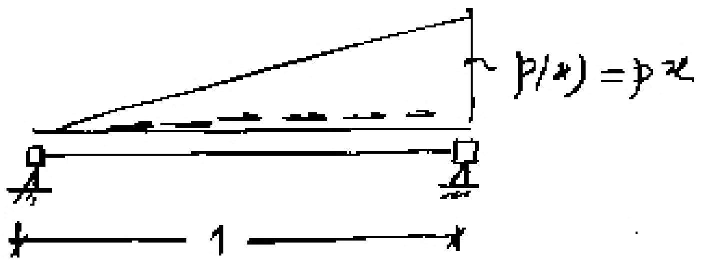
I. ELEMENTOS FINITOS DE BARRA

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

I.1. Definição da estrutura a analisar

Considere-se a estrutura e o carregamento apresentados na figura I.1.



I.1. → Estrutura a analisar

Pretende-se determinar uma solução aproximada para este problema, utilizando para tal a metodologia própria do Método dos Elementos Finitos.

Antes de se efectuar qualquer cálculo, é necessário determinar quais as grandezas necessárias para caracterizar o comportamento deste tipo de estruturas. É também importante estabelecer as condições – compatibilidade, elasticidade e equilíbrio – que permitem relacionar aquelas grandezas.

1.2

II.2 - grandezas e relações fundamentais

Esforços — ELASTICIDADE — Deformações

$N(x)$ — $N(x) = EA\,\varepsilon(x)$ — $\varepsilon(x)$

EQUILÍBRIO: $\dfrac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0$

COMPATIBILIDADE: $\varepsilon(x) = \dfrac{du(x)}{dx}$

$p(x)$ — Cargas Aplicadas

$u(x)$ — Deslocamentos

De forma genérica, o esquema anterior pode ser apresentado na forma:

Campos de Esforços — Campos de Deformações

$\underset{\sim}{s}$ — $\underset{\sim}{s} = [D]\,\underset{\sim}{e}$ — $\underset{\sim}{e}$

$[A]^T[s] + [f] = 0$

$\underset{\sim}{e} = [A]\,\underset{\sim}{u}$

$\underset{\sim}{f}$ — Cargas aplicadas

$\underset{\sim}{u}$ — Campos de deslocamentos

No caso particular dos elementos de barra tem-se:

$$\underset{\sim}{u} = [u(x)] \qquad \underset{\sim}{f} = [p(x)] \qquad [D] = [EA]$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = [\varepsilon(x)] \qquad \underset{\sim}{s} = [N(x)] \qquad [A] = \left\{ \frac{d}{dx} \right]$$

I.3. Obtenção da solução exacta

Para se poder avaliar a qualidade das soluções aproximadas que se pretendem determinar, é possível neste caso obter a solução exacta para o problema proposto.

A equação da barra pode ser obtida através da combinação das condições de compatibilidade, elasticidade e equilíbrio. Tem-se então

$$\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[EA\,\varepsilon(x)\right] + p(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[EA\,\frac{du(x)}{dx}\right] + p(x) = 0$$

$$EA\,\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -p(x) \implies \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{p(x)}{EA}$$

1.1.

Integrando, obtém-se sucessivamente

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{px}{EA}$$

$$\frac{du(x)}{dx} = -\frac{px^2}{2EA} + C_1$$

$$u(x) = -\frac{px^3}{6EA} + C_1 x + C_2$$

Impondo agora as condições de fronteira vem:

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$u(1) = 0 \Rightarrow -P/_{6EA} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{P}{6EA}$$

$$u(x) = -\frac{px^3}{6EA} + \frac{p}{6EA}x$$

$$\boxed{u(x) = \frac{P}{6EA}\left[x - x^3\right]}$$

Solução exacta
Campo de deslocamentos

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{P}{6EA}\left[1 - 3x^2\right]$$

$$\boxed{N(x) = \frac{P}{6}\left[1 - 3x^2\right]}$$

Solução exacta
Campo de esforços

II. ELEMENTOS FINITOS DE BARRA

Definição de aproximação linear

[II.1] Definição da aproximação do campo de deslocamentos no elemento

Considere-se que a estrutura em análise é sub-dividida num conjunto de elementos finitos de barra, do tipo do que é apresentado na figura II.1

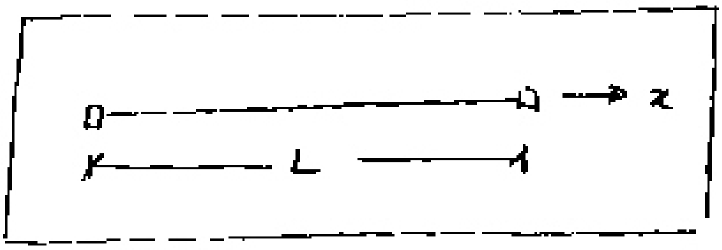


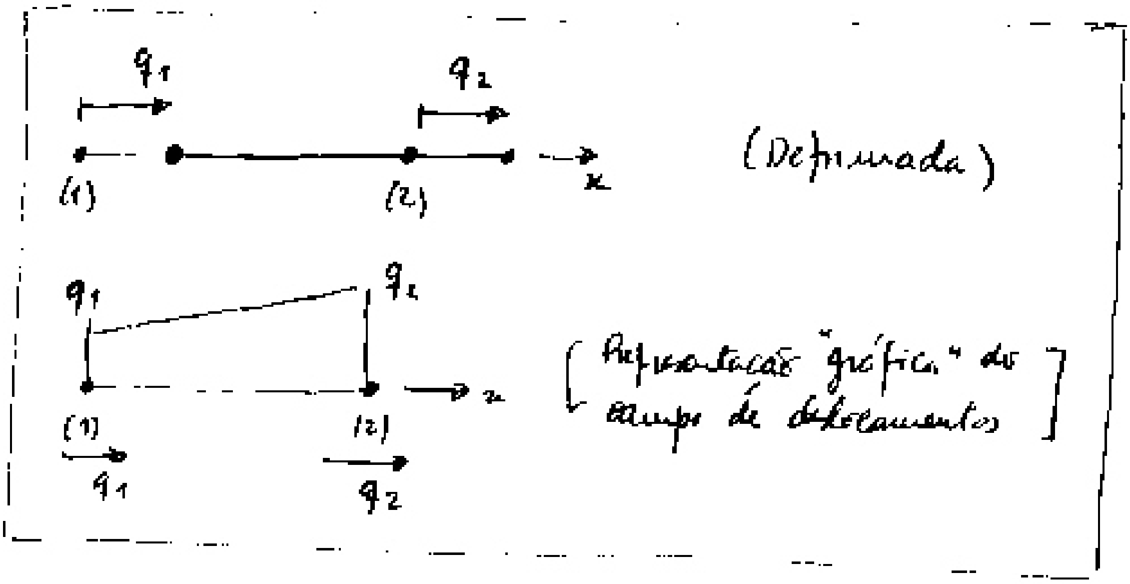
Figura II.1 - Elemento Finito de Barra

É necessário agora definir qual a aproximação a considerar para o campo de deslocamentos, $u(x)$. A solução mais simples consiste em considerar uma aproximação linear. Para a definir, são necessários dois "pontos de passagem". Isto equivale a dizer que neste elemento deverão ser considerados dois nós.

Utilizando os conceitos de interpolação nodal, a aproximação pretendida para o campo $u(x)$ vai

2.2.

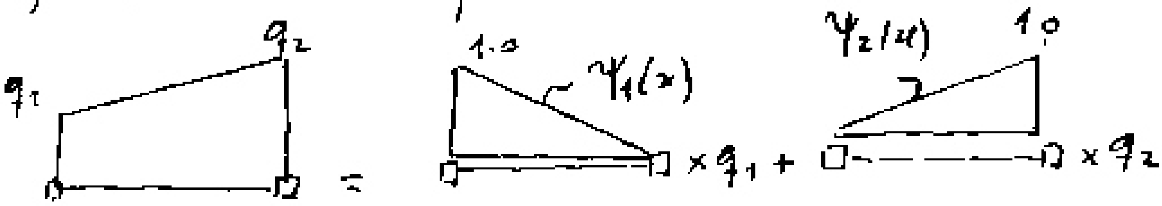
se construída com base no valor que essa grandeza toma nas extremidades (nós) do elemento finito.



Pode então escrever-se

$$u(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L}\, x$$

ou, tendo em conta que



$$u(x) = \Psi_1(x) \times q_1 + \Psi_2(x)\, q_2$$

$$\boxed{u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) q_1 + \left(\frac{x}{L}\right) q_2}$$