(x) é a função de interpolação associada ao nó e toma um valor unitário nesse mesmo nó e igual a zero em todos os outros nós do elemento.

De uma forma genérica, pode escrever-se que

$$[u] = [\psi][q]$$

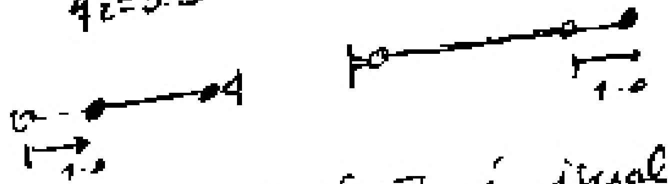
$[u]$ — campos de deslocamentos a aproximar

$[\psi]$ — matriz das funções de aproximação

$[q]$ — deslocamentos nodais elementares

No caso da aproximação acima definida tem-se:

$$[u(x)] = \left[\underbrace{(1 - x/L)}_{\substack{q_1 = 1.0 \\ q_2 = 0.0}} \;\vdots\; \underbrace{x/L}_{\substack{q_2 = 1.0 \\ q_1 = 0.0}} \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ \hdashline q_2 \end{bmatrix}$$



O número de linhas de $[\psi]$ é igual ao número de campos de deslocamentos a aproximar (neste caso é apenas um, $u(x)$).

O número de colunas de $[\psi]$ é igual ao número de deslocamentos nodais elementares (neste elemento, 2).

A coluna "j" da matriz $[\psi]$ tem um significado físico claro: corresponde ao campo de deslocamentos considerado por $q_j = 1.0$ e $q_i = 0$ $(i \neq j)$.

2.4.

Como calcular as deformações que surgem no elemento finito? Basta para tal utilizarem-se as condições de compatibilidade:

$$[\varepsilon] = [A][u]$$
$$= [A][\Psi][q] = [B][q]$$

Particularizando para o elemento em estudo vem:

$$[\varepsilon(x)] = \left[\frac{d}{dx}\right]\left[\Psi_1(x) \;\vdots\; \Psi_2(x)\right]\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{d}{dx}(1-x/L) \;\vdots\; \frac{d}{dx}(x/L)\right]\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon(x)] = \underbrace{\left[-1/L \;\vdots\; \frac{1}{L}\right]}_{\underline{B}}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

A matriz $\underline{B}$ tem um número de linhas dado pelo número de campos de deformações utilizados para caracterizar o comportamento da peça (neste caso, apenas $\varepsilon(x)$).

O número de colunas de $\underline{B}$ é igual ao número de deslocamentos nodais elementares. A coluna "j" de B reúne as deformações associadas à deformada onde $q_j = 1.0$ e $q_i = 0.0$ $(i \neq j)$.

Os esforços no elemento finito em estudo são dados por:

$$[s(x)] = [D][\varepsilon]$$

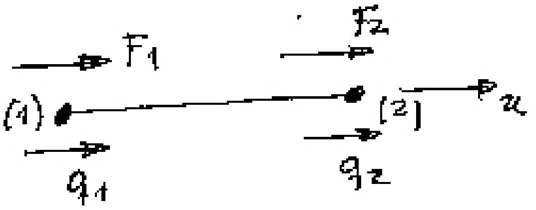
$$= [D][B]\{q\}$$

Para o caso do elemento de barra vem

$$[N(x)] = [EA]\left[-1/L \;\vdots\; 1/L \right] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$[N(x)] = \underbrace{\left[-\frac{EA}{L} \;\Big|\; \frac{EA}{L} \right]}_{[D][B]} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{II.2}}$ Determinação da matriz de rigidez elementar



A matriz de rigidez elementar relaciona as forças nodais equivalentes (F_1, F_2) com os deslocamentos nodais elementares (q_1, q_2).

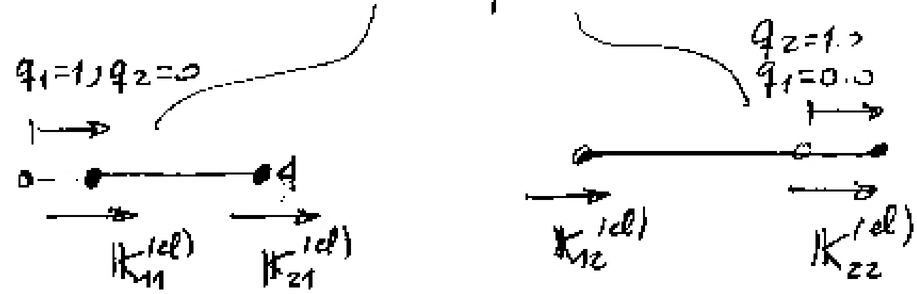
De um ponto de vista geral, uma matriz de rigidez elementar é uma matriz quadrada com

2.6

β linhas e β colunas, onde β é o nº de deslocamentos nodais definidos no elemento em causa.

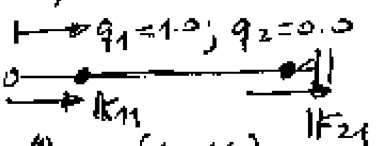
Neste caso

$$\mathbb{K}^{(el)} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} \end{array}\right]$$



Como determinar o valor numérico dos coeficientes da matriz de rigidez elementar? Considere-se para tal efeito a informação contida no quadro seguinte

Deformada 1

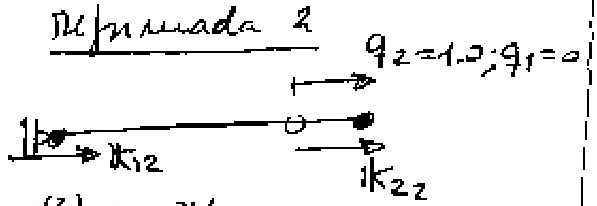


$$u^{(1)}(x) = (1 - x/L)$$

$$\varepsilon^{(1)}(x) = \underline{B}_1 = -1/L$$

$$N^{(1)}(x) = \underline{D}\,\underline{B}_1 = -\frac{EA}{L}$$

Deformada 2



$$u^{(2)}(x) = x/L$$

$$\varepsilon^{(2)}(x) = \underline{B}_2 = +1/L$$

$$N^{(2)}(x) = \underline{D}\,\underline{B}_2 = \frac{EA}{L}$$

Quadro resumo II.1

Considere-se agora que os esforços na deformada 1 ($N^{(1)}(x)$) estão em equilíbrio com as correspondentes forças nodais equivalentes ($\mathbb{K}_{11}$ e $\mathbb{K}_{21}$).

As deformações $\varepsilon^{(2)}(x)$ são compatíveis com o campo de deslocamentos na deformada 2 ($u^{(2)}(x)$).

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, pode escrever-se

$$W_{ext} = W_{int}$$

{ NOTA: As forças e esforços são os que existem na deformada 1. Os deslocamentos e as deformações são os que existem na deformada 2 }

com

$$W_{ext} = \mathbb{K}_{11} \times 0 + \mathbb{K}_{21} \times 1$$

$$W_{int} = \int_0^L \varepsilon^{(2)}(x)\, N^{(1)}(x)\, dx$$

$$= \int_0^L \underline{B}_2^T \underline{D}\, \underline{B}_1\, dx$$

$$= \int_0^L \left[+\frac{1}{L}\right]\left[EA\right]\left[-\frac{1}{L}\right] dx = -\frac{EA}{L}$$

De um ponto de vista geral, o elemento $\mathbb{K}_{ij}$ da matriz de rigidez elementar pode ser determinado através da igualdade

$$\boxed{\mathbb{K}_{ij}^{(el)} = \int_V \underline{B}_i^T \underline{D}\, \underline{B}_j\, dV}$$

2.8

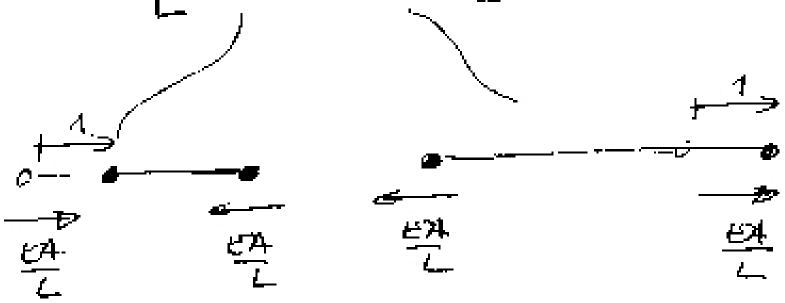
De forma compacta vem:

$$\boxed{\mathbb{K}^{(e)} = \int \underline{B}^T \, \underline{D} \, \underline{B} \, dV}$$

No caso em análise,

$$\mathbb{K}^{(e)} = \int_0^L \begin{bmatrix} -1/L \\ \hline 1/L \end{bmatrix} \left[EA \right] \left[-1/L \;\middle|\; 1/L \right] dx$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\[2ex] -\dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{array} \right]$$



$\boxed{II.3.}$ Determinação das forças nodais equivalentes