Pretende-se substituir o carregamento aplicado no domínio do elemento ($p(x)$) por forças nodais (F_1 e F_2) que lhes sejam estaticamente equivalentes.

Para tal, é necessário garantir que, qualquer que seja a deformada considerada, o trabalho realizado pelas cargas aplicadas é igual ao trabalho realizado pelas forças nodais equivalentes.

Aplicando esta restrição à deformada 1, pode escrever-se

$$\underbrace{F_1 \times 1 + F_2 \times 0}_{\text{Trabalho das forças nodais}} = \underbrace{\int_0^L u^{(1)}(x)\, p(x)\, dx}_{\text{Trabalho das cargas aplicadas}} = \int_0^L \psi_1(x)\, p(x)\, dx$$

Assim,

$$\boxed{F_1 = \int_0^L \psi_1(x)\, p(x)\, dx}$$

Aplicando o mesmo procedimento à segunda das deformadas é possível escrever:

$$F_1 \times 0 + F_2 \times 1 = \int_0^L u^{(2)}(x)\, p(x)\, dx = \int_0^L \psi_2(x)\, p(x)\, dx$$

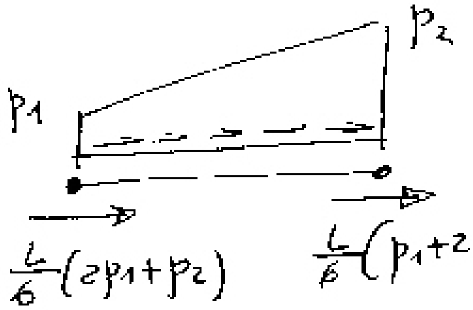
$$\boxed{F_2 = \int_0^L \psi_2(x)\, p(x)\, dx}$$

2.10

De forma genérica, pode escrever-se

$$\boxed{\underline{F} = \int_V [\psi]^t [p] \, dV}$$

Considere-se uma carga trapezoidal



$$p(x) = p_1 + \frac{p_2-p_1}{L} x$$

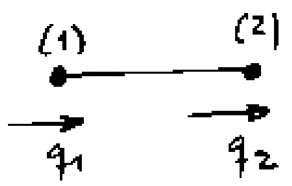
A aplicação das igualdades anteriores permite determinar

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} 1-x/L \\ \hline x/L \end{bmatrix} \left[p_1 + \frac{p_2-p_1}{L} x \right] dx$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p_1+p_2 \\ p_1+2p_2 \end{bmatrix} \frac{L}{6}$$

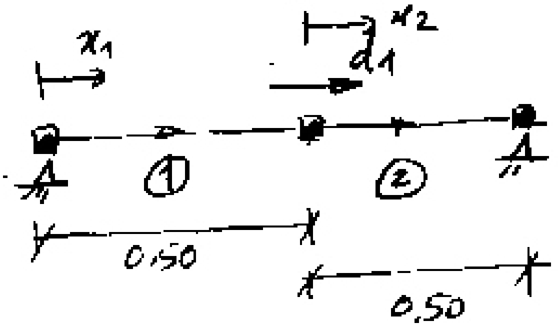
II.4. Resolução numérica do problema proposto em I, com uma discretização envolvendo 2 elementos finitos (com aproximação linear)

Etapa 1 – Escolha do tipo de elemento finito



[elemento de base em aproximação linear]

Etapa 2 – Escolha da malha de elementos finitos
– Identificação dos deslocamentos independentes



$\beta = 1$

Etapa 3 – Definição da aproximação do campo de deslocamentos em cada elemento
– Definição das tabelas de incidência

Elemento 1

q	q_1	q_2
d	X	d_1

$$u^{(1)}(x) = \left(1 - \frac{x}{0{,}5}\right)\underbrace{q_1}_{=0} + \left(\frac{x}{0{,}5}\right)\overbrace{q_2}^{=d_1}$$

2.12

$$u^{(1)}(x) = 2x \, d_1$$

Elemento 2

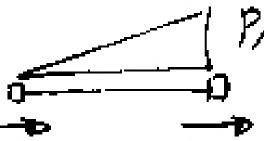
q	q_1	q_2
d	d_1	X

$$u^{(2)}(x) = \left(1 - \frac{x}{0.5}\right) \underbrace{q_1}_{=d_1} + \left(\frac{x}{0.5}\right) \underbrace{q_2}_{=0}$$

$$u^{(2)}(x) = (1 - 2x) d_1$$

Etapa 4 – Matrizes de rigidez elementares
– Forças nodais equivalentes

$$K^{(1)} = \frac{EA}{0.5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad K^{(2)} = \frac{EA}{0.5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\frac{0.5}{6}(P/2) \qquad \frac{0.5}{6}(2 \times P/2) \qquad \frac{0.5}{6}(2 \times P/2 + P) \qquad \frac{0.5}{6}(P/2 + 2 \times P)$$

$$F^{(1)} = \frac{0.5}{6} \begin{bmatrix} P/2 \\ P \end{bmatrix} \qquad F^{(2)} = \begin{bmatrix} 2P \\ 2.5P \end{bmatrix} \times \frac{0.5}{6}$$

Etapa 5 – Determinação da matriz de rigidez da estrutura
– Determinação das forças nodais globais

$$\mathbb{K}_{11} = \mathbb{K}_{22}^{(1)} + \mathbb{K}_{11}^{(2)} = 2EA + 2EA = 4EA$$

$$F_1 = F_2^{(1)} + F_1^{(2)} = \frac{0.5}{6}\left[p + 2p\right] = p/4$$

<u>Etapa 6</u> – Resolução da equação do M.E.F.

$$[\mathbb{K}_{11}][d_1] = [F_1]$$

$$[4EA][d_1] = [p/4] \Rightarrow \boxed{d_1 = \frac{p}{16EA}}$$

NOTA: O facto de se ter obtido o valor exacto para o deslocamento "nodal" deve ser encarado como "mera coincidência". Os deslocamentos nodais obtidos através da aplicação do MEF não correspondem, regra geral, aos valores exactos.

<u>Etapa 7</u> – Caracterização da solução aproximada

<u>Elemento 1</u>

$$u^{(1)}(x_1) = 2x_1 \times \frac{p}{16EA} = \frac{p}{8EA}x_1$$

$$\varepsilon^{(1)}(x_1) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{p}{8EA}$$

$$N^{(1)}(x_1) = p/8$$

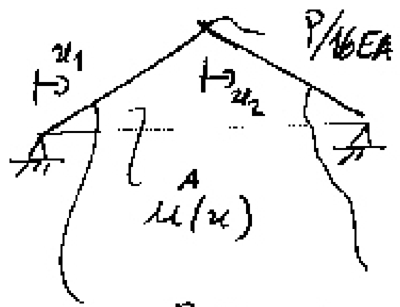
2.14

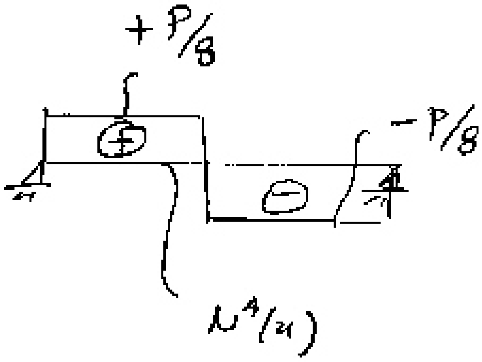
Elemento 2

$$u^{(2)}(x_2) = (1-2x_2)\frac{P}{16EA}$$

$$\varepsilon^{(2)}(x_2) = -\frac{P}{8EA}$$

$$N^{(2)}(x_2) = -\frac{P}{8}$$





$$u(x_1) = \frac{P}{8EA}x_1 \qquad u(x_2) = (1-2x_2)\frac{P}{16EA}$$

Como se pode verificar de imediato que a solução obtida não é a exacta?

Basta verificar que não existe equilíbrio local; não estão satisfeitas as condições de equilíbrio no domínio e na fronteira.

Para haver equilíbrio no domínio, seria necessário garantir que

$$p(x) + \frac{dN(x)}{dx} = 0 \Rightarrow p(x) = -\frac{dN(x)}{dx}$$