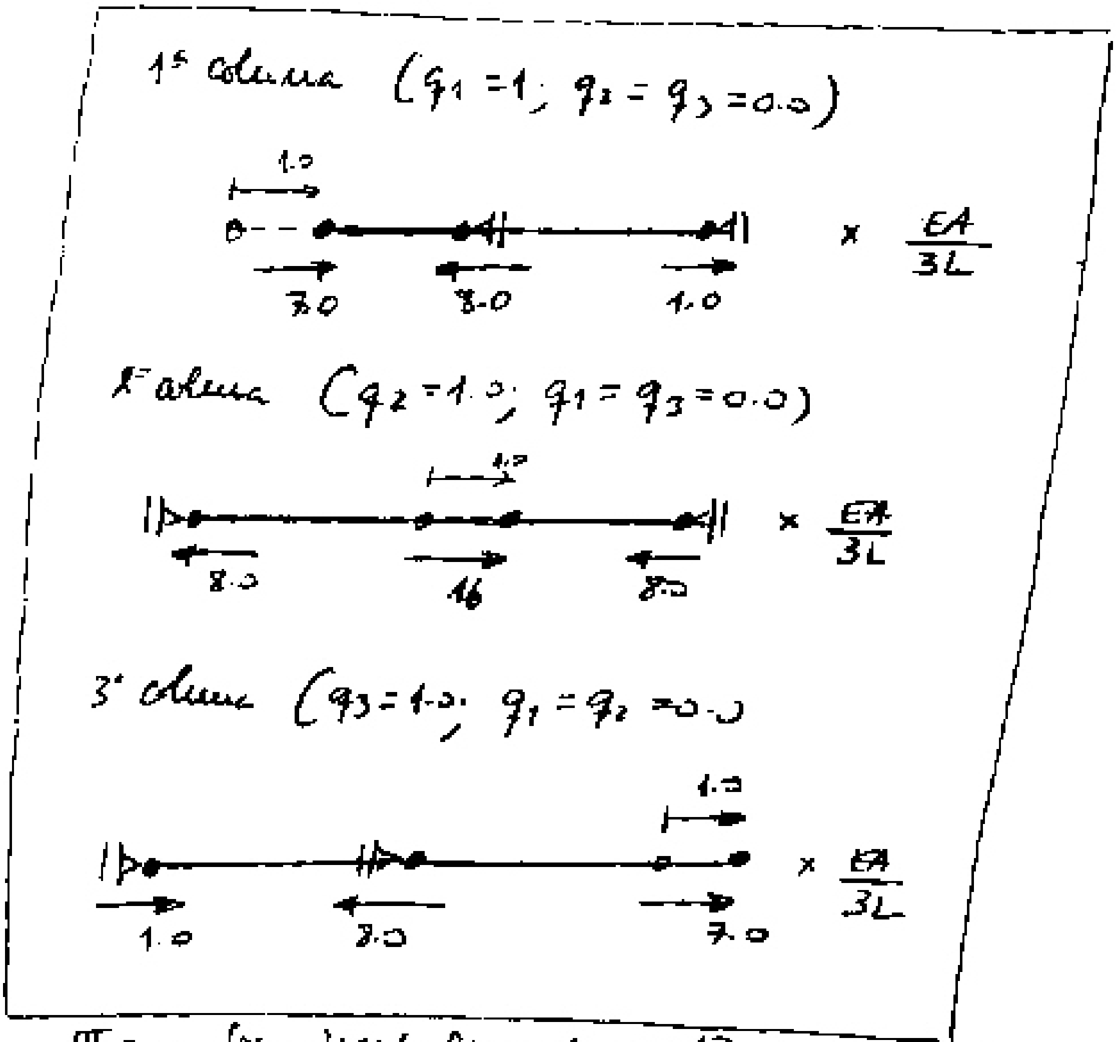
$$F_3 = \int_0^L \psi_3(x)\, p(x)\, dx$$

Particularize-se este cálculo para o caso em que a carga aplicada é "trapezoidal"



III.4 → Carga trapezoidal

Na figura seguinte apresenta-se o significado físico de cada uma das colunas da matriz de rigidez elementar.



III.2 → Significado físico da matriz de rigidez elementar

III.3 Determinação do vector das forças nodais equivalentes

Considere-se agora uma carga genérica aplicada no domínio do elemento finito, tal como se encontra representado na figura III.3

Obtém-se então

$$F_1 = \int_0^L \psi_1(x)\, p(x)\, dx = \int_0^L \frac{2}{L^2}\left(x-\frac{L}{2}\right)(x-L)\left[p_1 + \frac{p_2-p_1}{L}x\right]dx$$

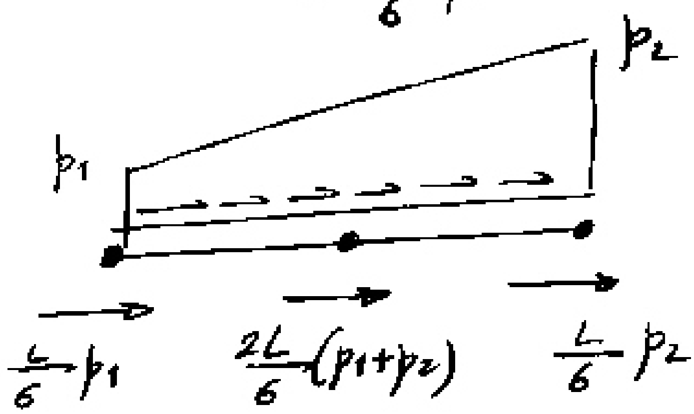
$$= \frac{L}{6} p_1$$

$$F_2 = \int_0^L \psi_2(x)\, p(x)\, dx = \int_0^L -\frac{4}{L^2}(x)(x-L)\left[p_1 + \frac{p_2-p_1}{L}x\right]dx$$

$$= \frac{2L}{6}(p_1+p_2)$$

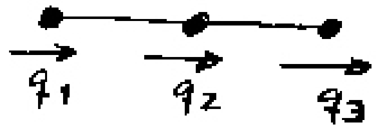
$$F_3 = \int_0^L \psi_3(x)\, p(x)\, dx = \int_0^L \frac{2}{L^2}(x)\left(x-\frac{L}{2}\right)\left[p_1 + \frac{p_2-p_1}{L}x\right]dx$$

$$= \frac{L}{6} p_2$$



III.4 <u>Resolução do problema I com uma discretização envolvendo apenas 1 elemento finito</u>

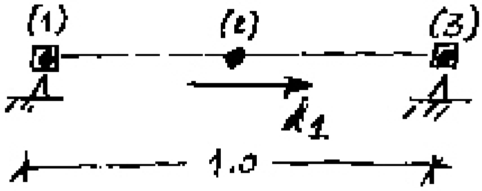
Etapa 1 — Escolha do tipo de elemento finito



{ elemento com aproximação do 2º grau

Etapa 2 — Escolha da malha de elementos finitos

— Identificação dos deslocamentos independentes



$\beta = 1$

Etapa 3 — Definição da aproximação do campo de deslocamentos em cada elemento

— Definição das tabelas de incidência

q	q_1	q_2	q_3
d	X	d_1	X

→ Deslocamentos elementares

→ Deslocamentos da estrutura

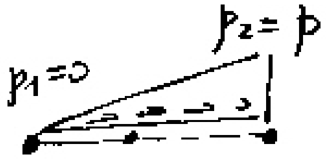
$$u^{(1)}(x) = \Psi_1(x)\underbrace{q_1}_{=0} + \Psi_2(x)\underbrace{q_2}_{=d_1} + \Psi_3(x)\underbrace{q_3}_{=0}$$

$$= +\frac{4}{1^2}(x)(1-x) \times d_1$$

Etapa 4 – Matriz de rigidez do elemento
– Vector das forças nodais equivalentes

$$K^{(1)} = \frac{EA}{3\times 1}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$F^{(1)} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 2(0+p) \\ p \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 2p \\ p \end{bmatrix}$$



Etapa 5 – Operação de "espalhamento": determinação da matriz de rigidez da estrutura e do vector das forças nodais equivalentes globais.

$$\mathbb{K}_{11} = \mathbb{K}_{22}^{(1)} = \frac{EA}{3}\times 16$$

(utilizando a informação contida na tabela de incidências)

$$F_1 = F_2^{(1)} = \frac{2p}{6} = \frac{p}{3}$$

(utilizando de novo a tabela de incidências)

Etapa 6 – Resolução da equação do M.E.F.

$$\mathbb{K}_{11} d_1 = F_1 \Rightarrow \frac{EA}{3}\times 16\, d_1 = \frac{p}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_1 = \frac{p}{16EA}}$$