No entanto, basta ter em atenção que

$$\frac{d N^{(1)}_{(x)}}{dx} = 0 \neq p(x) = p x$$

Não há equilíbrio na fronteira inter-elementar, porque o salto aí verificado no diagrama de esforço normal só poderia existir se houvesse uma carga concentrada (o que não é o caso).

III. ELEMENTOS FINITOS DE BARRA

Definição de aproximações quadráticas

III.1. Definição da aproximação do campo de deslocamentos no elemento

Para se conseguir definir uma aproximação quadrática para o campo de deslocamentos $u(x)$, é necessário considerar a existência de três deslocamentos nodais elementares. Quer isto dizer que quando se pretende definir uma aproximação deste tipo, em cada elemento é necessário definir três nós, tal como se encontra indicado na figura III.1.

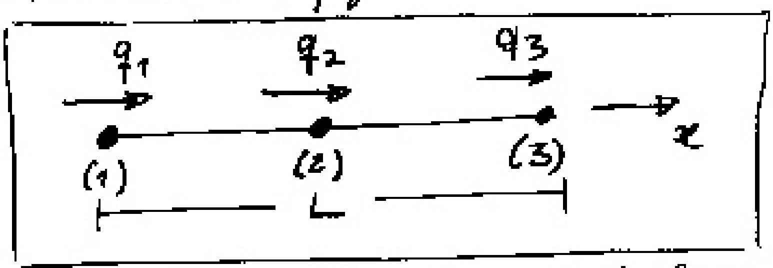
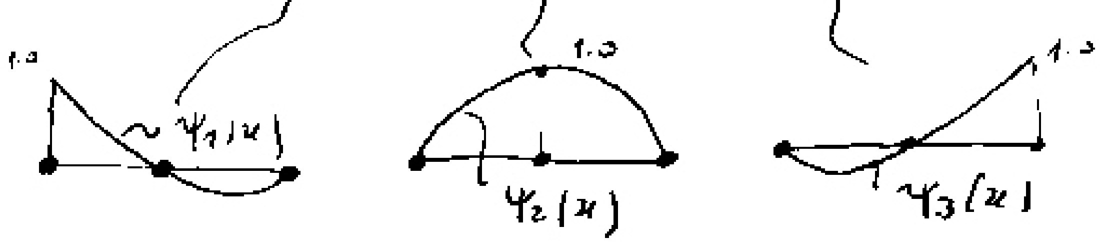


Figura III.1. Elemento de barra com aproximação quadrática

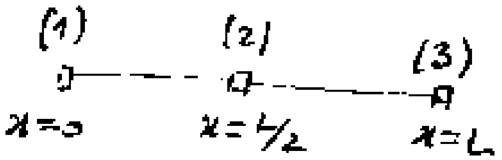
A aproximação para o campo de deslocamentos pode ser escrita então na forma:

$$u(x) = \psi_1(x)\, q_1 + \psi_2(x)\, q_2 + \psi_3(x)\, q_3 \quad (1)$$



A função de interpolação $\psi_j(x)$ é a polinómio função que toma valor unitário no nó "j" e que se anula em todos os outros nós do elemento.

Como quantificar estas funções? Comecemos pela função $\psi_1(x)$.



Como se pretende que $\psi_1(x=\frac{L}{2}) = \psi_1(x=L) = 0$, a expressão mais simples para determinar o polinómio interpolador é fornecida por:

$$\psi_1(x) = C_1\left(x-\frac{L}{2}\right)(x-L)$$

Desta forma, garantimos que $\psi_1(x)$ se anula nos nós 2 e 3 do elemento. Falta garantir que $\psi_1(x)$ toma valor unitário no nó 1. Tal consegue-se impondo

$$\psi_1(0) = 1 \Rightarrow C_1\left(0-\frac{L}{2}\right)(0-L) = 1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{L^2}{2}$$

Desta forma:

$$\boxed{\psi_1(x) = \frac{2}{L^2}\left(x-\frac{L}{2}\right)(x-L)}$$

O raciocínio envolvido na determinação das restantes funções de aproximação é em tudo análogo. Assim,

$$\psi_2(x) = C_2\, x(x-L)$$

$$\psi_3(x) = C_3\, x(x-L/2)$$

As constantes C_2 e C_3 são determinadas impondo que

$$\psi_2(x=\tfrac{L}{2}) = 1.0 \Rightarrow C_2 \times \tfrac{L}{2}\left(\tfrac{L}{2}-L\right) = 1$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{4}{L^2}$$

$$\psi_3(x=L) = 1.0 \Rightarrow C_3(L)\left(L-\tfrac{L}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{2}{L^2}$$

$$\boxed{\psi_2(x) = -\frac{4}{L^2}\, x(x-L)}$$

$$\boxed{\psi_3(x) = \frac{2}{L^2}\, x\left(x-\frac{L}{2}\right)}$$

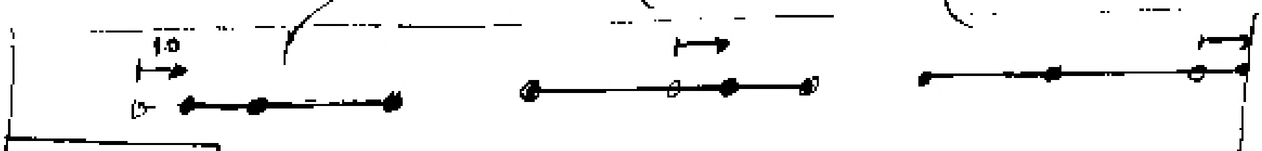
A aproximação do campo de deslocamentos pode agora ser escrita na forma

$$\underset{\sim}{u} = [\psi(x)]\,[q]$$

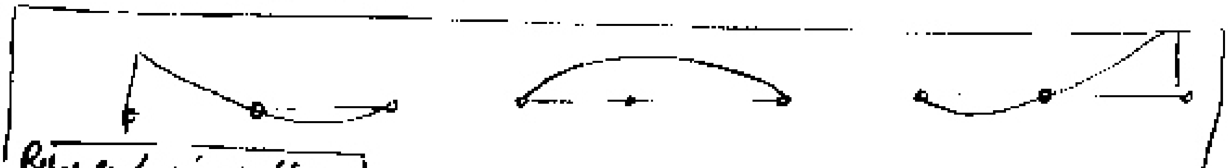
$$[u(x)] = \left[\ \psi_1(x)\ \vdots\ \psi_2(x)\ \vdots\ \psi_3(x)\ \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$[u(x)] = \left[\ \overbrace{\frac{2}{L^2}\left(x-\frac{L}{2}\right)(x-L)}^{\psi_1(x)}\ \vdots\ \overbrace{-\frac{4}{L^2}(x)(x-L)}^{\psi_2(x)}\ \vdots\ \overbrace{\frac{2}{L^2}(x)\left(x-\frac{L}{2}\right)}^{\psi_3(x)}\ \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$q_1 = 1.0$, $q_2 = q_3 = 0$ $\qquad$ $q_2 = 1.0$, $q_1 = q_3 = 0$ $\qquad$ $q_3 = 1.0$, $q_1 = q_2 = 0$

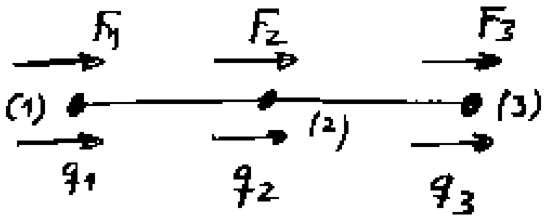


Deformadas



Representação gráfica

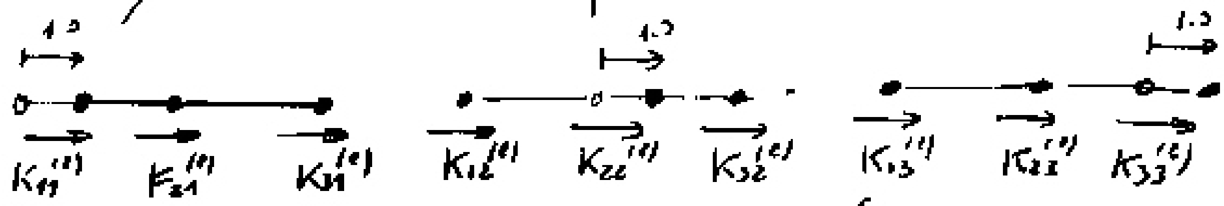
III.2 Determinação da Matriz de Rigidez Elementar



Tendo em conta o nº de deslocamentos nodais elementares, a matriz de rigidez deste tipo de elemento tem 3 linhas e 3 colunas. Relaciona as três forças nodais equivalentes, F_1 F_2 e F_3, com os

3 deslocamentos independentes, q_1, q_2 e q_3.

$$\mathbb{K}^{(e)} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbb{K}_{11}^{(e)} & \mathbb{K}_{12}^{(e)} & \mathbb{K}_{13}^{(e)} \\ \mathbb{K}_{21}^{(e)} & \mathbb{K}_{22}^{(e)} & \mathbb{K}_{23}^{(e)} \\ \mathbb{K}_{31}^{(e)} & \mathbb{K}_{32}^{(e)} & \mathbb{K}_{33}^{(e)} \end{array}\right]$$



$(q_1 = 1.0;\ q_2 = q_3 = 0)$ $(q_2 = 1.0;\ q_1 = q_3 = 0)$ $(q_3 = 1.0;\ q_1 = q_2 = 0)$

Para se calcular cada um dos elementos desta matriz de rigidez elementar, é necessário utilizar a equação

$$K_{ij}^{(e)} = \int_0^L \underline{B_i}^T \underline{D}\ \underline{B_j}\, dx$$

A matriz de operadores elásticos, $\underline{D}$, é para este tipo de estruturas dada por:

$$[D] = [EA]$$

A matriz $[B]$ reúne as deformações que regem em cada uma das deformadas elementares.