



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

ANÁLISE ESTRUTURAL DE ARCOS, ABÓBADAS E CÚPULAS
Contributo para o Estudo do Património Construído

António Manuel Candeias de Sousa Gago
(Mestre)

Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil

Orientador: Doutor António Ressano Garcia Lamas

Júri:

Presidente: Reitor da Universidade Técnica de Lisboa

Vogais: Doutor António Ressano Garcia Lamas

Doutor José Manuel Caré Baptista Viegas

Doutor João José Rio Tinto de Azevedo

Doutor Aníbal Guimarães da Costa

Doutor Artur Vieira Pinto

Doutor Jorge Manuel Vinagre Alfaiate

Engenheiro João Augusto da Silva Appleton

Dezembro de 2004

À memória dos meus pais

RESUMO

O crescente interesse na recuperação do património construído exige o domínio de meios de previsão do comportamento estrutural dos edifícios antigos. Os instrumentos correntemente aplicados na análise das estruturas modernas mostram-se inadequados para construções antigas em alvenaria, particularmente para estruturas arqueadas (arcos, abóbadas e cúpulas), sendo necessário desenvolver novos modelos e ferramentas. Este é o principal objectivo do presente trabalho.

Os antigos métodos de análise são recuperados, corrigidos, justificados e desenvolvidos à luz da mecânica estrutural actual, de modo a obter metodologias simples que permitam avaliações preliminares e valores de referência para análises numéricas.

Os modernos modelos computacionais, que possibilitam a simulação de comportamentos não lineares, são estudados e calibrados de modo a adaptá-los às estruturas das construções antigas. Os métodos dos elementos finitos e discretos são aplicados na modelação de estruturas arqueadas reais, com vista a identificarem-se os parâmetros mais relevantes e as suas principais características.

Apresentam-se, também, resultados experimentais obtidos em ensaios de um modelo à escala real, os quais permitem a calibração de modelos numéricos.

Os modelos e metodologias desenvolvidos e aperfeiçoados são depois aplicados no estudo das patologias estruturais de um edifício monumental real - a igreja de São Francisco, em Évora.

ABSTRACT

The increasing interest in the conservation of architectural heritage requires the ability for the simulation of the structural behaviour of old buildings. The design methods applied in the analysis of modern structures are unsuitable for old masonry buildings, particularly for arched structures (arcs, vaults and domes), hence the necessity to develop new methods and tools. This is the main objective of the present work.

In order to develop simple methodologies for preliminary evaluations and reference values for numerical analyses, old methods of analysis are recovered, corrected, justified and developed using the concepts of modern structural mechanics.

Recent computational models are studied and calibrated in order to adapt them to old structures. Finite and discrete elements methods are applied in the simulation of arched structures, aiming at identifying the most important parameters and their main characteristics.

Results from experimental tests carried out on a full scale model are presented. They allow the calibration of numerical models.

The developed models and methodologies are applied in the study of the church of São Francisco, in Évora, where structural damages are visible.

PALAVRAS CHAVE

Abóbada

Alvenaria

Arco

Cúpula

Linha de Pressões

Análise Estrutural

KEYWORDS

Arch

Dome

Line of Thrust

Masonry

Structural Analysis

Vault

AGRADECIMENTOS

A presente tese foi desenvolvida no âmbito da actividade de investigação do autor no Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção do Instituto Superior Técnico.

O trabalho foi apoiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia através da bolsa de investigação BD/18328/98, no âmbito do programa PRAXIS XXI, e do projecto de investigação “Protecção do Património Construído da Acção dos Sismos”, PRAXIS I&D 3/3.1/CEG/2006/95, actualmente designado por POCTI/CEG/2606/02.

A realização desta tese não teria sido possível sem a contribuição, directa ou indirecta, de inúmeras pessoas, às quais endereço os meus agradecimentos. A tarefa de mencionar nomes é algo ingrata, em virtude da impossibilidade de referir todos a quem reconheço dívida pelo apoio prestado. No entanto, gostaria de referir alguns pela particular atenção que me dedicaram.

Ao Professor António Ressano Garcia Lamas, supervisor científico deste trabalho e meu orientador desde o início da minha actividade docente no Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura do Instituto Superior Técnico, desejo manifestar o meu profundo agradecimento. Nunca será demais realçar todo o apoio e amizade que me tem prestado desde que iniciei a carreira docente. O seu acompanhamento ao longo destes mais de dez anos, os seus ensinamentos e a sua influência na minha opção de investigação na área da reabilitação estrutural de edificios antigos, são objecto do meu especial agradecimento.

Ao Professor João José Rio Tinto de Azevedo manifesto o meu reconhecimento pelo apoio prestado em diversas fases da minha carreira, em especial em alguns momentos difíceis da evolução da presente tese.

Ao Professor Jorge Manuel Vinagre Alfaiate agradeço o interesse pelo meu trabalho e o apoio conferido na área da análise numérica não linear de estruturas de alvenaria.

Ao Engenheiro Artur Vieira Pinto do Centro Comum de Investigação da Comissão Europeia (Joint Research Centre), em Ispra, Itália, manifesto o meu agradecimento pela possibilidade de ter integrado a equipe de investigação do projecto *COSISMO* e pela simpatia e apoio concedido durante a minha estadia naquela instituição.

Ao Engenheiro Pierre Pegon do Centro Comum de Investigação da Comissão Europeia e ao Engenheiro José Vieira de Lemos do Laboratório Nacional de Engenharia Civil agradeço o apoio nos programas de cálculo CASTEM e UDEC, respectivamente, e o trabalho numérico realizado no âmbito do projecto *COSISMO*.

À Direcção Geral dos Edifícios e Monumentos Nacionais, nas pessoas do seu director geral, Engenheiro Vasco Martins Costa, e do director regional da zona Sul, Arquitecto José Felipe Ramalho, agradeço o apoio concedido ao projecto *COSISMO* e ao trabalho de investigação referente à igreja de São Francisco em Évora.

Ao Professor Francisco Baptista Esteves Virtuoso desejo manifestar um especial agradecimento pela inestimável amizade e pelos preciosos conselhos e ensinamentos com que me entusiasmu pela profissão que exerço.

A todos os meus colegas da antiga secção de Mecânica Aplicada do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico, em particular aos Professores Carlos de Sousa Oliveira, Eduardo Ribeiro Pereira, Luís Coelho Guerreiro, Rita Nogueira Leite Pereira Bento, Jorge Miguel Mascarenhas Proença e António Pinto da Costa e ao Professor Luís Santos Castro do núcleo de Análise de Estruturas agradeço os incentivos para a realização desta tese e o bom ambiente de trabalho.

Não posso deixar de reconhecer apoio que recebi do secretariado da antiga secção de Mecânica Aplicada do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico ao longo da minha carreira académica e em especial a boa disposição e eficiência da secretária Lurdes Piado Farrusco que muito facilitaram a minha actividade de investigação.

Ao Engenheiro Manuel Ritto Corrêa e ao Professor Nuno Guerra agradeço a disponibilidade e as frutíferas discussões que muito me auxiliaram e aos meus colegas Professor João Gomes Ferreira e Engenheiro Joaquim Ramos Dias agradeço a amizade que nos une e a solidariedade manifestada ao longo deste longo percurso de pós graduação que teve início com o mestrado em Engenharia de Estruturas.

Dedico este trabalho à memória dos meus pais, porque tudo o que lhes devo não caberia nestas páginas, e aos meus filhos Pedro e João pelo amor que lhes tenho e pela menor disponibilidade que revelei durante a execução deste trabalho.

O maior agradecimento não podia deixar de ser dirigido à Carmo, minha mulher, pelo seu apoio e estímulo e pelos sacrifícios que frequentemente lhe impus durante a execução desta dissertação.

ÍNDICE

Capítulo 1 - Introdução

1.1 - Introdução	1
1.2 - Objectivos	5
1.3 - Estrutura do Trabalho	6

Capítulo 2 - Enquadramento Histórico

2.1 - Introdução	11
2.2 - A Construção em Alvenaria Através dos Tempos	11
2.3 - A Evolução dos Métodos de Dimensionamento	19
2.3.1 - Da Antiguidade ao Renascimento	19
2.3.2 - Do Renascimento ao Século XIX	22
2.3.3 - Do Século XIX à Actualidade	38

Capítulo 3 - Metodologias Gráficas e Analíticas

3.1 - Introdução	53
3.2 - Regra do “Terço Central”. Linha de Pressões	54
3.3 - Análise Geométrica pelo Polígono Funicular	64
3.4 - Análise Geométrica pelo Método de Fuller	69
3.5 - Método Elástico de Pippard	72
3.6 - Teoria da Análise Limite Aplicada a Estruturas de Alvenaria	76
3.7 - Linhas de Pressões. Analogia com Cabos Suspensos	85

3.8 - Métodos Analíticos Baseados em Mecanismos	94
3.8.1 - Dimensionamento da Espessura dos Pés Direitos de Arcos	94
3.8.2 - Coeficientes de Segurança Geométricos. Espessuras Mínimas	106
3.8.3 - Arcos Sujeitos à Acção de Cargas Concentradas. Cargas de Colapso	136
3.9 - Estruturas Tridimensionais - Cúpulas e Abóbadas	148
3.9.1 - Abóbadas	150
3.9.1.1 - Metodologias Analíticas	150
3.9.1.2 - Metodologias Gráficas	156
3.9.2 - Cúpulas	160
3.9.2.1 - Metodologias Analíticas	160
3.9.2.2 - Metodologias Gráficas	181
3.10 - Conclusões	182

Capítulo 4 - Modelação Numérica de Estruturas em Alvenaria

4.1 - Introdução	187
4.2 - Metodologias de Análise Numérica em Estruturas de Alvenaria	188
4.2.1 - Elementos Estruturais e Macro-Elementos	188
4.2.2 - Modelos Contínuos de Elementos Finitos	189
4.2.3 - Modelos Descontínuos de Elementos Finitos	196
4.2.4 - Modelos de Elementos Discretos	200
4.3 - Caracterização Experimental das Alvenarias Regulares	202
4.4 - O Método dos Elementos Finitos na Modelação da Alvenaria	210
4.4.1 - Estrutura do Método dos Elementos Finitos na Análise Não Linear	210
4.4.2 - Algoritmos de Solução Não Linear em Problemas Estáticos	218
4.4.2.1 - Controle de Cargas e de Deslocamentos	218
4.4.2.2 - Método do Comprimento do Arco	218
4.4.2.3 - Procedimentos Iterativos	223
4.4.2.4 - Algoritmo de Pesquisa em Linha	224
4.4.2.5 - Critérios de Convergência	225
4.4.3 - Modelos Não Lineares para Materiais Quase-Frágeis	227
4.4.3.1 - Modelos Descontínuos - Modelos de Fenda Discreta	227
4.4.3.2 - Modelos Contínuos - Modelos de Fenda Distribuída	232

4.5 - O Método dos Elementos Discretos na Modelação da Alvenaria	240
4.5.1 - Deformabilidade dos Blocos Discretos	240
4.5.2 - Interação entre Blocos	241
4.5.2.1 - Definição do Contacto - Contacto Pontual	241
4.5.2.2 - Detecção de Contactos e suas Actualizações	242
4.5.2.3 - Representação Geométrica dos Vértices - Aproximação por Arcos Circulares	245
4.5.2.4 - Contacto Vértice - Aresta	247
4.5.2.5 - Contacto Vértice - Vértice	249
4.5.2.6 - Mudança de Tipo de Contacto	250
4.5.3 - Comportamento Mecânico dos Contactos	250
4.5.4 - Cálculo Estrutural	253
4.5.4.1 - Algoritmo de Cálculo	253
4.5.4.2 - Ciclo de Cálculo	254
4.5.4.3 - Equações de Movimento	256
4.5.4.4 - Amortecimento	259
4.5.4.5 - Estabilidade Numérica	261
4.6 - Comparação dos Métodos	262
4.7 - Estudos Numéricos	264
4.7.1 - Arco Circular - Modelos Descontínuos de Elementos Finitos	264
4.7.1.1 - Análises Geometricamente Lineares	266
4.7.1.2 - Análises Geometricamente Não Lineares	267
4.7.1.3 - Efeitos da Modelação da Resistência à Tracção das Juntas	269
4.7.1.4 - Efeitos da Modelação da Resistência à Compressão dos Blocos	272
4.7.2 - Arco Circular - Modelos de Elementos Discretos	274
4.7.3 - Arco Circular - Modelos Contínuos de Elementos Finitos	276
4.7.4 - Arcos Ogivais - Modelos de Elementos Discretos	278
4.8 - Estudo de Pontes em Arco com Viés	281
4.9 - Simulação Numérica de Ensaio Experimentais em Pontes Reais	288
4.9.1 - Considerações sobre Efeitos de Escala em Modelos de Estruturas Arqueadas	288
4.9.2 - Modelação Numérica do Ensaio da Ponte de Bridgemill	292

4.9.3 - Modelação Numérica do Ensaio da Ponte de Bargower	298
4.9.3.1 - Descrição da Ponte e do Ensaio Experimental	298
4.9.3.2 - Modelo Numérico Simplificado	300
4.9.3.3 - Modelo Numérico mais Sofisticado	305
4.10 - Conclusões	313

Capítulo 5 - Projecto COSISMO

5.1 - Introdução	317
5.2 - A Estrutura Ensaída	320
5.2.1 - O Mosteiro de São Vicente de Fora	320
5.2.2 - Estudos Preliminares	322
5.2.3 - Estudos Numéricos para Definição do Modelo Experimental	324
5.2.4 - A Execução do Modelo Experimental	332
5.2.5 - Sistemas de Aplicação das Cargas e Plano de Instrumentação	336
5.3 - Ensaaios Pseudo-Dinâmicos	340
5.3.1 - Metodologia dos Ensaaios Pseudo-Dinâmicos	340
5.3.2 - Características do Laboratório ELSA	344
5.4 - Resultados dos Ensaaios Experimentais	345
5.4.1 - A Primeira Campanha de Ensaaios - Modelo Experimental Não Reforçado	345
5.4.2 - A Segunda Campanha de Ensaaios - Modelo Experimental Reforçado	357
5.5 - Modelação Numérica dos Ensaaios	364
5.5.1 - Modelos de Elementos Finitos	365
5.5.2 - Modelos de Elementos Discretos	370
5.6 - Conclusões	375

Capítulo 6 - Caso de Estudo, Igreja de São Francisco

6.1 - Introdução	379
6.2 - Descrição do Edifício e Anomalias Estruturais	381
6.2.1 - Introdução	381
6.2.2 - Descrição Geral do Edifício	383

6.2.3 - História das Intervenções na Construção	384
6.2.4 - Descrição dos Danos Observados	391
6.3 - Inspeção e Monitorização	394
6.3.1 - Introdução	394
6.3.2 - Inspeção - Danos Observados	396
6.3.3 - Monitorização da Igreja	406
6.4 - Estudos Numéricos	409
6.4.1 - Modelos de Elementos Finitos Elásticos e Lineares	409
6.4.2 - Modelos de Elementos Finitos não Lineares	414
6.5 - Diagnóstico	416
6.6 - Desenvolvimentos Futuros	417

Capítulo 7 - Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

7.1 - Introdução	419
7.2 - Conclusões	421
7.3 - Perspectivas de Desenvolvimentos Futuros	426
Bibliografia Histórica	429
Bibliografia	433

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 - Mecanismo de colapso de um arco sob a acção de uma carga concentrada e exemplo de colapso eminente de um arco real ^{Adam,1995}	4
Figura 2.1 - Produção de tijolos no antigo Egipto (tumulo de Rekhmara - Thebes, 1500 A.C.).	12
Figura 2.2 - “Porta dos Leões” - Micenas, Grécia (século XIII A.C.).	13
Figura 2.3 - Partenon - Atenas, Grécia (século V A.C.).	14
Figura 2.4 - Cúpula do Panteão de Roma (século II D.C.).	14
Figura 2.5 - Arcos embebidos nas paredes de alvenaria (Panteão de Roma) e parede de alvenaria com elementos de madeira (Herculano, 62-79 D.C.) ^{Adam,1995}	15
Figura 2.6 - Vista interior ^{Viollet le Duc,1858} e esquema estrutural de uma catedral gótica.	18
Figura 2.7 - Cúpulas das basílicas de Santa Maria del Fiore (esq.) e de S. Pedro em Roma (dta.).	18
Figura 2.8 - Página do livro de apontamentos de Villard de Honnecourt.	20
Figura 2.9 - Regras empíricas de Rodrigo Gil de Hontañón para o dimensionamento da espessura das colunas ou paredes que suportam um arco semi-circular.	21
Figura 2.10 - Paralelograma de forças de Leonardo da Vinci.	23
Figura 2.11 - Estudos sobre arcos e regra para a verificação da estabilidade de arcos de Leonardo da Vinci.	23
Figura 2.12 - Regra de Derand para dimensionamento da espessura dos pés-direitos de arcos ^{Mainstone,1988}	24
Figura 2.13 - Corrente suspensa de Hooke ^{Heyman,1988}	25
Figura 2.14 - Gráficos de Philippe de la Hire: Esquerda - cálculo dos pesos a suspender num cabo para que este adquira uma dada geometria; Direita - cálculo das dimensões das aduelas para uma dada geometria do eixo do arco, desprezando o atrito e a coesão	

entre aduelas.	26
Figura 2.15 - Mecanismo tipo cunha deslizante proposto por Philippe de la Hire.	27
Figura 2.16 - Diagrama de corpo livre correspondente ao mecanismo proposto por La Hire.	27
Figura 2.17 - Metodologia gráfica proposta por La Hire para a determinação das espessuras dos pés-direitos de arcos.	28
Figura 2.18 - Regra de Couplet para verificação da segurança de uma arco.	30
Figura 2.19 - Modelo de colapso considerado por Couplet e metodologia gráfica para análise do equilíbrio dos corpos rígidos formados pelas descontinuidade.	30
Figura 2.20 - Metodologia gráfica de Couplet para análise do arco com 120° de abertura.	31
Figura 2.21 - Mecanismos de colapso obtidos experimentalmente por Danyzy e publicados por Frézier.	32
Figura 2.22 - Modelo de Poleni para análise da estabilidade da cúpula de S. Pedro em Roma.	33
Figura 2.23 - Estudos de Bossut para a geometria das aduelas dum arco circular.	35
Figura 2.24 - Modelo de Coulomb para análise de arcos.	36
Figura 2.25 - Mecanismos limites considerados por Coulomb.	36
Figura 2.26 - Mecanismo considerado por Mascheroni no dimensionamento da espessura dos pés-direitos dos arcos.	37
Figura 2.27 - Linhas de resistência (a-b-c-d-e-f) e de pressões (A-B-C-D-E).	39
Figura 2.28 - Linha de resistência limite correspondente ao impulso horizontal mínimo. ..	40
Figura 2.29 - Método gráfico de Méry.	41
Figura 2.30 - Verificação da segurança de um arco e da espessura de um pé direito.	42
Figura 2.31 - Verificação da segurança de uma abóbada e da espessura do seu pé- direito ^{Salinger, 1942}	43
Figura 2.32 - Modelos de Barlow.	43
Figura 2.33 - Modelo de Gaudí para o dimensionamento de cúpulas através da analogia entre arcos e correntes suspensas.	45
Figura 2.34 - Modelos foto-elásticos de Robert Mark para o estudo das catedrais de Beauvais e Bourges - acção do peso próprio da estrutura ^{Mark, 1982}	49
Figura 2.35 - Modelos de análise limite para verificação da segurança de fachadas em alvenaria: Esquerda - comportamento no plano; Direita - comportamento fora do	

plano ^{Giuffrè,1993}	50
Figura 2.36 - Modelação do comportamento estrutural de parede de alvenaria de tijolo através de modelos de elementos finitos com interfaces não lineares ^{Lourenço,1996}	51
Figura 2.37 - Modelo elástico linear da fachada completa da basílica de S. Pedro em Roma ^{Macchi,2001}	51
Figura 3.1 - Diferentes tipos de alvenaria de pedra (em cima: alçados; em baixo: cortes transversais).	55
Figura 3.2 - Tensões normais e esforços actuantes na secção transversal de uma peça linear.	55
Figura 3.3 - Distribuição das tensões internas numa secção em função da posição da sua resultante.	56
Figura 3.4 - Distribuição das tensões internas numa secção em função da posição da sua resultante (cont.).	57
Figura 3.5 - Diagrama de interacção M-N (secção recângular não resistente à tracção).	59
Figura 3.6 - Diagrama de interacção e_{\max} -N (secção recângular não resistente à tracção).	59
Figura 3.7 - Linhas de pressões e de resistência num arco, de acordo com as definições de Timoshenko.	60
Figura 3.8 - Regras do terço e da metade central.	61
Figura 3.9 - Diagrama de corpo livre de um troço de um arco.	61
Figura 3.10 - Discretização da carga aplicada no arco.	62
Figura 3.11 - Geometria do arco da ponte Teston em Kent (dimensões em metro).	63
Figura 3.12 - Ponte de Teston - discretização da carga permanente.	63
Figura 3.13 - Posição duma possível linha de pressões da ponte Teston para a acção do peso próprio e de uma carga concentrada aplicada a 1/4 de vão e com intensidade 40 kN.	65
Figura 3.14 - Traçado de um polígono funicular.	65
Figura 3.15 - Linhas de pressões correspondentes ao impulso máximo e ao impulso mínimo ^{Salinger,1942}	67
Figura 3.16 - Método gráfico de Méry.	67
Figura 3.17 - Geometria dos polígonos funiculares em função da localização da resultante das cargas.	68
Figura 3.18 - Efeito favorável do enchimento no extradorso do arco no perfil da linha de pressões: linhas de pressões do peso próprio do arco (esq.) e dos pesos próprios do	

arco e do material de enchimento (dta).	69
Figura 3.19 - Método de Fuller - espessura mínima admissível de um arco circular submetido à acção do seu peso próprio - a)b) com menor discretização do carregamento e considerando os pontos do extradorso; c)d) com maior discretização do carregamento e considerando os pontos do intradorso.	70
Figura 3.20 - Método de Fuller - espessura mínima admissível para um arco circular submetido à acção do peso próprio do material de enchimento no extradorso.	72
Figura 3.21 - Análise elástica de Pippard.	73
Figura 3.22 - Movimento relativo numa junta entre elementos.	78
Figura 3.23 - Região admissível no espaço das tensões.	79
Figura 3.24 - Região admissível real no espaço das tensões.	81
Figura 3.25 - análise limite de um arco de perfil parabólico.	83
Figura 3.26 - Momento de "plastificação" em função da localização da carga concentrada ^{Heyman,1969}	85
Figura 3.27 - Coeficiente de segurança geométrico ^{Heyman,1980b)}	85
Figura 3.28 - Determinação da linha de pressões correspondente à acção do peso próprio do arco.	86
Figura 3.29 - Geometria da linha de pressões correspondente ao arco submetido apenas à acção do seu peso próprio - catenária invertida.	87
Figura 3.30 - Determinação da linha de pressões correspondente à acção de uma carga uniformemente distribuída na largura do arco.	88
Figura 3.31 - Determinação da linha de pressões correspondente à acção do peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco.	89
Figura 3.32 - Família de linhas de pressões correspondente à acção do peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco, para um vão $L = 20$ m e uma altura total $a + h = 10$ m.	89
Figura 3.33 - Determinação do carregamento correspondente a uma linha de pressões circular.	90
Figura 3.34 - Família de carregamentos correspondentes à linha de pressões circular.	91
Figura 3.35 - Cálculo da espessura de um arco com linha de pressões coincidente com o intradorso circular.	92
Figura 3.36 - Família de espessuras do arco correspondente à linha de pressões circular (cima) e extradorso do arco correspondente a uma linha de pressões coincidente com o	

intradorso circular ($t/r = 0.125$) (baixo).	93
Figura 3.37 - Possíveis mecanismos de colapso de um arco apoiado sobre colunas ou paredes: esq - mecanismo de escorregamento (de La Hire); dta - mecanismo rotacional (de Coulomb-Mascheroni).	95
Figura 3.38 - Mecanismo de escorregamento de Philippe de la Hire - Diagramas de corpo livre.	96
Figura 3.39 - Mecanismo de escorregamento de Bernard Belidor - Diagramas de corpo livre.	97
Figura 3.40 - Espessuras mínimas admissíveis de um arco circular calculadas através dos modelos correspondentes às hipóteses de Philippe de la Hire e Bernard Belidor.	99
Figura 3.41 - Espessuras mínimas admissíveis dos pés direitos de arcos circulares para diferentes valores do ângulo de atrito - hipóteses de La Hire, de Belidor e de Coulomb-Mascheroni.	100
Figura 3.42 - Espessuras mínimas admissíveis dos pés direitos de arcos circulares determinadas pelas hipóteses de La Hire, Belidor e de Coulomb-Mascheroni.	100
Figura 3.43 - Espessuras mínimas admissíveis dos pés direitos de arcos circulares determinadas pelas hipóteses de La Hire, Belidor e de Coulomb-Mascheroni.	101
Figura 3.44 - Mecanismo rotacional de Coulomb-Mascheroni.	101
Figura 3.45 - Diagrama de corpo livre do mecanismo rotacional.	102
Figura 3.46 - Diagrama de corpo livre do mecanismo rotacional	103
Figura 3.47 - Espessuras dos pés direitos em função do ângulo de localização da secção fracturada.	104
Figura 3.48 - Diagramas β - ζ e α - ζ para os mecanismos de escorregamento de La Hire e de Belidor e para o mecanismo rotacional de Coulomb-Mascheroni.	105
Figura 3.49 - Espessura mínima admissível de um arco circular submetido apenas à acção do seu peso próprio.	107
Figura 3.50 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido apenas à acção do seu peso próprio.	108
Figura 3.51 - Espessura mínima de um arco circular abatido.	109
Figura 3.52 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido apenas à acção do seu peso próprio.	110
Figura 3.53 - Mecanismo de colapso correspondente à espessura mínima de um arco circular	

sujeito apenas à acção do seu peso próprio.	110
Figura 3.54 - Variação da espessura mínima admissível de um arco circular submetido apenas à acção do seu peso próprio e do impulso horizontal correspondente, em função do ângulo de abertura do arco.	111
Figura 3.55 - Variação da espessura mínima admissível de um arco circular com 20 m de vão, submetido apenas à acção do seu peso próprio, em função da sua altura $f = R(1 - \cos\alpha)$, na hipótese de inexistência de escorregamentos relativos.	112
Figura 3.56 - Espessura mínima de um arco circular sujeito apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.	112
Figura 3.57 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.	113
Figura 3.58 - Espessura mínima admissível em função do ângulo de abertura do arco (arco circular submetido apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída).	115
Figura 3.59 - Impulso horizontal correspondente à espessura mínima admissível em função do ângulo de abertura do arco (arco circular submetido apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída).	116
Figura 3.60 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.	117
Figura 3.61 - Variação da espessura mínima admissível em função do valor da carga uniforme, para um arco circular sujeito à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.	118
Figura 3.62 - Variação da espessura mínima admissível de um arco sujeito à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão, em função do seu ângulo de abertura.	119
Figura 3.63 - Enchimento do extradorso do arco.	120
Figura 3.64 - Espessura mínima admissível de um arco circular submetido apenas à acção do peso próprio do material de enchimento no seu extradorso.	120
Figura 3.65 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido à acção do peso próprio do material de enchimento no seu extradorso.	121
Figura 3.66 - Espessura mínima admissível de um arco submetido à acção do peso próprio do material de enchimento no extradorso, em função do ângulo de localização da articulação junto das impostas.	123
Figura 3.67 - Variação da espessura mínima admissível de um arco submetido apenas à acção	

do peso próprio do material de enchimento no seu extradorso, em função do ângulo de abertura do arco.	124
Figura 3.68 - Diagramas de corpo livre do arco circular submetido ao seu peso próprio e do material de enchimento no extradorso. Em cima: mecanismo 1 - efeito do peso próprio do arco preponderante; em baixo: mecanismo 2 - efeito do peso próprio do enchimento no extradorso do arco preponderante.	125
Figura 3.69 - Espessuras mínimas admissíveis de um arco circular completo sujeito à acção dos pesos próprios do arco e do material de enchimento no extradorso, obtidas através do mecanismo 1.	126
Figura 3.70 - Espessuras mínimas admissíveis de um arco circular completo sujeito à acção dos pesos próprios do arco e do material de enchimento no extradorso - obtidas através do mecanismo 2.	126
Figura 3.71 - Variação da espessura mínima admissível de um arco circular completo sujeito à acção do seu peso próprio e do material de enchimento no extradorso.	127
Figura 3.72 - Linhas de pressões correspondentes aos impulsos horizontal máximo e mínimo num arco circular completo.	128
Figura 3.73 - Situações limites correspondentes aos impulsos horizontais máximo e mínimo.	128
Figura 3.74 - Diagrama de corpo livre - situação limite de impulso horizontal mínimo, num arco circular completo sujeito à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.	129
Figura 3.75 - Variação do impulso horizontal mínimo H_m em função do ângulo β de localização da articulação nos rins do arco ($q = 10 \text{ kN/m}^2$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 1.00 \text{ m}$, $R = 2.5; 5.0; 7.5 \text{ m}$).	130
Figura 3.76 - Variação de $dH_m/d\beta$ em função do ângulo β de localização da articulação nos rins do arco ($q = 10 \text{ kN/m}^2$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 1.00 \text{ m}$, $R = 7.5 \text{ m}$).	130
Figura 3.77 - Diagrama de corpo livre - situação limite de impulso horizontal máximo, de um arco circular completo sujeito à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.	131
Figura 3.78 - Variação do impulso horizontal máximo H_M em função do ângulo β de localização da articulação nos rins do arco ($q = 10 \text{ kN/m}^2$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 1.00 \text{ m}$, $R = 2.5 ; 5.0 ; 7.5 \text{ m}$).	132
Figura 3.79 - Variação de $dH_M/d\beta$ em função do ângulo β de localização da articulação nos rins	

do arco ($q = 10 \text{ kN/m}^2$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 1.00 \text{ m}$, $R = 7.5 \text{ m}$).	133
Figura 3.80 - Variação dos impulsos horizontais máximo e mínimo em função do ângulo β de localização da articulação nos rins do arco, para a situação correspondente à espessura mínima admissível ($t = 0.106R$) e para uma espessura superior à mínima ($q = 0$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 0.795 \text{ m}$ e 1.00 m , $R = 7.5 \text{ m}$).	133
Figura 3.81 - Variação dos impulsos horizontais máximo e mínimo correspondentes às análises com e sem consideração do efeito da tensão limite de compressão ($q = 1000 \text{ kN/m}^2$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 1.50 \text{ m}$, $R = 7.5 \text{ m}$, $\sigma_{\text{lim}} = 7 \text{ MPa}$).	136
Figura 3.82 - Mecanismo de colapso de um arco submetido à acção de uma carga concentrada.	138
Figura 3.83 - Mecanismo cinematicamente admissível de um arco submetido à acção do peso próprio do arco e do material de enchimento no seu extradorso, sobrecarga uniforme e de uma carga concentrada.	139
Figura 3.84 - Cálculo dos deslocamentos num mecanismo cinematicamente admissível. ..	139
Figura 3.85 - Geometria do arco.	140
Figura 3.86 - Cargas de colapso em função da localização do ponto de aplicação e da relação L/h - acção exclusiva do peso próprio do arco ($pp = 26.8 \text{ kN/m}^3$) - esq: valores em kN; dta: valores normalizados.	141
Figura 3.87 - Cargas de colapso em função da localização do ponto de aplicação e da relação L/h - acção do peso próprio do arco ($pp = 26.8 \text{ kN/m}^3$) e do material de enchimento no extradorso ($\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$), que se considerou com 1.76 m de altura acima do fecho ($h_{sc} = 1.76 \text{ m}$) - esq: valores em kN; dta: valores normalizados.	141
Figura 3.88 - Localização mais desfavorável da carga concentrada - arco sujeito à acção de uma carga concentrada e do seu peso próprio.	142
Figura 3.89 - Arco abatido e linha de pressões bi-linear correspondente à acção concentrada.	142
Figura 3.90 - Dispersão da carga concentrada através do material de enchimento no extradorso do arco.	143
Figura 3.91 - Efeito da dispersão da carga concentrada através do material de enchimento.	143
Figura 3.92 - Modelo para consideração do impulso do material de enchimento no extradorso do arco.	144
Figura 3.93 - Efeito do impulso passivo do material de enchimento - arco circular ($r = 5.18 \text{ m}$,	

t = 0.65 m, L/h = 2:1) sujeito à acção do seu peso próprio (26.8 kN/m ³), do peso próprio do material de enchimento (20.0 kN/m ³), que se considerou ter a altura acima do fecho de 1.76 m (hsc = 1.76 m).	145
Figura 3.94 - Plastificação das secções do arco.	146
Figura 3.95 - Deslocamentos dos pontos de aplicação das forças.	146
Figura 3.96 - Relações força-deslocamento do ponto de aplicação da carga concentrada num arco circular.	148
Figura 3.97 - Modelo simplificativo de comportamento estrutural de uma abóbada de aresta e respectiva analogia da esfera rolante proposta por Abraham em 1934 ^{Mark, 1982}	150
Figura 3.98 - Troço elementar da abóbada cilíndrica.	151
Figura 3.99 - Abóbada de aresta formada pela intersecção de superfícies cilíndricas.	152
Figura 3.100 - Diagramas de corpo livre do troço da abóbada de aresta.	153
Figura 3.101 - Localização das reacções horizontais que resultam da existência de arcos botantes ou contrafortes, necessárias para o equilíbrio da abóbada de aresta. .	154
Figura 3.102 - Preenchimento dos encontros das abóbadas de aresta, necessário para a mobilização da reacção horizontal que equilibra a estrutura ^{Mark e Robison, 1993}	154
Figura 3.103 - Corte horizontal da superfície cilíndrica da abóbada de aresta.	156
Figura 3.104 - Adaptação do método de Méry na análise da estabilidade de abóbadas de aresta.	159
Figura 3.105 - Troço elementar da membrana de revolução ^{Timoshenko, 1959}	161
Figura 3.106 - Membrana esférica - esforços meridionais.	162
Figura 3.107 - Resultados da solução das equações diferenciais de equilíbrio de uma membrana esférica sujeita apenas à acção do seu peso próprio.	162
Figura 3.108 - Esquerda: Tensões circunferenciais na solução da casca fina esférica sujeita apenas à acção do seu peso próprio; Direita: Fendilhação meridional da cúpula do Pártenon em Roma ^{Mark e Robison, 1993}	163
Figura 3.109 - Modelo de cúpula esférica com lanternim.	163
Figura 3.110 - Resultados das soluções das equações diferenciais de equilíbrio de uma membrana esférica com e sem lanternim, sujeita apenas à acção do seu peso próprio.	164
Figura 3.111 - Esforços meridionais e circunferenciais para diferentes fases construtivas da cúpula esférica sujeita apenas à acção do seu peso próprio.	165
Figura 3.112 - Equilíbrio do troço da cúpula esférica.	166

Figura 3.113 - Esforços meridionais e circunferenciais numa membrana esférica com lanternim.	167
Figura 3.114 - Troço elementar da superfície de pressões.	169
Figura 3.115 - Superfície de pressões normalizada (acção do peso próprio da cúpula).	170
Figura 3.116 - Família de superfícies de pressões.	171
Figura 3.117 - Geometria da cúpula esférica.	172
Figura 3.118 - Diagrama de corpo livre do troço elementar da cúpula.	173
Figura 3.119 - Superfícies de pressões de cúpulas esféricas de 40 m de raio, calculadas com base na sua decomposição em duas partes (superior e inferior) - acção do peso próprio da cúpula.	175
Figura 3.120 - Determinação da linha de pressões correspondente à acção do peso próprio de uma lúnula da cúpula esférica.	176
Figura 3.121 - Família de linhas de pressões correspondentes à acção do peso próprio de uma lúnula da cúpula esférica (R = 10m).	177
Figura 3.122 - Decomposição da cúpula em lúnulas - mecanismo correspondente à espessura mínima admissível.	177
Figura 3.123 - Diagrama de corpo livre - arco de largura variável correspondente à decomposição de uma cúpula esférica em lúnulas e submetida apenas à acção do seu peso próprio.	178
Figura 3.124 - Variação da espessura mínima admissível de uma cúpula circular submetida apenas à acção do seu peso próprio, em função do ângulo de abertura da cúpula.	180
Figura 3.125 - Viga em alvenaria solicitada por uma carga concentrada.	181
Figura 3.126 - Enchimento do extradorso da abóbada da nave do mosteiro de Alcobaça. ..	181
Figura 3.127 - Decomposição da cúpula em lúnulas - Análise gráfica.	182
Figura 4.1 - Modelo de elementos estruturais (elementos de viga) do mosteiro de São Vicente de Fora em Lisboa - configuração deformada do primeiro modo de vibração ^{Vaz, 1997}	189
Figura 4.2 - Exemplo de discretização de uma parede de alvenaria com aberturas através de uma malha de macro-elementos ^{Brencich e Lagomarsino, 1997}	189
Figura 4.3 - Modelos de comportamento elástico linear (Esq.: Basílica de Sta. Sofia em Istambul ^{Croci, 1998} ; Centro: Torre de Pisa ^{Macchi et al., 1993} ; Dta.: Basílica de S. Marcos em Veneza ^{Mola e Vitaliani, 1997}).	190

Figura 4.4 - Esquema da técnica de homogeneização de painéis de alvenaria regular.	191
Figura 4.5 - Energia de fractura G_f , diagrama σ -w (tensão normal-abertura da fenda).	194
Figura 4.6 - Resultados da aplicação de um modelo de dano na análise estática da basílica de S. Marcos em Veneza - índices de dano para a aplicação de um peso próprio 4 vezes superior ao real ^{Hanganu et al., 1997}	195
Figura 4.7 - Modelação descontínua de paredes de alvenaria regular com elementos finitos - Modelação detalhada (a) e simplificada (b) das juntas entre unidades. 1	97
Figura 4.8 - Modelação detalhada da alvenaria: interacção junta em argamassa - unidade ^{CUR, 1997}	197
Figura 4.9 - Modelação da propagação da fractura numa parede de alvenaria através da alteração contínua da topologia da malha de elementos finitos ^{Cormeau e Shire, 1995}	199
Figura 4.10 - Modelo tridimensional de elementos discretos de uma ponte em alvenaria ^{Lemos, 1995}	200
Figura 4.11 - Diagramas representativos dos comportamentos frágil, quasi-frágil e plástico.	204
Figura 4.12 - Comportamentos típicos de espécimes de alvenaria submetidos a ensaios de tracção, compressão e corte - comportamento quasi-frágil ^{Lourenço, 1996}	205
Figura 4.13 - Curvas tensão-deslocamento obtidas em ensaios experimentais de tracção uniaxial em alvenaria: (a) com argamassa de menor resistência; (b) com argamassa de maior resistência ^{Backes, 1985}	209
Figura 4.14 - Resultados experimentais de ensaios biaxiais em painéis de alvenaria ^{Page, 1981; 1983}	209
Figura 4.15 - Modos de colapso de painéis de alvenaria sob estados de tensão biaxiais ^{Dhanasekar et al., 1985}	210
Figura 4.16 - Procedimento puramente incremental - desequilíbrio entre a acção externa e o vector das forças internas.	217
Figura 4.17 - Procedimento incremental com iterações de equilíbrio.	218
Figura 4.18 - Controle de cargas (esquerda) e de deslocamentos (direita).	219
Figura 4.19 - “Reveses” (“snap-backs”) nas curvas de resposta global.	219
Figura 4.20 - Método do comprimento do arco - representação esquemática.	220
Figura 4.21 - Método do comprimento do arco - método esférico (“spherical path method”) e método do plano normal actualizado (“updated normal path method”).	221
Figura 4.22 - Método de Newton-Raphson.	223
Figura 4.23 - Método de Newton-Raphson Modificado.	223

Figura 4.24 - Determinação do multiplicador η_{j+1} por interpolação linear.	225
Figura 4.25 - Modelo para a formação das fendas por tracção em elementos de interface.	228
Figura 4.26 - Modelo de corte de Coulomb para elementos de interface.	230
Figura 4.27 - Combinação do critério de Coulomb com o critério de fractura por tracção.	231
Figura 4.28 - Modelos alternativos para comportamento das interfaces - em cima: critério parabólico para tracção/corte e compressão/corte; em baixo: multi-superfície de plasticidade com limite de compressão.	231
Figura 4.29 - Critério de rotura por tracção (esq.: experimental; centro e dta: modelos). ...	233
Figura 4.30 - Sistema local de eixos coordenados orientado segundo o plano da fenda.	235
Figura 4.31 - Arranjo em série da deformação (normal e tangencial) do material intacto e da fenda.	238
Figura 4.32 - Contactos e domínios associados a dois blocos (esq. - blocos rígidos; dta. - deformáveis).	242
Figura 4.33 - Decomposição do domínio numa malha de células - caso bidimensional ^{Cundall,1988}	244
Figura 4.34 - Arredondamento dos vértices.	246
Figura 4.35 - Definição da direcção normal ao contacto (contacto vértice lado e contacto vértice-vértice).	246
Figura 4.36 - Contacto do tipo vértice-aresta.	247
Figura 4.37 - Contacto do tipo vértice-vértice.	249
Figura 4.38 - Modelo de contacto com resistência residual - comportamentos na direcções tangencial (esq.) e normal (dta.).	252
Figura 4.39 - Modelo de corte - influência da dilatação ^{Itasca,2000}	253
Figura 4.40 - Ciclo de cálculo no método dos elementos discretos ^{Itasca,2000}	256
Figura 4.41 - Ordem de cálculo no método das diferenças finitas centrais.	257
Figura 4.42 - Amortecimento de Rayleigh - variação da taxa de amortecimento com a frequência angular.	261
Figura 4.43 - Modelo bidimensional de elementos finitos do arco (espessura - 0.65 m; raio interior - 5.18 m).	265
Figura 4.44 - Curvas carga-deslocamento das análises numéricas do arco isolado.	266
Figura 4.45 - Mecanismo de colapso correspondente à análise do modelo MOD8.	268
Figura 4.46 - Curvas carga-deslocamento das análises do arco isolado com variação da deformabilidade.	268

Figura 4.47 - Curvas carga-deslocamento das análises realizadas sem (cima) e com (baixo) consideração dos efeitos geometricamente não lineares nos modelos do arco com resistência à tracção nas juntas.	271
Figura 4.48 - Modelo de Mohr-Coulomb (esq.) e de Lourenço (dta.) para modelação dos efeitos de esmagamento por compressão.	272
Figura 4.49 - Curvas carga-deslocamento das análises realizadas com consideração dos efeitos geometricamente não lineares nos modelos do arco com limitação da resistência à compressão.	273
Figura 4.50 - Danos por compressão nos modelos de elementos finitos (esq. - MOD12; dta. - MOD12a).	274
Figura 4.51 - Malha de elementos de diferenças finitas no modelo de elementos discretos do arco.	275
Figura 4.52 - Sequência do colapso do modelo de elementos discretos do arco.	275
Figura 4.53 - Intensidades da carga de colapso num arco circular para diferentes localizações da carga concentrada (modelação pelo método dos elementos discretos).	276
Figura 4.54 - Modelos com elementos finitos de fenda distribuída - Danos por tracção (esq. - modelo de elementos quadrangulares; dta. - modelo de elementos triangulares; cima - acção do peso próprio do arco; baixo - acção do peso próprio do arco, do enchimento no extradorso e da carga concentrada a 1/3 de vão).	277
Figura 4.55 - Curvas carga-deslocamento das análises geometricamente lineares realizadas em modelos contínuos do arco (com elementos finitos quadrangulares).	278
Figura 4.56 - Geometria dos modelos dos arcos ogivais.	279
Figura 4.57 - Intensidades da carga de colapso num arco ogival com 5.18 m de altura, com e sem consideração do carregamento do enchimento do extradorso do arco.	280
Figura 4.58 - Intensidades da carga de colapso num arco ogival com 10.36 m de vão com consideração do carregamento do enchimento do extradorso do arco.	280
Figura 4.59 - Modos de colapso do modelo de elementos discretos de um arco ogival - modelo com 10.36 m de vão (esquerda - carga a 1/4 do vão; centro - carga a 1/3 do vão; direita - carga a 1/2 do vão).	281
Figura 4.60 - Arcos ogival e circular - geometria das linhas de pressões.	281
Figura 4.61 - Esquemas de funcionamento estrutural de abóbadas com viés.	282
Figura 4.62 - Ponte em arco com viés- Geometria.	282
Figura 4.63 - Modelos numéricos tridimensionais do arco enviesado - Geometria e	

resultados.	284
Figura 4.64 - Ensaio experimentais ^{Augarde e Davey, 2001} - Localização das articulações e representação gráfica das cargas últimas.	285
Figura 4.65 - Cargas últimas dos modelos tridimensionais.	286
Figura 4.66 - Cargas últimas dos modelos tridimensionais e planos.	287
Figura 4.67 - Variação percentual das cargas últimas.	287
Figura 4.68 - Arco da ponte de Bridgemill ^{Hendry et al, 1985}	292
Figura 4.69 - Esquema de aplicação da carga na ponte de Bridgemill ^{Hendry et al, 1985}	293
Figura 4.70 - Modelo plano de elementos discretos da ponte de Bridgemill; (a) discretização em elementos discretos; (b) discretização em elementos de diferenças finitas.	294
Figura 4.71 - Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.	297
Figura 4.72 - Modelo de elementos discretos da ponte de Bridgemill - deformada do arco.	297
Figura 4.73 - Deformada do modelo de elementos discretos do arco da ponte de Bridgemill (em cima -deformada; em baixo - representação dos vectores dos deslocamentos).	298
Figura 4.74 - Arco da ponte de Bargower ^{Hendry et al, 1986}	299
Figura 4.75 - Esquema de aplicação da carga na ponte de Bargower ^{Hendry et al, 1986}	301
Figura 4.76 - Modelo de molas para simulação do efeito de rigidificação horizontal que resulta da existência de enchimento.	302
Figura 4.77 - Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga ^{Gago et al, 2003}	303
Figura 4.78 - Configuração deformada do modelo de elementos finitos - Caso III.	304
Figura 4.79 - Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga - análises geometricamente lineares.	307
Figura 4.80 - Malha de elementos finitos - modelo mais sofisticado.	307
Figura 4.81 - Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga - análises geometricamente não lineares.	308
Figura 4.82 - análise limite do arco: contribuição do impulso passivo.	310
Figura 4.83 - Malha deformada.	311
Figura 4.84 - Tensões principais σ_I (cima) σ_{II} (baixo) (unidades kN/m ²).	311
Figura 4.85 - Deformações plásticas (ϵ_{xx} - cima; ϵ_{yy} - centro; ϵ_{xy} - baixo).	312
Figura 5.1 - Vista do Mosteiro de São Vicente de Fora e de um dos seus claustro. 3	18
Figura 5.2 - Planta do mosteiro de São Vicente de Fora (Arquivo DGEMN).	321
Figura 5.3 - Modelos tridimensionais de elementos finitos de comportamento elástico linear	

realizados no LNEC (esq.) e no JRC (dta.) - Configurações de modos de vibração.	323
Figura 5.4 - Modelo de interface não linear implementado no laboratório ELSA.	325
Figura 5.5 - Definição do modelo experimental: da fachada ao modelo ^{Pegon,1998}	327
Figura 5.6 - Definição do modelo experimental: acção vertical correspondente ao peso próprio da parede de alvenaria (interacção entre blocos e distribuições de tensão) ^{Pegon e Pinto,1996}	328
Figura 5.7 - Esquema de aplicação das acções verticais e horizontais no modelo experimental.	329
Figura 5.8 - Aplicação incremental do peso próprio.	330
Figura 5.9 - Distribuições de tensão devidas ao peso próprio da parede de alvenaria ^{Pegon e Pinto,1998}	330
Figura 5.10 - Deslocamentos nos topos das colunas (esquerda) e distribuições de tensão (direita) das estruturas periódicas sujeitas às acções estáticas horizontais equivalentes ^{Pegon e Pinto,1996}	331
Figura 5.11 - Distribuições de tensão - variação do número de colunas nos modelos ^{Pegon e Pinto,1998}	333
Figura 5.12 - Modelo final do modelo com três colunas ^{Pegon et al.,1999}	333
Figura 5.13 - Plano de execução do modelo experimental ^{Vaz,1996}	334
Figura 5.14 - Fases de construção do modelo experimental.	335
Figura 5.15 - Vistas do aspecto final do modelo experimental.	335
Figura 5.16 - Reforço do modelo com o sistema de ancoragem CINTEC.	336
Figura 5.17 - Sistema de aplicação das cargas no modelo experimental ^{Pinto e Gago,1999a)b}	337
Figura 5.18 - Distribuição das acções verticais aplicadas ao modelo experimental.	338
Figura 5.19 - Esquema de instrumentação do modelo experimental - transdutores de deslocamento.	339
Figura 5.20 - Instrumentação das secções das colunas e das suas bases.	340
Figura 5.21 - Implementação dos ensaios pseudo-dinâmicos no laboratório ELSA.	343
Figura 5.22 - Sub-estruturação de ensaios pseudo-dinâmicos.	344
Figura 5.23 - Características da parede e plataforma de reacção do laboratório ELSA ^{Pinto et al., 1994}	344
Figura 5.24 - Espectros de deslocamento para os sismos de epicentro próximo e longínquo.	346

Figura 5.25 - Acelerogramas utilizados nos ensaios pseudo-dinâmicos.	346
Figura 5.26 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de pequena intensidade (sismo próximo - período de retorno de 174 anos).	347
Figura 5.27 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de intensidade elevada (sismo longínquo - período de retorno de 975 anos).	347
Figura 5.28 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de intensidade elevada multiplicado por 1.5 (1.5 x sismo longínquo - período de retorno de 975 anos).	348
Figura 5.29 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de intensidade elevada (sismo longínquo - período de retorno de 975 anos).	349
Figura 5.30 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de intensidade elevada multiplicado por 1.5 (1.5 x sismo longínquo - período de retorno de 975 anos).	349
Figura 5.31 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 350 kN.	350
Figura 5.32 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 350 kN.	351
Figura 5.33 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 175 kN.	351
Figura 5.34 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 175 kN.	351
Figura 5.35 - Variação de rigidez da resposta do modelo nos ciclos do ensaio correspondente à pós-tensão dos cabos de 350 kN.	353
Figura 5.36 - Rotação da secção da base da coluna central e perfil das rotações máximas das secções da coluna central - ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 350 kN.	354
Figura 5.37 - Danos no modelo experimental após a primeira campanha de ensaios.	356
Figura 5.38 - Danos nos arcos das estruturas dos claustros do mosteiro de São Vicente de Fora.	357
Figura 5.39 - Reforço do modelo com barras de aço de 20 mm de diâmetro, aderentes e pré-esforçadas.	357
Figura 5.40 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 175 kN.	358

Figura 5.41 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 45 kN.	359
Figura 5.42 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos nula. ...	359
Figura 5.43 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos nula. ...	360
Figura 5.44 - Perfis das rotações máximas das secções da coluna central nos ciclos de 30 e 60 mm (em cima); variação de comprimento da parte superior do modelo nos ensaios cíclicos (no meio); variação de comprimento da parte superior do modelo e da abertura das juntas nos ensaios cíclicos (em baixo).	362
Figura 5.45 - Variação do comprimento da parte superior do modelo (em cima) e da abertura das juntas coluna-alvenaria (no meio) em função do deslocamento horizontal imposto no topo do modelo; variação da força aplicada no topo do modelo com o comprimento da parte superior do modelo (em baixo).	363
Figura 5.46 - Arranjo tridimensional dos blocos de calcário das colunas do modelo.	364
Figura 5.47 - Malha de elementos finitos do modelo tridimensional do modelo.	365
Figura 5.48 - Elementos de interface tridimensionais.	366
Figura 5.49 - Modelo de junta de Coulomb com amolecimento (esq.) e lei de amolecimento bilinear adoptada no modelo numérico tridimensional (dta.).	367
Figura 5.50 - Configuração deformada e distribuição de tensões equivalentes de Mohr-Coulomb correspondentes à análise do modelo numérico tridimensional - vista anterior e posterior ^{Pegon et al.,1999}	368
Figura 5.51 - Comparação dos resultados numéricos e experimentais: a) Força aplicada no topo do modelo; b) Força vertical medida nas células de carga do lado esquerdo da base da coluna central; c) Força vertical medida nas células de carga do lado direito da base da coluna central; d) Deslocamento medido no transdutor 1 (ver localização do transdutor 1 na Figura 5.47).	369
Figura 5.52 - Geração das juntas entre blocos do modelo bidimensional a partir da configuração tridimensional das secções.	369
Figura 5.53 - Resultados da modelação bidimensional do modelo ^{Pegon et al. 1999}	370
Figura 5.54 - Modelo de elementos discretos do modelo experimental (esq. - blocos discretos; dta. - malha de elementos de diferenças finitas triangulares de deformação constante).	371
Figura 5.55 - Curvas “carga-deslocamento” obtidas numericamente ^{Lemos,1998a} e experimentalmente.	373

Figura 5.56 - Modelo da coluna com elementos discretos tridimensionais (esq.) e modelos planos comparativos (dta.) ^{Lemos,1998a} .	374
Figura 5.57 - Resultados dos modelos de elementos discretos duma coluna do modelo experimental ^{Lemos,1998a} .	375
Figura 6.1 - Vista exterior e do interior da nave da Igreja de São Francisco ^{Espanca,1966} .	381
Figura 6.2 - Danos na Igreja de São Francisco - fendas na abóbada da nave e na fachada principal.	382
Figura 6.3 - Esquema dos encontros da abóbada da nave: a) parede longitudinal interior; b) parede longitudinal exterior; c) contraforte/parede transversal; d) abóbada botante; e) muro de carga dos arcos principais; f) terraço lateral; g) muro de remate da cumeeira; h) coruchéu; i) arco principal ou mestre; j) luneta; k) capela lateral; l) galeria sobre capelas laterais.	384
Figura 6.4 - Vistas da cobertura antes de 1937 (cima); Intervenção de 1937 (no meio); Vista actual da cobertura (baixo); e vista da fachada antes de 1837 (baixo), onde são visíveis os trabalhos de demolição de edifícios para abertura do largo, o pórtico da entrada (a), as fendas na fachada principal (b) e o claustro Sul em ruínas (c) - Imagens a preto e branco do arquivo da DGEMN.	387
Figura 6.5 - Vistas superiores (pelo lado da cobertura) da fenda da luneta do 3º tramo do lado Sul.	393
Figura 6.6 - Plataforma elevatória para inspecção e monitorização da abóbada da Igreja de São Francisco.	395
Figura 6.7 - Alvos para registo topográfico da evolução dos deslocamentos no interior da Igreja.	395
Figura 6.8 - Extracção de carotes nas paredes da nave e na abóbada.	396
Figura 6.9 - Levantamento da fendilhação da fachada principal da Igreja de São Francisco - vista interior.	397
Figura 6.10 - Levantamento da fendilhação da abóbada da nave da Igreja de São Francisco.	398
Figura 6.11 - Pormenores da luneta do 1º tramo do lado Sul.	400
Figura 6.12 - Pormenores da luneta do 1º tramo do lado Norte.	400
Figura 6.13 - Pormenores da luneta do 2º tramo do lado Sul.	401
Figura 6.14 - Pormenores da luneta do 2º tramo do lado Norte.	401
Figura 6.15 - Pormenores da luneta do 3º tramo do lado Sul.	402

topo da parede de 10 cm, a que corresponde a uma diminuição do impulso horizontal (resultante das forças transmitidas pela luneta à parede) de 46.6%. 415	
Figura 6.40 - Modos de deformação das paredes-contraforte.	417
Figura 6.41 - Modelo CAD e modelo de elementos finitos tridimensionais.	418
Figura 7.1 - Igreja de São Francisco em Montemor - fendilhação da fachada principal.	427
Figura 7.2 - Igreja dos Agostinhos em Vila Viçosa - esmagamento do revestimento em mármore das paredes junto do cruzeiro.	428

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1 - Localização das juntas “em rotura” - ângulo medido com a horizontal.	41
Tabela 2.1 - Geometria do arco da ponte Teston ^{Heyman,1980a)}	63
Tabela 2.2 - Cálculo da posição da linha de pressões da ponte Teston.	64
Tabela 2.3 - Método MEXE ^{BD16/84;BD21/84}	77
Tabela 3.4 - Propriedades mecânicas dos blocos e juntas do arco.	265
Tabela 3.5 - Modelos tridimensionais dos arcos enviesados - Cargas últimas.	283
Tabela 3.6 - Relações de semelhança para modelos estáticos.	290
Tabela 3.7 - Cargas de colapso dos modelos do arco isolado.	291
Tabela 3.8 - Cargas de colapso dos modelos do arco isolado - relações de semelhança.	291
Tabela 3.9 - Dimensões da ponte de Bridgemill.	293
Tabela 3.10 - Propriedades dos elementos de diferenças finitas e dos contactos pontuais. .	296
Tabela 3.11 - Dimensões da ponte de Bargower.	300
Tabela 3.12 - Propriedades dos elementos de interface.	301
Tabela 3.13 - Propriedades mecânicas do modelo de elementos finitos do arco isolado (NLMAT).	306
Tabela 3.14 - Propriedades mecânicas do modelo de elementos finitos.	309
Tabela 4.1 - Características mecânicas e de resistência dos materiais construtivos do modelo, determinadas através de ensaios experimentais em provetes.	366
Tabela 4.2 - Características mecânicas admitidas para os contactos do modelo de elementos discretos.	372

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem-se verificado um interesse crescente na conservação e recuperação do património construído. A par dos edifícios monumentais (palácios, castelos, igrejas, mosteiros, conventos, etc.), outros edifícios antigos (de habitação, comerciais e outros) que integram centros históricos e zonas especiais de protecção têm merecido especial atenção das entidades responsáveis. Motivados pelo interesse e necessidade na conservação, recuperação e restauro do património construído, os técnicos (engenheiros e arquitectos) têm vindo a dar atenção particular ao seu estudo. Este interesse, aliado ao diminuto conhecimento técnico sobre estes edifícios (técnicas construtivas, materiais e soluções estruturais envolvidas) resultou num crescente empenho da comunidade científica, nacional e internacional, na investigação das soluções utilizadas na sua construção.

As intervenções em edifícios antigos, tanto na adaptação a novos usos, como na de recuperação de edifícios deteriorados, exigem frequentemente a avaliação da sua segurança estrutural e, por vezes, a implementação de soluções de reforço. Pelas características particulares desses edifícios, intervenções não justificadas poderão ter consequências negativas, tanto do ponto de vista histórico-estético, como do ponto de vista estrutural. Assim, a avaliação da segurança, a escolha da eventual solução de reforço e a selecção das zonas onde intervir, deverão ser baseadas numa correcta compreensão do comportamento estrutural do edifício em causa, sendo necessário dispor de ferramentas de cálculo e de dimensionamento aplicáveis ao estudo de construções antigas.

Importa, antes de mais, identificar aquilo que se entende, no presente trabalho, por edifícios

antigos. Usualmente, do ponto de vista estrutural, designa-se por edifício antigo aquele que foi construído antes da generalização do betão armado e do aço como materiais construtivos dominantes, tendo sido realizado com materiais e técnicas tradicionais, isto é, utilizando materiais naturais sujeitos a pequenas transformações (como por exemplo, a pedra, o barro, a cal e a madeira)^{Appleton,2003}.

O aço e, principalmente, o betão armado foram responsáveis por profundas alterações nas técnicas habituais de construção de edifícios e na sua concepção estrutural. Pela rapidez e amplitude de expansão com que se impôs no panorama construtivo, o advento do betão armado marca decisivamente uma rutura com o passado, particularmente quando o conhecimento científico-técnico desse novo material permitiu a implementação de soluções estruturais impossíveis até então. De notar que a influência do ferro e do aço na construção ocorreu de forma mais gradual do que a imposição do betão armado sobre os outros materiais. De facto, era frequente a utilização localizada de elementos em ferro forjado nas construções tradicionais e apenas após a revolução industrial se introduziram novas soluções estruturais com peças metálicas, nomeadamente vigas e colunas esbeltas. No entanto, na europa, com a excepção de instalações industriais e de pavilhões de grandes dimensões, com estruturas totalmente em ferro e, posteriormente, em aço, esta influência foi localizada e não se traduziu em alterações substanciais nos hábitos construtivos. Durante algum tempo as novas soluções estruturais em ferro conviveram nos edifícios correntes com as soluções construtivas tradicionais. Por exemplo, no final do século XIX, início do século XX, em Portugal e nas construções tradicionais em alvenaria, os pavimentos com vigas em ferro e abobadilhas cerâmicas começaram a substituir alguns pavimentos com estrutura em madeira.

Na história da evolução estrutural, a utilização generalizada do betão armado, que ocorreu em território nacional na década de 40 do século passado, marca definitivamente a transição da construção para a era moderna.

Também do ponto de vista das metodologias de análise de estruturas o advento do aço e do betão armado representa um marco decisivo. Os novos materiais possibilitavam a execução de elementos estruturais contínuos com características mecânicas que permitiam a aplicação dos princípios da resistência de materiais já enunciados, vindo a resultar no desenvolvimento de sofisticados procedimentos de análise estrutural. No entanto, os novos métodos de cálculo não

eram aplicáveis às construções antigas, em virtude do comportamento não linear das alvenarias (que resulta da sua fraca resistência à tracção) e da existência de descontinuidades nos seus elementos. Assim, o desenvolvimento de metodologias de análise para as novas estruturas não resultou na evolução dos métodos de análise para as alvenarias dos edifícios antigos[†]. Pelo contrário, com a generalização do betão armado e o conseqüente desaparecimento das técnicas construtivas tradicionais, ocorreu um gradual esquecimento das regras de análise e de dimensionamento das construções em alvenaria.

À semelhança dos métodos de análise estrutural, também os conceitos de dimensionamento e de verificação da segurança desenvolvidos para as estruturas modernas não são directamente aplicáveis aos edifícios antigos. Os modernos conceitos de dimensionamento baseiam-se em três condições fundamentais: resistência, deformabilidade e estabilidade^{††}, aspectos que nem sempre são relevantes no dimensionamento das estruturas das construções antigas.

Tome-se o exemplo das estruturas arqueadas (arcos, abóbadas e cúpulas) das construções antigas. Face às acções habituais essas estruturas de alvenaria apresentam, em geral, um reduzido nível médio das tensões instaladas^{†††}, o que se reflecte numa pequena deformabilidade dos seus elementos. Assim, a resistência e a deformabilidade, parecem não ter grande relevância, estando a segurança das estruturas arqueadas em alvenaria ligada a aspectos de estabilidade global^{††††}.

O comportamento de um arco submetido à acção do seu peso próprio e de uma carga concentrada (Figura 1.1) permite demonstrar os aspectos principais destas estruturas. Para um valor da carga concentrada suficientemente pequeno, a estrutura permanece em equilíbrio, sem que ocorram deformações significativas e com um nível de tensões instaladas reduzido. Aumentando a intensidade da carga concentrada, as deformações e as tensões instaladas

† Como se verá, só recentemente os modelos computacionais permitiram a análise de estruturas de comportamento não linear sendo, assim, possível a sua aplicação na modelação de estruturas de alvenaria.

†† Os materiais deverão apresentar características de resistência suficientes para suportar as tensões instaladas em virtude da acção das cargas previsíveis; não deverão ocorrer na estrutura deformações nem deslocamentos excessivos; e não deverão ocorrer fenómenos de instabilidade locais ou globais.

††† Embora em certos casos se possam identificar fendilhações ou esmagamentos locais resultantes de fenómenos de concentração de tensões que, em geral, não afectam a integridade estrutural do conjunto.

†††† Como se verá no capítulo 3, a verificação da estabilidade da estrutura é realizada com base na análise de mecanismos de colapso associados à formação de “rótulas” que resultam da diminuta resistência à tracção das secções transversais da estrutura.

permanecerão reduzidas até ao momento em que, subitamente, o arco colapsa através da formação de 4 “articulações”. As tensões permanecem reduzidas, mas forma-se um mecanismo de colapso.

De facto, a capacidade resistente do arco submetido à acção de uma carga concentrada não depende, pelo menos nos casos correntes, da deformabilidade ou da capacidade resistente dos materiais que o constituem, mas sim da relação entre a geometria do arco (forma do eixo e espessura) e a intensidade e localização da carga actuante; uma vez satisfeita essa relação estarão automaticamente satisfeitas as outras condições. Deste modo, o dimensionamento de arcos, abóbadas e cúpulas, para um dado carregamento e vão a vencer, consiste num processo de identificação das suas proporções correctas. Este conceito de dimensionamento baseado em regras de proporção, embora estranho aos olhos do projectista actual, foi utilizado desde a antiguidade[†] até praticamente aos dias de hoje.

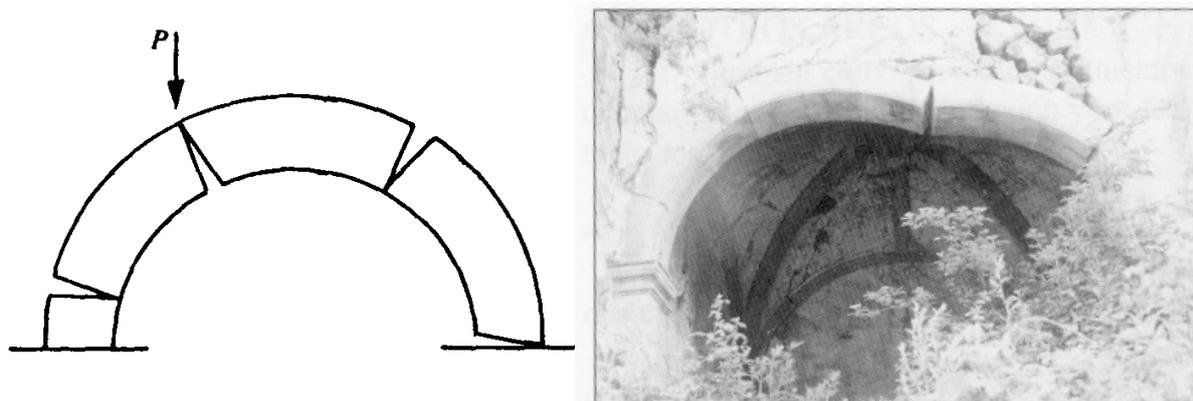


Figura 1.1 - Mecanismo de colapso de um arco sob a acção de uma carga concentrada e exemplo de colapso eminente de um arco real^{Adam, 1995}.

Constata-se, assim, que os modernos conceitos de análise estrutural e de verificação da segurança, desenvolvidos para estruturas contínuas em betão armado ou em aço, não são adequados para a análise de estruturas de edifícios antigos, sendo necessário recuperar as antigas metodologias de dimensionamento e desenvolver novos métodos de análise estrutural. No presente trabalho pretende-se identificar métodos de análise estrutural e de verificação da segurança aplicáveis às estruturas das construções antigas, tendo-se seleccionado como objecto de estudo as estruturas arqueadas (arcos, abóbadas e cúpulas) em alvenaria.

[†] A lenda "A abóbada" de Alexandre Herculano ilustra, a propósito do projecto de Afonso Domingues para abóbada da sala do capítulo do mosteiro da Batalha (1401), a consciência dos mestres de que a estabilidade das estruturas de alvenaria estaria ligada a regras de proporcionalidade geométrica.

A selecção das estruturas arqueadas fundamenta-se pela sua importância no arranjo estrutural das construções antigas, nomeadamente nos grandes edifícios históricos, e por ser neste tipo de estruturas que os métodos actuais de dimensionamento se apresentam mais ineficientes.

1.2 - OBJECTIVOS

A necessidade de estudos estruturais em construções antigas e o ainda insuficiente domínio das técnicas de previsão da resposta estrutural destes construções, justificam o estudo e desenvolvimento de metodologias analíticas e gráficas que possibilitem a compreensão dos processos de equilíbrio dessas estruturas, bem como de modelos computacionais que simulem adequadamente as características mecânicas dos materiais e os elementos constitutivos das construções antigas. Recentemente têm sido desenvolvidos modelos numéricos de análise de estruturas que permitem a simulação de comportamentos não lineares, semelhantes ao de alguns dos materiais das estruturas de edifícios antigos. No entanto, a experiência na utilização destes modelos na simulação do comportamento estrutural de edifícios antigos é reduzida e é necessário adaptá-los às características próprias dessas estruturas.

O objectivo do presente trabalho é a definição de regras e estratégias para análise das estruturas arqueadas dos edifícios antigos. Nos pontos seguintes resumem-se os principais aspectos abordados neste trabalho:

- 1) Estudo das metodologias clássicas de dimensionamento de estruturas em alvenaria, nomeadamente de arcos, abóbadas e cúpulas, sua validação e desenvolvimento à luz dos conceitos actuais da mecânica estrutural;
- 2) Estudo das diferentes metodologias de modelação numérica não linear, adequados para a simulação de construções em alvenaria, selecção dos modelos mais adequados, verificação da sua aplicabilidade a estruturas correntes e calibração através da comparação com resultados experimentais;
- 3) Aplicação das metodologias de modelação numérica e de análise estrutural a um edifício antigo real.

O trabalho seguiu duas vias de análise complementares: uma via analítica, baseada em considerações de equilíbrio e que se aproxima das metodologias de cálculo utilizadas pelos investigadores do final do século XIX; e uma via numérica, que faz uso dos sofisticados modelos de cálculo não linear recentemente desenvolvidos e de resultados experimentais para a sua calibração.

Com a realização deste trabalho teve-se também por objectivo a criação de um pólo de investigação no domínio da análise estrutural de edifícios antigos no grupo de investigação do Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção do Instituto Superior Técnico (*ICIST*), em que o autor está inserido.

1.3 - ESTRUTURA DO TRABALHO

O desenvolvimento dos temas atrás referidos encontra-se organizado em 7 capítulos:

No presente capítulo (*Introdução*) procura-se situar o tema desenvolvido no contexto geral da engenharia civil e explicitar os objectivos que se pretenderam alcançar com o trabalho.

No capítulo 2 (*Enquadramento Histórico*) faz-se um levantamento, desde a antiguidade até aos dias de hoje, da evolução da construção em alvenaria e das correspondentes metodologias de dimensionamento. Desde a antiguidade, o homem construiu edifícios e pontes de grande dimensão e arrojo estrutural, os quais chegaram aos nossos dias após séculos de utilização. Assim, embora muitos dos critérios de dimensionamento então utilizados resultassem do saber empírico e não duma visão científico-estrutural, as antigas técnicas de construção e de dimensionamento têm uma validade comprovada pela durabilidade e resistência desse património construído. Deste modo, uma investigação sobre metodologias de análise estrutural a aplicar em edifícios antigos terá necessariamente de ser precedida por uma análise histórica sobre a evolução das técnicas construtivas e dos respectivos processos de dimensionamento.

No tema em análise a pesquisa histórica tem particular relevância em virtude de os objectos de estudo terem sido construídos e projectados com base em critérios de dimensionamento actualmente esquecidos. É importante, para coerência da análise estrutural do edifício existente, conhecer o processo construtivo e as técnicas de construção e de dimensionamento que deram

origem ao edifício em estudo.

No capítulo 3 (*Metodologias Gráficas e Analíticas*) faz-se um estudo das metodologias analíticas e gráficas para análise de estruturas arqueadas. Partindo dos conceitos mais simples, mas muitas vezes do desconhecimento do engenheiro actual, como seja a noção de linha de pressões, analisam-se as antigas metodologias de dimensionamento e verificação da segurança, efectuando a validação teórica desses conceitos e desenvolvendo-os sempre que possível. O estudo paramétrico dessas metodologias permite, também, identificar algumas características fundamentais do comportamento das estruturas arqueadas. Os conceitos da teoria da plasticidade, mais recentes, são descritos no capítulo 3 e aplicados para legitimar algumas metodologias analíticas e gráficas, durante muito tempo utilizadas sem fundamento teórico. Os estudos analíticos são conduzidos de forma a obter expressões gerais e algoritmos, que definem espessuras mínimas admissíveis de arcos, abóbadas e cúpulas, para diferentes carregamentos, e valores de cargas de colapso.

No capítulo 4 (*Modelação Numérica de Estruturas em Alvenaria*) faz-se um levantamento das metodologias numéricas mais correntes na modelação de estruturas em alvenaria. Este levantamento, juntamente com a avaliação das propriedades fundamentais das alvenarias, permite identificar as metodologias de análise não linear mais indicadas para a modelação computacional das estruturas dos edifícios em estudo. Estas metodologias, nomeadamente o método dos elementos finitos e o dos elementos discretos, são estudadas pormenorizadamente, identificando as maiores dificuldades numéricas e os algoritmos que permitem a sua ultrapassagem. Os métodos são comparados, quer do ponto de vista teórico, quer pela sua aplicação na modelação de estruturas reais. A aplicabilidade da modelação numérica através de ambas as metodologias é confirmada através de exemplos e da sua calibração pela comparação com resultados experimentais.

No capítulo 5 (*Projecto COSISMO*) faz-se a descrição da campanha de ensaios experimentais realizada no âmbito do projecto de investigação *COSISMO*, promovido pela Direcção Geral de Edifícios e Monumentos Nacionais (*DGEMN*), conjuntamente com o Laboratório Nacional de Engenharia Civil (*LNEC*) e com o Centro Comum de Investigação da Comissão Europeia - Joint Research Centre (*JRC*), no qual o autor participou activamente.

O projecto *COSISMO* teve como um dos principais objectivos a análise do comportamento de estruturas “porticadas” em alvenaria de pedra emparelhada, com vista à identificação das características fundamentais do seu funcionamento estrutural e de soluções de reforço eficazes. Outro objectivo importante foi a obtenção de dados experimentais para calibração de modelos numéricos. O objecto de estudo foi o convento de São Vicente, em Lisboa, tendo os ensaios experimentais em laboratório sido realizados sobre um protótipo, à escala real, de um troço da estrutura da arcaria dos claustros do convento.

No capítulo 5 são detalhadamente descritos os estudos preliminares, numéricos e experimentais (*in situ*), que permitiram a definição do protótipo, do sistema de carregamento e do plano de instrumentação, assim como os diferentes ensaios experimentais realizados no laboratório *ELSA (European Laboratory for Structural Assessment)*. Os ensaios realizados em laboratório, cujos resultados são também apresentados no capítulo 5, são de natureza dinâmica, embora conduzidos de forma quase estática, através da metodologia de ensaios pseudo-dinâmicos. Os princípios básicos desta metodologia de ensaio são também descritos neste capítulo.

Apresentam-se ainda os resultados dos diferentes modelos numéricos, bidimensionais e tridimensionais, de elementos finitos e de elementos discretos utilizados para simular a resposta estrutural do protótipo sob a acção de carregamentos horizontais cíclicos. O bom ajustamento entre os resultados numéricos e experimentais confirma, mais uma vez, a adequabilidade destes modelos de análise numérica não linear na modelação de estruturas em alvenaria.

No capítulo 6 (*Caso de Estudo, Igreja de São Francisco*) apresenta-se como caso de estudo a análise estrutural da igreja de São Francisco em Évora, a qual permitiu a aplicação das metodologias numéricas, analíticas e gráficas expostas nos capítulos anteriores. A fendilhação da abóbada da nave da igreja de São Francisco apresenta uma regularidade e simetria que deixa antever uma relação entre os danos e o funcionamento estrutural da igreja, o que conduziu à escolha deste exemplo como caso de estudo.

O estudo do comportamento estrutural da abóbada e contrafortes da igreja seguiu uma metodologia de análise próxima das recomendações internacionais^{ICOMOS,2004} para intervenção estrutural neste tipo de património. Assim, após os primeiros estudos que permitiram antever a origem do problema, foi realizada uma campanha de levantamento geométrico com meios de

topografia de alta precisão, novos estudos numéricos com modelos mais sofisticados e instrumentada a igreja através de um sistema de aquisição de dados. A decisão quanto à intervenção a realizar, com eventual reforço, será tomada após a obtenção de resultados do sistema de instrumentação, os quais permitirão concluir quanto à estabilidade ou progressão do fenómeno de abertura das fendas.

No âmbito do trabalho desenvolvido nesta dissertação foi assinado entre a *DGEMN* e o *ICIST* um protocolo para a realização da análise estrutural, levantamento geométrico e instrumentação da igreja de São Francisco em Évora.

No capítulo 7 (*Conclusões e Desenvolvimentos Futuros*) apresentam-se as principais conclusões do trabalho desenvolvido, bem como alguns aspectos que podem ser objecto de futuros desenvolvimentos.

As referências bibliográficas foram agrupadas de acordo com a sua antiguidade. Na *Bibliografia Histórica* apresentam-se as referências com data até 1948 e na *Bibliografia* as referências com data posterior a 1948.

CAPÍTULO 2 - ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

2.1 - INTRODUÇÃO

A construção em alvenaria[†] é uma das mais antigas técnicas construtivas. A simplicidade de execução e a durabilidade das estruturas em alvenaria tornaram este material compósito num popular material de construção, ainda utilizado nos tempos modernos. Embora se tenha verificado um significativo avanço na execução das alvenarias, tanto nos materiais, como nas técnicas construtivas, o princípio de assemblagem de diversos elementos permanece inalterado desde a sua origem.

No estudo do comportamento estrutural de construções antigas, é importante, antes de qualquer outro desenvolvimento, obter uma visão geral da evolução temporal das construções em alvenaria, caracterizando os seus aspectos estruturais. Assim, neste capítulo faz-se uma revisão do desenvolvimento das construções em alvenaria ao longo dos tempos, salientando os marcos fundamentais do ponto de vista estrutural e também, da evolução das metodologias de dimensionamento e de verificação da segurança estrutural.

2.2 - A CONSTRUÇÃO EM ALVENARIA ATRAVÉS DOS TEMPOS

Os primeiros exemplos de construção em alvenaria foram encontrados em escavações arqueológicas realizadas próximo do lago de Hullen, em Israel. Estas construções, realizadas entre 9000 e 8000 anos antes de Cristo, e executadas em alvenaria de pedra mostram que,

[†] A palavra alvenaria tem origem no árabe (al-bannà = pedreiro) e significa uma associação de unidades, pedras, blocos, tijolos, etc, que poderão ser ligados por uma argamassa de assentamento, formando uma construção.

provavelmente, as primeiras construções em alvenaria foram executadas com pedra. Da mesma época (8000 A.C.) datam as famosas muralhas de Jericó, na Palestina, construídas em pedra de calcário com preenchimento das juntas com terra.

A indisponibilidade de pedra na imediações do local a construir, terá levado à utilização de materiais alternativos na construção de habitações. Nas regiões secas a construção com terra constituía uma alternativa económica e de fácil execução. Assim, terá tido início, a construção de paredes com misturas de terra e de fibras vegetais. A eficácia destas construções e o seu baixo custo vulgarizou esta técnica construtiva nas regiões secas, nomeadamente, no médio oriente e norte de Africa†.

A construção em terra deu origem à manufactura de tijolos de argila secos ao sol, os quais eram utilizados na construção de paredes e muralhas. Trabalhos arqueológicos executados na Palestina revelaram paredes de tijolos de argila secos ao sol executadas cerca de 3000 anos antes de Cristo. No antigo Egipto, desde os tempos pré-dinásticos (cerca de 5000 A.C.) até à ocupação romana (50 D.C.) o material mais divulgado para a construção de habitações eram os tijolos de argila secos ao sol (Figura 2.1).



Figura 2.1 - Produção de tijolos no antigo Egipto (tumulo de Rekhmara - Thebes, 1500 A.C.).

A cozedura dos tijolos em argila foi resultado da observação do aumento de resistência e de durabilidade da cerâmica cozida. Os primeiros exemplos de produção de tijolos cozidos vêm de Khafaje, no Iraque, (3000 A.C.) e a primeira referência à cozedura de tijolos foi encontrada num papiro da 19ª dinastia egípcia (1300 A.C.).

Na construção de edifícios religiosos e monumentais, a disponibilidade de meios era superior, permitindo a utilização de melhores técnicas de construção e de materiais mais duráveis. Deste modo, a pedra foi utilizada como material de construção na edificação das pirâmides e templos

† No sul da península ibérica, nas regiões de maior influência árabe, como o alentejo, algarve e andaluzia encontram-se diversos exemplos de construção em terra, alguns executados ainda no século XX.

faraónicos. As pirâmides (2800 a 2000 A.C.) construídas com grandes blocos de pedra constituíram um enorme desafio do ponto de vista construtivo e os templos faraónicos (século XV A.C.), com as suas colunas com capitéis e tectos em lajes de pedra, representam uma significativa evolução na compreensão do comportamento estrutural dos elementos construtivos.

No século XIII A.C., em Micenas, foi construída a famosa "*Porta dos Leões*" (Figura 2.2) com um lintel de 3 metros de vão, em pedra. Este lintel é considerado por alguns autores^{Croci,1998} um exemplo das estruturas que viriam a dar origem ao arco.



Figura 2.2 - “Porta dos Leões” - Micenas, Grécia (século XIII A.C.).

A arquitectura e técnicas construtivas do antigo Egipto tiveram marcada influência na arquitectura da Grécia clássica, não se verificando do ponto de vista estrutural um significativo avanço dos templos egípcios para os gregos. Os templos gregos apresentavam uma harmonia estética baseada em rigorosas e inovadoras regras de proporção e a estrutura dessas construções é fundamentalmente constituída por um conjunto de colunas pouco espaçadas que apoiam grandes vigas de pedra (Figura 2.3). Trata-se de uma estrutura basicamente isostática e, portanto, particularmente sensível a assentamentos e a acções sísmicas.

A grande revolução na arte da construção surgiu com o império romano. Desenvolveram-se novos materiais e técnicas construtivas, que permitiram a execução de monumentais construções religiosas, civis e militares. Com os novos materiais e os avanços nos conceitos estruturais, os romanos disseminaram por todo o império grandes edifícios, templos, aquedutos,

estradas e pontes de notável resistência, alguns ainda hoje em funcionamento (Figura 2.4).



Figura 2.3 - Partenon - Atenas, Grécia (século V A.C.).

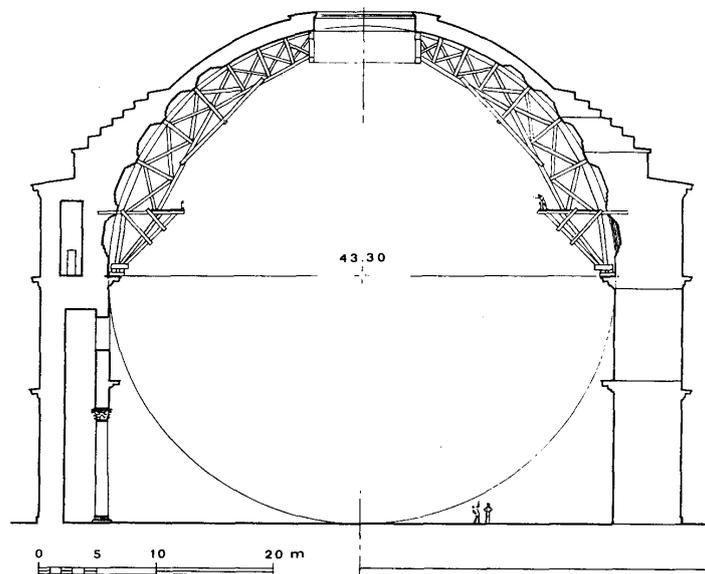


Figura 2.4 - Cúpula do Panteão de Roma (século II D.C.).

Do ponto de vista dos materiais, salienta-se o desenvolvimento das técnicas de produção de tijolos, que passaram a ter melhor qualidade e dimensões normalizadas, o desenvolvimento de novas argamassas, com características hidráulicas, e o aparecimento do betão, executado com cascalho e areia, aglutinados com cal e pozolanas^{Adam, 1995}.

Do ponto de vista estrutural, é de salientar a transição das estruturas marcadamente rectilíneas da antiguidade clássica, para estruturas curvas (arcos abóbadas e cúpulas), que permitiu novas soluções para vencer vãos, com materiais mais duráveis. Herdando da civilização etrusca o conhecimento do funcionamento estrutural do arco, os romanos desenvolveram esta técnica atingindo uma elevada mestria na sua concepção e nas técnicas de construção.

Na área das técnicas construtivas foram grandes os desenvolvimentos introduzidos pela civilização romana. Novas técnicas para execução de paredes, arcos, abóbadas e cúpulas em alvenaria de tijolo, de pedra e mista permitiram construções de maior dimensão, mais resistentes e duráveis. A execução de paredes com betão no interior de duas faces em alvenaria de pedra ou tijolo ("*Opus Cementicium*") e a inserção de arcos nas espessuras das paredes (Figura 2.5), que permitiam o encaminhamento dos esforços para zonas mais resistentes, foram também novidades introduzidas por esta civilização. A construção de paredes com elementos de madeira ("*Opus Craticium*") era também vulgar nesta época (Figura 2.5).

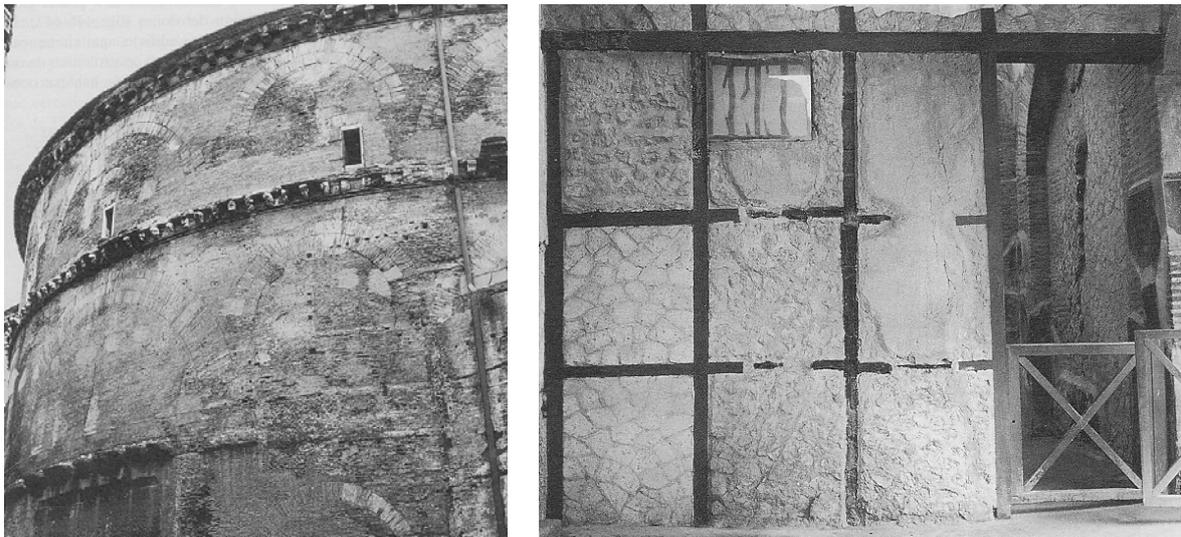


Figura 2.5 - Arcos embebidos nas paredes de alvenaria (Panteão de Roma) e parede de alvenaria com elementos de madeira (Herculano, 62-79 D.C.)^{Adam,1995}.

Contemporaneamente ao movimento da capital do império romano de Roma para Bizâncio (efectuado por Constantino no século IV) iniciou-se um novo período da história da arquitectura - o período Bizantino. A inovação mais relevante neste período foi a sobreposição da cúpula sobre uma planta quadrada, introduzindo elementos esféricos triangulares (pendúculos) entre a cúpula e a base. O exemplo mais importante desta arquitectura é a basílica de Santa Sofia construída no século VI por Justiniano.

Com a decadência do império romano e, conseqüentemente, das estruturas logísticas que permitiram a execução das suas grandes obras, perdeu-se, durante séculos, a capacidade de edificar construções monumentais. Os romanos tinham estabelecido um governo regular entre as vastas regiões conquistadas ou aliadas, possibilitando-lhes recursos e meios que não teriam se as várias províncias funcionassem como estados autónomos. Quando pretendiam cobrir o

império com monumentos de utilidade pública podiam empregar não só os habitantes locais, como também um enorme exército habituado a este tipo de trabalho. Também o acesso a matérias primas não disponíveis na região era facilitado pelas boas relações entre províncias, pela qualidade das vias romanas e pela segurança de circulação no território imperial. A paz romana permitiu que o investimento e a mobilização das populações se dirigisse para as obras públicas e não para o esforço de guerra, criando no império uma estrutura de apoio à construção de dimensão supra provincial.

Do desmembramento do império resultou um conjunto de territórios autónomos de menores capacidades económicas, que consumiam grande parte dos recursos em guerras de manutenção ou de alargamento dos seus limites territoriais. Em tempo de guerra a actividade construtiva, com a excepção da edificação de estruturas defensivas, não era prioritária e a mão de obra era recrutada para a guerra ou para os campos agrícolas.

As ordens religiosas foram as primeiras instituições com condições para criar à sua volta uma estrutura logística capaz de substituir a antiga estrutura romana, embora menor e mais pobre. Segundo Viollet le Duc^{Viollet le Duc, 1858}, as ordens religiosas conseguiram criar essa organização porque reuniam num mesmo lugar um grande número de homens disciplinados, dispensados do serviço militar e unidos por um mesmo pensamento, porque possuíam o terreno onde viviam, porque acumulavam bens que cresciam rapidamente, porque mantinham relações com estabelecimentos religiosos vizinhos, porque ofereciam condições de segurança e estabilidade que atraíam as populações, porque graças à estabilidade da instituição e aos seus privilégios podiam fundar mosteiros e escolas de artesãos, que trabalhavam sob uma única direcção, conservando as técnicas e tradições e anotando os aperfeiçoamentos, e, finalmente, porque um estabelecimento religioso exercia uma influência numa área muito grande, permitindo-lhe angariar fundos e esforços de zonas distantes.

Os espíritos reformadores do início da época medieval apontavam para uma mudança de toda a sociedade e não queriam as habitações sumptuosas e bárbaras que haviam servido de refúgio aos monges dos séculos anteriores. Procurando erguer construções sólidas e duradouras, adoptaram alguns dos princípios construtivos romanos. No entanto, não dispendo de recursos tão poderosos, os novos construtores foram obrigados a adaptar as técnicas às capacidades disponíveis. A sua escassez obrigou à compreensão do funcionamento das estruturas, com vista

à definição de novas regras e técnicas que garantissem igualmente a estabilidade das construções, mas com maior economia de matéria prima e de mão de obra. O estilo românico nasce desta adaptação dos princípios e regras de construção romana.

A arte da construção saiu da rusticidade do século XI graças à actividade das ordens religiosas, sendo a ordem de Cluny uma das mais importantes. Esta foi a primeira a ter uma escola de artesãos, cujos princípios produziram no século XII monumentos já libertos das tradições romanas.

Com o objectivo de diminuir a espessura dos elementos que suportavam os arcos e abóbadas, os construtores do século XII trataram de reduzir ao máximo os impulsos horizontais, elevando o ponto médio dos arcos e abóbadas, isto é, convertendo os arcos em arcos ogivais, que, como eles sabiam, produzem para um mesmo vão impulsos horizontais menores. A diminuição das espessuras das paredes e pilares conduziu à construção de novas estruturas para o equilíbrio dos, já reduzidos, impulsos horizontais: os arcos botantes e contrafortes. Estas tentativas sucessivas de aligeiramento das regras de construção romana, conduziram à arquitectura gótica.

Na arquitectura gótica a estrutura das igrejas é constituída por um esqueleto de elementos lineares em alvenaria de pedra, colunas, arcos, nervuras, arcos botantes e contrafortes com pináculos, que têm por função a transmissão das cargas até às suas fundações (Figura 2.6). A constituição de um esqueleto com elementos lineares liberta as paredes de funções resistentes e permite aberturas com vitrais, o que é a maior inovação estrutural da arquitectura gótica. A introdução de nervuras nas abóbadas, que também facilitam esteticamente as intersecções entre as várias superfícies, permite a diminuição das espessuras das abóbadas e das dimensões dos cimbres e é também uma significativa característica da arquitectura gótica.

O Renascimento é a fase seguinte da história da arquitectura e também da história das construções em alvenaria. Neste período, marcado pela recuperação de formas e proporções baseado nas regras clássicas, são executados diversos palácios e villas, com formas regulares e simétricas. No entanto, as construções de maior vulto seriam as igrejas com majestosas cúpulas.

As cúpulas da renascença são, do ponto de vista estrutural, a maior evolução desde a arquitectura gótica. São constituídas por duas cascas ligadas entre si por grandes nervuras, o que

permite uma alteração da geometria do interior para o exterior e, também, reduz o peso durante a construção. Os dois maiores exemplos desta arquitectura, embora distintos, são a basílica de Santa Maria del Fiore em Florença (século XV), de Filippo Brunelleschi, e a basílica de S. Pedro em Roma (século XVI), de Michelangelo (Figura 2.7).

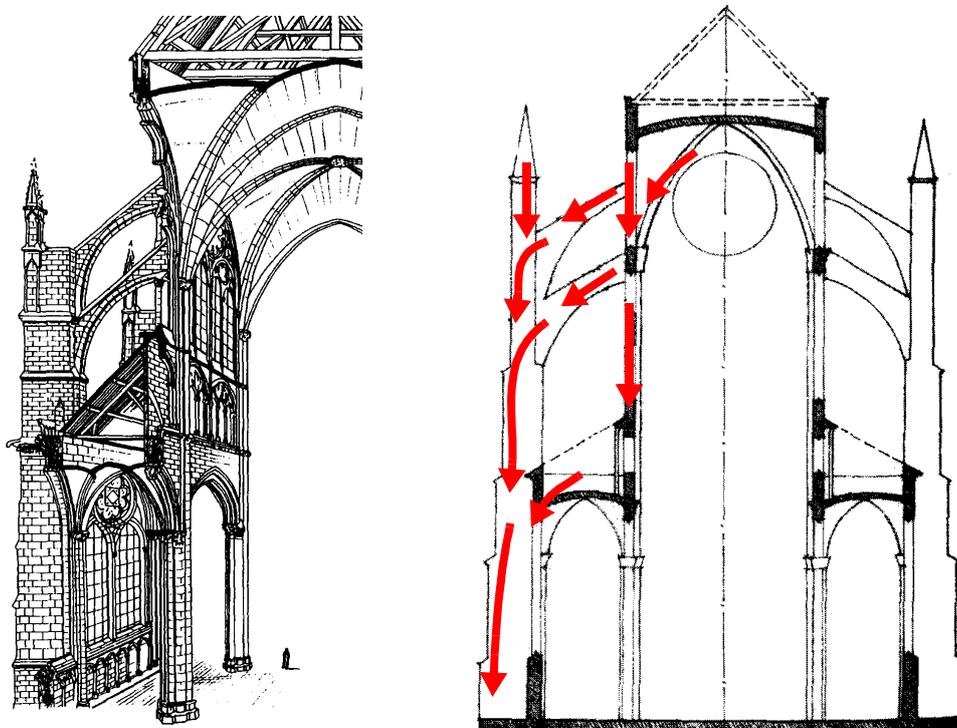


Figura 2.6 - Vista interior ^{Viollet le Duc, 1858} e esquema estrutural de uma catedral gótica.

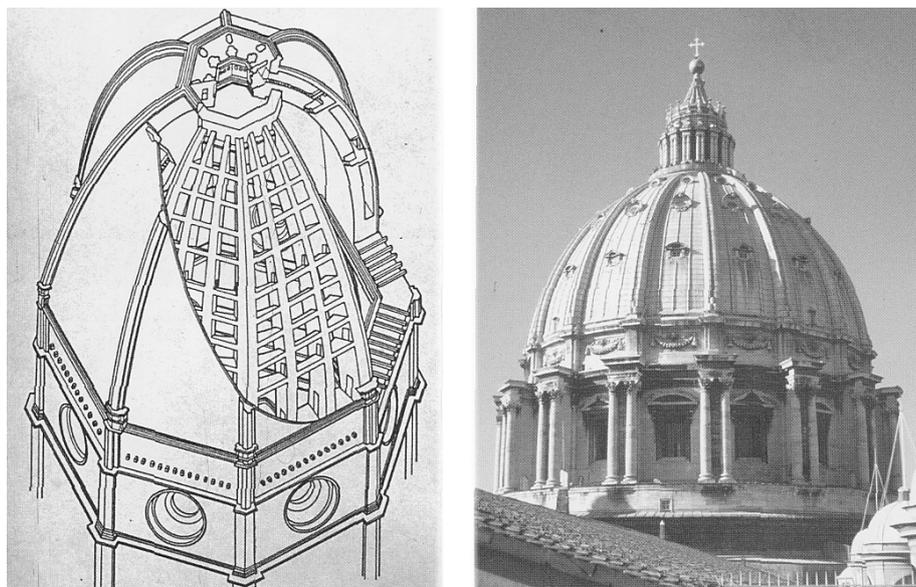


Figura 2.7 - Cúpulas das basílicas de Santa Maria del Fiore (esq.) e de S. Pedro em Roma (dta.).

O período seguinte da história da arquitectura, o Barroco, sendo um marco importante do ponto de vista arquitectónico não se traduziu em avanços significativos do ponto de vista estrutural nas

construções em alvenaria. As obras de maior relevo deste período são a catedral de S. Paulo em Londres e o Panteão em Paris.

Com a revolução industrial dos séculos XVIII e XIX, devido ao progresso da produção do ferro e do aço, deu-se uma mudança radical nos modelos estruturais e na evolução das técnicas construtivas. No século XIX, o ferro começou a substituir a alvenaria na execução de pilares e as vigas metálicas tornaram obsoletos os arcos e abóbadas na execução de coberturas e pavimentos. Em relação à construção em alvenaria é de salientar o início da produção industrial de tijolos em fornos contínuos, que se traduziu numa melhoria da sua qualidade. A substituição da alvenaria pelos novos materiais, inicialmente pelo aço e, posteriormente, pelo betão armado, levou a um gradual esquecimento das antigas técnicas construtivas ao longo do século XX. Hoje são raros os artesãos que dominam as técnicas de execução de arcos, abóbadas e cúpulas em alvenaria e, desde há muito, os projectistas substituíram estas estruturas por outras em aço ou betão armado.

Nos tempos mais recentes, verificou-se uma reanimação da construção em alvenaria em edifícios de pequeno porte. A economia e facilidade de execução desta técnica aliada ao aumento de segurança estrutural conseguido pela introdução de novos materiais e elementos em betão armado, tornou novamente competitivo este tipo de construção.

Com o recente interesse pela preservação do património arquitectónico e as actuais filosofias de conservação e restauro de edifícios monumentais surgiu a necessidade de aplicar novamente as técnicas tradicionais de construção. A construção tradicional revitalizou-se e áreas como a construção em alvenaria tradicional começaram a motivar o interesse das comunidades científica e técnica.

2.3 - A EVOLUÇÃO DOS MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO

2.3.1 - Da Antiguidade ao Renascimento

Infelizmente, chegaram até aos nossos dias poucos documentos com registos das metodologias de dimensionamento e das técnicas construtivas utilizadas na antiguidade. Do período anterior ao império romano não sobreviveu nenhum documento que se possa considerar um tratado de

construção. O primeiro tratado de construção de que se conhece o texto é o manual “Dez Livros de Arquitectura” do engenheiro militar romano Vitrúvio, escrito no século I a.c., início da era imperial romana. Também no tratado enciclopédico de Plínio (23-70 D.C.) e no tratado militar de Vegécio (385-400 D.C.) pode encontrar-se capítulos relativos às técnicas construtivas romanas. Estes documentos, em particular o tratado de Vitruvius, foram peças fundamentais para a divulgação e perpetuação da arquitectura romana e das suas técnicas construtivas. No tratado de Vitruvius^{Rua,1998} não se encontram quaisquer regras de dimensionamento relacionadas com arcos, abóbadas e cúpulas. Do ponto de vista do dimensionamento estrutural, apenas é referido no capítulo XI do livro VI a necessidade de aplicar regras de proporção adequadas como garantia da estabilidade da construção. De facto, o dimensionamento era baseado em regras de proporção geométrica, sendo os casos de sucesso, por exemplo a cúpula do Panteão de Roma, reproduzidos à escala por diversos pontos do império.

Do período medieval chegaram-nos alguns documentos com regras de dimensionamento e técnicas construtivas, sendo um dos mais importantes o livro de apontamentos de Villard de Honnecourt datado de 1235 (Figura 2.8), onde, segundo Heyman^{Heyman,1995}, é possível identificar ainda a influência da escola romana em algumas regras de proporção.

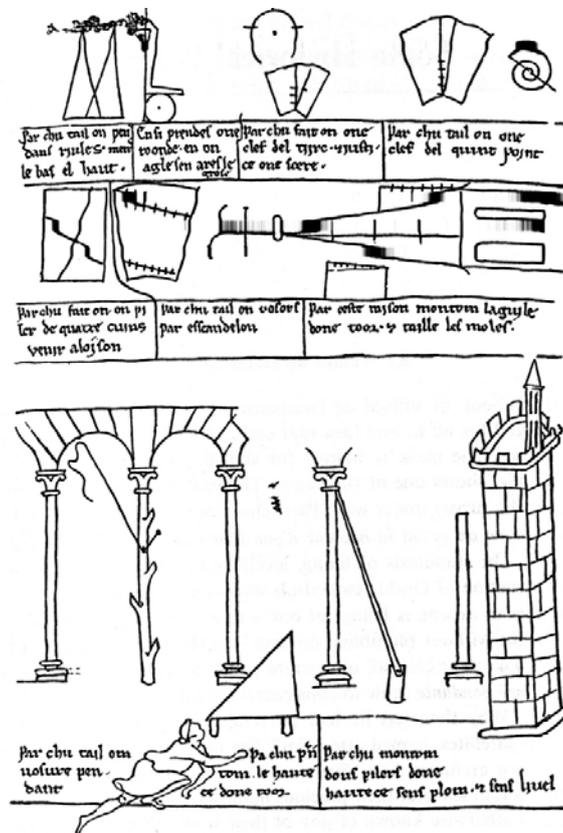


Figura 2.8 - Página do livro de apontamentos de Villard de Honnecourt.

Os anais da Catedral de Milão, escritos entre 1391 e 1400, são também uma importante referência para quem pretenda conhecer o modo de dimensionamento das catedrais góticas. As arrojadas dimensões que os arquitectos milaneses pretendiam usar na concepção da catedral de Milão levaram-os, por prudência, a reunir periodicamente com grupos de especialistas franceses e alemães para reverem os seus planos. As regras de dimensionamento estrutural, sobretudo relacionadas com dimensões de pilares, arcos botantes e contrafortes, que resultavam dessas acaloradas discussões ficaram registadas nos anais. Segundo Sanabria^{Sanabria,1998}, a necessidade de identificar um sistema geométrico que regesse as proporções do interior da igreja e a metodologia de dimensionamento, baseada em relações entre as principais dimensões dos elementos construtivos, era aceite pelos diversos mestres, havendo apenas divergência na quantificação das proporções a adoptar. De uma forma geral, nas igrejas góticas, as dimensões interiores eram estabelecidas de forma coerente através de um sistema geométrico de linhas e círculos, ao passo que os elementos estruturais externos eram dimensionados de forma independente, através de regras empíricas. Alguns autores registaram estas regras de dimensionamento estrutural, sendo de salientar as regras de Rodrigo Gil de Hontañón (1500-1577), escritas num período posterior ao gótico, entre 1544 e 1554 (Figura 2.9). Estas formulações empíricas, talvez mais conservativas do que outras do período gótico^{Sanabria,1988}, são relações geométricas para dimensionamento de colunas, interiores ou exteriores, arcos botantes e contrafortes.

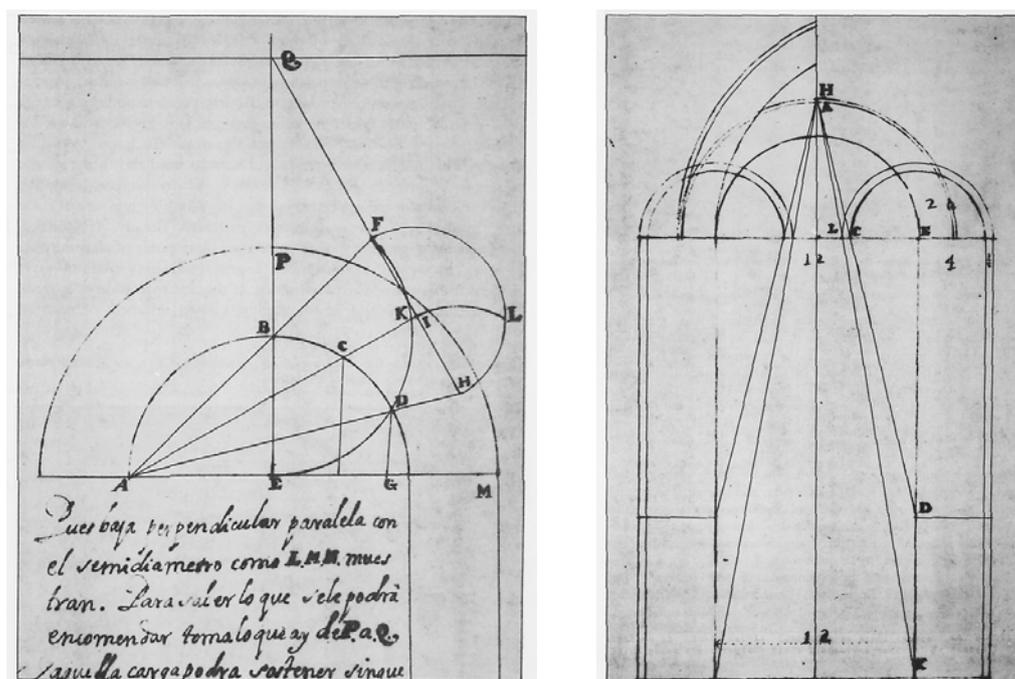


Figura 2.9 - Regras empíricas de Rodrigo Gil de Hontañón para o dimensionamento da espessura das colunas ou paredes que suportam um arco semi-circular[†].

Nestes documentos, assim como em outros raros manuscritos, as técnicas de dimensionamento baseavam-se apenas em relações geométricas, estando o conceito de estabilidade intimamente ligado à harmonia geométrica. As regras de dimensionamento, formuladas empiricamente através da experiência e, principalmente, a sábia disposição dos elementos construtivos levam a admitir que os mestres teriam a noção intuitiva de força e que perceberiam quais os elementos fundamentais no equilíbrio das estruturas.

2.3.2 - Do Renascimento ao Século XIX

O interesse crescente pelos exemplos da arquitectura da antiguidade que tinham sobrevivido ao tempo e às adaptações levou ao nascimento da arquitectura renascentista. As cópias e traduções dos livros da antiguidade, executadas nas abadias durante a idade média, foram de novo “descobertas”, permitindo, a par do estudo das proporções dos edifícios existentes, o nascimento das leis da arquitectura renascentista que resultaram também numa adaptação dos sistemas estruturais até então utilizados.

Com o advento da imprensa são impressas traduções dos textos de Vitruvius, Plínio, Vegécio, Euclides e Arquimedes e, posteriormente, diversos tratados dedicados à Arquitectura, Geometria, Perspectiva, Desenho, Estereotomia e Mecânica, alargando-se surpreendentemente a divulgação do conhecimento. Deste modo, começaram a ser lançadas as bases das várias ciências relacionadas com a construção, que viriam a transformar a profissão do engenheiro numa actividade com componente teórica, distinguindo-se cada vez mais da profissão de mestre construtor do período medieval.

Durante todo o período do renascimento a evolução do conhecimento estrutural foi marcada por discussões levadas a cabo, sobretudo em Itália, sobre o melhor desenho para as grandes cúpulas. Em 1434, Filippo Brunelleschi (1377-1446) concluiu a construção da cúpula da basílica de Sta. Maria del Fiore em Florença, o que demonstra um avançado conhecimento, mesmo que empírico, do comportamento mecânico destas estruturas. No final do século XV e início do século XVI, Leonardo da Vinci (1452-1519) desenvolveu os primeiros estudos que constituíram as bases da resistência de materiais, os quais, sob a forma de manuscritos, estiveram perdidos

† É de salientar que nestas regras, segunda e terceira de Rodrigo Gil de Hontañón, o dimensionamento da espessura da coluna ou parede de apoio é dependente da espessura da parede acima do arco e, na última delas, da altura da própria coluna ou parede de suporte.

até ao século XIX. A primeira vez em que uma força é definida como uma entidade vectorial, caracterizada pela sua intensidade, direcção e sentido é provavelmente num manuscrito de Leonardo da Vinci, onde se estuda o equilíbrio de duas forças inclinadas e onde, pela primeira vez, surge a regra do paralelograma para a adição de forças (Figura 2.10).

Os primeiros estudos sobre o comportamento mecânico dos arcos de que se tem conhecimento são também de Leonardo da Vinci e constam de um conjunto de ensaios experimentais (Figura 2.11). Nestes estudos, Leonardo da Vinci dá pistas e ideias que só viriam a ser desenvolvidas séculos mais tarde; por exemplo, propôs uma regra para a verificação da estabilidade de um arco que seria novamente enunciada em 1730 por Couplet (?-1743): "*um arco não cairá se a corda exterior não tocar o intradorso do arco*" (Figura 2.11).

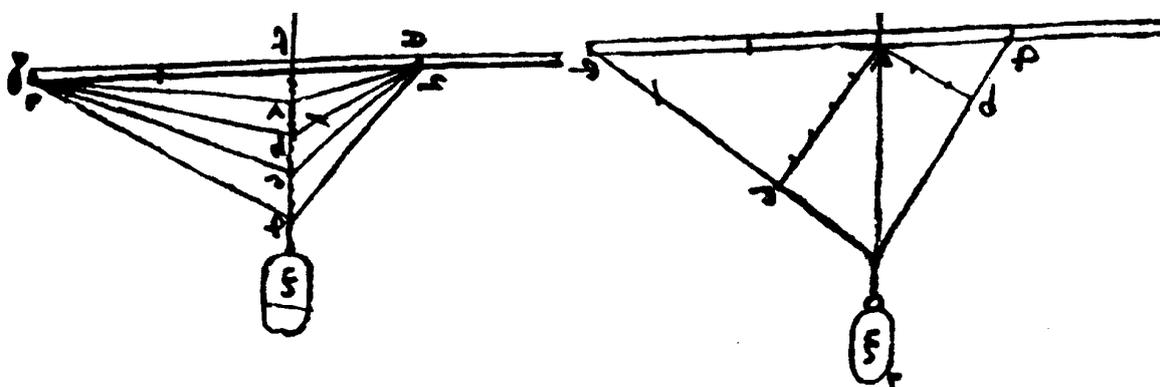


Figura 2.10 - Paralelograma de forças de Leonardo da Vinci.

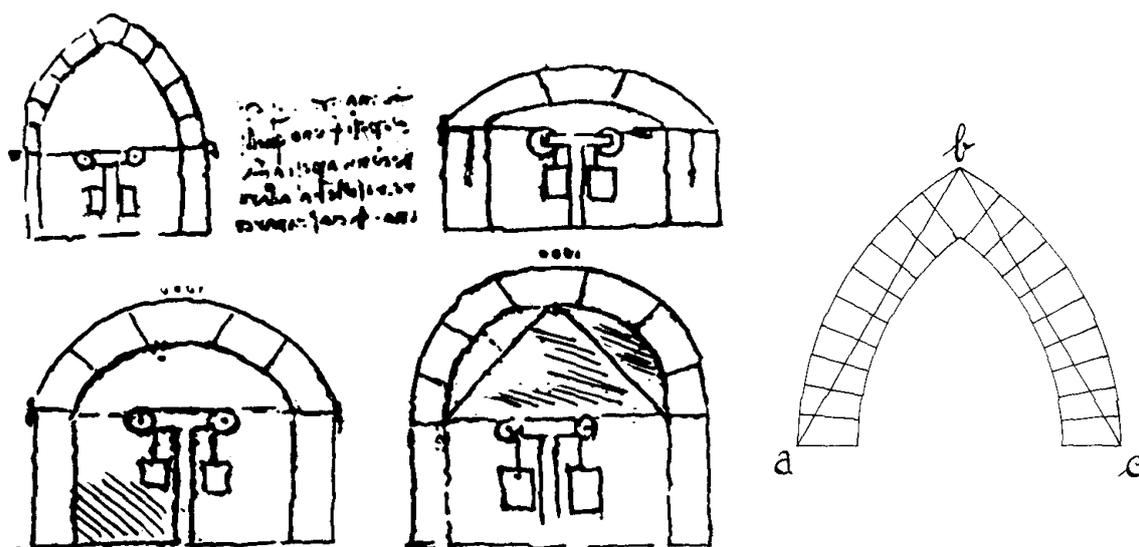


Figura 2.11 - Estudos sobre arcos e regra para a verificação da estabilidade de arcos de Leonardo da Vinci.

Os trabalhos sobre arcos de Leonardo da Vinci não tiveram sucessor imediato, da mesma forma que não houve no século XVI, e mais de metade do século XVII, outros desenvolvimentos no

estudo mecânico destas estruturas. O sucesso do comportamento estrutural dos arcos, abóbadas e cúpulas inspirava certamente curiosidade, assim como acontecia desde a antiguidade com a surpreendente resistência do ovo a acções segundo o seu eixo. No entanto, a motivação científica da época centrava-se sobretudo na resolução das leis fundamentais da mecânica e o sucesso das regras empíricas, que permitiram erguer edifícios de dimensões consideráveis, adiaram o estudo do problema.

Em 1638, surgiram com Galileo Galilei (1564-1642) as bases da mecânica estrutural que permitiram o desenvolvimento de condições para uma progressiva substituição das regras de dimensionamento empíricas por regras racionais.

Em 1643 o monge jesuíta François Derand (1588-1644) publicou^{Derand,1643} um importante tratado de arquitectura, onde, num dos seus 119 capítulos, enuncia uma regra empírica para o dimensionamento da espessura das paredes ou colunas que suportam os arcos (pés-direitos). Esta regra, que viria a ser muito popular até ao final do século XVIII é, segundo Viollet le Duc e Rondelet, muito anterior a Derand e evidencia-se nas catedrais góticas. Note-se (Figura 2.12) que a regra de Derand é puramente geométrica e, ao contrário da terceira regra de Rodrigo Gil de Hontañón, não considera a carga actuante sobre o arco nem a altura do pé direito.

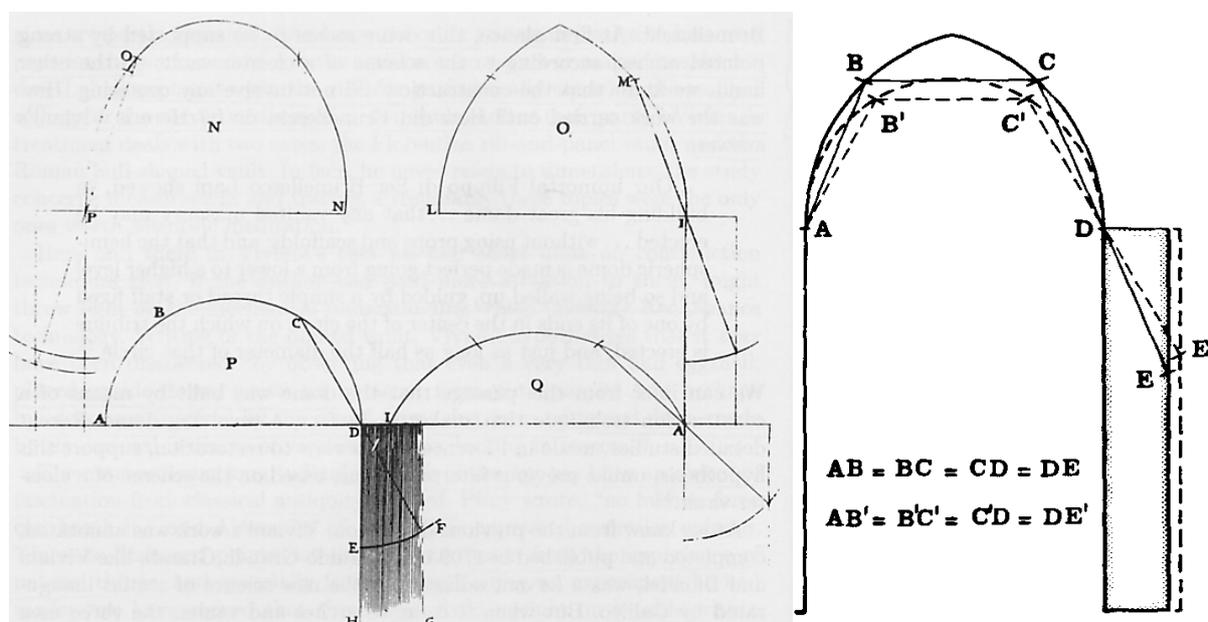


Figura 2.12 - Regra de Derand para dimensionamento da espessura dos pés-direitos de arcos^{Mainstone,1988}.

Em 1669 outro monge jesuíta, Honoré Fabri (1607-1688), publica^{Fabri,1669} o que se poderá considerar o primeiro estudo científico sobre a estática do arco. No entanto, este breve estudo

teve reduzida divulgação e a maioria dos conceitos viria a ser novamente formulada sem que, provavelmente, os seus autores tivessem tido conhecimento deste trabalho.

Em 1675, embora não conseguindo resolver a estática do problema, Robert Hooke (1635-1703) reconheceu^{Hooke,1675} que o problema do arco poderia ser identificado com o da catenária e estabeleceu que suspendendo uma corrente metálica se obtinha a geometria invertida de um arco equilibrado (Figura 2.13).

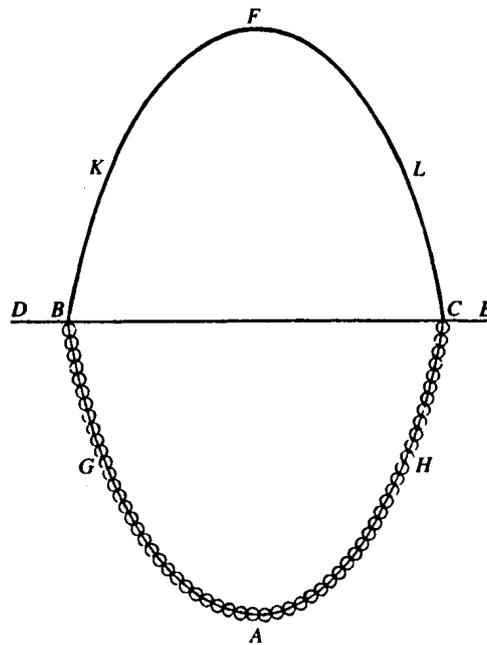


Figura 2.13 - Corrente suspensa de Hooke^{Heyman,1988}.

David Gregory (1659-1708), em 1697, determinou^{Gregory,1697}, embora com erros, a forma do cabo suspenso e publicou a expressão matemática da catenária. Admitindo que a catenária era a forma adequada para um arco sujeito à acção do seu peso próprio, Gregory afirmou que *“quando um qualquer arco se mantém em equilíbrio é porque contém na sua espessura uma catenária”*. Ainda segundo Gregory, a analogia com a catenária permitiria também determinar a força que actua sobre os encontros do arco: *“a mesma força que a corrente exerce para dentro é exercida para fora pelo arco”*.

No final do século XVII e início do seguinte, Philippe de la Hire (1640-1718) estudou o comportamento mecânico de arcos e abóbadas, aplicando pela primeira vez os conceitos da estática. Hire é considerado por diversos autores^{Benvenuto,1991;Binda,1980;Giuffrè,1986;Heyman,1972} como o primeiro investigador com uma abordagem científica, do ponto de vista da mecânica

estrutural, do estudo de arcos e abóbadas. Até então, com a exceção do trabalho de Honoré Fabri, que não teve influência histórica, os estudos sobre estas estruturas eram baseados em interpretações mais ou menos intuitivas das observações experimentais.

Em 1695, Philippe de la Hire publicou um tratado de mecânica^{Hire,1695} onde é de realçar o estudo do equilíbrio de 3 forças concorrentes (lei dos senos) e as primeiras aplicações de estática gráfica. Neste tratado, La Hire não deu especial importância ao estudo do arco e só numa das 126 “proposições” da obra o arco foi objecto de estudo; e mesmo nesta apenas para exemplificar a aplicação de um método de estática gráfica ao equilíbrio de forças (Figura 2.14).

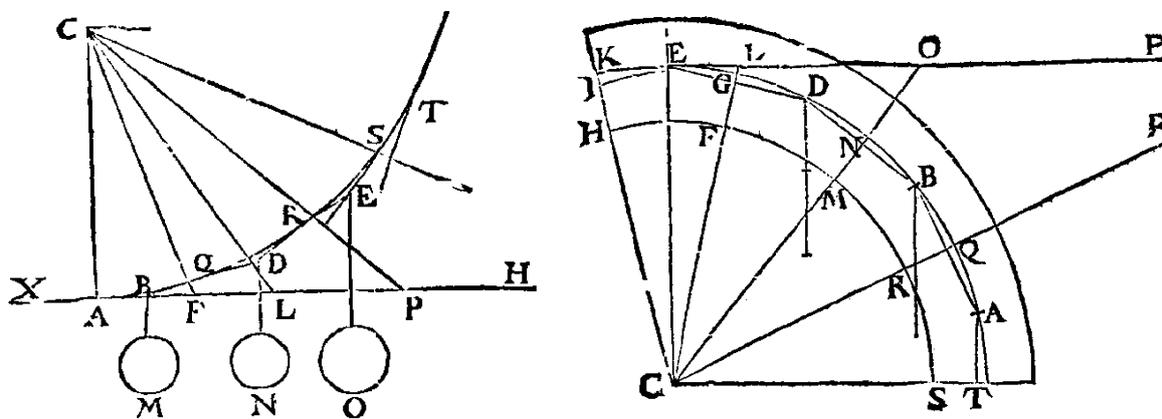


Figura 2.14 - Gráficos de Philippe de la Hire: Esquerda - cálculo dos pesos a suspender num cabo para que este adquira uma dada geometria; Direita - cálculo das dimensões das aduelas para uma dada geometria do eixo do arco, desprezando o atrito e a coesão entre aduelas.

Philippe de la Hire sempre considerou que o problema da determinação da espessura dos pés-direitos de arcos e abóbadas era um dos mais difíceis da arquitectura e que as regras então existentes careciam de fundamento. Assim, La Hire retomou o estudo do arco e apresentou, em 1712, uma memória^{Hire,1731}, cujo objectivo era o de estabelecer regras racionais para o dimensionamento dos pés-direitos. Pela primeira vez foi arbitrada uma forma como um arco real poderia colapsar, admitindo La Hire que um arco ruía através de um mecanismo do tipo cunha deslizando, onde, pela acção do seu peso, a parte superior cairia, deslizando sobre juntas fracturadas e empurrando os encontros para o exterior (Figura 2.15). O efeito do atrito não foi considerado e só com Coulomb viria a ser formulado convenientemente.

Na definição do mecanismo de colapso, La Hire considerou, sem nunca precisar, que as juntas de escorregamento ocorriam aproximadamente a meia distância entre os encontros e o fecho do arco, e que as três zonas entre as discontinuidades se mantinham coesas formando corpos

rígidos. Não considerando o atrito nas juntas entre as aduelas do arco, La Hire admitiu que a pressão entre aduelas consecutivas se fazia na perpendicular às respectivas juntas e que nas juntas críticas (junta LM na Figura 2.16) o impulso P actuava no ponto interior (ponto L na Figura 2.16). Considerando este mecanismo de colapso e as correspondentes hipóteses, seria possível determinar, por equilíbrio do corpo superior, a intensidade do impulso actuante P e, pelo equilíbrio de momentos das forças actuantes nos corpos inferiores em torno do ponto H , a equação quadrática que define a espessura necessária para a estabilidade da coluna. La Hire apresentou os seus cálculos sob forma gráfica (Figura 2.17) mas com uma metodologia de difícil aplicação.

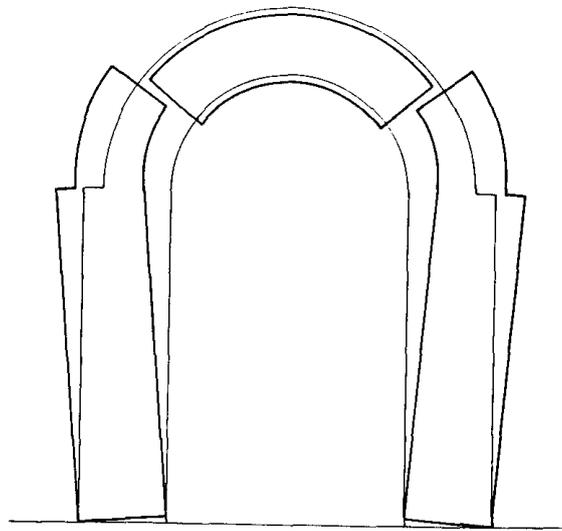


Figura 2.15 - Mecanismo tipo cunha deslizante proposto por Philippe de la Hire.

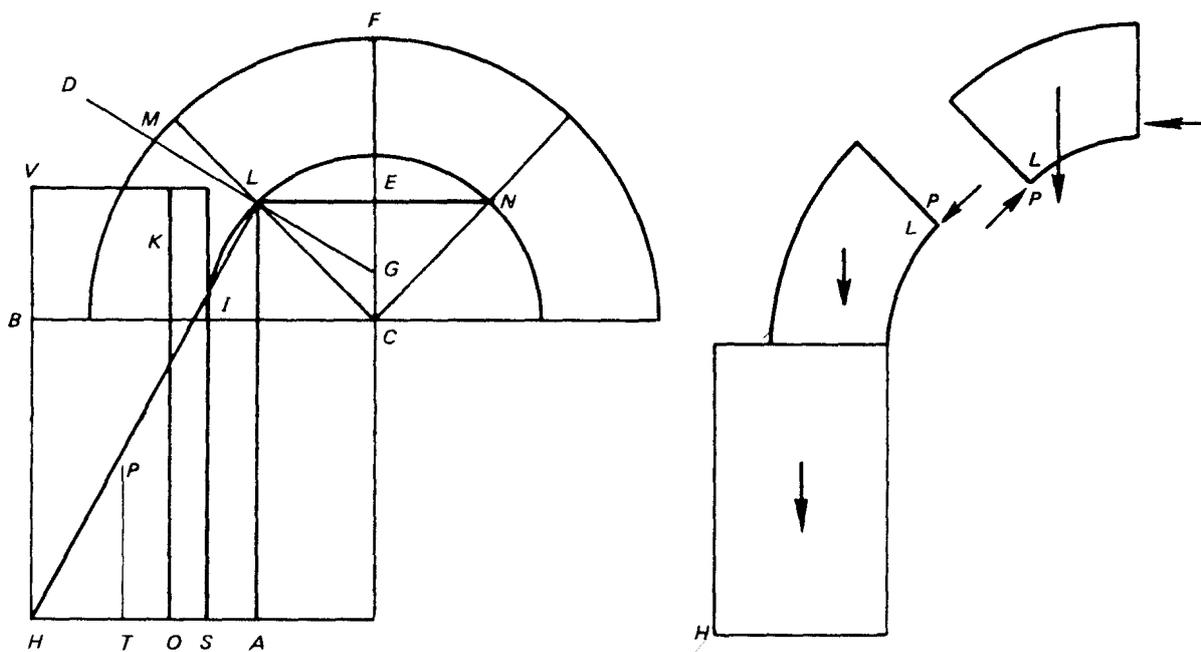


Figura 2.16 - Diagrama de corpo livre correspondente ao mecanismo proposto por La Hire.

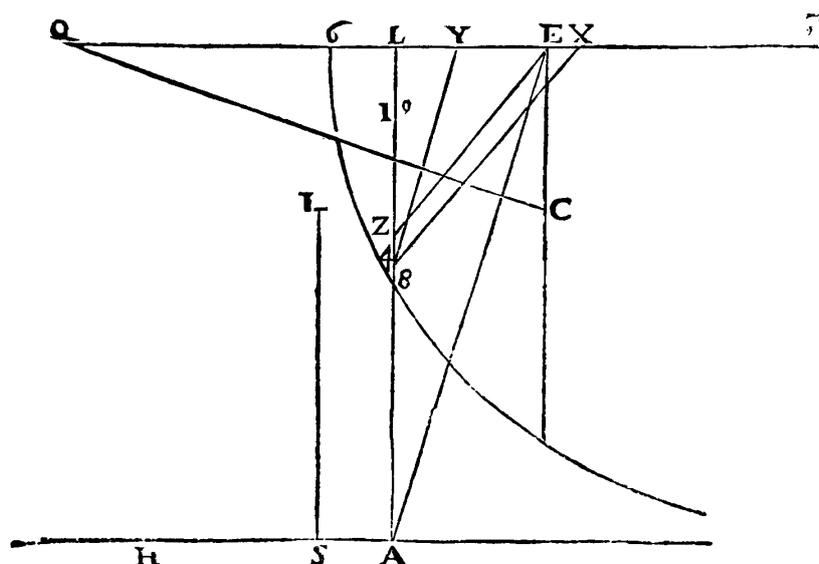


Figura 2.17 - Metodologia gráfica proposta por La Hire para a determinação das espessuras dos pés-direitos de arcos.

A teoria de Philippe de la Hire, embora muito intuitiva e convincente, não era confirmada pelos estudos experimentais, como por exemplo os de Augustin Danyzy (Figura 2.21), que mostravam um mecanismo de colapso com a formação de charneiras de rotação nas juntas entre aduelas. No entanto, o método de La Hire continuou a ser aceite, surgindo ainda em manuais do século XIX. Como se verá no capítulo 3, o mecanismo de colapso proposto por La Hire é um dos possíveis mecanismos de colapso, mas para condições de atrito correntes não é o mecanismo mais provável.

Os estudos de La Hire, foram descritos por Hubert Gautier (1660-1773) em 1717 num tratado de construção de pontes^{Gautier,1717}, e continuados por Bernard Belidor (1698-1761) nas suas obras *Science des ingénieurs*^{Belidor,1729} e *Dictionnaire portatif de l'ingénieur*^{Belidor,1755}. Este último autor tinha objectivos fundamentalmente práticos, procurando regras para dimensionamento dos elementos construtivos. No estudo dos pés-direitos de arcos e abóbadas, Belidor rejeitou as regras empíricas de Derand, por não considerarem a espessura do arco nem a altura do pé-direito, e adoptou a teoria de La Hire. Admitindo o mecanismo tipo cunha deslizante, considerou a junta crítica a um quarto do arco, isto é, com uma inclinação de 45°, e o ponto de aplicação do impulso P no ponto médio dessa junta, e não no vértice interior como La Hire tinha admitido. Esta alteração no ponto de aplicação do impulso traduz-se, como se verá no capítulo 3, num resultado ligeiramente mais conservativo do que o resultado a que a teoria de La Hire conduziria.

Os trabalhos de La Hire e Belidor na definição de regras de dimensionamento das espessuras dos pés-direitos de arcos e abóbadas têm o mérito de terem sido os primeiros estudos a introduzir a estática na análise de arcos. É interessante observar que estes estudos têm uma perspectiva de projecto, em que os autores pretenderam substituir as regras empíricas de dimensionamento por regras racionais. No entanto, os métodos gráficos propostos eram de difícil aplicação e acabaram por não substituir, pelo menos numa fase inicial, a regra simples de Derand, que tão bons resultados tinha dado.

Em 1729 e 1730, Pierre Couplet (?-1743) apresentou na *Académie Royale des Sciences* duas memórias com um extenso trabalho sobre a análise do comportamento estrutural de arcos. Estas memórias^{Couplet, 1731; 1732}, que viriam a ser publicadas em 1731 e 1732, representam, relativamente aos trabalhos anteriores de La Hire e Belidor, um significativo avanço na teoria da mecânica dos arcos^{Heyman, 1976}.

Na primeira memória, Couplet repetiu as ideias de La Hire sobre o arco sem atrito, fazendo interessantes aplicações, mas sem desenvolver qualquer teoria. Na segunda memória, Couplet estudou o arco com atrito e introduziu conceitos inovadores; esta memória foi a sua maior contribuição para a teoria da mecânica dos arcos.

Nela Couplet começou por estabelecer um critério para a verificação da segurança de um arco: *"admitindo que as aduelas do arco não podem ter deslizamentos relativos entre si, o arco não colapsará se a corda da metade do extradorso não cortar o intradorso e permanecer dentro da espessura do arco"* (Figura 2.18). Couplet, ainda que sem poder justificar este teorema através do conceito de curva de pressões, que só seria introduzido mais tarde, estava certamente a pensar num arco submetido à acção de uma carga concentrada no fecho de intensidade muito superior ao peso total do arco. Como se viu, esta regra já tinha sido enunciada por Leonardo da Vinci (Figura 2.11), embora sem qualquer tipo de enquadramento teórico.

O primeiro problema que Couplet pretendia resolver na sua segunda memória era determinar a espessura mínima admissível para um arco circular submetido à acção do seu peso próprio.

Couplet verificou que o atrito nas juntas entre aduelas adjacentes era, em geral, suficiente para evitar o seu deslizamento relativo e que as juntas não ofereciam qualquer resistência à separação

das aduelas. Assim, verificou que a única forma possível para geração de um mecanismo de colapso era através da formação de charneiras de rotação nas juntas entre aduelas.

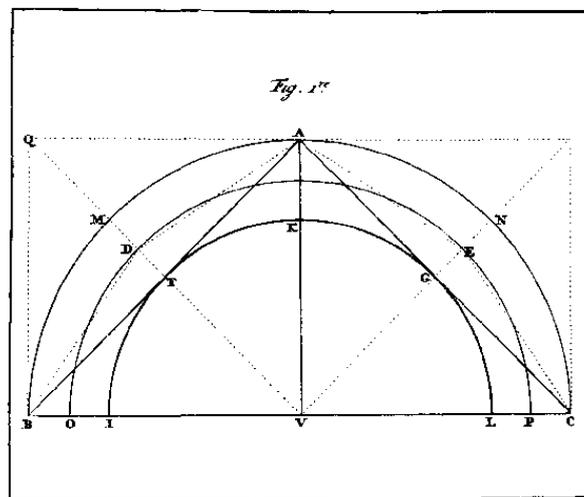


Figura 2.18 - Regra de Couplet para verificação da segurança de uma arco.

Considerando que o arco circular colapsava como um conjunto de quatro corpos rígidos ligados entre si através de rótulas ou charneiras de rotação, Couplet analisou o seu equilíbrio neste estado (Figura 2.19). Da resolução da equação correspondente às equações de equilíbrio, obteve a pretendida relação entre a espessura mínima admissível e o raio do arco circular. No entanto, Couplet cometeu alguns erros: em primeiro lugar admitiu, à semelhança de Belidor, a localização das charneiras no intradorso do arco a 45° (como se verá no capítulo 3, a localização exacta é aproximadamente um ângulo de 31° com a horizontal); e, em segundo, considerou uma direcção do impulso na junta crítica não tangente ao intradorso do arco.

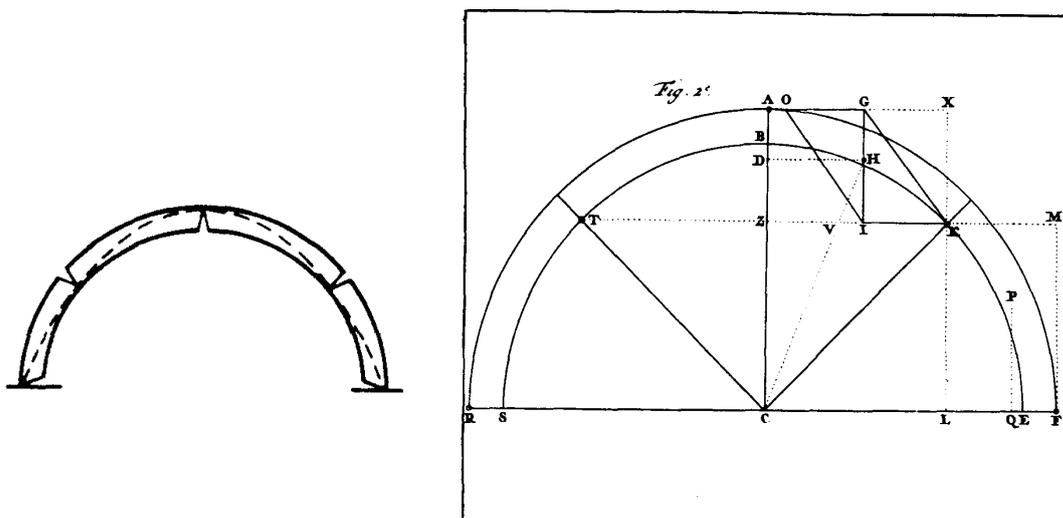


Figura 2.19 - Modelo de colapso considerado por Couplet e metodologia gráfica para análise do equilíbrio dos corpos rígidos formados pelas descontinuidade.

Como resultado, embora a restante análise seja correcta, a relação obtida afasta-se ligeiramente do valor exacto: como se verá no capítulo 3, o valor correcto da relação espessura-raio é $t/R = 0.106$ e o valor que se obtém através do modelo de Couplet é $t/R = 0.101$. Couplet repetiu a análise para um arco circular de ângulo 120° (Figura 2.20), e admitiu novamente que as juntas críticas se formavam a meia distância entre os apoios e o fecho. Com este modelo obtém-se uma relação entre a espessura mínima admissível e o raio de $t/R = 0.0195$, quando o valor correcto é de 0.0226 . Observe-se que em ambos os casos os erros não são muito significativos visto que, como Coulomb viria a verificar, o cálculo não é muito sensível à localização precisa das secções em rotação.

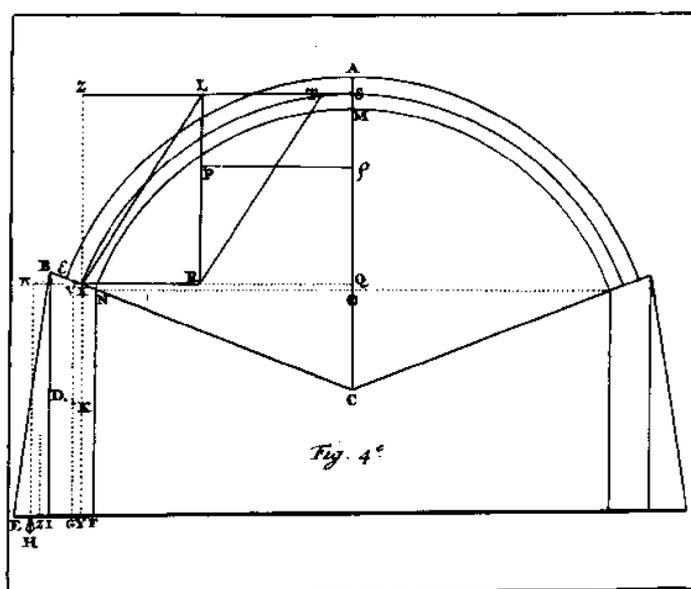


Figura 2.20 - Metodologia gráfica de Couplet para análise do arco com 120° de abertura.

Couplet não fez qualquer referência à resistência do material, tendo admitido implicitamente que, em face das tensões instaladas, essa resistência era suficientemente elevada, não condicionando o problema.

Couplet estudou ainda o problema da determinação do impulso dos arcos sobre os apoios (isto é, do dimensionamento da espessura dos pés-direitos), repetindo, no essencial, os trabalhos de La Hire.

A análise desenvolvida por Couplet foi experimentalmente confirmada por Augustin Danyzy, cujos resultados foram apresentados na *Société Royale de Montpellier* em 1732 e publicados em 1778^{Danyzy, 1778}. Em 1739, Amédée Frézier (1682-1773) comenta os trabalhos de La Hire e de

Couplet e publica^{Frézier,1739} pela primeira vez os resultados experimentais de Danyzy (Figura 2.21).

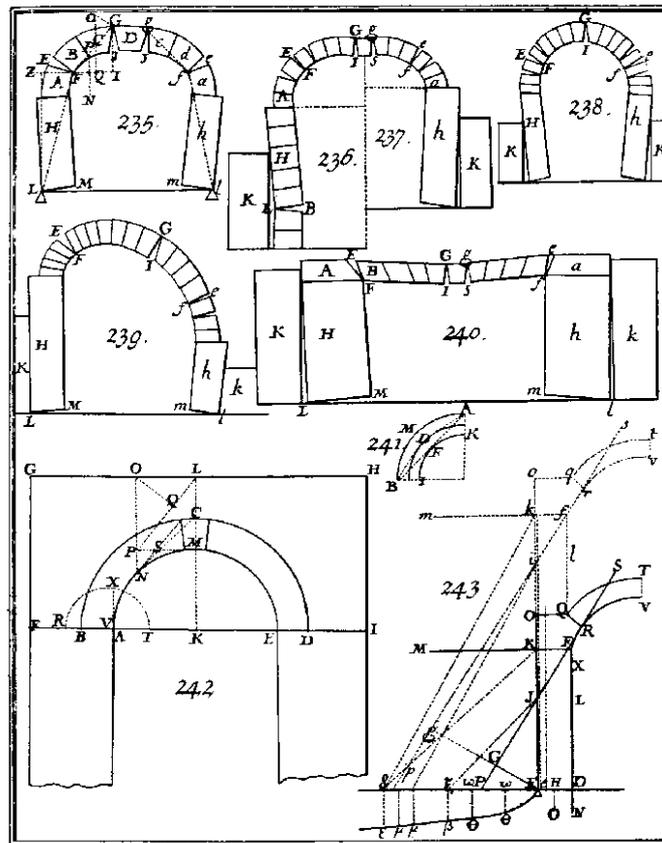


Figura 2.21 - Mecanismos de colapso obtidos experimentalmente por Danyzy e publicados por Frézier.

Apesar de Couplet ter obtido uma notável e completa solução para o problema do arco, a sua contribuição parece ter sido ignorada. Giovanni Poleni (1683-1761) refere os seus estudos no tratado de 1748^{Poleni,1748}, mas Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), no seu ensaio de 1773^{Coulomb,1776}, não lhe fez qualquer referência.

Em 1734, Pierre Bouger (1698-1758), estudioso ligado à arquitectura naval, apresentou uma memória^{Bouger,1734} na *Académie Royale des Sciences* tratando explicitamente do problema das cúpulas. Pierre Bouger, através da extensão para cúpulas da analogia entre catenárias e arcos, define, um perfil de cúpula capaz de suportar o seu peso próprio qualquer que seja a espessura.

Na primeira metade do século XVIII, a fendilhação que se verificava na cúpula da basílica de S. Pedro em Roma, visível pelo menos desde 1631, levantava sérias dúvidas quanto à sua segurança. Em 1743, o Papa encomendou a Giovanni Poleni um estudo sobre os danos na

cúpula, do qual resultou um tratado que seria publicado em 1748. Nesse tratado^{Poleni, 1748} Poleni fez um levantamento do estado da arte, citando entre outros La Hire, Couplet e Frézier na estática das abóbadas e arcos, Gregory, Leibniz e Bernoulli no uso das catenárias para a análise dos arcos, Galileo, Borelli e Musschenbrock na teoria da resistência de materiais e Picard, La Hire e Musschenbrock nos efeitos das temperaturas nos materiais. Quanto aos estudos de Bouger, Poleni não lhes fez qualquer referência, afirmando não ter encontrado qualquer estudo sobre cúpulas.

A verificação da segurança proposta por Gregory a partir da forma da catenária foi utilizada por Poleni no estudo da cúpula da basílica de S. Pedro. Para tal, eventualmente por sugestão da fendilhação meridional que se verificava na cúpula, Poleni dividiu-a em cinquenta lúnulas e analisou a estabilidade de um arco equivalente formado por duas lúnulas diametralmente opostas (Figura 2.22).

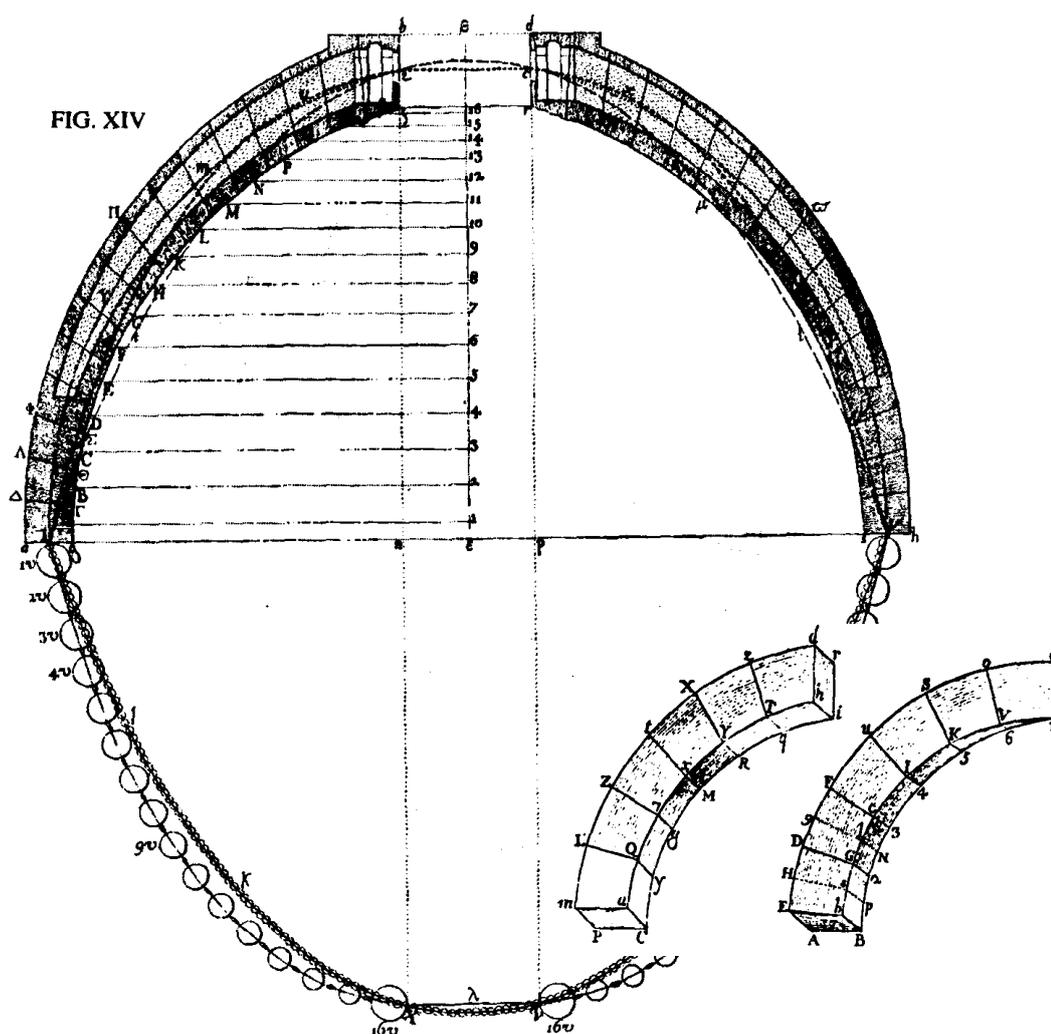


Figura 2.22 - Modelo de Poleni para análise da estabilidade da cúpula de S. Pedro em Roma.

De modo a estimar os pesos e as forças actuantes, cada uma das lúnulas foi dividida em 16 sectores. O desenho da secção do arco equivalente foi invertido e foi-lhe sobreposto o perfil da catenária de uma corrente de 32 esferas de diâmetros proporcionais aos pesos e cargas de cada um dos sectores das lúnulas. Tendo verificado que era possível inscrever na secção do arco um dos perfis da catenária, Poleni concluiu que a cúpula era estável e que a fendilhação meridional detectada não punha em causa a segurança do conjunto. Assim, embora sem o saber, Poleni usava um dos importantes teoremas da teoria da análise limite, o teorema estático, que viria a ser enunciado séculos mais tarde.

Após concluir que a existência das fendas não ameaçava a estabilidade da cúpula, Poleni estudou os efeitos da temperatura e humidade na cúpula e efectuou ensaios experimentais em varões de ferro forjado que constituiriam as correntes que pretendia colocar como reforço da cúpula. Finalmente, Poleni propôs que a intervenção na cúpula fosse feita com o refechamento das fendas existentes e colocação de 5 anéis de correntes de aço: 2 anéis em torno da base da cúpula, 2 anéis a diferentes níveis da cúpula e 1 anel por baixo do lanternim.

Pode dizer-se que o trabalho de Poleni foi o primeiro trabalho na história da arquitectura e da engenharia onde a mecânica estrutural foi aplicada com sucesso a um problema real. Marca um ponto de viragem entre duas eras na arte de construir: a da tradição e da arte e a da razão e da mecânica.

Entre 1770 e 1776, Charles Bossut (1730-1814) estudou novamente o problema do arco e da cúpula^{Bossut,1778;1779} tendo procurado determinar a geometria mais adequada. Desprezando o efeito do atrito e da coesão nas juntas entre as aduelas, admitiu que a pressão entre aduelas se transmitia perpendicularmente às juntas comuns. Assim, através da análise do equilíbrio das forças actuantes determinou, para uma dada geometria do intradorso, a geometria do extradorso mais adequada (Figura 2.23). Considerando uma cúpula de espessura uniforme apenas sujeita ao seu peso próprio e dividindo-a em lúnulas, conseguiu determinar uma geometria que considerou ser a mais adequada. Embora com uma dedução diferente, o resultado a que chegou é idêntico ao obtido por Bouger através da extensão da analogia entre catenárias e arcos. Qualquer uma das teorias não considerou o efeito tridimensional do comportamento estrutural das cúpulas.

Charles-Augustin de Coulomb retomou o problema do estudo do arco praticamente do zero, ignorando os trabalhos de Couplet, Danyzy, Frézier e Poleni, referindo apenas as conclusões de La Hire e de Belidor. Na sua memória de 1773^{Coulomb,1773}, a mesma que estabelece as bases da mecânica dos solos, Coulomb teve uma visão muito pragmática, indicando apenas o essencial, colocando em ordem os conhecimentos já descobertos, resolvendo problemas cuja formulação já tinha sido afluada, mas de forma obscura, e apontando novas linhas de investigação. Este pragmatismo na abordagem dos temas tornou o seu trabalho numa referência do ponto de vista histórico e científico.

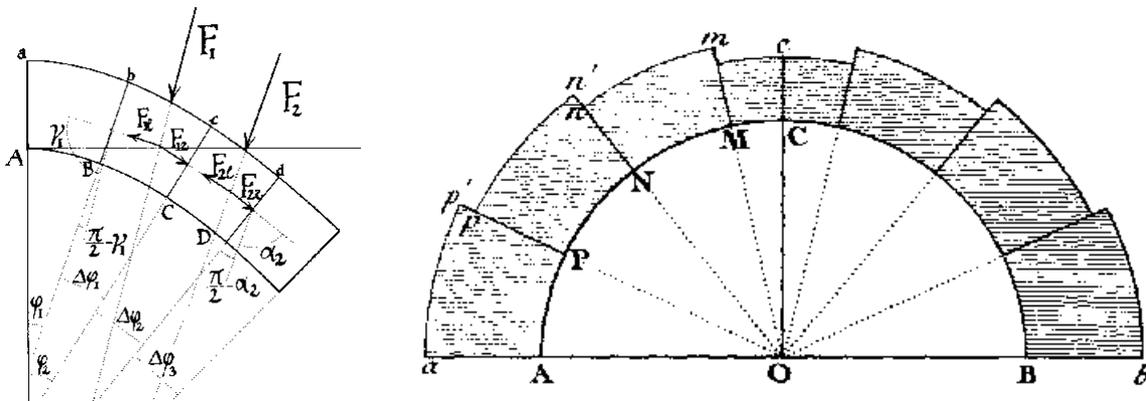


Figura 2.23 - Estudos de Bossut para a geometria das aduelas dum arco circular.

Combinando hipóteses quanto ao comportamento dos materiais e ao mecanismo de colapso, Coulomb desenvolveu uma extensa base teórica para a análise de arcos, que lhe permitiu identificar o modo de colapso mais provável (Figura 2.24) e determinar os correspondentes valores limites dos impulsos.

Tal como Couplet, Coulomb começou por estudar o arco sem atrito para depois considerar que o atrito nas juntas entre elementos adjacentes era suficientemente alto para evitar qualquer deslizamento relativo. Com esta hipótese, verificou também que o único processo de geração do mecanismo de colapso era através da formação de charneiras de rotação. Coulomb admitiu que as pressões não teriam de ser necessariamente perpendiculares às juntas entre elementos, como sugeria La Hire, mas apenas que deveriam respeitar a condição de se manter no interior da espessura do arco.

Analisando o mecanismo de colapso por rotação das charneiras (Figura 2.25), Coulomb verificou que, se o impulso horizontal P for suficientemente pequeno, o corpo rígido do arco acima da junta crítica ($AaMm$) cairá por rotação em torno do ponto M no intradorso do arco. Se,

por contrário, o impulso horizontal for suficientemente alto, o corpo rígido terá um movimento ascensional por rotação em torno do ponto m no extradorso do arco. Deste modo Coulomb estabeleceu os limites máximo e mínimo dos impulsos para um arco em equilíbrio.

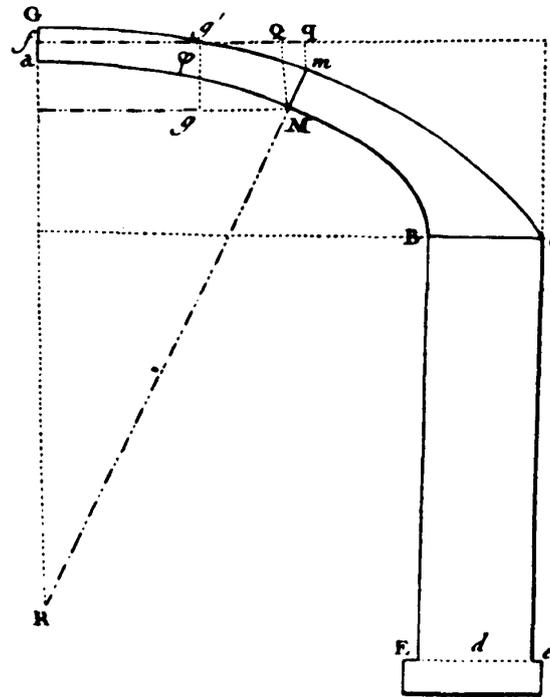


Figura 2.24 - Modelo de Coulomb para análise de arcos.

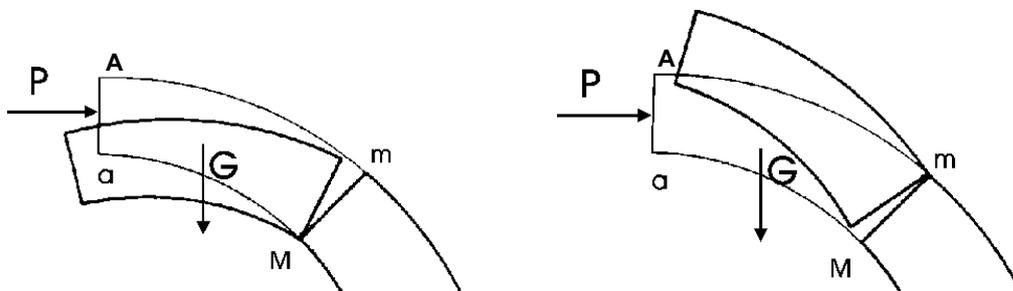


Figura 2.25 - Mecanismos limites considerados por Coulomb.

Sendo à partida incapaz de identificar a localização exacta das rótulas que dão origem ao mecanismo de colapso, Coulomb analisou vários mecanismos correspondentes a várias localizações possíveis das juntas críticas. Deste modo, por tentativa e erro, identificou a localização mais desfavorável da junta crítica e verificou que a correspondente espessura do arco circular (a mínima admissível), assim como o correspondente valor do impulso, são relativamente insensíveis à localização precisa dessa junta.

Também Coulomb, por não fazer qualquer referência à resistência do material, assumiu

implicitamente que essa resistência era suficientemente elevada para não condicionar o problema.

Outros investigadores, como Lorenzo Mascheroni (1750-1800), em 1785^{Mascheroni, 1785}, e Giuseppe Venturoli (1768-1844), em 1810^{Venturoli, 1810}, continuaram os estudos de arcos, analisando, com algumas inovações, o equilíbrio de mecanismos de colapso. Mascheroni analisou o dimensionamento da espessura dos pés-direitos do arco, considerando o mecanismo de colapso proposto por Couplet e Coulomb (Figura 2.26) e estudou, também, o problema das cúpulas, ainda que repetindo, no essencial, o trabalho de Bouger. No século XVIII, nos estudos realizados sobre cúpulas os autores consideraram apenas o seu comportamento na direcção meridional, nunca considerando o comportamento tridimensional destas estruturas. A maioria dos autores adoptou a metodologia de divisão em lúnulas proposta por Poleni, estudando a cúpula como um conjunto de arcos justapostos.

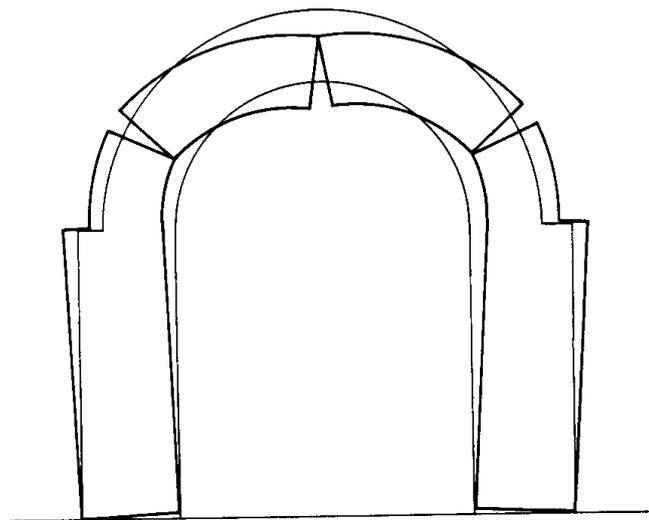


Figura 2.26 - Mecanismo considerado por Mascheroni no dimensionamento da espessura dos pés-direitos dos arcos.

Os estudos realizados até ao final do século XVIII debruçaram-se principalmente sobre o equilíbrio de arcos já dimensionados, não resultando em quaisquer regras de dimensionamento. Com a excepção de algumas construções de grande vulto ou de acidentes como o da basílica de S. Pedro em Roma, onde estudiosos participaram activamente, estas teorias pouco ou nada influenciaram a rotina dos projectistas e construtores. Estes, habituados a regras empíricas de fácil aplicação, já testadas por várias gerações de construtores, e sem os conhecimentos de matemática, geometria e mecânica necessários para a compreensão das novas teorias não alteraram os métodos de projectar. Acreditavam que o arco era a forma arquitectónica mais

estável e que por isso não precisava de estudos de dimensionamento.

2.3.3 - Do Século XIX à Actualidade

O comportamento estrutural do arco estava ainda incipientemente compreendido no final do século XVIII. O correcto mecanismo de colapso estava por determinar, embora a experiência mostrasse que, para condições normais de atrito nas juntas entre aduelas, o colapso se dava através de um mecanismo formado por 4 corpos rígidos em movimento, com charneiras de rotação. A determinação da localização dessas secções ainda não era possível, em particular tratando-se de carregamentos não simétricos. O comportamento do arco em situações equilibradas, longe da rotura, também não estava esclarecido, visto tratar-se de um problema indeterminado e o conceito de indeterminação estática ainda não estar formulado.

No século XIX, ao contrário daquilo que aconteceu com outros aspectos da mecânica estrutural, como a teoria das vigas, que sofreram uma evolução contínua à custa de enriquecimentos e melhoramentos dos conceitos, a teoria dos arcos, abóbadas e cúpulas sofreu uma reorientação, com o abandono do estudo de mecanismos de colapso e a adopção dos conceitos da teoria da elasticidade. Do ponto de vista da investigação científica, a partir da segunda metade do século XIX, o arco foi tratado como uma curva elástica e a sua teoria perdeu o carácter “especial”, tornando-se num caso particular das estruturas planas de comportamento linear. No entanto, as regras e técnicas de dimensionamento permaneceram concordantes com os conceitos desenvolvidos a partir dos mecanismos de colapso e foram utilizadas até meados do século XX.

No início do século XIX alguns autores tentaram transmitir o conhecimento erudito à prática construtiva quotidiana através da publicação de manuais com tabelas e regras simplificadas, baseadas nos resultados analíticos e experimentais. Entre eles, é de salientar o tratado de construção de Jean Rondelet (1730-1814), publicado em 1802^{Rondelet, 1802}, que marcou o panorama europeu dos tratados de construção na primeira metade do século XIX. A razão para a sua grande difusão deve-se sobretudo à facilidade de aplicação das fórmulas (algumas delas puramente empíricas), à simplicidade das construções gráficas propostas e ao rigor conseguido através da utilização de ensaios experimentais e teorias analíticas na definição dessas regras.

As regras e os métodos desenvolvidos até às primeiras décadas do século XIX não

consideravam a distribuição das tensões nas secções transversais dos arcos ou abóbadas. O problema da distribuição de tensões nas secções de peças lineares foi pela primeira vez teorizado por Claude Navier (1785-1830), em 1823, que definiu o conceito de núcleo central^{Navier,1833}.

Por volta de 1830, foram introduzidas duas novas noções no estudo dos arcos: a *linha de resistência* e a *linha de pressões*. Por definição^{Timoshenko,1953} (ver Figura 2.27):

a linha de resistência[†] é o polígono que une os centros de pressões de cada junta;

e a linha de pressões o lugar geométrico das consecutivas intersecções entre as direcções das resultantes das pressões actuantes nas juntas.

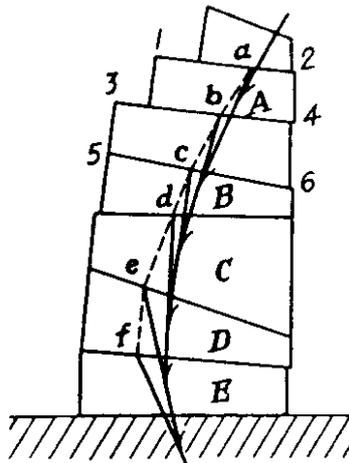


Figura 2.27 - Linhas de resistência (a-b-c-d-e-f) e de pressões (A-B-C-D-E)^{Timoshenko,1953}.

Através da analogia com pontes suspensas, Franz Gerstner (1756-1832) foi, em 1831, o primeiro a estudar as linhas de pressões. Segundo ele, a forma invertida da linha de pressões corresponderia a um arco totalmente comprimido.

Gerstner estudou ainda para que intensidades de cargas distribuídas os círculos e elipses correspondem a linhas de pressões e mostrou que o problema do arco é estaticamente

† Como se verá (parágrafo 3.2), as linhas de resistência e de pressões são praticamente coincidentes em estruturas arqueadas reais, pelo que, habitualmente, não é feita referência ao conceito de linha de pressões, considerando-se apenas o conceito de linha de resistência. Nesses casos é habitual designar a linha de resistência por linha de pressões.

indeterminado, sendo possível encontrar um número infinito de linhas de pressões que satisfaçam as condições de equilíbrio.

Em 1843, Henry Moseley (1801-1872) examinou em maior profundidade a linha de pressões, procurando as suas propriedades^{Moseley, 1843} e mostrou que a linha de pressões e a linha de resistência eram lugares geométricos distintos. Moseley afirmou que para que um arco estivesse em equilíbrio a linha de resistência deveria estar totalmente incluída no interior do arco e que se cruzasse o extradorso ou o intradorso, o arco quebraria perto desse ponto de intersecção.

Com o objectivo de localizar a "verdadeira" linha de resistência instalada no arco, Moseley enunciou que entre as infinitas linhas de resistência que se poderiam traçar no interior da espessura do arco aquela que era a "verdadeira" era a que correspondia ao impulso horizontal mínimo no fecho do arco. Observe-se que este princípio da mínima pressão é anterior ao princípio da mínima energia potencial que seria enunciado em 1858, por Federico Menabrea (1809-1896).

O critério de Moseley corresponde a uma linha de resistência que passa pelo extradorso no fecho do arco e no intradorso dos rins (Figura 2.28). Solução que não é, evidentemente, a linha de resistência "real", mas apenas uma situação limite.

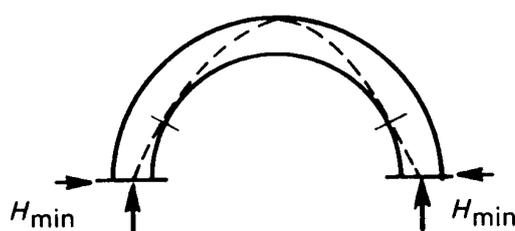


Figura 2.28 - Linha de resistência limite correspondente ao impulso horizontal mínimo.

Édouard Méry, em 1840^{Méry, 1840}, adoptou as teorias de Moseley e o trabalho de Navier para construir um método gráfico prático que seria muito usado para arcos de pequena dimensão. Observando os resultados experimentais, Méry admitiu que o mecanismo de colapso de um arco se iniciava através da formação de charneiras de rotação no fecho do arco e nos seus rins (Figura 2.29). Considerando que um arco deveria ser dimensionado para funcionar totalmente comprimido, isto é, com a linha de resistência[†] totalmente dentro do terço central da secção do

† Que Méry chamou curva de pressões e Theotónio Rodrigues linha de pressões, de impulsos, de resultantes sucessivas ou curva de Méry^{Rodrigues, 1948}.

arco, a situação correspondente ao início da formação do mecanismo de colapso seria aquela em que a curva de pressões passaria pelo ponto superior do terço central da secção no fecho do arco e no ponto inferior do terço central na junta “em rotura” nos rins do arco. Assim, com a definição destes pontos de passagem da curva de pressões o problema fica estaticamente determinado (Figura 2.29).

Méry propôs para a junta “em rotura” nos rins de arcos circulares sujeitos à acção do seu peso uma inclinação de 30° com a horizontal, isto é, de 60° com a vertical (Figura 2.29).

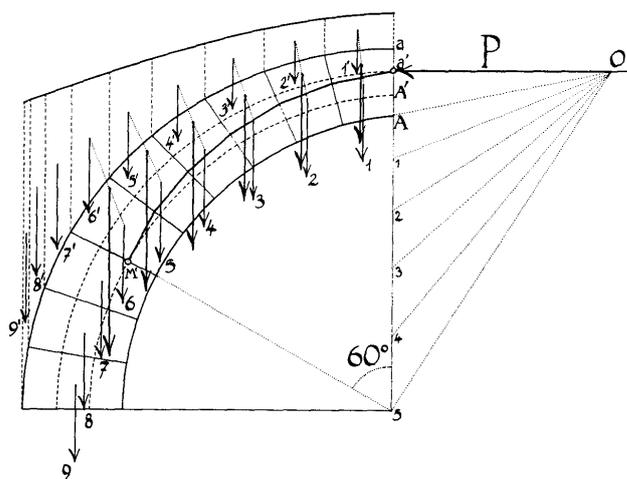


Figura 2.29 - Método gráfico de Méry.

O método de Méry tornou-se extremamente popular, sendo ainda descrito nos manuais da disciplina de Pontes do Instituto Superior Técnico e da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, do final da primeira metade do século XX^{Cardoso,1953;Rodrigues,1948}. Nestes manuais condiciona-se a aplicação do método de Méry a pontes simétricas com carregamentos simétricos, com vãos até 30 metros e abatimentos até 1/5 ou 1/6 do vão. A localização das juntas em rotura depende da geometria da ponte e os manuais referidos propõem as seguintes localizações:

geometria do arco	abatimento do arco (altura/vão)	localização da junta “em rotura”
circular	1/2	30°
circular	1/4	35°
elíptico	1/3	45°
elíptico	1/4	50°

Tabela 2. 1 - Localização das juntas “em rotura” - ângulo medido com a horizontal.

Jean Victor Poncelet (1788-1867) foi responsável pela introdução de métodos gráficos inovadores na análise de arcos^{Poncelet,1839;1852} e provou que o ponto do intradorso do arco correspondente à secção nos rins “em rotura”, é aquele em que a tangente ao intradorso passa através do ponto de intersecção da linha de acção do impulso (actuante no fecho do arco) e a linha de acção da força da gravidade da porção do arco entre a secção em rotura e o fecho.

Os estudos de Méry e o método gráfico de Poncelet foram incorporados num único método de verificação da estabilidade de arcos e abóbadas, que veio a ser publicado no tratado do alemão Gustav Breymann (1807-1859), em 1849 (Figura 2.30). Este tratado^{Breyman,1849;1889}, reeditado várias vezes e em várias línguas, foi uma referência fundamental na segunda metade do século XIX e no início do século XX. Em alguns manuais publicados em meados do século XX são ainda encontrados métodos em tudo semelhantes aos propostos por Breymann (Figura 2.31).

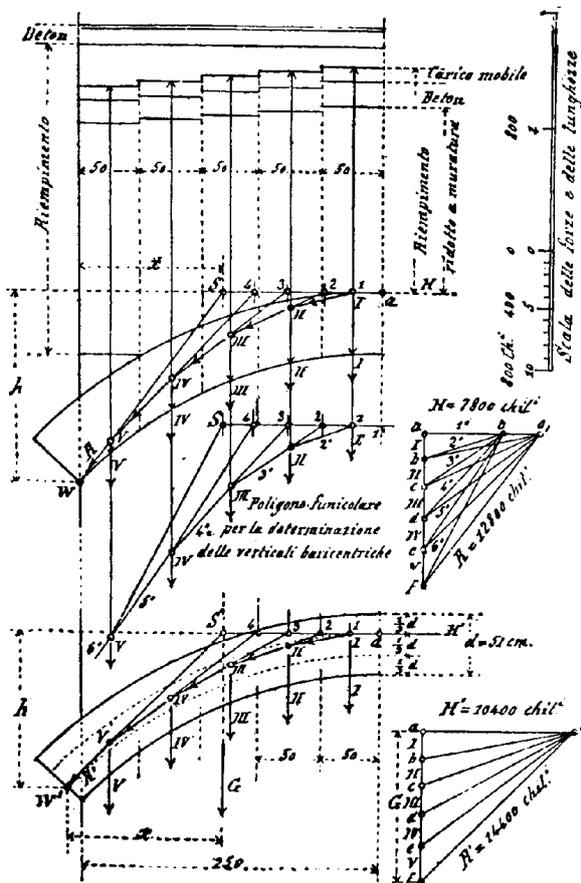


Fig. 18 - Cálculo di archi e volte in muratura.

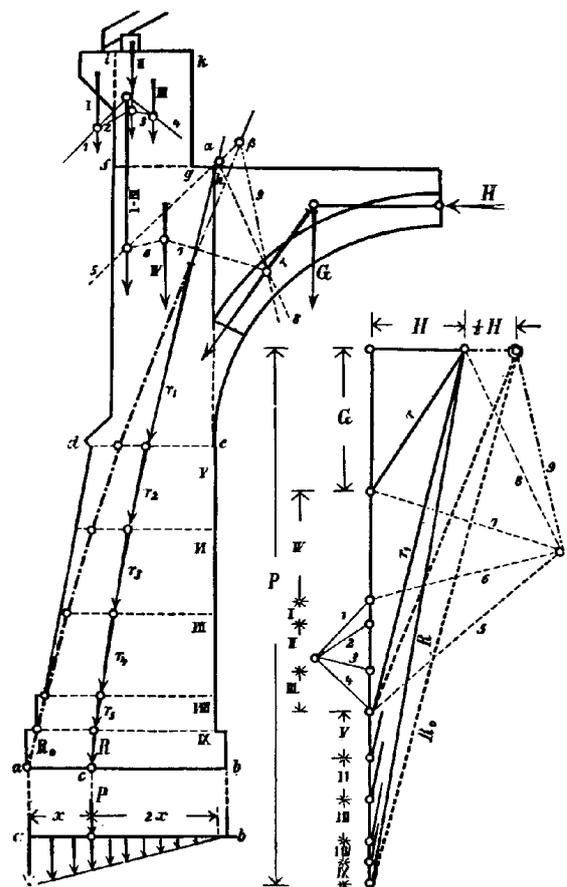


Fig. 19 - Cálculo dei pedritti.

Figura 2.30 - Verificação da segurança de um arco e da espessura de um pé direito^{Breyman,1849}.

Em 1846, W. Barlow executou diferentes ensaios sobre modelos de arcos^{Barlow,1846} e confirmou que para um dado arco há um número infinito de possíveis estados de equilíbrio, ou

seja de curvas de pressões, o que representa a indeterminação estática da estrutura (Figura 2.32).

A questão que se colocava no final da primeira metade do século XIX era qual a lei da física que deveria ser introduzida para resolver a indeterminação estática do arco. Inicialmente, a estratégia foi considerar hipóteses simplificativas, sem qualquer referência ao comportamento do material, que tornavam o problema determinado. No entanto, alguns autores, como Poncelet, em 1852, concluíram que não era possível determinar a curva de pressões "verdadeira" apenas através das equações de equilíbrio, sugerindo a sua determinação através das técnicas de resolução de estruturas hiperstáticas.

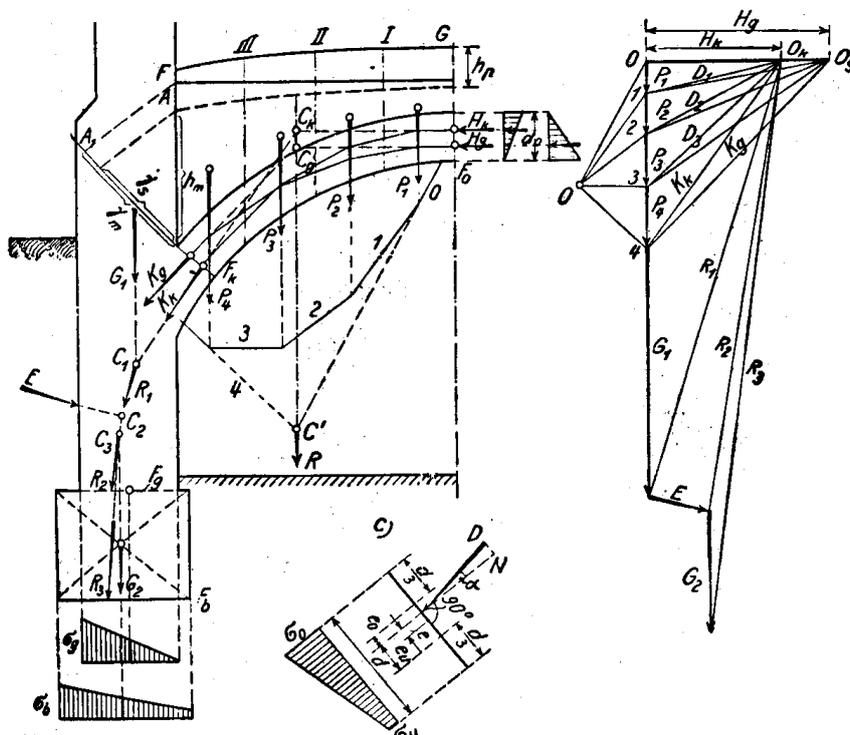


Figura 2.31 - Verificação da segurança de uma abóbada e da espessura do seu pé-direito^{Salinger, 1942}.

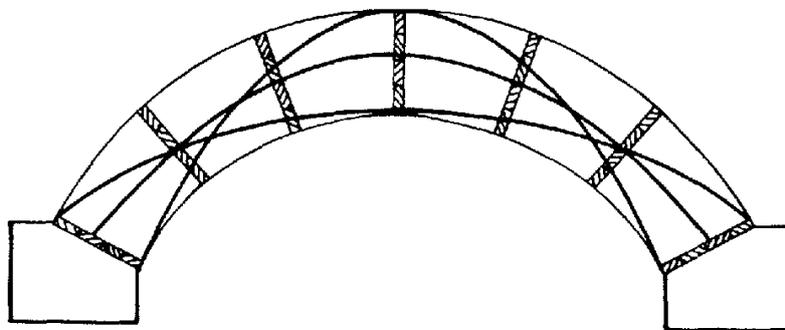


Figura 2.32 - Modelos de Barlow.

Inicialmente houve dúvidas se um arco de alvenaria poderia ser considerado um corpo elástico.

No entanto, Winkler e Perrodil e outros executaram um conjunto de ensaios que mostravam que a teoria elástica podia ser aplicada com adequada exactidão a arcos.

Tendo em conta os resultados desses ensaios, Eduardo Cardoso^{Cardoso,1953} afirmava, referindo-se obviamente a pontes, que os arcos podiam e deviam ser analisados pela teoria da elasticidade. Reforçou ainda esta ideia dizendo que os arcos de pontes são construídos com um cuidado superior na escolha dos materiais, na execução das juntas entre aduelas e das fundações e que por isso se comportam em serviço como estruturas elásticas lineares.

Em 1867, Winkler, considerando o arco como uma estrutura elástica, afirmava, justificando pela aplicação do teorema de Menabrea, que a "verdadeira" curva de pressões era aquela que em média se afastava o menos possível do eixo do arco.

Em 1875, G. Fuller contribuiu ainda com uma nova técnica de construção do polígono funicular^{Fuller,1875}, que permitia determinar a espessura mínima admissível de um arco para uma dada solicitação exterior, mas a investigação e projecto de arcos de alvenaria entrava em desuso. Com a revolução industrial as estruturas de alvenaria, assim como o estudo do seu comportamento estrutural, foram progressivamente substituídas por estruturas em aço. Esta nova tendência pode ser claramente verificada na nona edição da enciclopédia britânica (1876), onde o espaço dedicado à construção metálica é significativamente superior ao pequeno espaço reservado para a construção em alvenaria.

Em 1879, as noções de indeterminação estática estavam totalmente desenvolvidas e Carlo Castigliano (1847-1884) aplicou os teoremas energéticos com o seu nome na análise estrutural de arcos de alvenaria^{Castigliano,1879}. Nesta fase a teoria dos arcos, abóbadas e cúpulas perdeu o seu carácter "particular" e destacou-se da teoria do século XVIII, passando a ser um caso particular da teoria elástica de vigas curvas.

Em 1883, o arquitecto Antoni Gaudí (1852-1926) iniciou a construção da Igreja da Sagrada Família em Barcelona, tendo ainda adoptado no seu dimensionamento as metodologias antigas; nomeadamente a analogia entre catenária e o arco e a sua extensão ao caso de cúpulas (Figura 2.33). A aplicação destas técnicas no final do século demonstra que, mesmo em grandes obra e com arquitectos de renome, a teoria da mecânica estrutural e a prática de projecto nem sempre

andavam a par.

No final do século XIX, alguns autores, como Howe (1897), Rankine (1898) e Thompson (1900) salientaram a importância do enchimento no extradorso do arco no comportamento global da estrutura. Rankine defendeu que o vão efectivo do arco deveria ser diminuído de modo a se ter em conta o efeito favorável desse enchimento e que apenas a porção do arco acima das juntas “de rotura” deveria ser tratada como um arco real.



Figura 2.33 - Modelo de Gaudí para o dimensionamento de cúpulas através da analogia entre arcos e correntes suspensas.

Até esta época, os estudos sobre arcos e abóbadas não incluíram qualquer referência ao enchimento no extradorso, embora desde há muito fosse do conhecimento dos mestres construtores que esse enchimento era fundamental para a sua estabilidade.

Em 1888, Maurice Lévy (1838-1910) desenvolveu uma metodologia gráfica para a determinação da geometria ideal de uma cúpula onde admite a hipótese do terço central^{Lévy, 1888}.

Neste método, Lévy aceita que as tensões circunferenciais se anulam nas zonas onde ocorrem tracções ao mesmo tempo que considera um estado de tensão bidimensional típico das estruturas de dupla curvatura na zona da cúpula onde as tensões circunferenciais são de compressão.

No início do século XX, os conceitos fundamentais sobre arcos e de abóbadas estavam assim amplamente divulgados; curvas de pressões, polígonos funiculares e a regra do terço central eram do conhecimento geral dos projectistas. O pré-dimensionamento da geometria e espessura dos arcos ou abóbadas era conseguido com base em regras empíricas, sendo posteriormente realizada a verificação da estabilidade com métodos racionais. Estas análises eram baseadas fundamentalmente em métodos gráficos para verificar que a curva de pressões não se aproximaria demasiado do intradorso ou do extradorso do arco, complementadas com verificações das intensidades das tensões actuantes.

Na primeira metade do século XX verificou-se um gradual abandono das estruturas em alvenaria, em favor da construção metálica e em betão armado. Esta evolução construtiva foi acompanhada, em particular em relação aos arcos, abóbadas e cúpulas, por um esquecimento das técnicas construtivas e métodos de cálculo, resultando numa completa “amnésia” nas últimas décadas do século XX. Na segunda metade do século XX, a abordagem deste tipo de estruturas cingiu-se fundamentalmente à verificação da segurança das construções existentes e não mais dimensionamento. Mas o evoluir do interesse pela recuperação de antigas estruturas estimulou uma nova perspectiva sobre o comportamento estrutural dos arcos.

Com o aumento do peso dos veículos militares no período imediatamente anterior à segunda grande guerra o governo Britânico pretendeu classificar as pontes de acordo com a sua capacidade para veículos militares. Com este objectivo, A. Pippard executou testes experimentais em arcos e concluiu que, havendo na realidade imperfeições, os arcos, aparentemente redundantes (hiperstáticos), funcionavam como estruturas isostáticas. Partindo desta suposição, Pippard desenvolveu uma metodologia de análise elástica baseada no método de Castigliano^{Pippard, 1948}.

Pippard efectuou ensaios cíclicos em arcos e observou que embora a carga necessária para a formação da 1ª rótula se reduza com a frequência dos ensaios, a carga de colapso não se altera

significativamente. Nesses ensaios o enchimento do extradorso do arco foi simulado apenas por pesos suspensos nas aduelas, pelo que, também Pippard se abstraiu do efeito favorável da rigidez do enchimento na resposta estrutural dos arcos.

O extenso trabalho de Pippard, envolvendo métodos elásticos e também metodologias baseadas em mecanismos de colapso^{Crisfield,1985}, mostrou que existia uma grande reserva de resistência relativamente à regra do terço central e propôs, em alternativa, a regra da metade central.

Em 1957, Chettoe e Henderson efectuaram ensaios em arcos reais e, na continuidade do proposto por Rankine, afirmaram que o efeito favorável do enchimento no extradorso do arco permitia a consideração nos cálculos analíticos de um vão efectivo menor que o real.

Nos anos sessenta do século passado, a instituição inglesa *Military Engineering Experimental Establishment*, adaptou os trabalhos de Pippard e de outros autores, criando um método de avaliação da capacidade resistente de pontes em arco, designado por método MEXE/MOT. Este método viria a ser divulgado na sociedade civil apenas nos anos oitenta^{BD 21/84}.

O método *MEXE/MOT*, embora tenha tido origem nas análises elásticas de Pippard e seja traduzido por uma fórmula complexa, é um método empírico. Os factores considerados na determinação da capacidade resistente das pontes em arco são: relação entre o vão e altura, geometria do eixo, qualidade do material construtivo, dimensões e qualidade de execução das juntas entre elementos, qualidade do material de enchimento das juntas e estado de conservação da ponte. O método não considera directamente a resistência e a rigidez das paredes tímpanos dos arcos, nem o estado e condições das fundações, conduzindo, no entanto, a resultados muito conservativos^{Crisfield e Page,1990}.

Com o aumento da intensidade das sobrecargas produzidas pelo trânsito rodoviário surgiu, também em Inglaterra, a necessidade de avaliar a capacidade resistente das pontes em arcos de alvenaria, que constituem uma grande percentagem das pontes existentes naquele país. Deste modo, o *Department of Transport* financiou, na década de oitenta, a realização de um conjunto de ensaios experimentais até à rotura de pontes reais^{Page,1995a)b}. Destes ensaios resultaram importantes registos que, desde então, têm sido utilizados na calibração de modelos de simulação estrutural.

Em 1953, Anthony Koocharian^{Koocharian,1953} aplicou pela primeira vez a teoria da plasticidade ao estudo das alvenarias e, mais tarde, Prager^{Prager,1959} apresentou o caso do arco de alvenaria como um exemplo de aplicação da teoria da plasticidade.

Em 1966, Jacques Heyman, retomando os trabalhos de Koocharian, Pippard, Fitchen e outros, debruçou-se sobre a aplicação do método da análise limite às estruturas de alvenaria. Na sua investigação, que prossegue até aos nossos dias^{Heyman,1998}, dedicou-se ao estudo das estruturas de alvenaria mais importantes, nomeadamente arcos, arcos-botantes, abóbadas e cúpulas, torres e escadas^{Heyman,1996}.

Heyman, ao aplicar o teorema estático da teoria da análise limite à análise de arcos, relegou para segundo plano a determinação da "verdadeira" curva de pressões, questão que tanto preocupava os estudiosos do século XIX.

De facto, a determinação da curva de pressões, ou seja, do campo de tensões que equilibra as cargas actuantes numa estrutura hiperstática é extremamente sensível a pequenas variações das condições de fronteira e mesmo das características mecânicas dos materiais, pelo que dificilmente se conseguirá determinar a distribuição de tensões realmente instalada na estrutura.

O teorema estático da teoria da análise limite garante que se for possível encontrar um estado de tensão em equilíbrio com as solicitações exteriores, que verifique em simultâneo o critério de resistência em todas as secções, a estrutura não colapsará sob a acção dessas solicitações. Por outras palavras, pode dizer-se que, se for possível ao projectista encontrar uma distribuição de esforços estática e plasticamente admissível, o que no caso dos arcos de alvenaria corresponde a uma curva de pressões em equilíbrio com as acções exteriores e contida na sua espessura, então também a estrutura "o conseguirá". A relevância deste teorema é que o estado de equilíbrio a analisar pelo projectista não necessita de ser, e só por mero acaso o será, o estado de tensão real, bastando identificar um possível estado de equilíbrio para garantir a segurança da estrutura. Assim, os estudos de diversos autores dos séculos XVIII e XIX, nomeadamente Poleni, que intuitivamente aceitaram esta analogia, só com a teoria da análise limite do século XX foram teoricamente validados.

Mais recentemente, na década de 80 do século XX, com a crescente preocupação com a

recuperação dos monumentos e centros históricos e a ocorrência de fenómenos sísmicos na Europa central, a questão da segurança das estruturas de alvenaria foi novamente levantada.

Em 1982, Robert Mark, utilizou métodos de foto-elasticidade para estudar o comportamento das estruturas góticas. Na foto-elasticidade, embora o material utilizado apresente resistência à tracção, é possível obter uma aproximação do campo de tensões instalado em virtude da acção do carregamento e, assim, identificar as zonas de concentração de tensões (Figura 2.34).

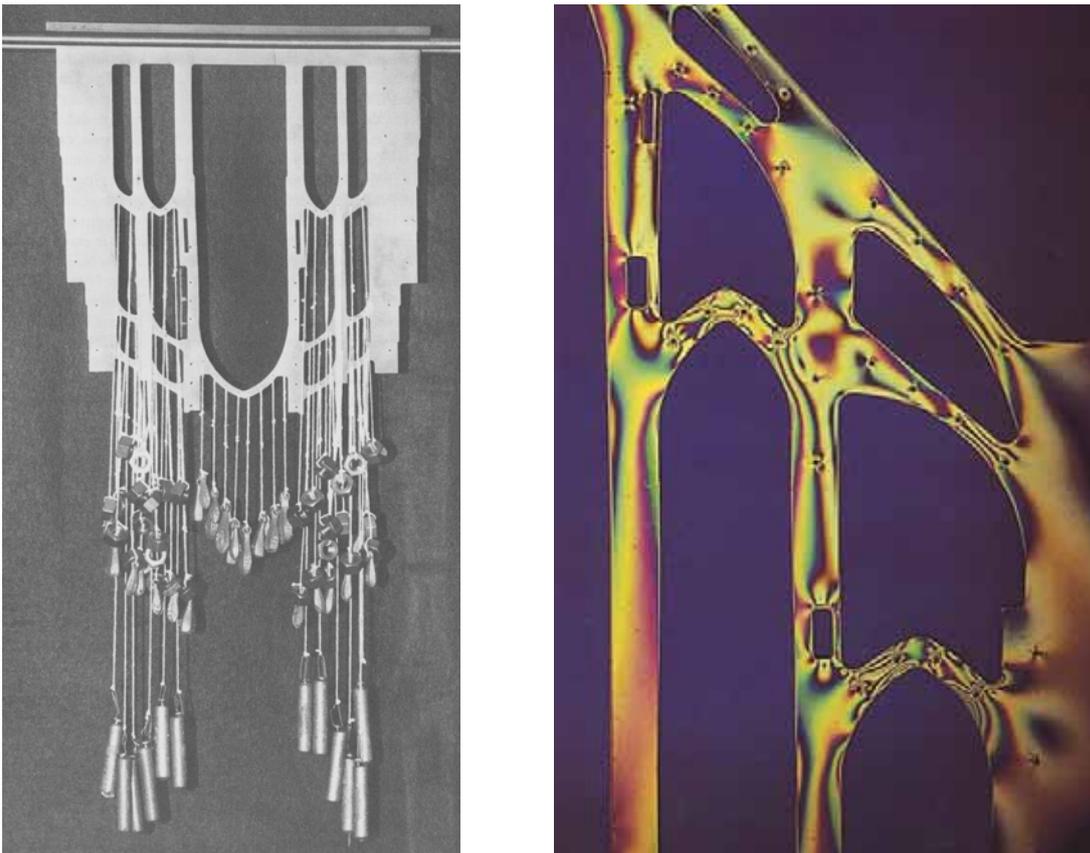


Figura 2.34 - Modelos foto-elásticos de Robert Mark para o estudo das catedrais de Beauvais e Bourges - acção do peso próprio da estrutura^{Mark, 1982}.

No final da década de 80, início da década de 90, Antonino Giuffré^{Giuffré, 1988, 1991, 1993} estendeu os princípios da análise limite, já anteriormente aplicados a arcos por Heyman, ao estudo de paredes de alvenaria (Figura 2.35).

O desenvolvimento dos meios computacionais popularizou a utilização do método dos elementos finitos na análise de estruturas, inicialmente desenvolvidos para análise de estruturas metálicas ou de betão armado, cujo comportamento estrutural pode ser modelado como linear e contínuo. Em 1981 e 1985, foram realizados por Sawko e Towler^{Crisfield, 1985}, os primeiros

trabalhos de análise de arcos com o método dos elementos finitos, utilizando modelos de comportamento elástico linear.

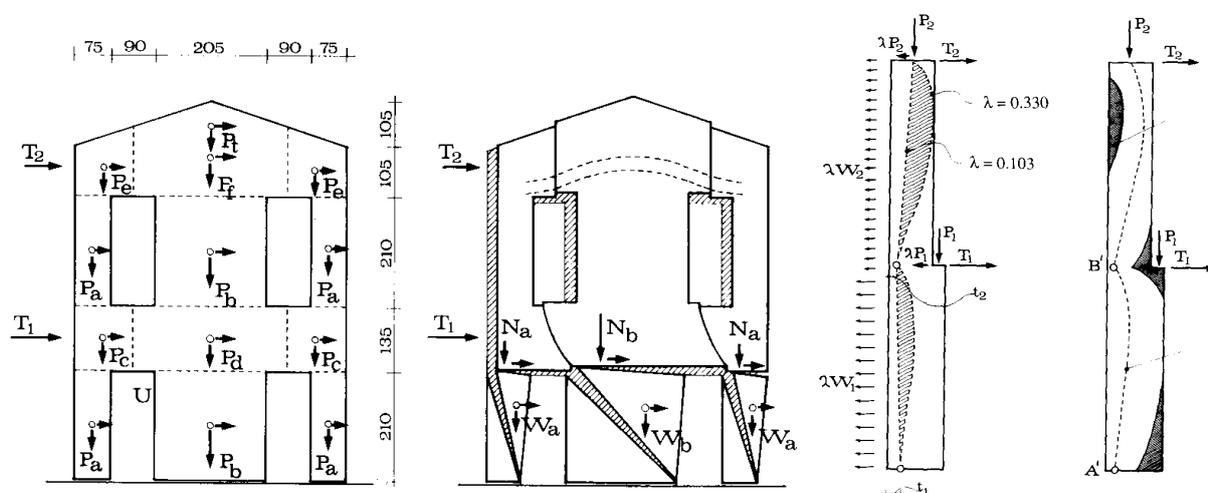


Figura 2.35 - Modelos de análise limite para verificação da segurança de fachadas em alvenaria: Esquerda - comportamento no plano; Direita - comportamento fora do plano ^{Giuffrè,1993}.

Dadas as características não lineares do comportamento mecânico da alvenaria, em particular a fraca resistência a esforços de tracção e as discontinuidades entre elementos (as juntas), os modelos tradicionais de elementos finitos não representam correctamente o comportamento real das estruturas de alvenaria. Assim, nos finais da década de 80, alguns autores, como Crisfield ^{Crisfield e Packaham,1987}, procuraram construir modelos mais adequados à simulação destas estruturas.

Com a evolução das capacidades computacionais, os modelos de elementos finitos sofreram uma evolução significativa, tendo sido possível a integração do comportamento não linear do material e a simulação de discontinuidades entre elementos. Desenvolveram-se, assim, diversos modelos de elementos finitos não lineares no âmbito da análise da fractura do betão ^{Alfaiate,1992;Rots,1988} e da teoria do dano ^{Hanganu et al.,1997}, que possibilitam a simulação da fendilhação de materiais frágeis produzida por tensões de tracção. Estes modelos viriam a ser posteriormente adaptados à análise de estruturas de alvenaria ^{Lourenço,1996;Rots,1997} (Figura 2.36).

No entanto, a existência destes sofisticados modelos de análise não inviabilizou por completo a utilização de modelos elásticos lineares. De facto, os algoritmos numéricos que integram os modelos de análise não linear são extremamente pesados do ponto de vista computacional,

sendo difícil a modelação completa de estruturas de grandes dimensões com o recurso a estes modelos, em particular quando se pretende simular efeitos de acções dinâmicas. Assim, a utilização de modelos não lineares em estudos localizados, aliada à modelação elástica linear da estrutura completa (Figura 2.37), permite, por exemplo, uma avaliação suficientemente rigorosa da segurança das estruturas.

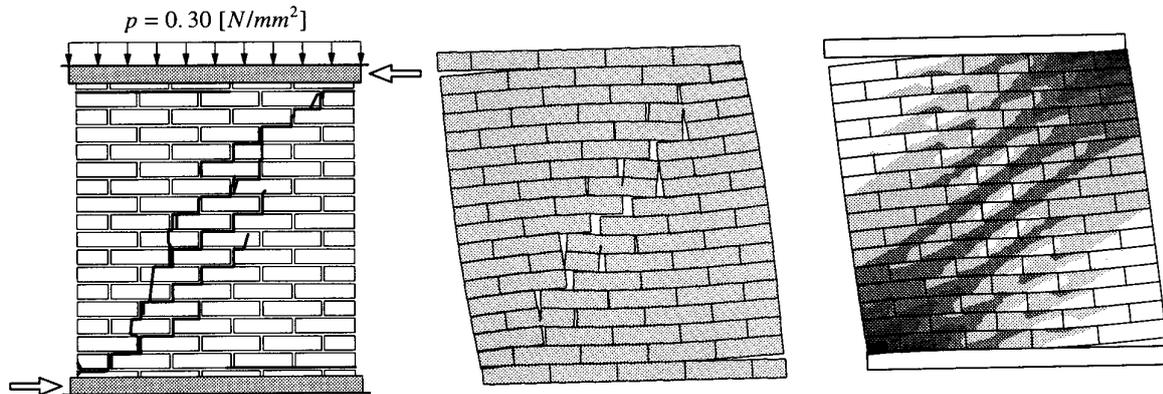


Figura 2.36 - Modelação do comportamento estrutural de parede de alvenaria de tijolo através de modelos de elementos finitos com interfaces não lineares *Lourenço,1996*.

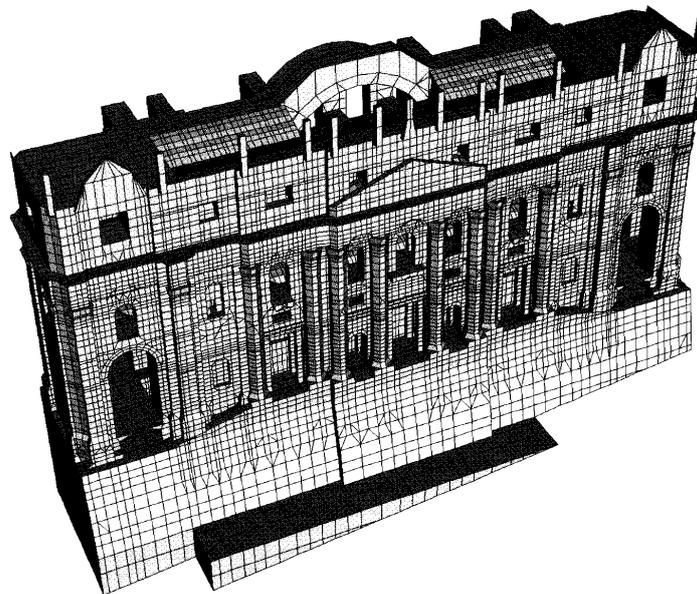


Figura 2.37 - Modelo elástico linear da fachada completa da basílica de S. Pedro em Roma *Macchi,2001*.

Em paralelo com a utilização dos modelos de elementos finitos, começou a ser utilizada na modelação de estruturas de alvenaria descontínuas a formulação dos elementos discretos *(Lemos,1998b)*. Desenvolvida inicialmente para a mecânica das rochas, esta formulação admite a ocorrência de grandes deslocamentos e rotações e difere das modelações não lineares de elementos finitos por actualizar, ao longo da análise, o posicionamento dos contactos entre

os diferentes elementos. Dadas as suas características, o modelo numérico que incorpora permite a correcta simulação de meios descontínuos e, conseqüentemente, das estruturas de alvenaria, em particular de pedra aparelhada.

Existem na literatura recente diversas tentativas de modelação de estruturas de alvenaria com recurso a modelos não lineares. Porém, o comportamento das estruturas elementares, arcos, abóbadas e cúpulas, não foi ainda objecto de estudo sistemático e a calibração dos resultados numéricos com a utilização de ensaios experimentais é ainda insuficiente.

Concluindo, constata-se que o funcionamento estrutural dos arcos, abóbadas e cúpulas motivou, desde o renascimento, diversos estudos com o objectivo de definir regras de dimensionamento e verificação da segurança estrutural. Curiosamente, o estudo de outros elementos em alvenaria, como paredes e colunas, não foi alvo de semelhante atenção, apenas ocorrendo avanços significativos na sua análise estrutural nos últimos anos do século passado.

O desenvolvimento dos modelos de análise não lineares, permitido pela rápida evolução dos meios computacionais, conduziu a um grau de sofisticação na análise estrutural de construções em alvenaria que permite actualmente analisar com suficiente rigor o comportamento das construções. Contudo são ainda necessários estudos de calibração destes modelos.

Os modelos analíticos, assim como algumas metodologias gráficas clássicas, são analisados no capítulo 3, enquanto que os modelos numéricos de elementos finitos e discretos são estudados no capítulo 4.

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIAS GRÁFICAS E ANALÍTICAS

3.1 - INTRODUÇÃO

Como referido, o estudo do comportamento estrutural das construções em alvenaria sofreu um significativo desenvolvimento desde a época medieval até às primeiras décadas do século XX. Os métodos gráficos, mais divulgados, e os processos analíticos foram até ao início da modelação computacional de estruturas as únicas ferramentas disponíveis para o dimensionamento e verificação da segurança de estruturas em alvenaria. Não obstante alguns desses procedimentos de dimensionamento serem puramente empíricos, resultando da experiência dos mestres construtores, outros baseiam-se em conceitos da mecânica estrutural e são, no essencial, alternativas válidas para o projecto das estruturas arqueadas.

Importa fazer um enquadramento teórico dos métodos clássicos à luz do conhecimento actual, o qual justificará a aplicação destas metodologias na análise de estruturas de alvenaria.

Neste capítulo pretende fazer-se uma revisão aprofundada dos métodos gráficos e analíticos já desenvolvidos, validando, demonstrando ou corrigindo os seus conceitos básicos e desenvolvendo essas metodologias com base nos conhecimentos teóricos actuais e com o auxílio das novas potencialidades computacionais. São também apresentadas algumas inovações aos métodos analíticos tradicionais.

As soluções analíticas que se estudam neste capítulo permitem a compreensão do comportamento básico das estruturas de alvenaria, em particular dos arcos, abóbadas e cúpulas.

Os seus resultados constituem primeiras aproximações úteis para a compreensão dos processos de equilíbrio das cargas nestas estruturas e, por corresponderem a soluções equilibradas, aproximações conservativas que poderão ser utilizadas nas primeiras análises dessas estruturas. Os seus resultados possibilitam também a calibração e confirmação dos resultados dos modelos numéricos mais sofisticados que se descrevem em capítulos posteriores.

A par da apresentação, justificação teórica e desenvolvimento dos modelos gráficos e analíticos, faz-se, também, neste capítulo a sua aplicação a arcos, abóbadas e cúpulas, com vista à obtenção de resultados que conduzam à compreensão do comportamento básico dessas estruturas arqueadas e dos parâmetros que mais influenciam as suas respostas estruturais.

3.2 - REGRA DO “TERÇO CENTRAL”. LINHA DE PRESSÕES

A alvenaria é um material que resulta da assemblagem de diversos elementos (tijolos, pedras, blocos, etc), que poderão ser aglomerados através de uma argamassa de assentamento[†]. Dependendo dos materiais utilizados, das dimensões, natureza e geometria das unidades, do seu arranjo e das dimensões das juntas, a designação alvenaria poderá representar uma imensa variedade de materiais compósitos (Figura 3.1). Há, porém, uma característica comum nas alvenarias existentes nas construções antigas: a sua fraca resistência a esforços de tracção e uma razoável resistência a tensões de compressão.

Nos métodos clássicos, gráficos e analíticos, tal como nos métodos numéricos mais sofisticados a diminuta resistência à tracção destes materiais terá de ser considerada. Na maioria das situações, esta resistência sendo muito reduzida pode desprezar-se. Neste caso, a estabilidade das estruturas em alvenaria só é possível se o equilíbrio das cargas actuantes puder ser garantido apenas através de tensões de compressão entre os elementos estruturais.

Da hipótese de Bernoulli sabe-se que as tensões normais em equilíbrio com os esforços actuantes numa secção transversal de uma peça linear (esforço normal N e momento flector M na Figura 3.2) podem ser determinadas a partir da seguinte expressão:

[†] Há ainda que considerar as modernas alvenarias armadas, que incorporam malhas ou armaduras metálicas com o objectivo de melhorar as características mecânicas. No entanto, este tipo de alvenaria não existe nas construções antigas, pelo que está fora do âmbito deste trabalho.

$$\sigma(x) = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \cdot x \quad (3.1)$$

em que A e I são, respectivamente, a área e o momento de inércia da secção transversal.

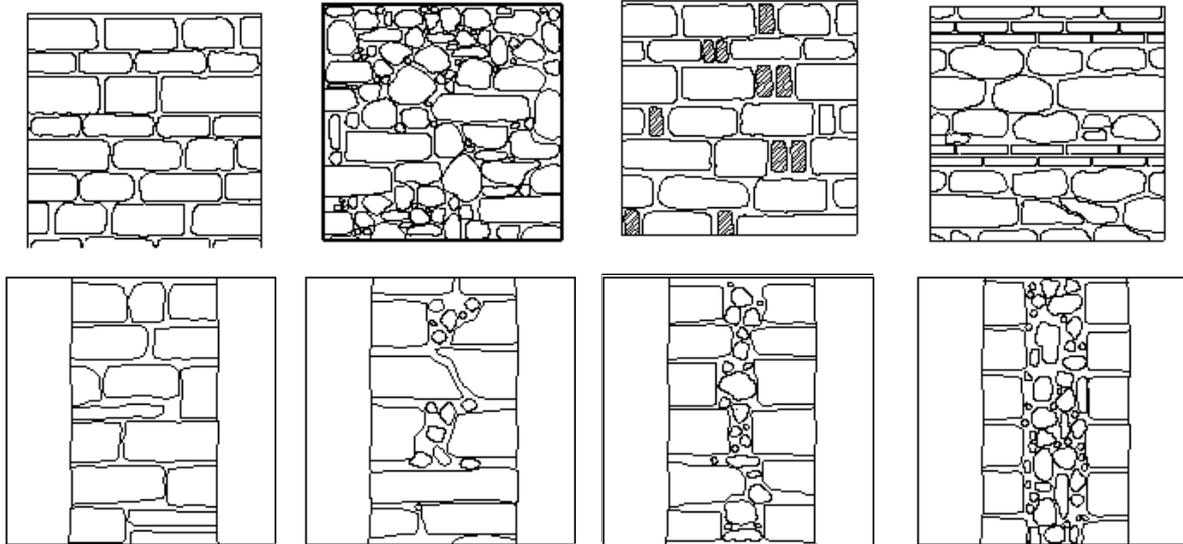


Figura 3.1 - Diferentes tipos de alvenaria de pedra (em cima: alçados; em baixo: cortes transversais).

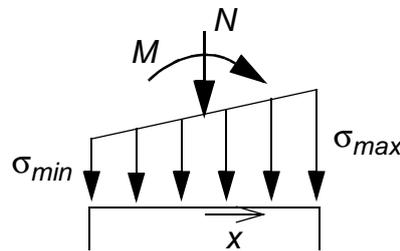


Figura 3.2 - Tensões normais e esforços actuantes na secção transversal de uma peça linear.

No caso de a secção transversal ser rectangular de largura b e altura t , a expressão anterior toma a forma:

$$\sigma(x) = \frac{N}{bt} + \frac{12M}{bt^3} \cdot x \quad (3.2)$$

sendo a tensão normal mínima correspondente dada por:

$$\sigma_{min} = \frac{N}{bt} - \frac{6M}{bt^2} \quad (3.3)$$

Para que a secção esteja totalmente comprimida, a tensão mínima deverá ser de compressão, ou

seja, positiva, de acordo com a convenção de sinais aqui adoptada. Assim, deverá verificar-se:

$$N \geq \frac{6M}{t} \quad (3.4)$$

Tendo em conta que a relação $e = M/N$ define a excentricidade da resultante das tensões normais N , a expressão anterior pode ser escrita na forma:

$$e \leq \frac{t}{6} \quad (3.5)$$

Donde se conclui que uma secção transversal rectangular estará totalmente comprimida se a resultante das tensões normais tiver o seu ponto de aplicação no interior do terço (ou núcleo) central da secção (Figura 3.3).

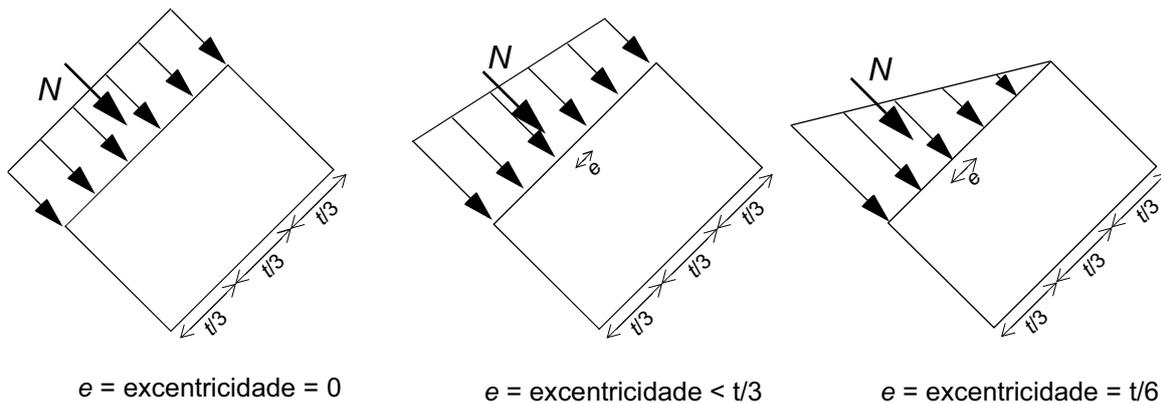


Figura 3.3 - Distribuição das tensões internas numa secção em função da posição da sua resultante.

Aumentando a excentricidade da resultante das tensões normais surgem extensões de tracção numa das extremidades da secção. Não sendo possível a ocorrência de tensões de tracção a secção fendilha nessa zona, aumentando a intensidade da tensão normal máxima de compressão na extremidade oposta (Figura 3.4). Para uma excentricidade da resultante igual a metade da altura da secção a tensão normal máxima de compressão toma um valor infinitamente grande, provocando o esmagamento, por compressão, desse vértice. Para uma maior excentricidade da resultante, isto é, para uma localização exterior aos limites da secção, o equilíbrio não é possível apenas com tensões normais de compressão.

Nas situações anteriores à fendilhação da secção a expressão (3.2) permanece válida, obtendo-se a partir dela a seguinte relação entre os esforços actuantes M e N e a tensão normal máxima

de compressão na secção σ_{max} :

$$M = \frac{t}{6}(\sigma_{max}bt - N) \quad e = \frac{M}{N} = \frac{t}{6}\left(\frac{\sigma_{max}bt}{N} - 1\right) \quad (3.6)$$

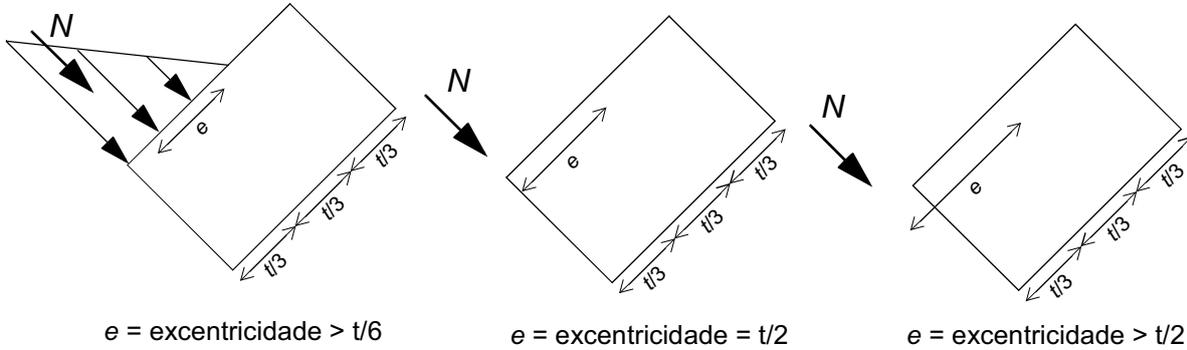


Figura 3.4 - Distribuição das tensões internas numa secção em função da posição da sua resultante (cont.).

Tendo em conta que a resistência à compressão da alvenaria é limitada, a tensão máxima de compressão não poderá ultrapassar o valor admissível σ_c^{adm} . Assim, para um dado valor do esforço normal actuante N , o momento máximo M_{max} que é possível mobilizar na secção não fendilhada será:

$$M_{max} = \frac{t}{6}(\sigma_c^{adm}bt - N) \quad (3.7)$$

ou seja, a excentricidade máxima (e_{max}) que o esforço normal actuante N poderá ter é:

$$e_{max} = \frac{t}{6}\left(\frac{\sigma_c^{adm}bt}{N} - 1\right) \quad (3.8)$$

Sendo, nesta situação de secção não fendilhada, o valor do esforço normal actuante limitado ao seguinte intervalo:

$$\sigma_c^{adm}bt \geq N \geq \frac{1}{2}(\sigma_c^{adm}bt) \quad (3.9)$$

No caso da secção fendilhada, a expressão que relaciona os esforços actuantes M e N e a tensão máxima de compressão σ_{max} é:

$$M = N\left(\frac{t}{2} - \frac{2N}{3\sigma_{max}b}\right) \quad e = \frac{M}{N} = \frac{t}{2} - \frac{2N}{3\sigma_{max}b} \quad (3.10)$$

Tendo em conta o limite admissível da tensão de compressão no material (σ_c^{adm}), o valor do momento máximo M_{max} que é possível mobilizar na secção fendilhada quando sujeita a um esforço normal actuante N , é dado por:

$$M_{max} = N \left(\frac{t}{2} - \frac{2N}{3\sigma_c^{adm}b} \right) \quad (3.11)$$

ou seja, a excentricidade máxima (e_{max}) que o esforço normal actuante N poderá ter é:

$$e_{max} = \frac{t}{2} - \frac{2N}{3\sigma_c^{adm}b} \quad (3.12)$$

Sendo, neste caso, o valor do esforço normal actuante limitado ao seguinte intervalo:

$$\frac{1}{2}(\sigma_c^{adm}bt) \geq N \geq 0 \quad (3.13)$$

Combinando as expressões anteriores e tendo em conta os correspondentes limites de variação do esforço normal actuante, é possível desenhar gráficos de interacção que relacionam o esforço normal actuante N com o momento máximo M_{max} que é possível mobilizar na secção e com a excentricidade máxima e_{max} que é possível conferir a esse esforço normal (Figura 3.5 e Figura 3.6).

Como se pode observar na Figura 3.5, apesar da não resistência à tracção das peças estruturais em alvenaria, é possível mobilizar momentos flectores nas suas secções transversais, os quais serão tanto maiores quanto maior for a resistência à compressão do material.

Segundo Timoshenko^{Timoshenko,1953}, as linhas de pressões e de resistência numa estrutura de alvenaria são lugares geométricos diferentes e representam, respectivamente, o polígono que une os centros de pressão de cada junta entre os elementos da alvenaria (linha ACEG na Figura 3.7) e o lugar geométrico das consecutivas intersecções entre as direcções das resultantes das tensões actuantes nessas juntas (linha ABCDEFG na Figura 3.7). Em estruturas arqueadas estas linhas são nas situações reais[†] praticamente coincidentes, sendo tanto mais próximas quanto mais próximas forem as juntas entre aduelas.

[†] A Figura 2.27 do parágrafo 2.3.3, é meramente representativa e corresponde a uma situação em que as forças aplicadas nas aduelas têm ponto de aplicação exterior à própria aduela, posição que não é, obviamente, realista.

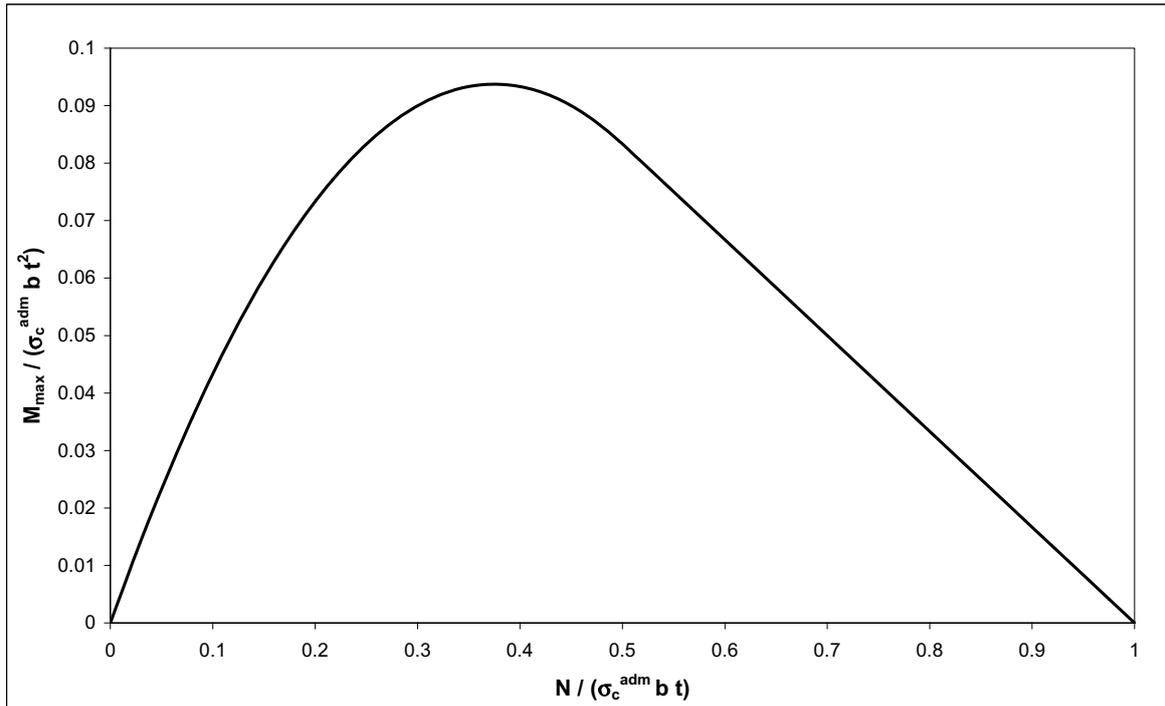


Figura 3.5 - Diagrama de interacção M - N (secção recângular não resistente à tracção).

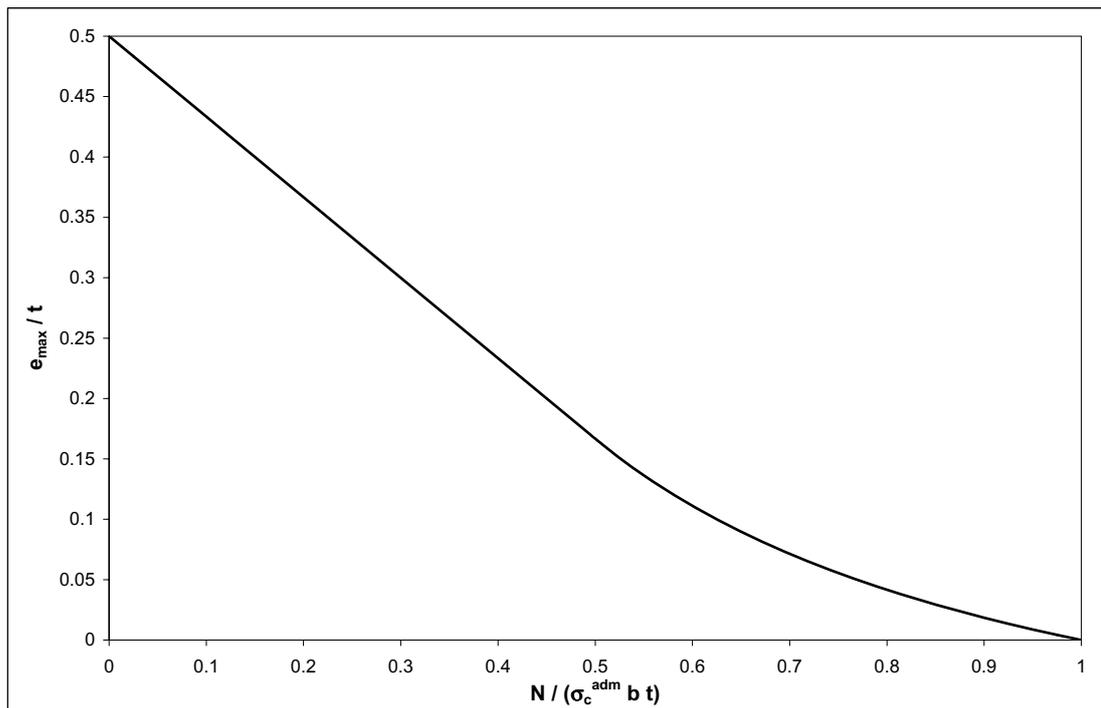


Figura 3.6 - Diagrama de interacção e_{max} - N (secção recângular não resistente à tracção).

Admitindo que a alvenaria não tem resistência à tracção e, também, que o atrito entre juntas é suficiente para evitar o escorregamento relativo de aduelas, não haverá diferença efectiva entre o comportamento das juntas e o das outras secções. Assim, as definições anteriores devem ser alargadas para o conceito de secção transversal e não apenas para o conceito de junta entre

aduelas. Considerando um número suficientemente elevado de secções transversais, verifica-se que as linhas de pressões e de resistência convergem para uma única curva contínua, que é o lugar geométrico das linhas de acção das resultantes das tensões actuantes nas diferentes secções transversais.

A linha de pressões e a linha de resistência são, portanto, aproximações discretas (poligonais) dessa curva contínua, na qual cada ponto representa o ponto de aplicação da resultante das tensões nessa secção e a sua tangente define a direcção da força resultante. É usual designar a curva contínua por linha de pressões e as linhas poligonais por aproximações da linha de pressões, não sendo em geral importante identificar qual a aproximação considerada. Esta é a nomenclatura que se usará neste trabalho.

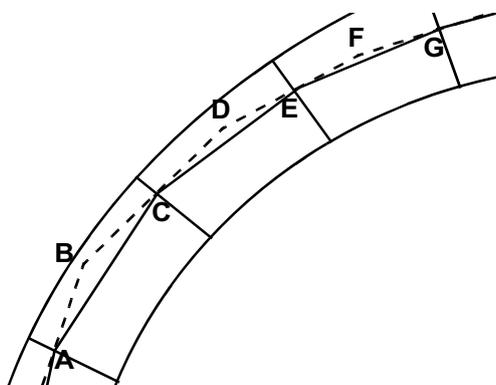


Figura 3.7 - Linhas de pressões e de resistência num arco, de acordo com as definições de Timoshenko.

Pela definição anterior de linha de pressões e pelas observações relativas à distribuição de tensões nas secções transversais, pode dizer-se que *uma estrutura arqueada estará em equilíbrio quando submetida a uma determinada acção, se a linha de pressões correspondente estiver sempre no interior da sua espessura*. Do mesmo modo, estará totalmente comprimida se a linha de pressões equilibrada com as cargas actuantes estiver em todas as secções no interior do núcleo central, ou seja, dentro do terço central no caso de secções rectangulares. Esta é a regra do terço central, regra de projecto vulgarmente utilizada na primeira metade do século XX, em que, por segurança, se pretendia garantir que as estruturas arqueadas ficariam totalmente comprimidas. No entanto, se a linha de pressões sair do terço central em determinadas zonas e desde que nunca saia para o exterior das secções, o equilíbrio ainda é possível, embora com a ocorrência de fissuras. A rotura das secções só acontecerá quando a linha de pressões for exterior à secção em causa ou quando a tensão limite de compressão do material for atingida.

Tendo em conta que é natural e aceitável que as estruturas de alvenaria apresentem fendas, a regra do terço central é excessivamente conservativa, uma vez que é possível o equilíbrio com margens de segurança suficientemente elevadas se a linha de pressões sair moderadamente do terço central da secção. Como se viu no capítulo anterior, Pippard propôs em alternativa à regra do terço central a regra da metade central, que corresponde a admitir a possibilidade de uma secção rectangular fendilhar até 1/4 da sua altura (Figura 3.8).

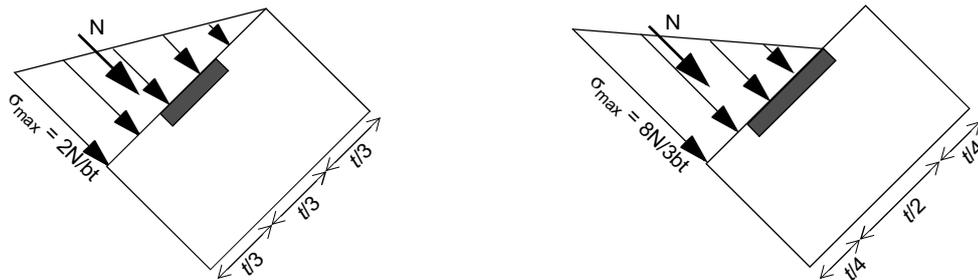


Figura 3.8 - Regras do terço e da metade central.

A posição da linha de pressões de uma estrutura arqueada pode ser determinada analiticamente através do equilíbrio das forças actuantes na estrutura. Considere-se um arco sujeito a um dado carregamento vertical e designe-se por ε a distância medida na vertical entre o intradorso do arco (OA) e a linha de pressões (Figura 3.9).

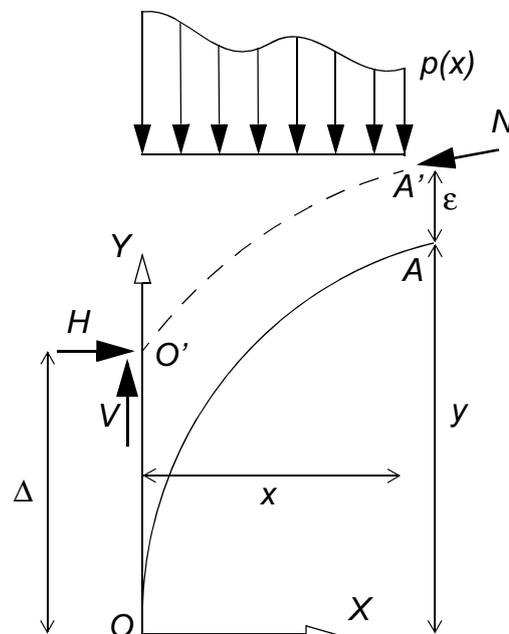


Figura 3.9 - Diagrama de corpo livre de um troço de um arco.

Do equilíbrio de momentos em relação ao ponto A' (Figura 3.9) obtém-se a seguinte expressão:

$$(y + \varepsilon - \Delta)H + \int_0^x p(\zeta)(x - \zeta)d\zeta - Vx = 0 \quad (3.14)$$

donde:

$$\varepsilon = \Delta - y + \frac{V}{H}x - \frac{1}{H} \int_0^x p(\zeta)(x - \zeta)d\zeta \quad (3.15)$$

O cálculo da distância ε da linha de pressões ao intradorso do arco depende da determinação das quantidades H , V e Δ , que traduzem a indeterminação estática do problema; o arco é uma estrutura triplamente hiperstática, representando essas incógnitas a respectiva redundância estática.

Considerando a discretização da carga actuante num conjunto de cargas concentradas (Figura 3.10), a expressão anterior pode ser escrita na forma:

$$\varepsilon_n = \Delta - y_n + \frac{V}{H}x_n - \frac{1}{H} \left\{ x_n \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n x_i P_i \right\} \quad (3.16)$$

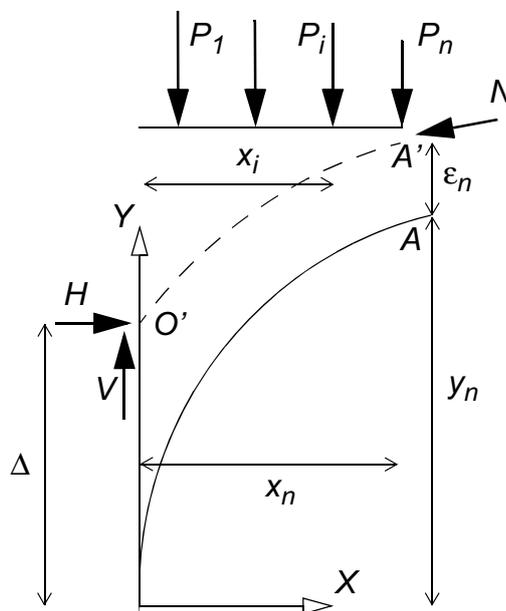


Figura 3.10 - Discretização da carga aplicada no arco.

Se for conhecida a posição da linha de pressões em três pontos, é possível determinar através da expressão anterior o perfil da linha de pressões em qualquer secção do arco. Nas figuras e

tabelas seguintes representam-se os cálculos de determinação da estimativa da posição da linha de pressões de uma ponte real (ponte Teston), submetida à acção do peso próprio e de uma carga concentrada localizada a 1/4 de vão e de intensidade 40 kN. A Figura 3.11 representa a geometria do arco da ponte e a Tabela 3.1 define as suas espessuras.

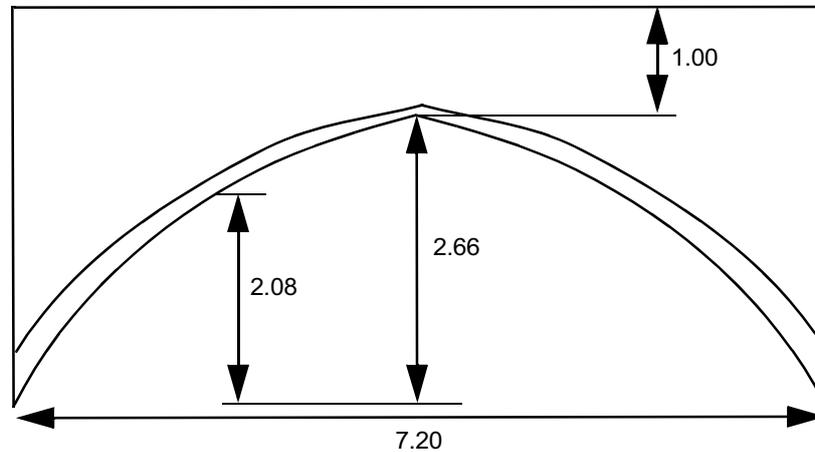


Figura 3.11 - Geometria do arco da ponte Teston em Kent (dimensões em metro).

Ponto	O - O'	A - A'	B - B'	C - C'	D - D'	E - E'	F
Altura vertical do arco (m)	0.625	0.383	0.311	0.275	0.255	0.244	0.238

Tabela 3.1 - Geometria do arco da ponte Teston ^{Heyman,1980a)}.

A carga permanente actuante no arco foi discretizada em 12 parcelas, cada uma correspondente a um troço do arco com 0.60 m de comprimento (Figura 3.12).

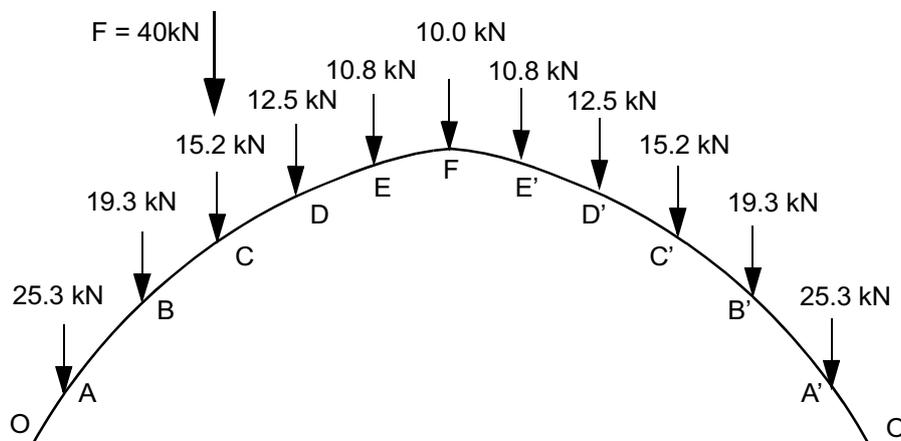


Figura 3.12 - Ponte de Teston - discretização da carga permanente.

Tendo em conta a presença da força concentrada a expressão para o cálculo da posição da linha

de pressões é:

$$\varepsilon_n = \Delta - y_n + \frac{V}{H}x_n - \frac{1}{H} \left\{ x_n \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n x_i P_i \right\} - \frac{F}{H} \begin{bmatrix} 0 \\ ou \\ (x_n - 1.8) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Na Tabela 3.2 apresentam-se os cálculos da posição da linha de pressões, em que, para eliminar a indeterminação estática, se admitiu que a linha de pressões toca o intradorso do arco nos pontos *O* e *F* e o extradorso no ponto *C*. Como se pode observar na Tabela 3.2 e na Figura 3.13, a linha de pressões obtida não é uma solução equilibrada visto sair, embora ligeiramente, da espessura do arco nas secções *A* e *O'*. Assim, a hipótese admitida para a localização dos três pontos da linha de pressões não foi a mais adequada.

Ponto	x _n (m)	y _n (m)	P (kN)	ΣP _i (kN)	x _n ΣP _i (kNm)	P _i x _i (kNm)	ΣP _i x _i (kNm)	Mto F (kNm)	ε (m)	dist.vert. (m)
O	0	0	0						0	0.625
A	0.6	1.03	25.3	25.3	15.18	15.18	15.18	0	-0.065<0	0.383
B	1.2	1.65	19.3	44.6	53.52	23.16	38.34	0	0.085	0.311
C	1.8	2.08	15.2	59.8	107.64	27.36	65.70	0	0.275	0.275
D	2.4	2.37	12.5	72.3	173.52	30.00	95.70	24.0	0.179	0.255
E	3.0	2.56	10.8	83.1	249.30	32.40	128.10	48.0	0.086	0.244
F	3.6	2.66	10	93.1	335.16	36.00	164.10	72.0	0	0.238
E'	4.2	2.56	10.8	103.9	436.38	45.36	209.46	96.0	0.037	0.244
D'	4.8	2.37	12.5	116.4	558.72	60.00	269.46	120.0	0.080	0.255
C'	5.4	2.08	15.2	131.6	710.64	82.08	351.54	144.0	0.126	0.275
B'	6.0	1.65	19.3	150.9	905.40	115.80	467.34	168.0	0.195	0.311
A'	6.6	1.03	25.3	176.2	1162.9	166.98	634.32	192.0	0.305	0.383
O'	7.2	0	0	176.2	1268.6	0	634.62	216.0	0.630 >0.625	0.625

Tabela 3.2 - Cálculo da posição da linha de pressões da ponte Teston.

3.3 - ANÁLISE GEOMÉTRICA PELO POLÍGONO FUNICULAR

A técnica mais vulgarizada para a determinação duma aproximação da linha de pressões em estruturas arqueadas bidimensionais era a técnica gráfica do polígono funicular. Esta técnica

baseia-se na análise do equilíbrio das forças actuantes, considerando o arco como um cabo suspenso invertido, submetido à acção de cargas concentradas que representam os pesos das respectivas aduelas (Figura 3.14). A aproximação que se obtém corresponde à envolvente exterior da linha de pressões, isto é, à "linha de pressões" segundo a definição de Timoshenko.

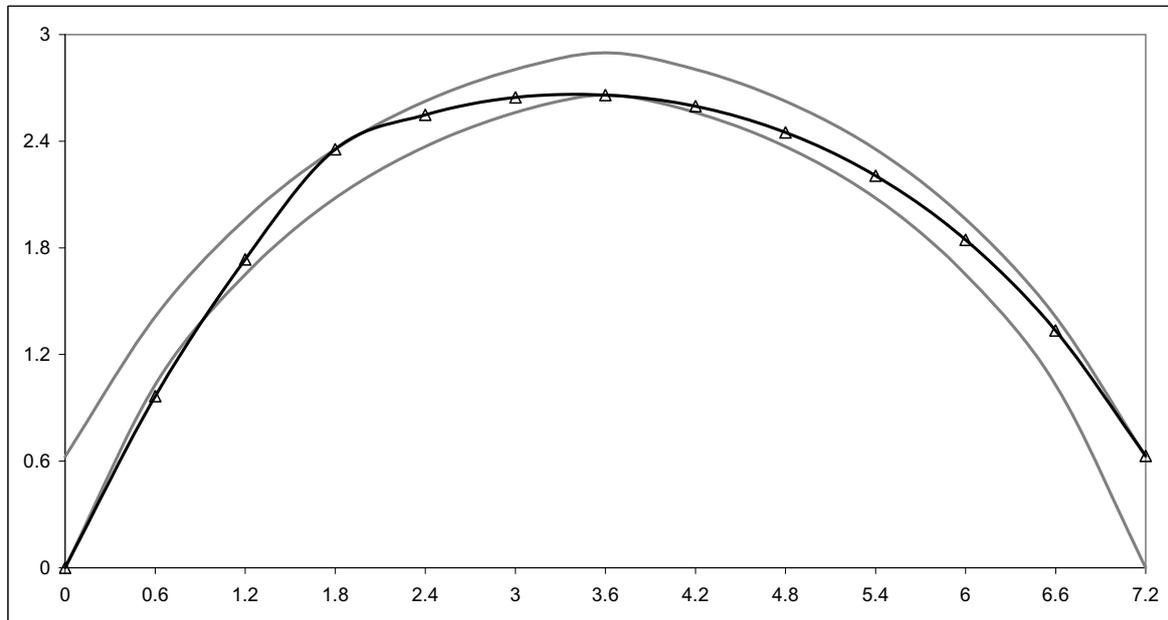


Figura 3.13 - Posição duma possível linha de pressões da ponte Teston para a acção do peso próprio e de uma carga concentrada aplicada a 1/4 de vão e com intensidade 40 kN.

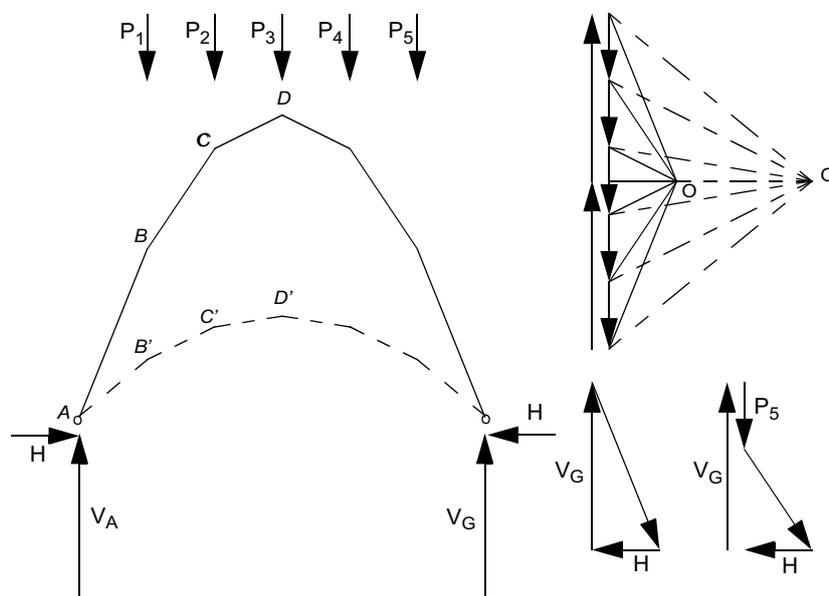


Figura 3.14 - Traçado de um polígono funicular.

O polígono funicular traduz o equilíbrio estático das forças actuantes, pelo que, sendo o arco uma estrutura hiperstática, não será possível determinar a linha de pressões correspondente à solicitação em causa apenas através desta técnica. A reacção horizontal H , ou seja, a posição do

pólo O do polígono de forças permanecerá indeterminada, e, conseqüentemente, a verdadeira geometria do polígono funicular ficará por determinar (Figura 3.14). A determinação da aproximação da linha de pressões real envolverá necessariamente a consideração da deformabilidade da estrutura, como acontece na resolução de problemas estruturais hiperstáticos.

Sendo um dos requisitos para a verificação da estabilidade das estruturas de alvenaria a posição relativa entre a linha de pressões e os limites das secções e não sendo possível determinar uma aproximação da linha de pressões real apenas através de considerações de equilíbrio, tudo indicaria que a técnica do polígono funicular seria inútil. No entanto, como se verá, a teoria da análise limite demonstra ser suficiente encontrar uma linha de pressões em equilíbrio com as cargas actuantes totalmente incluída na espessura das estruturas arqueadas, para garantir que a estrutura estará em equilíbrio. Assim, pode estudar-se a estabilidade das estruturas arqueadas procurando encontrar pelo menos uma aproximação da linha de pressões totalmente incluída na espessura da estrutura.

Como alternativa à determinação aleatória, por tentativa e erro, da linha de pressões pode considerar-se duas situações limite: uma correspondente ao impulso horizontal máximo e outra correspondente ao impulso horizontal mínimo (Figura 3.15). As correspondentes linhas de pressões, não podendo sair para o exterior da estrutura serão tangentes ao intradorso e extradorso do arco em três pontos, ao que corresponderá um igual número de articulações. O arco transforma-se nestas situações limite numa estrutura isostática (arco tri-articulado), ficando as linhas de pressões e os correspondentes impulsos horizontais univocamente definidos. A consideração destas linhas limite permite, tal como qualquer outra que esteja incluída na espessura do arco, concluir quanto à estabilidade do arco e, além disso, conhecer os valores máximos e mínimos dos impulsos horizontais, que poderá ser uma importante informação para o dimensionamento das espessuras dos pés direitos.

Esta técnica de pesquisa de uma linha de pressões no interior da estrutura, embora constitua uma útil ferramenta, não é a solução para o estudo da estabilidade das estruturas arqueadas, pois nem sempre é conclusiva[†] e quando o é não permite a quantificação de margens de segurança.

[†] A não identificação de uma linha de pressões no interior da espessura do arco apenas nos diz que o projectista não a conseguiu encontrar e não que ela é inexistente.

A definição das posições limites da linha de pressões, em particular da que corresponde ao impulso horizontal mínimo, está na base do método de Méry para análise de estruturas arqueadas de comportamento bidimensional. Neste método, admitindo a regra do terço central, considera-se que os pontos de tangencia da linha de pressões limite se localizam nas extremidades do núcleo central e não nas extremidades da secção[†] (Figura 3.16), e que o arco está devidamente dimensionado se a correspondente linha de pressões estiver totalmente incluída na espessura do terço central.

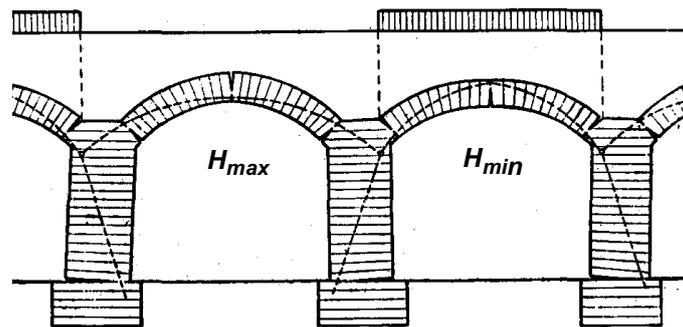


Figura 3.15 - Linhas de pressões correspondentes ao impulso máximo e ao impulso mínimo^{Salinger,1942}.

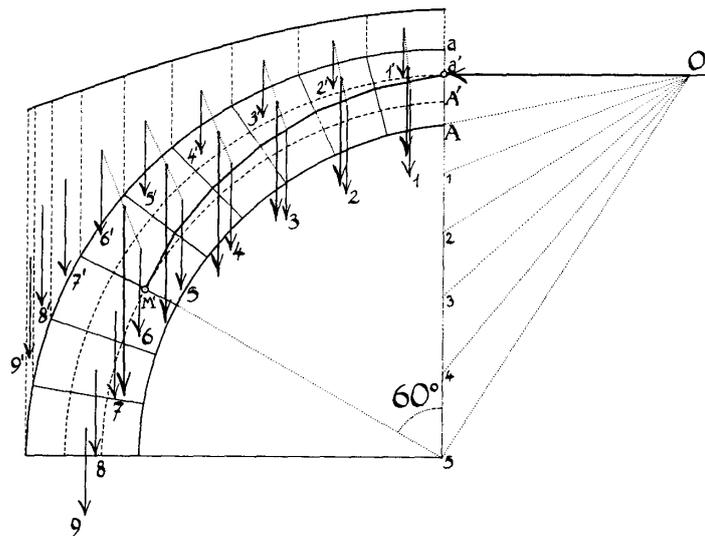


Figura 3.16 - Método gráfico de Méry.

Da análise da geometria do polígono funicular de um arco circular sujeito à acção de um carregamento simétrico, verifica-se que a inclinação do seu último troço é tanto mais vertical, correspondendo a menores impulsos horizontais nos apoios, quanto mais próximo da imposta

[†] A localização da secção de rotura depende do tipo de carregamento e da geometria do arco. Méry propôs para arcos circulares sujeitos à acção do seu peso próprio a localização a 60° (Figura 3.16); como se verá no parágrafo 3.8.2, a localização exacta, para esta geometria e carregamento, é, aproximadamente, a 58°. Na Tabela 2. 1 do parágrafo 2.3.3 apresentam-se propostas de localização da junta de rotura para outras geometrias.

estiver a resultante das cargas actuantes no semi-arco (Figura 3.17). Deste modo, constata-se que o carregamento dos rins do arco, por ter uma maior intensidade de carga junto da imposta, tem um efeito favorável ao reduzir a intensidade do impulso horizontal. Assim, o enchimento do extradorso do arco é, deste ponto de vista, uma acção estabilizadora dos pés direitos[†].

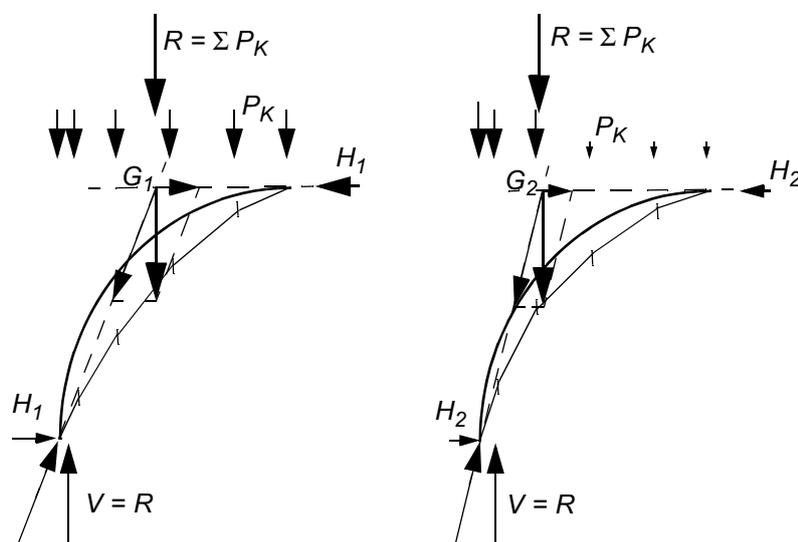


Figura 3.17 - Geometria dos polígonos funiculares em função da localização da resultante das cargas.

O peso do enchimento no extradorso do arco tem, além do resultado referido, o efeito favorável de deslocar a linha de pressões correspondente ao peso próprio do arco para o interior da sua espessura. Na Figura 3.18 representa-se um arco circular onde a linha de pressões correspondente ao seu peso próprio está numa situação limite, não sendo possível diminuir a sua espessura. Considerando simultaneamente o peso próprio do arco e o peso do material de enchimento, verifica-se que nestas circunstâncias a linha de pressões se desloca para o interior do arco, não estando mais na situação limite. Também deste ponto de vista, o efeito do peso do material de enchimento no extradorso é favorável.

Além destes efeitos, que são consequência da distribuição vertical das cargas correspondentes ao peso do material de enchimento, há ainda outros efeitos estabilizadores devidos ao enchimento no extradorso do arco. Por um lado, no caso de o enchimento apresentar alguma consistência e de a sua interface com o arco ter resistência ao corte suficiente, o caminho das compressões, isto é a linha de pressões, poderá “sair do arco” e continuar o seu percurso pelo enchimento; por outro, a existência de enchimento no extradorso constitui uma restrição ao

[†] O aligeiramento do enchimento no extradorso do arco nas zonas próximas do fecho, técnica já utilizada pelos construtores da antiguidade na construção do Panteão em Roma, é pelo, exposto, uma prática que produz a diminuição dos impulsos horizontais.

movimento horizontal dos elementos do arco.

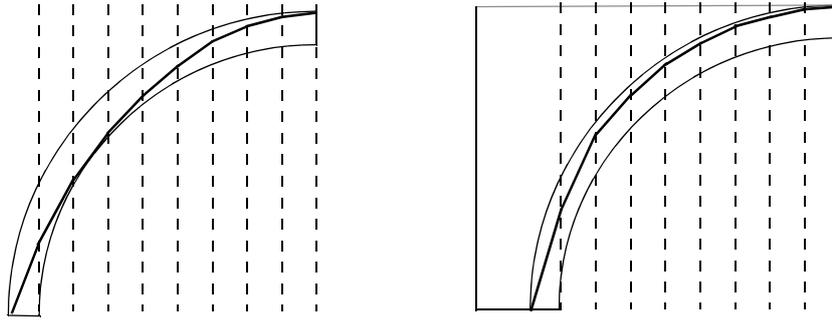


Figura 3.18 - Efeito favorável do enchimento no extradorso do arco no perfil da linha de pressões: linhas de pressões do peso próprio do arco (esq.) e dos pesos próprios do arco e do material de enchimento (dta).

3.4 - ANÁLISE GEOMÉTRICA PELO MÉTODO DE FULLER

O método de Fuller é um interessante método gráfico desenvolvido no final do século XIX que permite verificar se um arco é estável para um dado carregamento e determinar a espessura mínima admissível desse arco^{Heyman,1982;Palomeque,1997}. Este método baseia-se em transformações no polígono funicular, sem que se altere a distância vertical entre o eixo do arco e essa aproximação da linha de pressões. Sendo a distância vertical entre o eixo do arco e a linha de pressões uma medida do momento no centro da secção do arco e sendo esse momento o esforço que define a excentricidade da resultante das tensões normais na secção, não se alterará, assim, a posição da resultante relativamente aos limites das secções.

Considere-se um arco sujeito a um dado carregamento e, arbitrando a posição do pólo do polígono de forças[†], desenhe-se o correspondente polígono funicular (Figura 3.19a). Por simplicidade, as componentes verticais das reacções nos apoios foram calculadas previamente através das equações de equilíbrio, o que permitiu desenhar o polígono funicular numa base horizontal AB , estando os pontos A e B localizados no intradorso do arco. Desenhe-se agora o arco e o respectivo polígono funicular numa escala horizontal distorcida (Figura 3.19b), tal que o polígono funicular tome a forma de dois segmentos de recta com extremidades nos pontos A' e B' , localizados arbitrariamente e concorrentes no ponto mais alto do polígono funicular original.

[†] Por outras palavras, arbitrando o valor da componente horizontal das reacções nos apoios.

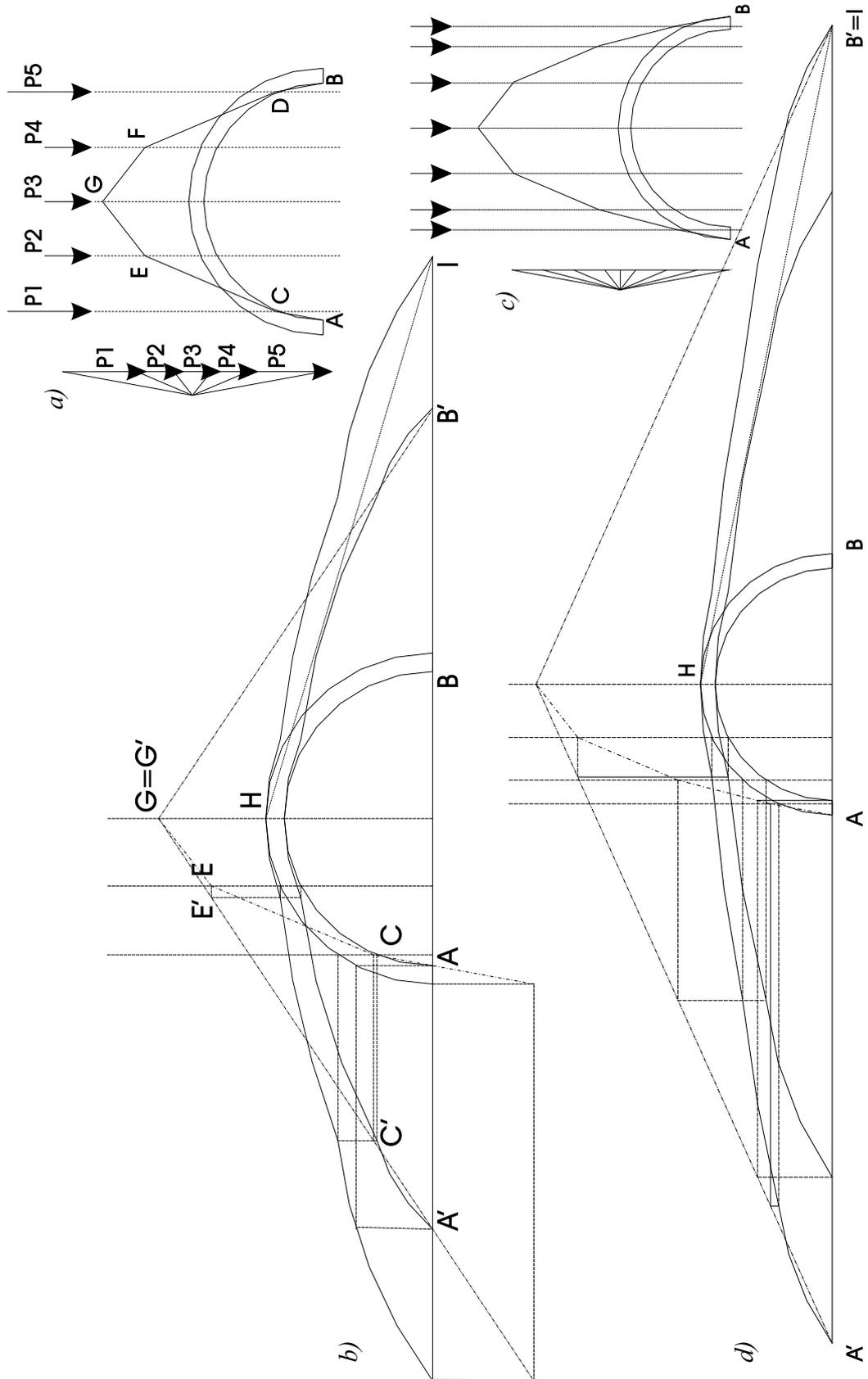


Figura 3.19 - Método de Fuller - espessura mínima admissível de um arco circular submetido à ação do seu peso próprio - a)b) com menor discretização do carregamento e considerando os pontos do extradorso; c)d) com maior discretização do carregamento e considerando os pontos do intradorso.

Observe-se que na transformação anterior a distância vertical entre o eixo do arco e a linha de pressões, representada pelo polígono funicular, não sofre alterações relativamente ao traçado inicial. Por outras palavras, não se altera a excentricidade da resultante das tensões normais das secções do arco.

A transformação do polígono funicular em dois segmentos de recta é a base da construção de Fuller. Das propriedades dos polígonos de forças e do polígono funicular, verifica-se que se o polígono funicular for constituído por dois segmentos de recta, qualquer translação do pólo do polígono de forças resultará num outro polígono de forças também bilinear. Assim, qualquer um outro polígono funicular em equilíbrio com as cargas aplicadas, correspondente a uma outra posição do pólo do polígono de forças será representado no arco distorcido por dois segmentos de recta. Deste modo, um polígono funicular correspondente ao carregamento em causa poderá ser desenhado no interior do arco real e, portanto, será possível o equilíbrio, se for possível desenhar duas linhas rectas dentro da espessura do arco distorcido.

Na Figura 3.19 representa-se para um mesmo arco e para o carregamento correspondente ao seu peso próprio, duas aplicações do método de Fuller, correspondendo a dois níveis de discretização do carregamento. Em ambos os casos verifica-se ser possível desenhar dois segmentos de recta dentro da espessura do arco distorcido, ou seja, é possível o equilíbrio do arco para a solicitação em causa. Na Figura 3.20 representa-se uma aplicação do método de Fuller a um arco circular submetido à acção do peso próprio do material de enchimento no seu extradorso, verificando-se, também, ser possível desenhar um polígono de forças bilinear dentro da espessura do arco distorcido.

A determinação da espessura mínima admissível de um arco para um dado carregamento pode ser efectuada iterativamente procurando a espessura correspondente a um arco distorcido onde apenas é possível desenhar um único polígono funicular bilinear. Os exemplos de aplicação do método de Fuller representados correspondem ao resultado desses processos iterativos para os casos de um arco submetido à acção do seu peso próprio e de um arco submetido à acção do peso próprio do material de enchimento no extradorso. Os resultados obtidos por este método gráfico ($t_{\min \text{ adm}} = 0.106R$, para o primeiro caso, e $t_{\min \text{ adm}} = 0.073R$, para o segundo, sendo R o raio médio do arco), são coincidentes com os resultados obtidos analiticamente e que serão apresentados no parágrafo 3.8.2.

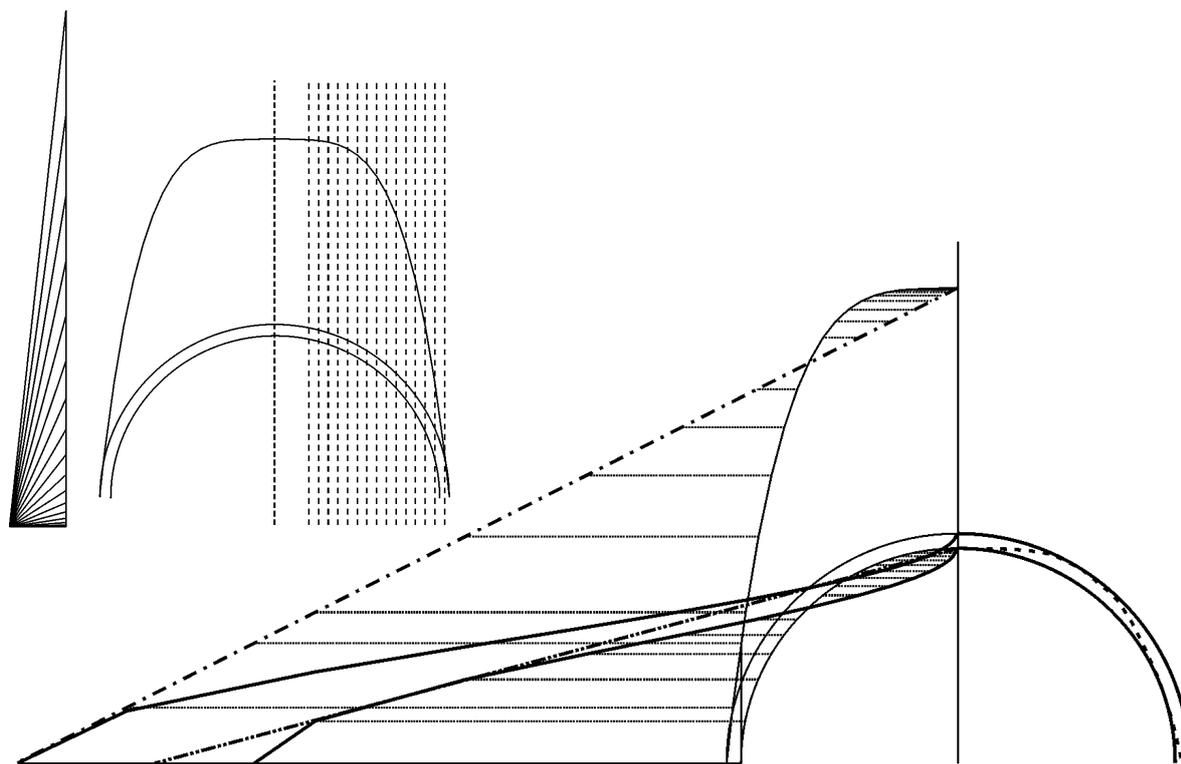


Figura 3.20 - Método de Fuller - espessura mínima admissível para um arco circular submetido à accção do peso próprio do material de enchimento no extradorso.

3.5 - MÉTODO ELÁSTICO DE PIPPARD

Através de ensaios experimentais Pippard observou que os arcos em funcionamento real apresentam fendilhações localizadas e que estão sempre presentes algumas articulações entre aduelas adjacentes. Embora tratando-se de uma estrutura inicialmente hiperstática, Pippard admitiu que, quer pelo ajustamento da sua geometria à geometria dos apoios, quer devido à ocorrência de pequenos movimentos dos apoios, o arco transforma-se pela formação de articulações numa estrutura estaticamente determinada. Ignorando, no entanto, a formação de uma terceira articulação que transformaria o arco numa estrutura isostática, Pippard analisou o arco considerando-o como uma estrutura bi-articulada contínua (Figura 3.21).

Fazendo coincidir o arco com o seu eixo, a energia de deformação é definida através de:

$$U = 2 \int_{(x = 0)}^{(x = \frac{L}{2})} \left(\frac{M(x)^2}{2EI} \right) ds \quad (3.18)$$

em que ds é o elemento de comprimento do arco e $M(x)$ momento flector numa dada secção, a uma distância x do apoio, que pode ser determinado em função da reacção horizontal H .

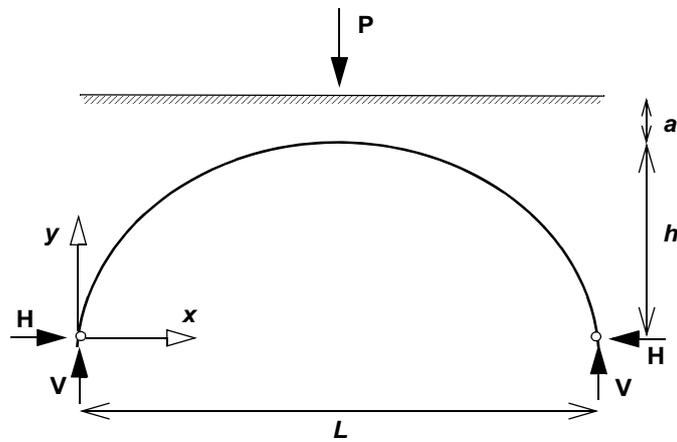


Figura 3.21 - Análise elástica de Pippard.

O valor da componente horizontal da reacção nos apoios pode ser obtido através da minimização da energia de deformação:

$$\frac{\delta U}{\delta H} = 2 \int_{(x=0)}^{(x=\frac{L}{2})} \left(\frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial}{\partial H} M(x) \right) ds = 0 \quad (3.19)$$

Para simplificar a resolução desta equação, Pippard admitiu que a secção do arco diminui do apoio para a pedra de fecho e considerou a seguinte expressão para a variação da inércia da secção:

$$I = I_o \cdot \frac{ds}{dx} \quad (3.20)$$

Deste modo, a equação de minimização da energia de deformação transforma-se em:

$$\int_{(x=0)}^{(x=\frac{L}{2})} \left(M(x) \cdot \frac{\partial}{\partial H} M(x) \right) dx = 0 \quad (3.21)$$

Admitindo que o arco tem forma parabólica e considerando, em simultâneo, uma acção concentrada P a meio vão e os pesos próprios do arco e do material de enchimento no extradorso (para os quais se considerou o mesmo peso específico γ , uma altura de enchimento acima do fecho de a e se adoptou uma largura do arco na direcção perpendicular ao seu plano[†] de $2a$), obtêm-se, por minimização da energia de deformação correspondente, os seguintes

resultados para a reacção horizontal H e para o momento flector M a meio vão:

$$H = \frac{1}{h} \cdot \left(\gamma L a \cdot \left(\frac{h}{21} + \frac{a+t}{4} \right) + \frac{25}{128} \cdot P \right) \quad M = \frac{L}{4} \cdot \left(\frac{\gamma L h a}{42} - \frac{7}{32} P \right) \quad (3.22)$$

em que t é a espessura da secção do arco no fecho.

As equações anteriores, obtidas pela análise elástica de um arco bi-articulado, com forma parabólica, com uma determinada regra de variação da secção transversal e submetido à acção de uma carga concentrada a meio vão do arco, são os resultados utilizados por Pippard para a definição de uma regra de verificação da segurança do arco.

Pippard tinha conhecimento que a posição mais desfavorável para uma carga concentrada num arco seria aproximadamente a um terço ou a um quarto do vão e não a meio como admitido nas análises anteriores. No entanto, considerando a dispersão da carga através da espessura do material de enchimento a dispersão será superior se a carga actuar afastada da zona central do arco. Deste modo, admitir a aplicação da carga a um terço ou a um quarto de vão resultará numa maior mobilização da largura do arco e, conseqüentemente, numa situação mais favorável. Além do efeito favorável da dispersão da carga aplicada através da espessura do material de enchimento no extradorso do arco, não se considera nesta metodologia qualquer outro efeito favorável do material de enchimento.

Admitindo como critério de dimensionamento a "regra da metade central", e tendo em conta que a secção de meio vão está submetida ao esforço axial H e ao momento flector M , o valor limite para a carga aplicada P será obtido através da seguinte equação:

$$\frac{M}{H} = -\frac{1}{4}t \quad (3.23)$$

ou seja, tendo em conta as expressões (3.22):

$$P_1 = \frac{32\gamma L a(2h^2 + 4ht + 21t(a+t))}{21(28h - 25t)} \quad (3.24)$$

† Pippard considerou um ângulo de 45° na dispersão da carga concentrada P através do material de enchimento. Deste modo, sendo a a altura do material de enchimento sob a carga, a largura do arco (na direcção perpendicular ao seu plano) mobilizada pela carga é $2a$, devendo os efeitos da carga concentrada ser sobrepostos aos efeitos dos pesos próprios do arco com uma largura de $2a$.

Tendo em conta a expressão (3.6), que define em regime elástico o valor da tensão de compressão máxima em função do esforço normal e do momento flector na secção, e considerando a secção de meio vão do arco, obtém-se a seguinte expressão que relaciona os esforços H e M com a tensão máxima admissível de compressão no material σ_c^{max} :

$$\sigma_c^{max} = \frac{H}{2ta} - \frac{3M}{at^2} \quad (3.25)$$

Substituindo na expressão anterior os resultados da expressão (3.22), obtém-se o seguinte valor limite para a carga concentrada P :

$$P_2 = \frac{\frac{256\sigma_c^{max}at}{L} + 128\gamma La\left(\frac{h}{28t} - \frac{1}{21} - \frac{a+t}{4h}\right)}{\left(\frac{25}{h} + \frac{42}{t}\right)} \quad (3.26)$$

Observe-se que os valores limites P_1 e P_2 não correspondem ao colapso do arco, mas sim à eliminação da redundância estática pela plastificação da secção sob a carga aplicada.

Pippard comparou os resultados experimentais com os valores que se obtêm para a carga limite através das expressões anteriores e concluiu que considerando apenas a limitação na tensão de compressão (P_2) se obtêm resultados suficientemente seguros. Pippard verificou que a consideração de uma tensão de compressão limite de 1.39 MPa no cálculo da carga admissível conduz a uma margem de segurança da ordem de 3 a 4 em relação aos valores das cargas de colapso obtidos experimentalmente, coeficiente de segurança que considerou ser necessário dado o complexo comportamento das pontes em arco. Para as dimensões e geometrias que admitiu verificou ainda que essa limitação na tensão de compressão resulta em tensões de tracção inferiores a 0.68 MPa, limite que considerou suficiente para eliminar a ocorrência de fendas significativas no arco^{Das,1995}. Deste modo, propôs a utilização da expressão correspondente ao limite P_2 como critério de dimensionamento e de verificação da segurança, o que se traduz nos casos correntes num critério ainda menos conservador do que a "regra da metade central".

A partir da expressão do valor limite P_2 , considerando arcos parabólicos com uma relação vão-flecha de 4 e uma tensão limite de compressão de 1.39 MPa, Pippard construiu tabelas que permitiam determinar cargas admissíveis para vários vãos e várias alturas de enchimento sobre

o fecho. Estas tabelas serviram de base para o método MEXE, desenvolvido pelo exército britânico para classificação de pontes em alvenaria. Na elaboração deste método e na sua posterior adaptação à sociedade civil, encontrou-se uma expressão numérica, em função do vão e da altura de enchimento sobre o fecho (Tabela 3.3), ajustada aos resultados de Pippard. Uma vez que estes resultados correspondem a arcos com perfil parabólico, com relações vão-flecha de 4 e a uma tensão limite de compressão de 1.39 MPa, houve necessidade de os adaptar a outras condições. Deste modo, o método MEXE considera correcções ao valor calculado da carga admissível através de factores que têm em conta variações às condições inicialmente admitidas. Também o estado geral de conservação da ponte e as dimensões e características das juntas entre aduelas são quantificados através de factores de correcção.

O método MEXE, ainda em vigor no Reino Unido^{BD21/84} é, pelo exposto, um método semi-empírico que resulta de uma metodologia elástica, portanto de duvidosa aplicação a estruturas de alvenaria, mas que pela facilidade de aplicação e por se ter constatado experimentalmente que conduz a resultados do lado da segurança, foi frequentemente utilizado. O método conduz, em particular para vãos grandes (superiores a 10 m), a resultados excessivamente conservativos. De facto, em ensaios experimentais realizados no Reino Unido entre 1984 e 1994, identificaram-se para pontes de vãos de 5 a 7 metros cargas de colapso experimentais 3 a 4 vezes superiores às cargas admissíveis obtidas pelo método MEXE. No caso de pontes de vãos superiores obtiveram-se relações ainda mais conservativas: de 4.4 e 8.5 para pontes com 10 e 18.30 metros de vão, respectivamente^{Crisfield e Page, 1990}.

3.6 - TEORIA DA ANÁLISE LIMITE APLICADA A ESTRUTURAS DE ALVENARIA

As construções de alvenaria são constituídas por assemblagens de pedras ou tijolos, com um número discreto de camadas e com juntas entre elementos (ou aduelas) com pequena resistência a tensões de tracção[†]. Mesmo nos casos em que se utilizaram argamassas no preenchimento das juntas entre aduelas, a resistência à tracção destas juntas, inicialmente fraca e degradada ao longo do tempo, não é significativa. A estabilidade do conjunto é assegurada pela compactação das vários aduelas através da acção da gravidade, que introduz nas interfaces entre estes

[†] Não se inclui nesta categoria as construções em alvenaria de pedra e cal.

elementos tensões de compressão, permitindo o desenvolvimento das forças de atrito necessárias para impedir o seu escorregamento relativo.

$$\text{Carga admissível} - P = 740 \cdot (t + a)^2 / L^{1.3} \text{ (em toneladas)}$$

t = espessura do arco no fecho; L = vão do arco; a = altura do enchimento sobre o fecho do arco

$$\text{Carga admissível corrigida} - Prd = P \cdot Fsr \cdot Fp \cdot Fm \cdot Fj \cdot Fc$$

Fsr = factor flecha-vão

Factor que tem em conta o desvio da geometria do arco relativamente ao perfil parabólico inicialmente assumido. Tendo em conta que os arcos abatidos são menos resistentes que os outros arcos de perfil mais aguçado, este factor toma o valor 1 para relações vão-flecha inferiores ou iguais a 4 e valores menores que 1 para relações superiores.

Fp = factor perfil do arco

Factor que tem em conta o desvio do perfil do arco relativamente ao perfil parabólico inicialmente assumido. É definido pela expressão:

$$Fp = 2.3 \cdot ((r_c - r_q)/r_c)^{0.6}$$

em que, r_q é a altura do intradorso do arco a 1/4 de vão e r_c a correspondente altura no fecho, e toma o valor 1 para relações r_q/r_c e inferiores ou iguais a 0.75 e valores menores que 1 para relações superiores.

Fm = factor material

Pretende ter em conta com as características mecânicas dos materiais que constituem o arco e o seu enchimento no extradorso e é definido pela expressão:

$$Fm = ((\text{factor arco} \cdot \text{espessura do arco}) + (\text{factor enchimento} \cdot \text{espessura enchimento})) / (\text{espessura total do arco e enchimento no fecho})$$

em que, o “factor arco” toma os valores 1.5, 1.2, 1.0 e 0.7 para aduelas, respectivamente, em granito, betão, calcário e alvenaria pobre e o “factor enchimento” os valores 1.0, 0.9, 0.7 e 0.5 quando o enchimento é constituído por, respectivamente, betão, materiais com coesão (argilas), materiais soltos bem compactados e materiais fracos.

Fj = factor junta

Pretende ter em conta com as características resistentes das juntas entre as aduelas do arco e é definido pela expressão:

$$Fj = F_w \cdot F_d \cdot F_{mo}$$

em que, F_w tem em conta com a espessura das juntas (toma os valores 1.0, 0.9 e 0.8 para juntas de, respectivamente, 6mm, 6 a 12.5 mm e mais de 12.5 mm de espessura), F_d com aprofundidade das juntas e com a qualidade do seu preenchimento com argamassa (toma valores entre 0.9 e 0.8, à consideração do projectista) e F_{mo} com a qualidade da argamassa de preenchimento das juntas (toma valores entre 0.9 e 1.0 consoante se trate de uma argamassa fraca ou em boas condições, respectivamente).

Fc = factor estado de conservação da ponte

É um factor qualitativo, variável entre 0 e 1.0, que pretende considerar o estado de conservação da ponte. O valor 1.0 deverá ser considerado para pontes em boas condições, sem patologias, e o valor 0 para pontes em estado de ruína.

Tabela 3.3 - Método MEXE^{BD16/84;BD21/84}.

Tendo em conta este comportamento, a análise de estruturas de alvenaria constituídas por blocos e juntas pode basear-se nas seguintes hipóteses^{Prager,1959;Heyman,1971;Save,1988}:

1) *A alvenaria apresenta uma resistência à tracção nula;*

Esta hipótese é ligeiramente conservativa, embora não excessivamente.

2) *A alvenaria apresenta uma resistência à compressão ilimitada;*

As tensões de compressão instaladas nas estruturas de alvenaria são baixas quando comparadas com a resistência ao esmagamento do material[†], pelo que na prática a resistência à compressão não é limitativa. Esta hipótese é contra a segurança mas, embora possam surgir concentrações de tensões que produzem esmagamentos locais (que não afectam a estabilidade global do conjunto), é uma hipótese aceitável nos casos correntes.

3) *Nas estruturas de alvenaria não ocorrem movimentos de deslizamento relativo nas juntas entre aduelas.*

Em condições normais, as tensões de compressão instaladas entre elementos, embora pequenas, são suficientes para evitar o seu deslizamento relativo.

Cada uma destas hipóteses simplificativas, baseadas nas observações do comportamento das estruturas de alvenaria correntes, deverá ser confirmada nos casos em análise. Destes princípios conclui-se que o único movimento relativo possível entre duas aduelas separadas por uma junta é uma rotação em torno das arestas comuns (Figura 3.22).

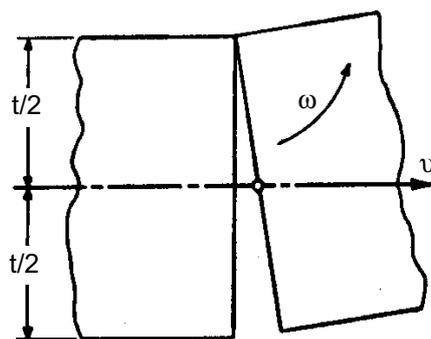


Figura 3.22 - Movimento relativo numa junta entre elementos.

Considerando uma secção transversal de uma forma rectangular de altura t (Figura 3.22), e sendo v a velocidade de abertura relativa da junta no seu ponto médio e ω a velocidade da

[†] Segundo Heyman^{Heyman, 1966}, nas construções antigas em alvenaria bem proporcionadas os elementos mais comprimidos apresentam tensões de compressão da ordem de 1/10 da tensão de esmagamento do material.

rotação relativa, o movimento de rotação é definido por:

$$v > 0 \quad |\omega| = \frac{2v}{t} \quad (3.27)$$

Não sendo possível o desenvolvimento de tensões de tração na secção, a excentricidade do esforço normal N deverá ser sempre inferior a metade da altura da secção ($e = |M/N| < t/2$).

Na ocorrência do movimento de rotação relativa, a força de compressão N é transmitida através da aresta que constitui o eixo de rotação, sendo a excentricidade e igual a metade da altura da secção. Nesta situação, o momento é definido por:

$$M = \pm N \cdot \frac{t}{2} \quad N \leq 0 \quad (3.28)$$

Assim, os esforços M e N transmitidos através da junta estarão situados no espaço das tensões, no interior da região convexa compreendida pelas duas rectas definidas pela equação anterior (Figura 3.23), sendo que, para os pares (M, N) situados sobre qualquer uma das rectas limites, as componentes v e ω do movimento possível são definidas pela relação cinemática (3.27).

As componentes v e ω definem o vector velocidade de deformação, com intensidade indeterminada, associado ao vector de esforços definido pelo par (M, N) e que se verifica ser normal exterior à fronteira do espaço limite de resistência da junta (Figura 3.23).

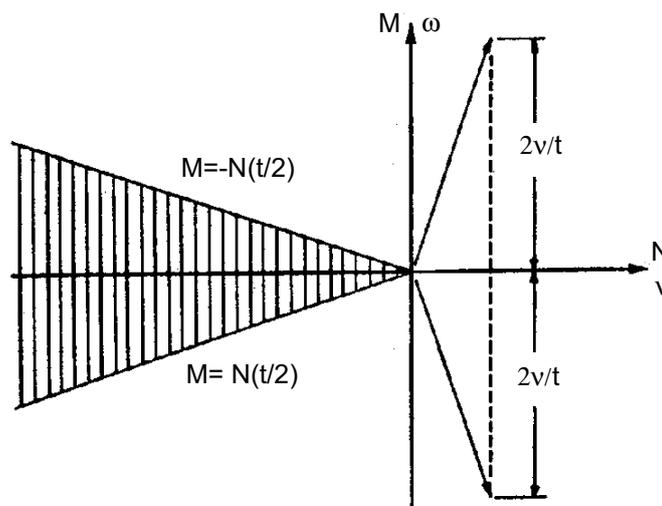


Figura 3.23 - Região admissível no espaço das tensões.

Deste modo, está-se na presença de um elemento estrutural plástico perfeitamente tradicional,

ao qual os teoremas correspondentes se podem aplicar^{Save,1988}. A teoria da análise limite, na qual se admite para o material um comportamento rígido-perfeitamente plástico, surge então como um método disponível para a avaliação da segurança de uma estrutura em alvenaria submetida à acção de cargas estáticas.

Os teoremas fundamentais da teoria da análise limite são os seguintes:

Teorema Estático: Se para um dado carregamento for possível encontrar um campo de tensões (i. e. distribuição de esforços) estática e plasticamente admissível, então a estrutura será capaz de suportar esse carregamento.

Entende-se por campo de tensões estaticamente admissível um campo em equilíbrio com as cargas aplicadas, e por plasticamente admissível, um campo que não viola a condição de plasticidade (resistência) em nenhuma secção.

Teorema Cinemático: Se for possível encontrar um campo de velocidades de deformação cinemática e plasticamente admissível em que o trabalho das cargas aplicadas exceda o trabalho de dissipação, a estrutura não suportará esse carregamento.

Entende-se por campo de velocidades cinematicamente admissível um campo de velocidades que resulta de um campo de deslocamentos que satisfaz as condições de fronteira, e por plasticamente admissível, um campo de velocidades que satisfaz as condições de paridade^{Save,1988}.

O teorema estático garante que se for possível encontrar um estado de tensão em equilíbrio com as solicitações exteriores, que verifique em simultâneo o critério de resistência em todas as secções, então a estrutura não colapsará sob a acção dessas solicitações. Por outras palavras, pode-se dizer que, se for possível ao projectista encontrar uma distribuição de esforços estática e plasticamente admissível, o que no caso das estruturas arqueadas em alvenaria corresponde a uma linha de pressões em equilíbrio com as acções exteriores e totalmente contida na espessura dos elementos, então também a estrutura o “conseguirá”.

A construção da superfície limite de resistência (Figura 3.23) baseou-se na hipótese de que a alvenaria apresenta uma resistência à compressão ilimitada. Esta hipótese, embora credível e aplicável à grande maioria das situações, não é real. Ao se ter em conta a tensão limite de compressão da alvenaria, a superfície limite de resistência afasta-se das duas rectas anteriormente definidas, tomando a forma de dois arcos parabólicos (Figura 3.24a e Figura 3.5). Nos casos correntes, em que o nível de tensões de compressão é baixo, a zona em causa na superfície limite de resistência é praticamente coincidente com os segmentos de recta anteriormente definidos (Figura 3.24b e c). Deste modo, os resultados obtidos com ambas as superfícies são muito próximos.

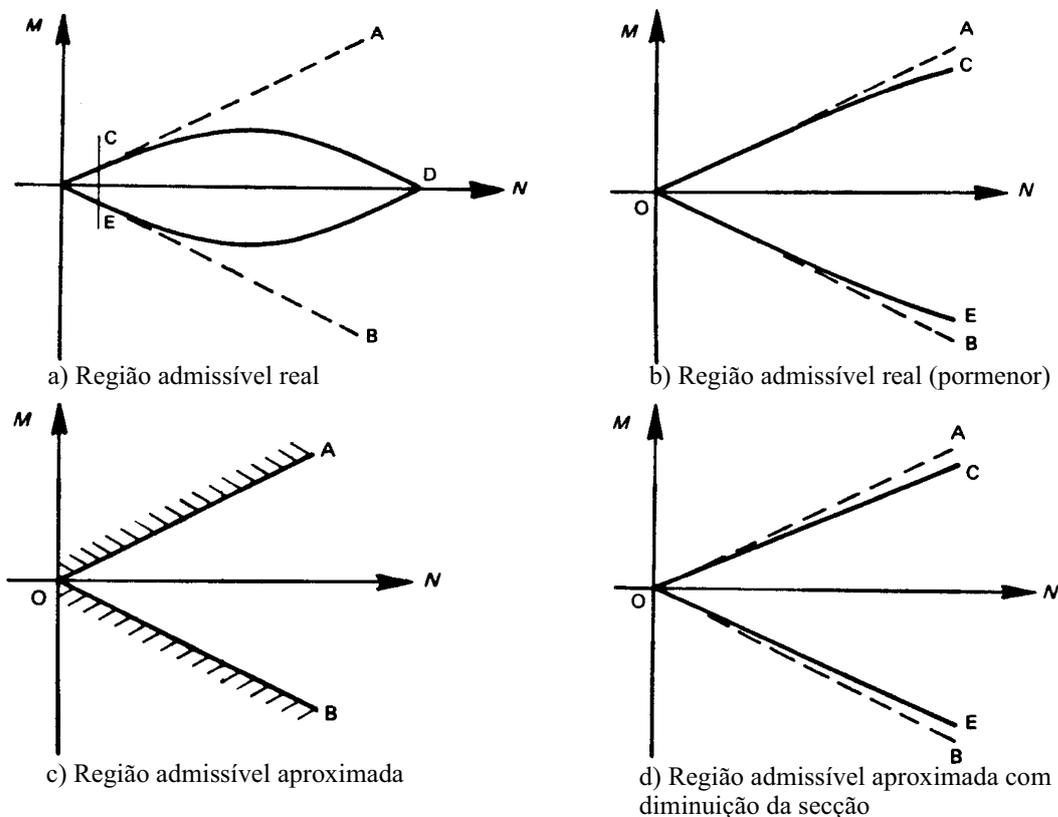


Figura 3.24 - Região admissível real no espaço das tensões.

Em certos casos particulares, nos quais se considere ser importante a consideração da superfície limite de resistência real, poderá considerar-se para a secção transversal do arco uma altura inferior à real[†], o que corresponderá a uma superfície limite mais apertada do que a exacta e

[†] Admitindo que o nível de tensões de compressão não ultrapassa os 10% da tensão limite de compressão da alvenaria, a redução da altura da secção para 90% da secção original, conduz a uma superfície limite definida através das duas rectas $M = \pm Nh$ completamente incluída na superfície limite de resistência original. A consideração desta redução na altura da secção conduz, desde que se confirme no final do cálculo que o nível das tensões de compressão está dentro da hipótese admitida, a resultados do lado da segurança.

portanto do lado da segurança (Figura 3.24d).

A aplicação da teoria da análise limite a estruturas de alvenaria é em tudo semelhante à sua aplicação a outro tipo de estruturas, nomeadamente as estruturas metálicas. A consideração de métodos de programação linear, correntemente utilizados na análise limite de pórticos metálicos, é também possível em estruturas de alvenaria ^{Fishwick e Beeg, 1994; Begg e Fishwick, 1995}.

Os métodos de análise limite permitem também determinar a menor espessura admissível de um arco sujeito a um dado carregamento. Considere-se o exemplo de um arco de geometria parabólica sujeito a um carregamento uniforme e à acção de carga concentrada (Figura 3.25), admita-se que a carga concentrada tem uma intensidade reduzida quando comparada com a intensidade da carga uniforme e despreze-se a acção do peso próprio do arco. A hipótese admitida na relação entre as intensidades das cargas aplicadas serve apenas para simplificar os cálculos, uma vez que nesta situação pode considerar-se que o valor da reacção horizontal do arco não é alterado com a aplicação da carga concentrada.

Considere-se, também que a linha de pressões equilibrada com as cargas aplicadas tem forma parabólica coincidente com o eixo do arco. Tendo em conta que a linha de pressões correspondente a uma carga uniforme é, como se verá, parabólica, esta hipótese corresponde a desprezar os efeitos da carga concentrada e do peso próprio do arco na geometria da linha de pressões.

Admita-se, por simplificação, que o valor do momento correspondente à formação da articulação é igual em todas as secções. Esta hipótese simplificativa só poderá ser aplicada em análises preliminares pois, sendo o valor do esforço normal variável ao longo do desenvolvimento do arco, o momento de "plastificação" também variará.

O valor da reacção horizontal pode ser determinado através da teoria dos cabos ^{Beer e Johnston, 1997}:

$$H = \frac{ql}{4h} \quad (3.29)$$

Admita-se um possível mecanismo de colapso formado por duas articulações nos apoios, uma

articulação sob a carga concentrada e outra afastada do centro do arco de uma distância yl .

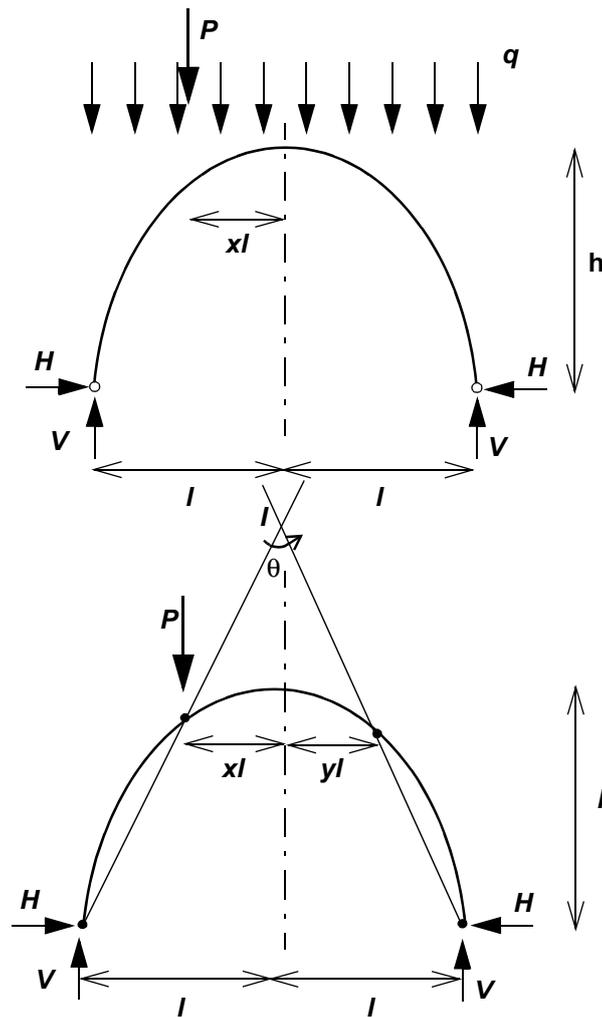


Figura 3.25 - análise limite de um arco de perfil parabólico.

Considerando uma pequena rotação θ em torno do centro de rotação I e efectuando o balanço energético entre o trabalho das cargas aplicadas e o trabalho das forças internas, obtém-se a seguinte expressão para o momento de “plastificação”:

$$M_p = \left(\frac{Pl}{2} \cdot (1 - x) \cdot \frac{x + y \cdot (1 - x) - y^2}{(2 - x) + y \cdot (1 - x) - y^2} \right) \quad (3.30)$$

Observe-se que na equação (3.30) não surge explicitamente o efeito da carga uniforme. De facto, sendo a linha média do arco coincidente com a linha de pressões correspondente à carga uniforme, verifica-se, pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, que o trabalho realizado por estas forças para toda e qualquer pequena deformação da linha de pressões é nulo. Esta constatação é válida para qualquer forma do arco desde que a linha de pressão coincida com o seu eixo.

A posição mais gravosa da articulação, que é desconhecida, corresponde à maximização do valor do momento de "plastificação" em função da variável y . Tem-se então:

$$y = \frac{1}{2} \cdot (1 - x) \quad (3.31)$$

Substituindo o valor obtido na equação do momento de "plastificação", obtém-se:

$$M_p = \frac{P}{2}(1 - x) \frac{(1 + x)^2}{(3 - x)^2} \quad (3.32)$$

sendo que o valor máximo desta expressão corresponde a:

$$x = 5 - \sqrt{20} = 0.528 \quad M_p = \frac{1}{2}Pl(5\sqrt{5} - 11) = 0.0902Pl \quad (3.33)$$

Com este resultado, e admitindo que o momento M_p é constante em todo o desenvolvimento do arco, a espessura mínima admissível é dada por:

$$esp_{min \cdot admissivel} = 2 \cdot \frac{0.902Pl}{\frac{ql}{4h}} \quad (3.34)$$

Através da aplicação deste método de análise limite, pode determinar-se para diferentes localizações da carga concentrada o correspondente momento de "plastificação" (Figura 3.26). Sendo o momento de "plastificação" uma medida da espessura mínima necessária para o equilíbrio do arco, e definindo um coeficiente de segurança geométrico como a relação entre a espessura real do arco e a espessura mínima necessária para o equilíbrio, será de esperar que os gráficos que representam esse coeficiente de segurança apresentem um andamento oposto aos gráficos do momento de "plastificação" (Figura 3.27). A forma precisa destes gráficos depende, evidentemente, da geometria do arco e da relação entre as intensidades da carga concentrada e do peso próprio do arco.

Como se pode observar na Figura 3.27, o gráfico do coeficiente de segurança geométrico apresenta uma pequena curvatura na zona correspondente ao valor mínimo, pelo que uma definição aproximada, mas suficientemente próxima, dessa posição não conduzirá a erros significativos.

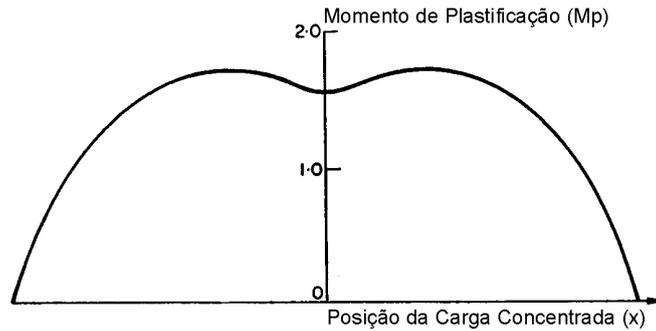


Figura 3.26 - Momento de "plastificação" em função da localização da carga concentrada ^{Heyman, 1969}.

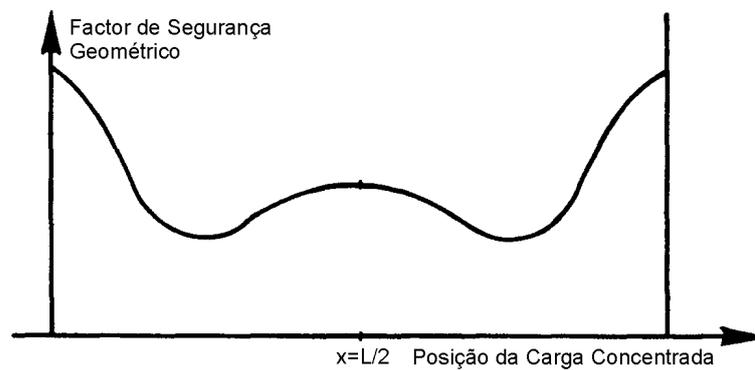


Figura 3.27 - Coeficiente de segurança geométrico ^{Heyman, 1980b}.

3.7 - LINHAS DE PRESSÕES. ANALOGIA COM CABOS SUSPENSOS

Admitindo que os arcos em alvenaria não apresentam qualquer resistência a esforços de tracção e também que não há atrito nas juntas entre aduelas[†], o comportamento estrutural dos arcos é análogo, embora inverso, ao comportamento dos cabos suspensos (não resistentes a esforços de compressão). Considerando esta analogia entre o comportamento estrutural de cabos suspensos (traccionados) e as linhas de pressões (comprimidas), as considerações de equilíbrio das linhas de pressões deverão conduzir a resultados semelhantes aos obtidos na análise do equilíbrio de cabos suspensos.

Assim, as equações de equilíbrio de um trecho elementar da linha de pressões de um arco submetido apenas à acção do seu peso próprio (Figura 3.28) são:

[†] O teorema estático da teoria da análise limite garante que se o arco for estável para estas condições, também o será para as condições reais, mais favoráveis, onde o atrito nas juntas entre elementos existe.

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(N \cos \psi) = 0 \quad (3.35)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(N \sin \psi) = p \frac{ds}{dx} \quad (3.36)$$

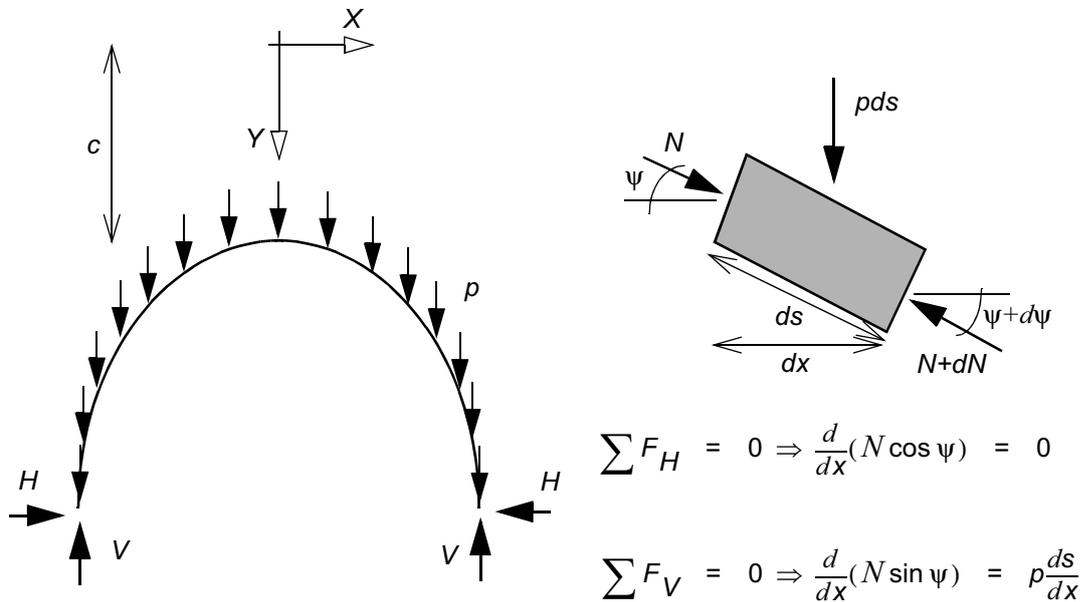


Figura 3.28 - Determinação da linha de pressões correspondente à acção do peso próprio do arco.

Da equação (3.35) conclui-se que a projecção horizontal do esforço normal N é constante e das equações (3.35) e (3.36) resulta que:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{ds}{dx} \quad (3.37)$$

em que H é a projecção horizontal do esforço normal N ($H = N \cos \psi$).

A resolução da equação diferencial (3.37) conduz à expressão da catenária:

$$y(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \quad (3.38)$$

em que a constante c é uma constante de integração, que reflecte a indeterminação estática do problema[†].

[†] Sendo o arco uma estrutura hiperstática, as expressões que se obtêm apenas por considerações de equilíbrio serão sempre indeterminadas, conseguindo-se apenas expressões que definem famílias de possíveis curvas e não uma linha de pressões em particular.

O correspondente impulso horizontal $H = P \cos \psi$ é dado por:

$$H = p.c \quad (3.39)$$

em que p é o peso próprio por unidade de comprimento do arco.

Na Figura 3.29 representa-se a expressão que define o perfil da linha de pressões correspondente à acção do peso próprio do arco, a qual é análoga à que define a geometria do cabo suspenso submetido apenas à acção do seu peso próprio (catenária).

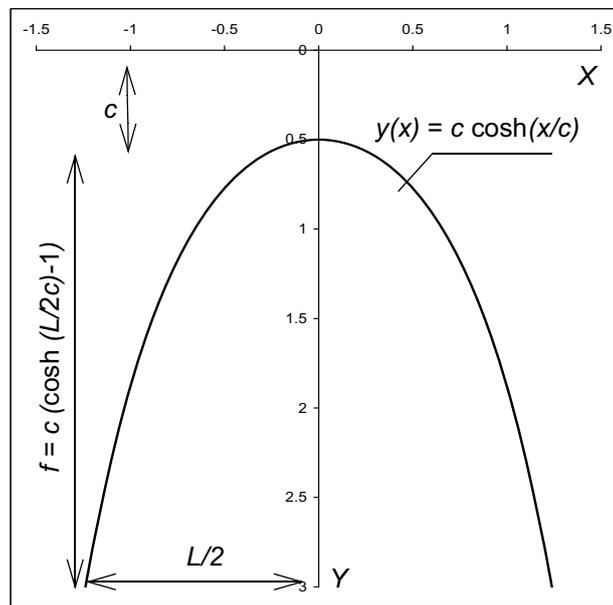


Figura 3.29 - Geometria da linha de pressões correspondente ao arco submetido apenas à acção do seu peso próprio - catenária invertida.

Considere-se agora um arco submetido à acção de uma carga q uniformemente distribuída na largura do seu vão (Figura 3.30). Neste caso, a expressão que se obtém através das equações de equilíbrio do troço elementar e que define a família das linhas de pressões é a de uma parábola:

$$y(x) = \frac{4h}{L^2} x^2 \quad (3.40)$$

em que o parâmetro que define a família de curvas é a relação h/L^2 .

O correspondente impulso horizontal é dado por:

$$H = \frac{qL^2}{8h} \quad (3.41)$$

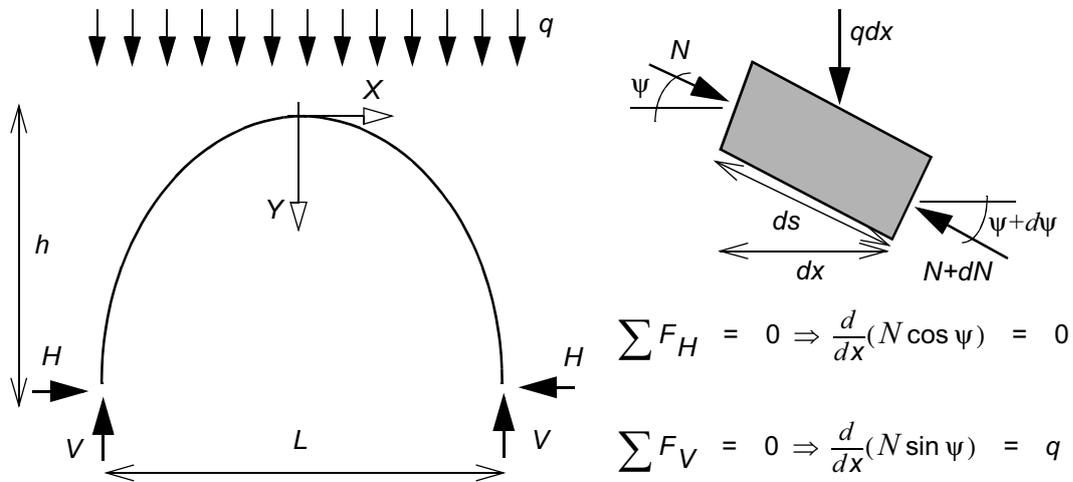


Figura 3.30 - Determinação da linha de pressões correspondente à acção de uma carga uniformemente distribuída na largura do arco.

Considerando os resultados anteriores e a técnica inversa de dimensionamento proposta por Yvon Villarceau, que consiste em definir a geometria do arco de modo a que o seu eixo coincida com uma das possíveis linhas de pressões correspondentes ao carregamento, conclui-se que o perfil ideal para um arco não resistente à tracção e sem atrito nas juntas entre aduelas quando submetido à acção do seu peso próprio ou de uma carga uniformemente distribuída no vão do arco é, respectivamente, o da catenária ou da parábola.

No caso de o carregamento ser o peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco (Figura 3.31), a expressão que resulta das equações de equilíbrio do troço elementar e que define a correspondente família de linhas de pressões, é:

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{2x}{L} \operatorname{acosh}\left(\frac{a+h}{a}\right)\right) \quad (3.42)$$

Admitindo a metodologia de Yvon Villarceau, a expressão (3.42) poderá ser utilizada para definir a geometria do eixo do arco: uma vez especificado o vão do arco (L) e a altura total do enchimento sob o fecho (a), o projectista poderá escolher a "flecha" (h) e obter a expressão que define a restante geometria do arco.

O impulso horizontal correspondente à expressão (3.42) é dado por:

$$H = \frac{\gamma L^2}{4} \frac{1}{\left(\operatorname{acosh}\left(\frac{a+h}{a}\right)\right)^2} \quad (3.43)$$

em que γ é o peso próprio, por unidade de comprimento do vão do arco, do material de enchimento no extradorso do arco.

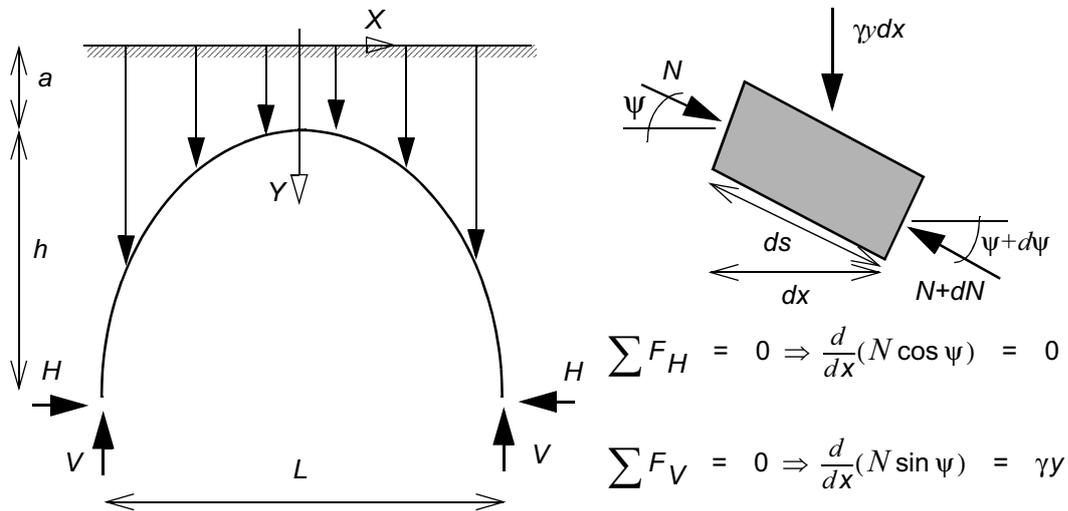


Figura 3.31 - Determinação da linha de pressões correspondente à ação do peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco.

Na Figura 3.32 representa-se, para um vão de 20 m e uma altura total de 10 m, a expressão que define a família de linhas de pressões correspondente ao carregamento do peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco.

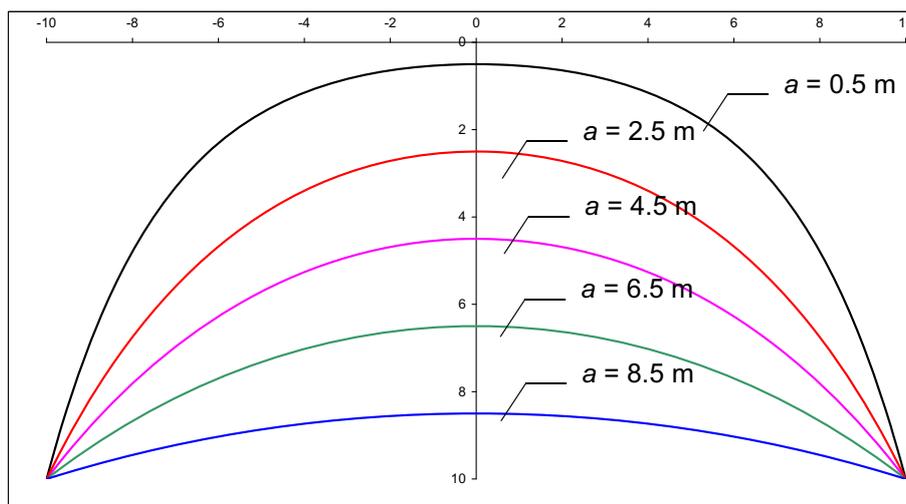


Figura 3.32 - Família de linhas de pressões correspondente à ação do peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco, para um vão $L = 20$ m e uma altura total $a + h = 10$ m.

Sendo o perfil circular uma geometria correntemente utilizada em arcos, seria interessante

determinar qual o carregamento que corresponde a uma linha de pressões circular. Do equilíbrio do elemento infinitesimal da linha de pressões circular (Figura 3.33), obtém-se a seguinte expressão para o correspondente carregamento:

$$q(x) = \frac{q_0 R^3}{(\sqrt{R^2 - x^2})^3} \quad (3.44)$$

em que o parâmetro q_0 é o parâmetro que define a família de carregamentos possíveis[†].

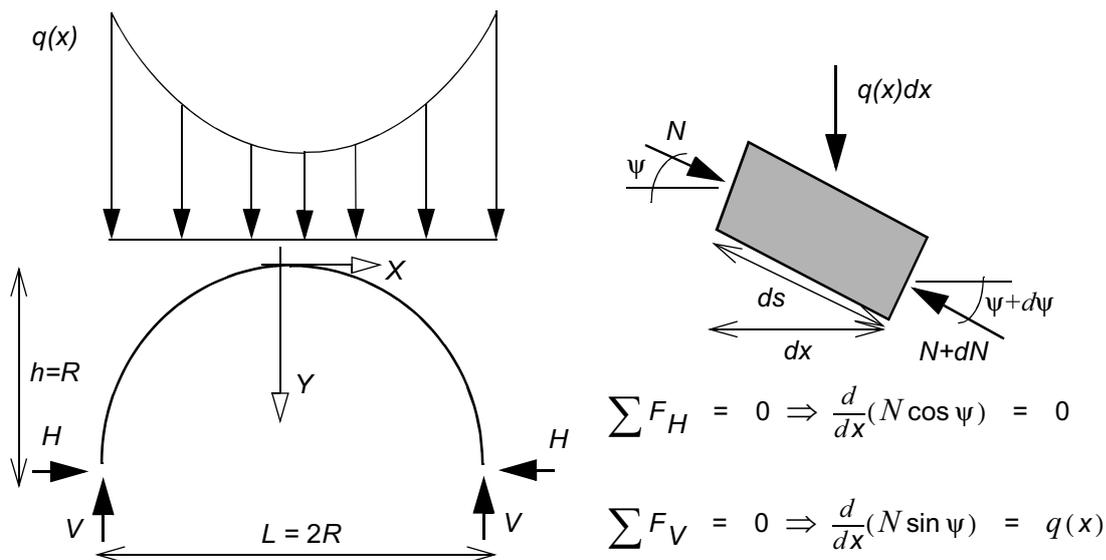


Figura 3.33 - Determinação do carregamento correspondente a uma linha de pressões circular.

Na Figura 3.34 representa-se a família de carregamentos equivalente a linhas de pressões circulares, a qual corresponde a intensidades crescentes do meio vão em direcção aos apoios. No caso de arcos de volta inteira, a expressão da intensidade do carregamento conduz a valores infinitos sobre os apoios, pelo que num arco com 180° nunca será possível obter uma linha de pressões de perfil circular.

A mesma conclusão em relação ao carregamento do extradorso do arco poderá ser obtida considerando-se a acção do peso próprio do arco e procurando identificar da lei de variação da espessura do arco correspondente a uma linha de pressões circular.

Assim, tendo em conta o equilíbrio de um troço da linha de pressões que se admite coincidente com o intradorso do arco de perfil circular (Figura 3.35), tem-se:

[†] Desta vez, sendo conhecida a geometria da linha de pressões, a indeterminação estática reflecte-se na definição do carregamento.

$$N \frac{dx}{ds} = H \quad (3.45)$$

$$N \frac{dy}{ds} = Q \quad (3.46)$$

donde se obtém:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H} \quad (3.47)$$

em que H é o impulso horizontal do arco e Q o peso próprio do arco entre as secções A e B .

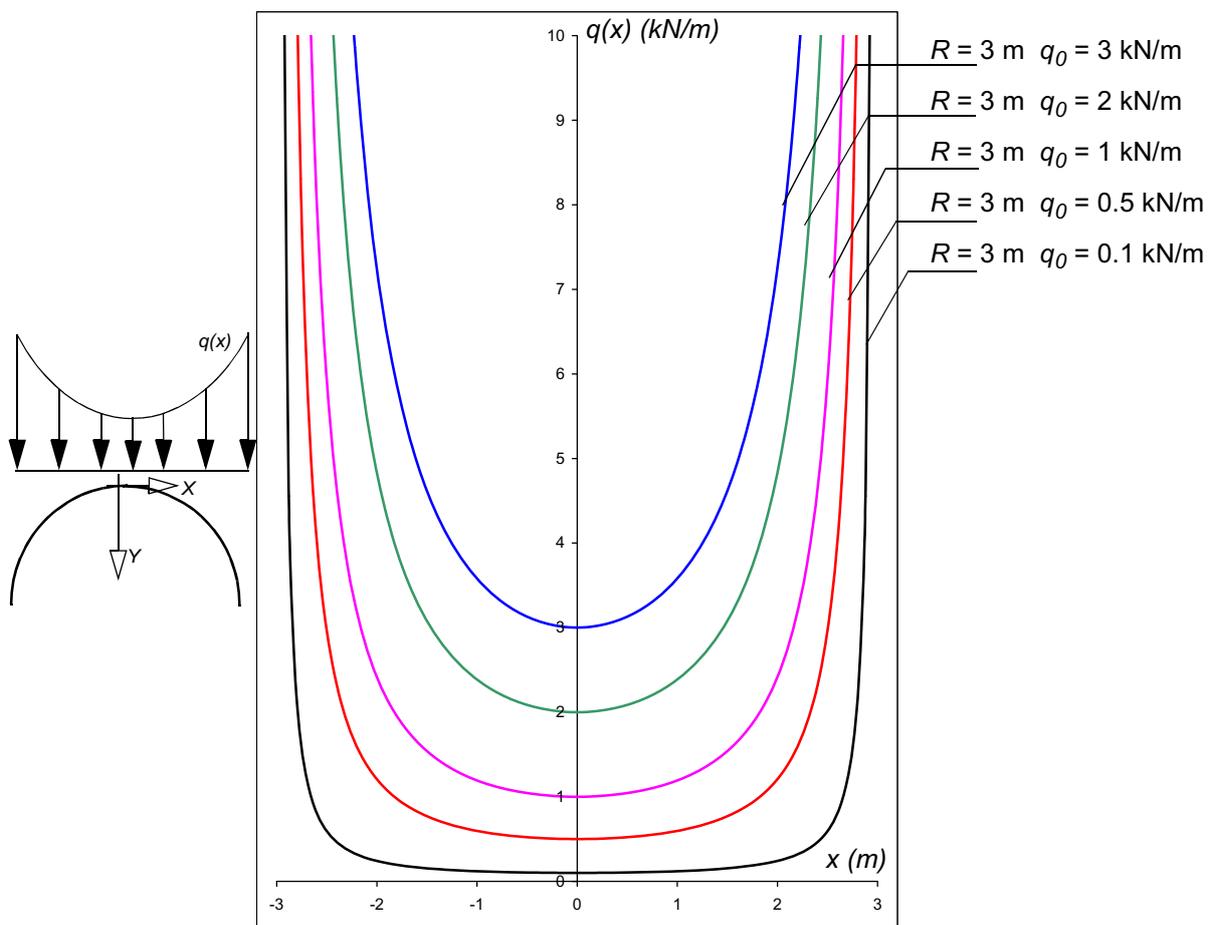


Figura 3.34 - Família de carregamentos correspondentes à linha de pressões circular.

Sendo γ o peso específico do arco, t a sua espessura e r o raio de curvatura do seu intradorso, o peso de um troço elementar do arco é dado por:

$$dQ = \gamma \left(\frac{2r + t}{2r} \right) t ds \quad (3.48)$$

A equação (3.47) pode, então, ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{H} \int \left(\frac{2r + t}{2r} \right) t ds \quad (3.49)$$

donde, por integração, se obtém:

$$r + h = \sqrt{r^2 + 2 \left(\frac{H}{\gamma} \right) \left(\frac{ds}{dx} \right)^2} \quad (3.50)$$

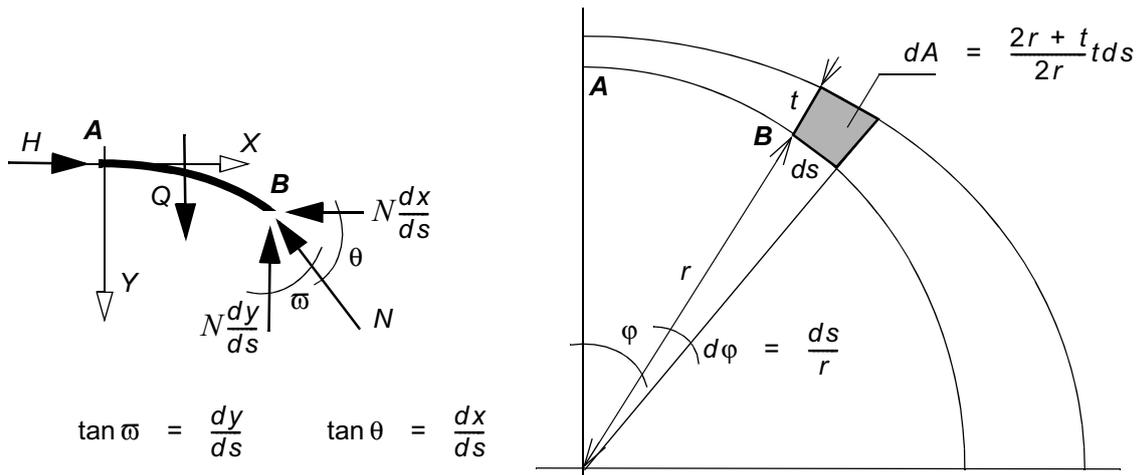


Figura 3.35 - Cálculo da espessura de um arco com linha de pressões coincidente com o intardorso circular.

Tendo em conta que se trata de um arco com intradorso circular, tem-se:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (3.51)$$

donde, a equação (3.50) ficará:

$$r + t = \sqrt{r^2 + 2 \left(\frac{H}{\gamma} \right) \left(\frac{1}{\cos \varphi} \right)^2} \quad (3.52)$$

Na Figura 3.36 representa-se a família de geometrias do extradorso correspondente ao perfil circular da linha de pressões e o perfil do extradorso de um arco circular obtido através da expressão (3.52). Observe-se que, à semelhança do que se verificou na análise anterior, para o arco de volta inteira a espessura do arco junto do apoio tende para infinito.

Da análise da Figura 3.34 e da Figura 3.36, conclui-se que num arco circular o carregamento dos rins é uma acção favorável, por produzir a aproximação da linha de pressões ao perfil circular. Assim, a acção do peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco, por ter uma distribuição com intensidade crescente nos rins do arco, tem um efeito estabilizador†.

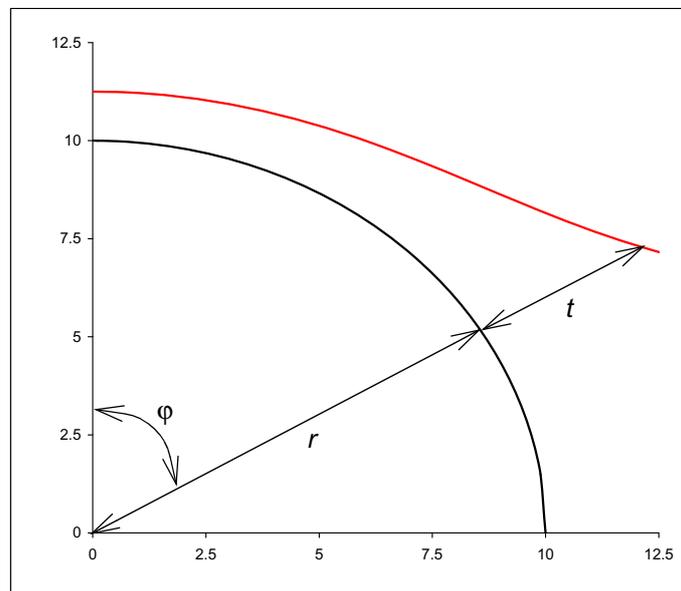
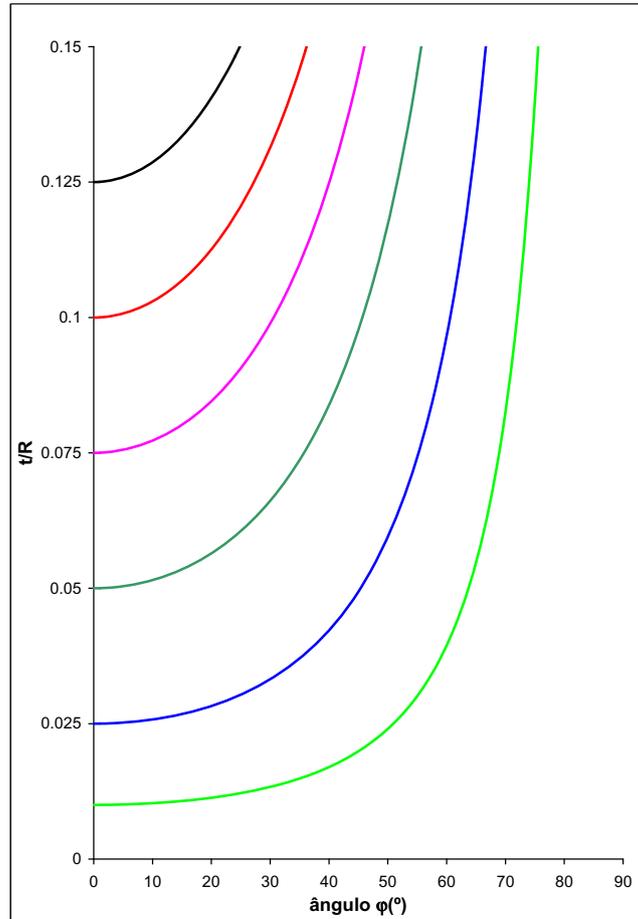


Figura 3.36 - Família de espessuras do arco correspondente à linha de pressões circular (cima) e extradorso do arco correspondente a uma linha de pressões coincidente com o intradorso circular ($t/r = 0.125$) (baixo).

Todos os casos de estudo anteriores referem-se a arcos. No entanto, como se verá, a analogia

† Esta conclusão já tinha sido observada no parágrafo 3.3, na análise dos funiculares correspondentes à acção do peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco.

com cabos suspensos pode também ser aplicada a estruturas tridimensionais, desde que se considerem hipóteses simplificativas que permitam analisar estas estruturas como estruturas de comportamento bidimensional.

3.8 - MÉTODOS ANALÍTICOS BASEADOS EM MECANISMOS

Tendo em conta os teoremas estático e cinemático da análise limite, o comportamento das estruturas arqueadas, em particular arcos, pode ser analisado com base no estudo de possíveis mecanismos de colapso da estrutura. De acordo com o teorema cinemático, a intensidade da carga correspondente a um determinado mecanismo cinematicamente admissível é um majorante da intensidade da carga correspondente ao colapso. Os teoremas da análise limite garantem ainda que de todos os mecanismos cinematicamente admissíveis, aquele que corresponde ao colapso é o que minimiza o valor da intensidade da carga.

Assim, estudando um possível mecanismo de colapso de uma estrutura de alvenaria, obtém-se um majorante da carga de colapso, o qual coincidirá com a carga de colapso se o mecanismo considerado for o verdadeiro mecanismo de colapso.

Nos parágrafos seguintes aplicar-se-ão estes princípios no dimensionamento de diferentes tipos de estruturas e para diversos carregamentos.

3.8.1 - Dimensionamento da Espessura dos Pés Direitos de Arcos

Considerando um arco de geometria qualquer e um sistema de suporte constituído por duas colunas ou paredes, existem dois tipos de mecanismos de colapso que podem ser considerados: um mecanismo de escorregamento, tipo cunha deslizante, e um mecanismo rotacional (Figura 3.37).

O mecanismo de escorregamento, inicialmente proposto por Philippe de La Hire e posteriormente adaptado por Bernard Belidor, consiste no escorregamento da parte superior do arco sobre duas juntas fracturadas, aproximadamente a meio dos rins do arco. Admitindo que as zonas entre as juntas fracturadas são suficientemente estáveis, formando-se corpos rígidos em movimento, o deslocamento descendente do troço superior do arco produzirá impulsos nas

juntas fracturadas, os quais provocam uma rotação de corpo rígido, em torno das bases das colunas ou paredes, dos restantes troços do arco (Figura 3.37).

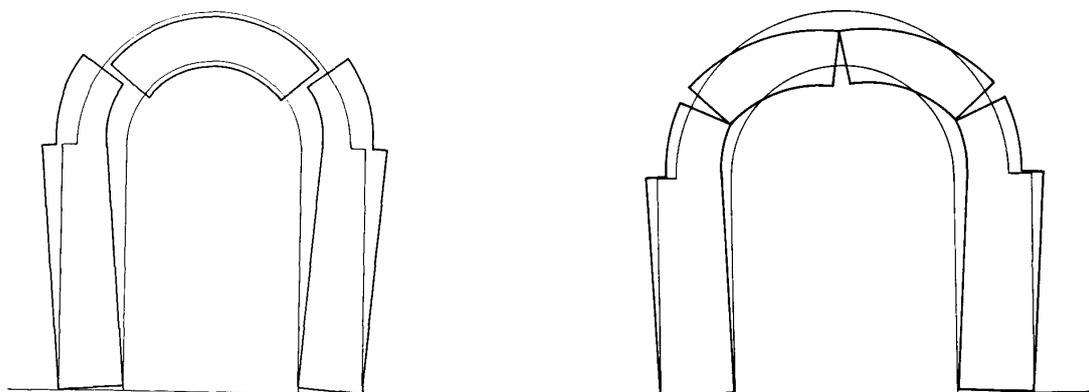


Figura 3.37 - Possíveis mecanismos de colapso de um arco apoiado sobre colunas ou paredes: esq - mecanismo de escorregamento (de La Hire); dta - mecanismo rotacional (de Coulomb-Mascheroni).

As hipóteses admitidas por Philippe de la Hire para o mecanismo de escorregamento[†], são:

- 1) O colapso das juntas ocorre nas secções intermédias entre a imposta e o fecho - a 45° no caso de um arco circular (Figura 3.38);
- 2) A direcção de acção do impulso nas juntas fracturadas é perpendicular à direcção da junta - o que corresponde a desprezar o efeito do atrito nessas juntas (Figura 3.38);
- 3) O ponto de aplicação do impulso nas juntas fracturadas é na extremidade inferior da junta.

Considerando estas hipóteses e analisando o equilíbrio dos momentos, em torno do ponto C , das forças actuantes no troço $ABCD$ do arco (Figura 3.38), obtém-se a seguinte expressão que permite determinar a espessura mínima admissível do pé direito do arco ($c = \zeta R$) em função da sua altura total ($h = \beta R$), da espessura do arco ($t = \alpha R$) e do raio do arco (R):

$$P = F \frac{l_A}{l_D} = \frac{Q y_A \tan \varphi - x_A}{2 x_G} \quad (3.53)$$

Para $\varphi = 45^\circ$ e admitindo que o arco e a sua base são constituídos por materiais com o mesmo

[†] Philippe de la Hire e Bernard Belidor consideraram apenas a possibilidade de ocorrência de mecanismos de colapso de escorregamento, não tendo admitido a hipótese de colapso através de mecanismos rotacionais.

peso volúmico, a expressão anterior toma a forma:

$$\zeta^2 \frac{\beta}{2} + \zeta \alpha \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{4} \left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (2 - \sqrt{2}) - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \left(3 + \frac{\alpha^2}{4}\right) - \beta \right) = 0 \quad (3.54)$$

Para espessuras do pé direito inferiores à espessura limite definida na expressão anterior, o colapso da estrutura ocorrerá através do mecanismo de escorregamento de La Hire.

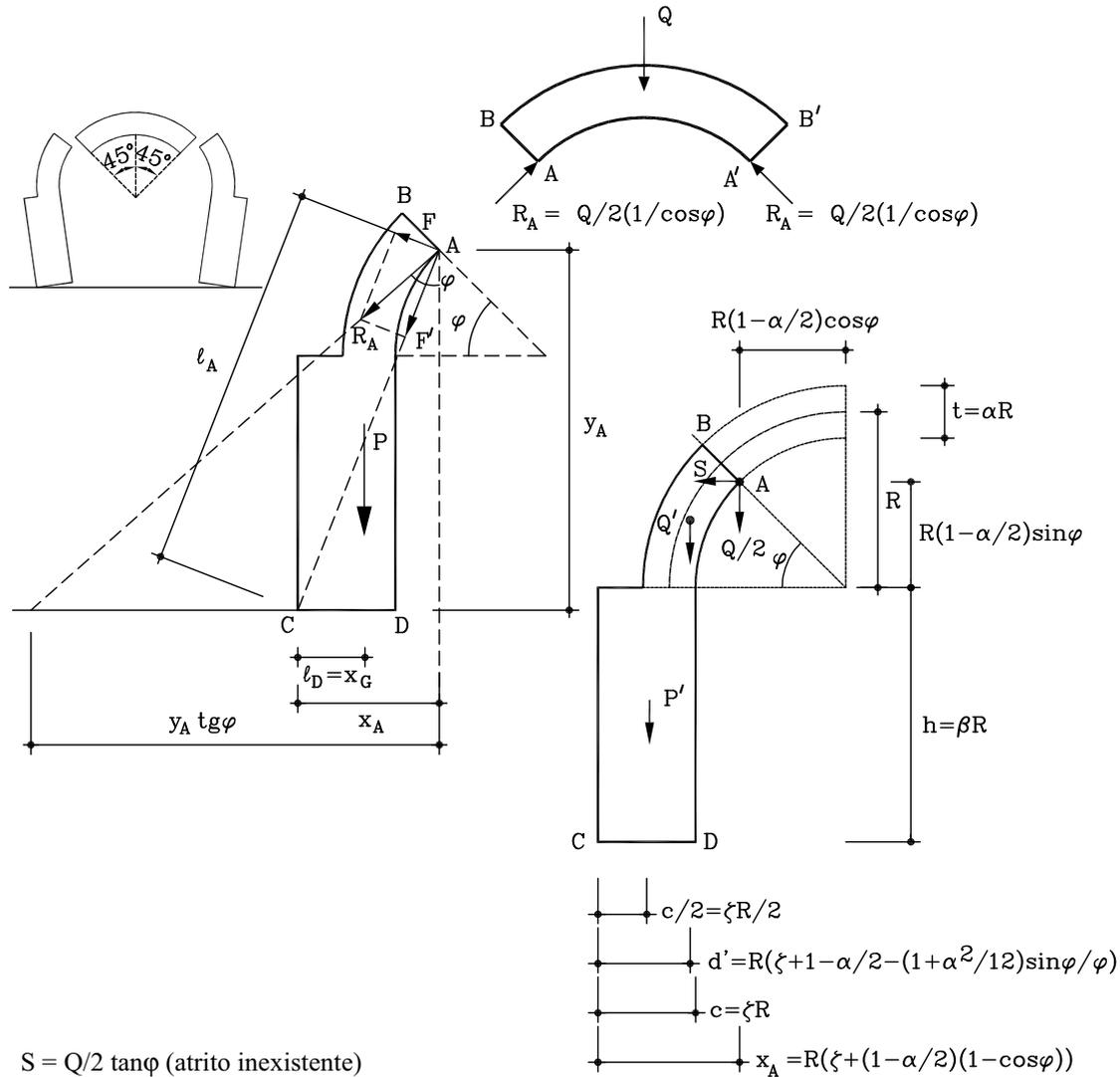


Figura 3.38 - Mecanismo de escorregamento de Philippe de la Hire - Diagramas de corpo livre.

No caso de se admitir para o ângulo φ que define a posição das juntas fracturadas, um valor diferente de 45° , a expressão que permite calcular a espessura mínima do pé direito ($c = \zeta R$) é:

$$\zeta^2 \frac{\beta}{2} + \zeta \alpha \frac{\pi}{2} + \varphi \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} \left(3 + \frac{\alpha^2}{4} \right) \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) (1 - \cos \varphi)$$

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \alpha \left(\beta + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \varphi\right) \tan \varphi = 0 \quad (3.55)$$

Em geral, a espessura mínima admissível correspondente ao mecanismo de escorregamento está associada a uma localização da junta fracturada diferente da admitida por La Hire, isto é, não se localiza a 45°. De acordo com o teorema estático da análise limite, a espessura mínima admissível correcta é o majorante das espessuras mínimas obtidas pela expressão anterior, dentro de todos os valores possíveis do ângulo φ , ou seja, de todos os mecanismos de escorregamento possíveis.

Belidor considerou as hipóteses de La Hire, com a excepção da respeitante à localização do ponto de aplicação do impulso na junta fracturada, o qual considerou localizar-se no meio da junta (Figura 3.39).

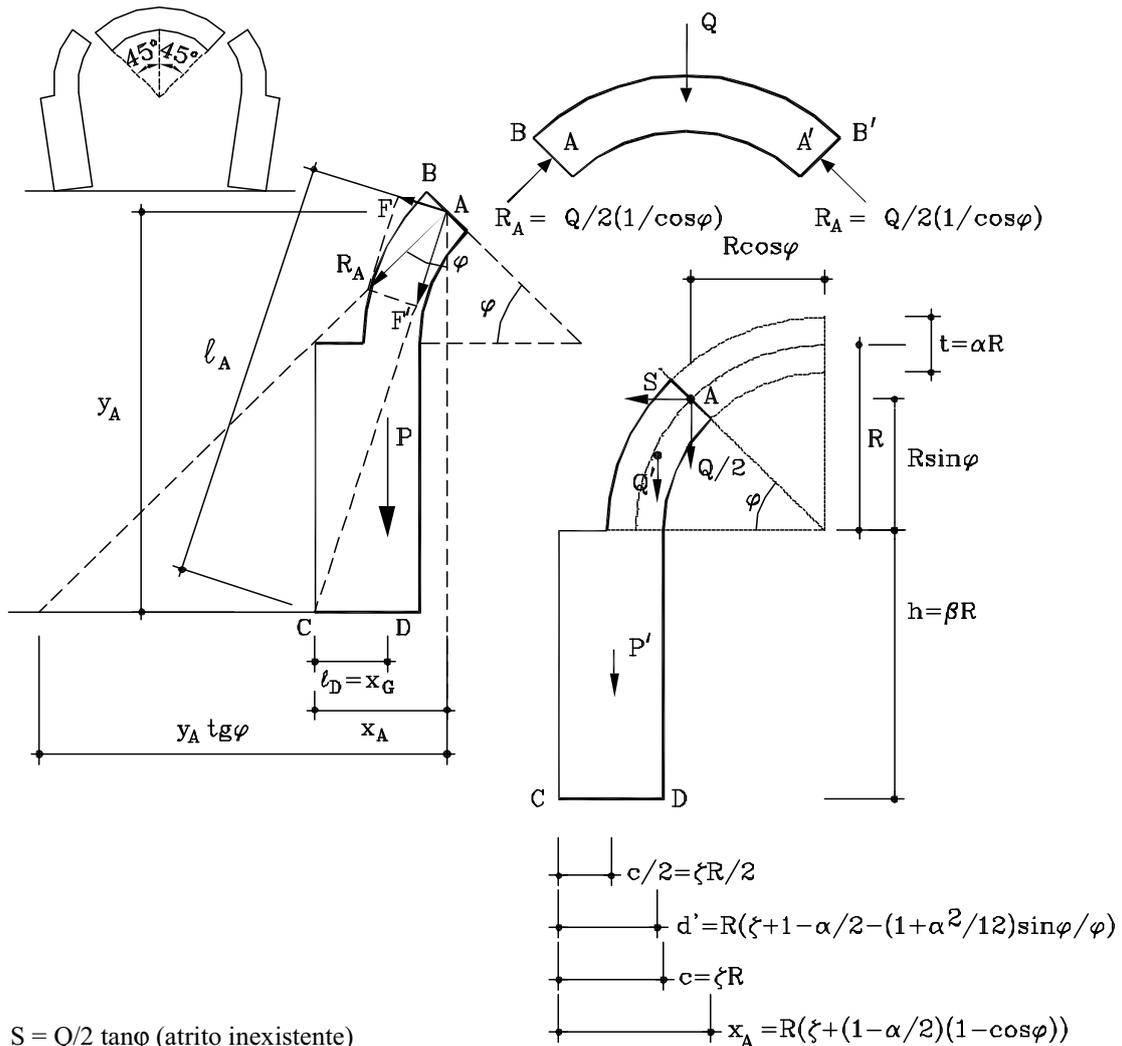


Figura 3.39 - Mecanismo de escorregamento de Bernard Belidor - Diagramas de corpo livre.

Admitindo as hipóteses de Belidor, e estudando o equilíbrio de momentos em torno da base da coluna (ponto C - Figura 3.39), obtém-se a seguinte expressão que permite determinar a espessura do pé direito ($c = \zeta R$) em função da sua altura total ($h = \beta R$), da espessura do arco ($t = \alpha R$) e do raio do arco (R):

$$P = F \frac{l_A}{l_D} = \frac{Q y_A \tan \varphi - x_A}{2 x_G} \quad (3.56)$$

ou seja, para $\varphi = 45^\circ$:

$$\zeta^2 \frac{\beta}{2} + \zeta \alpha \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{4} \left(2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \left(3 + \frac{\alpha^2}{4} \right) - (\beta + \sqrt{2}) \right) = 0 \quad (3.57)$$

No caso de se admitir para o ângulo φ , que define a localização das juntas fracturadas, um valor diferente de 45° , a expressão anterior é:

$$\begin{aligned} \zeta^2 \frac{\beta}{2} + \zeta \alpha \frac{\pi}{2} + \varphi \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} \left(3 + \frac{\alpha^2}{4} \right) \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \cos \varphi \right) \\ - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha (\beta + \sin \varphi) \tan \varphi = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Como se pode observar na Figura 3.40, a hipótese de Belidor é ligeiramente mais desfavorável do que as admitidas por La Hire, correspondendo para os mesmos valores do ângulo de localização das juntas fracturadas (φ) uma espessura mínima admissível superior.

Na Figura 3.40 constata-se, também, que as curvas correspondentes aos mecanismos de escorregamento não apresentam um ponto de valor máximo. A espessura mínima admissível é crescente com o valor do ângulo φ , ocorrendo o valor máximo para $\varphi = 90^\circ$. Esta situação, que não é realista, ocorre porque se considerou não existir atrito nas juntas fracturadas. Verifica-se então a necessidade de considerar o efeito do atrito nos diagramas de corpo livre dos corpos rígidos que constituem o arco. Neste caso, o impulso nas juntas fracturadas não será perpendicular às juntas, mas sim inclinado de um ângulo ψ , sendo ψ o ângulo de atrito.

Assim, a relação entre as componentes horizontal e vertical do impulso na junta é dada por:

$$S = Q \tan (\varphi - \psi) \quad (3.59)$$

Da análise do equilíbrio dos momentos em torno da base da coluna, obtém-se a seguinte expressão que permite calcular as espessuras mínimas admissíveis ($c = \gamma R$), para as hipóteses de La Hire (Figura 3.38):

$$\zeta^2 \frac{\beta}{2} + \zeta \alpha \frac{\pi}{2} + \varphi \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} \left(3 + \frac{\alpha^2}{4} \right) \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) (1 - \cos \varphi) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha \left(\beta + \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \varphi \right) \tan (\varphi - \psi) = 0 \quad (3.60)$$

e para as hipóteses de Belidor (Figura 3.39):

$$\zeta^2 \frac{\beta}{2} + \zeta \alpha \frac{\pi}{2} + \varphi \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} \left(3 + \frac{\alpha^2}{4} \right) \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \cos \varphi \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \alpha (\beta + \sin \varphi) \tan (\varphi - \psi) = 0 \quad (3.61)$$

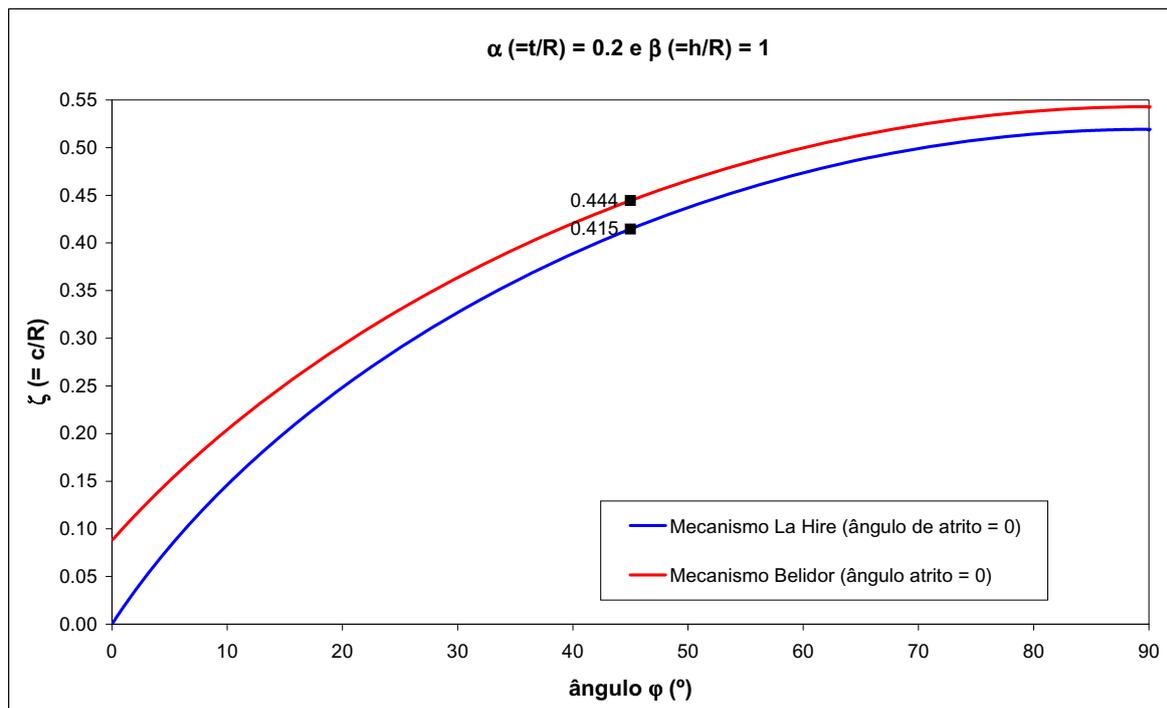


Figura 3.40 - Espessuras mínimas admissíveis de um arco circular calculadas através dos modelos correspondentes às hipóteses de Philippe de la Hire e Bernard Belidor.

Na Figura 3.41 representam-se as expressões anteriores para diferentes valores do ângulo de atrito, verificando-se que a consideração do efeito do atrito é, como seria de esperar num mecanismo de escorregamento, extremamente favorável no cálculo das espessuras mínimas admissíveis. Ao contrário do que acontecia anteriormente, verifica-se que com a consideração

do atrito as curvas apresentam um máximo para valores de ϕ diferentes de 90° . Na Figura 3.42 e na Figura 3.43 representam-se as mesmas expressões para outras relações espessura do arco/raio e altura do pé direito/raio.

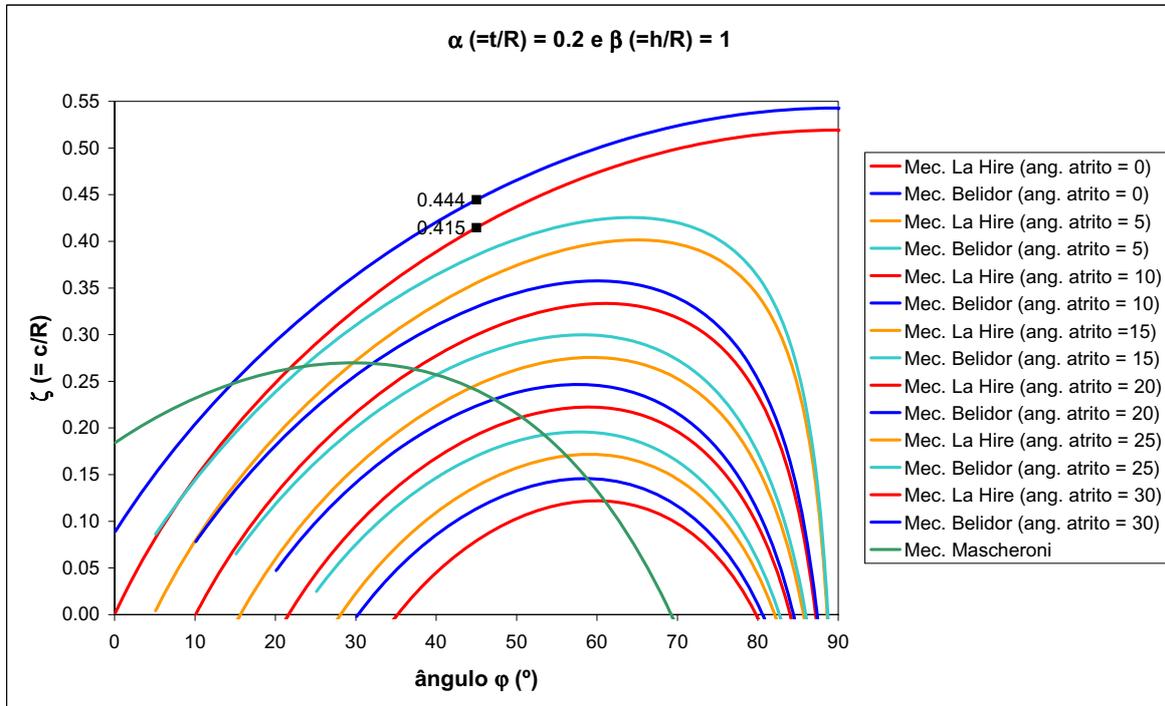


Figura 3.41 - Espessuras mínimas admissíveis dos pés direitos de arcos circulares para diferentes valores do ângulo de atrito - hipóteses de La Hire, de Belidor e de Coulomb-Mascheroni.

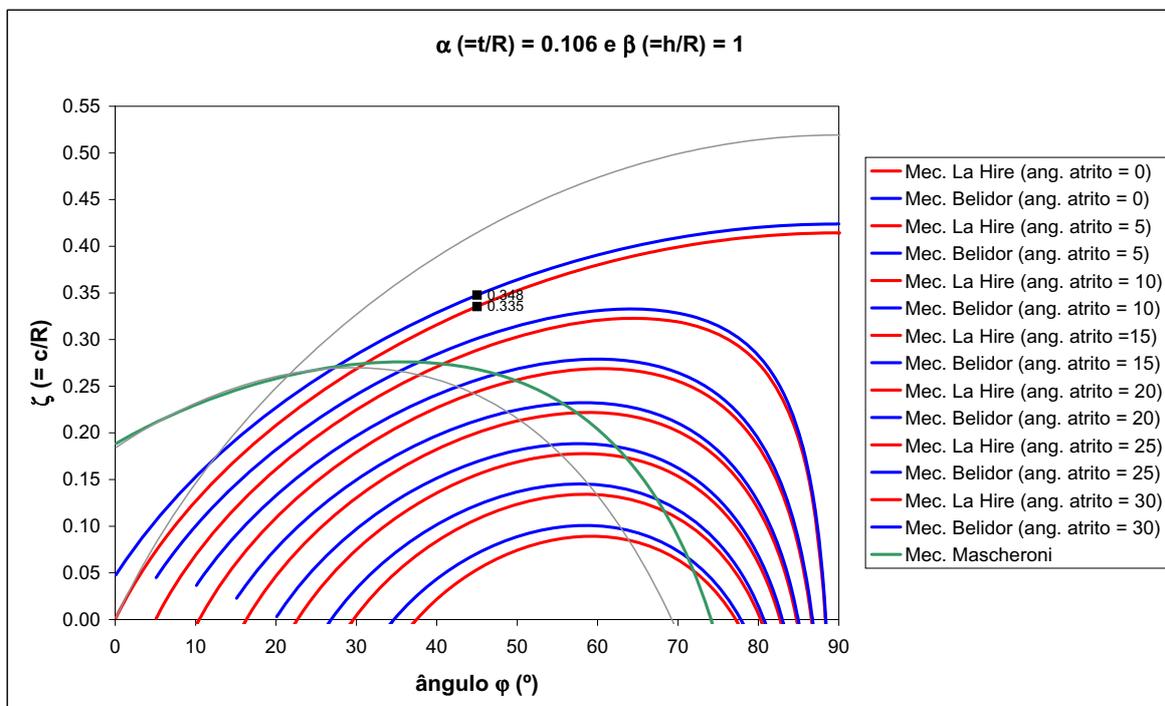


Figura 3.42 - Espessuras mínimas admissíveis dos pés direitos de arcos circulares determinadas pelas hipóteses de La Hire, Belidor e de Coulomb-Mascheroni.

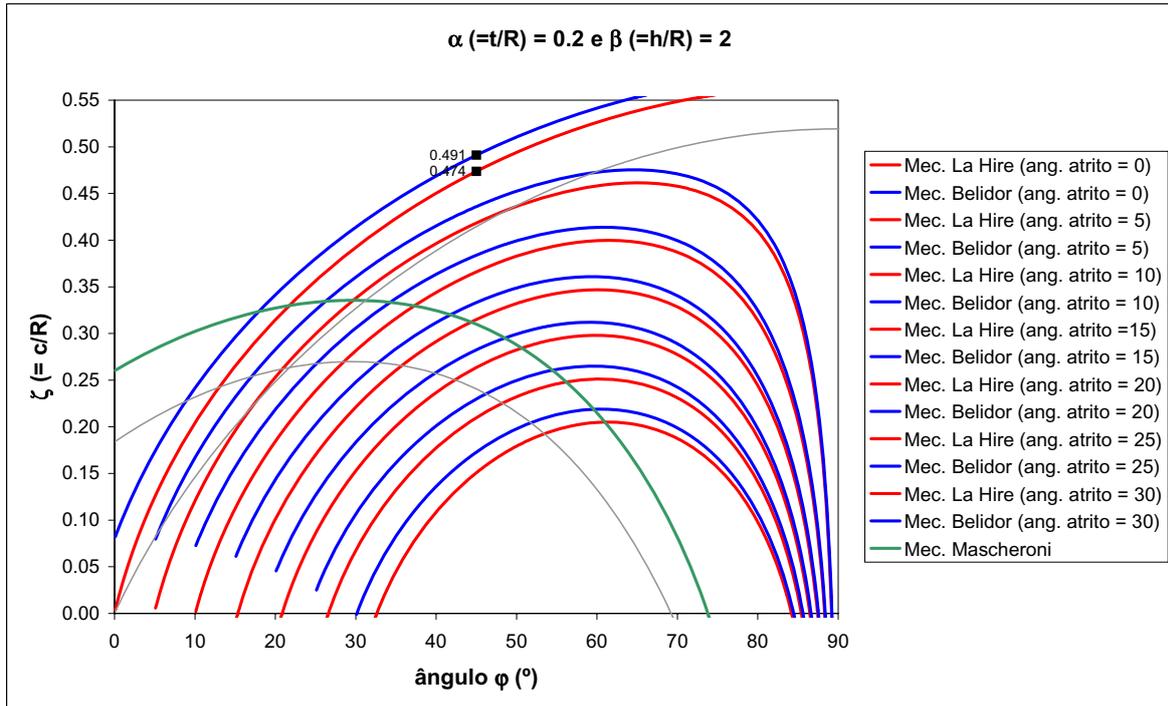


Figura 3.43 - Espessuras mínimas admissíveis dos pés direitos de arcos circulares determinadas pelas hipóteses de La Hire, Belidor e de Coulomb-Mascheroni.

Como se pode verificar nas figuras anteriores (Figura 3.41 a Figura 3.43), a consideração de uma altura do pé direito ou de uma espessura do arco superiores conduz a maiores espessuras mínimas admissíveis dos pés direitos.

O mecanismo rotacional, inicialmente proposto por Coulomb e Mascheroni, consiste num movimento de rotação de corpo rígido de partes do arco, delimitadas pelas juntas fracturadas, em torno das suas arestas (Figura 3.44).

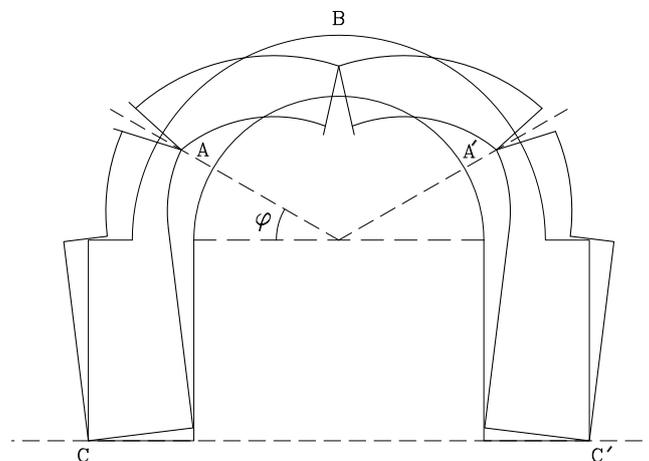


Figura 3.44 - Mecanismo rotacional de Coulomb-Mascheroni.

Considerando os diagramas de corpo livre dos troços entre juntas fracturadas (Figura 3.45), e analisando o equilíbrio dos momentos em torno do ponto C , produzidos pelas forças actuantes no corpo inferior, tem-se:

$$Hy_A - \frac{Q}{2}x_A - Px_G = 0 \quad (3.62)$$

em que H é o impulso horizontal, que por simetria é a única força aplicada no fecho, $Q/2$ é o peso do troço superior do arco (troço $ABEF$) e P total do troço inferior do arco e da coluna (troço $ABCD$).

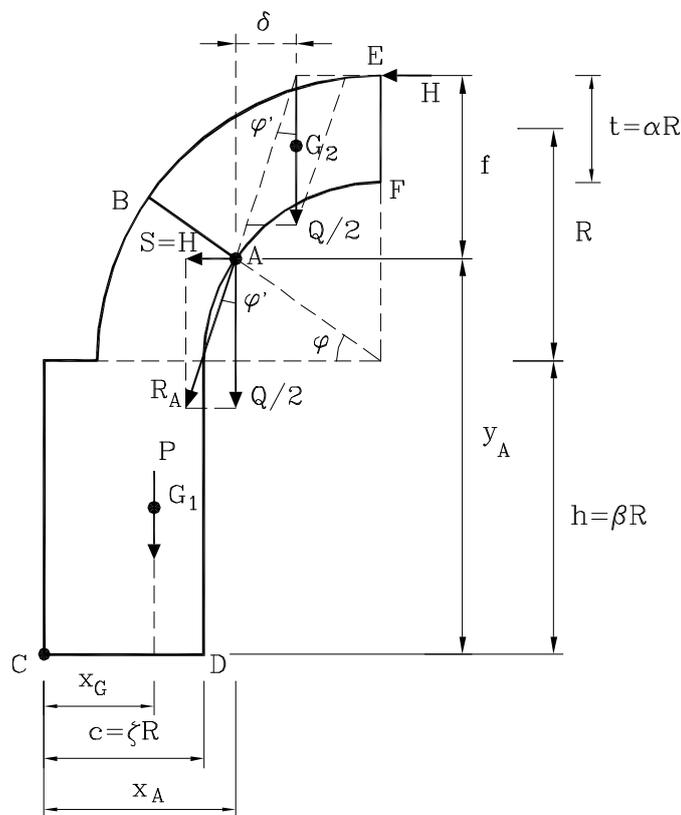


Figura 3.45 - Diagrama de corpo livre do mecanismo rotacional.

Tendo em conta o equilíbrio do troço superior, verifica-se que a intensidade do impulso horizontal é dependente do peso desse troço:

$$H = \frac{Q}{2} \tan \varphi' , \text{ em que } \tan \varphi' = \frac{\delta}{f} \quad (3.63)$$

Deste modo, da equação de equilíbrio dos momentos em torno do ponto C , conclui-se que o peso de pé direito deverá ser:

$$P = \frac{Q y_A \tan \varphi' - x_A}{2 x_G} \quad (3.64)$$

Observe-se que esta equação é idêntica à obtida das hipóteses de La Hire (equação (3.53)), sendo a única diferença no ângulo que deverá ser considerado. No mecanismo de escorregamento tinha-se $\tan \varphi$, ou $\tan(\varphi - \psi)$ no caso de se considerar o atrito, e agora $\tan \varphi'$. Assim, a expressão (3.55), que relaciona a espessura do pé direito ($c = \zeta R$) com a sua altura ($h = \beta R$) e com a espessura e raio médio do arco ($t = \alpha R$ e R , respectivamente), continua válida, desde que se substitua $\tan \varphi$ por $\tan \varphi'$:

$$\begin{aligned} \zeta^2 \frac{\beta}{2} + \zeta \alpha \frac{\pi}{2} + \varphi \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3} \left(3 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \frac{\sin \varphi}{\varphi}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (1 - \cos \varphi) \\ - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \alpha \left(\beta + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \varphi\right) \tan \varphi' = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Analisando a geometria do troço inferior da Figura 3.46, obtém-se a seguinte expressão para $\tan \varphi'$:

$$\tan \varphi' = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \varphi - \frac{1}{3} \left(3 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \frac{\left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right)^2}{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}}{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \varphi} \quad (3.66)$$

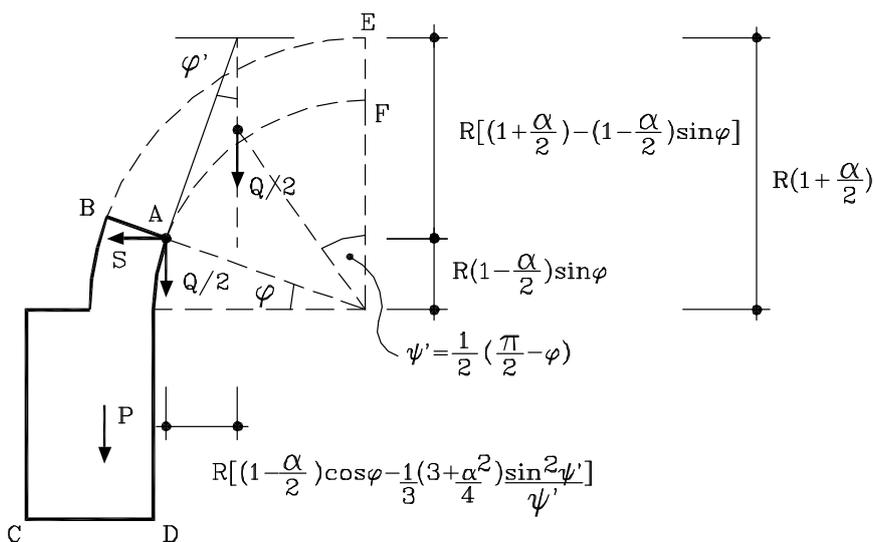


Figura 3.46 - Diagrama de corpo livre do mecanismo rotacional

Na Figura 3.47 representam-se os valores da espessura mínima do pé direito de um arco circular,

em função do ângulo de localização das juntas fracturadas (φ), os quais foram obtidos através das expressões (3.65) e (3.66), que resultam da análise do mecanismo rotacional. Observe-se que o valor máximo no gráfico, que corresponde à espessura mínima admissível do pé direito, ocorre para um ângulo φ de, aproximadamente, 27° .

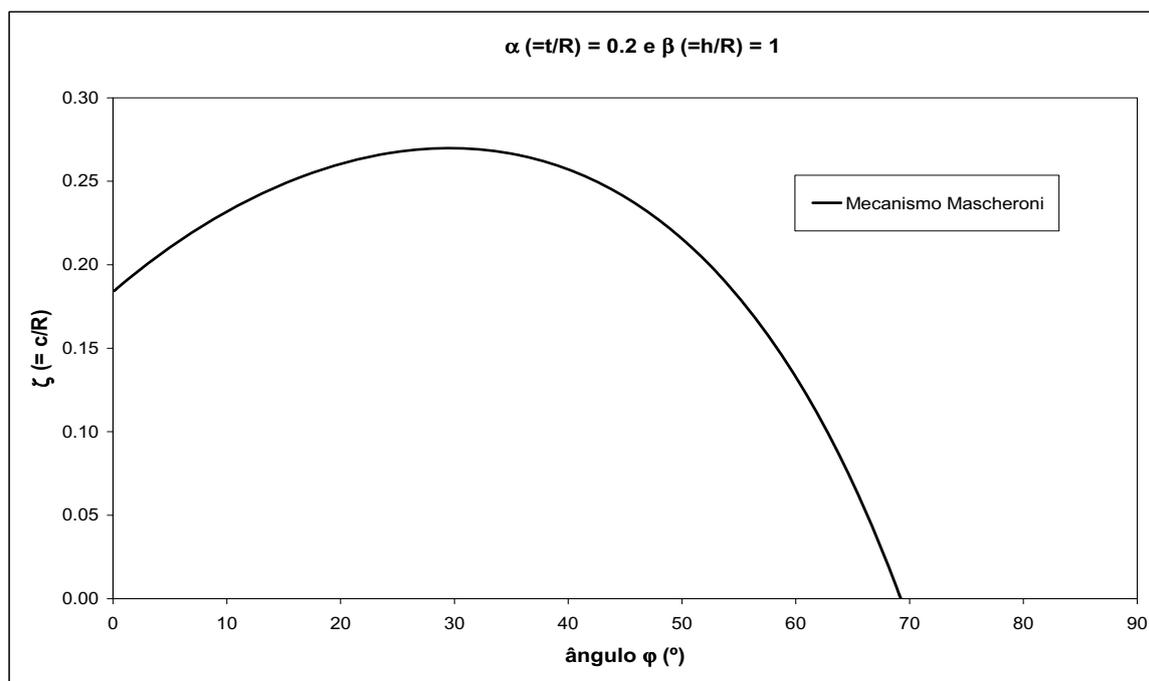


Figura 3.47 - Espessuras dos pés direitos em função do ângulo de localização da secção fracturada.

Na Figura 3.41, na Figura 3.42 e na Figura 3.43 representam-se juntamente com diagramas obtidos através do mecanismo de escorregamento, os diagramas das relações "espessura dos pés direitos - ângulo de localização das juntas fracturadas" obtidos através do mecanismo rotacional. Verifica-se que sem considerar o efeito do atrito nas juntas fracturadas na análise do mecanismo de La Hire, obtêm-se valores da espessura mínima admissível muito superiores aos obtidos pela análise do mecanismo rotacional. No entanto, o atrito existe realmente e o seu menosprezo é muito gravoso. Considerando valores de atrito normais neste tipo de estruturas ($\varphi > 20^\circ$), constata-se que os resultados da análise do mecanismo rotacional são mais gravosos do que os correspondentes à análise dos mecanismos de escorregamento. Deste modo, é pouco provável a ocorrência do mecanismo de La Hire numa estrutura real, sendo o mecanismo rotacional aquele que condicionará, em condições normais, o dimensionamento da espessura dos pés direitos.

Na Figura 3.48 representam-se, para os diferentes mecanismos e em função da altura dos pés direitos, os valores máximos dos gráficos ζ - φ . Neste gráfico, que representa a espessura mínima

admissível dos pés direitos em função da sua altura, da espessura do arco e do mecanismo considerado, figuram também os resultados correspondentes à regra empírica de Derand (ver parágrafo 2.3.2).

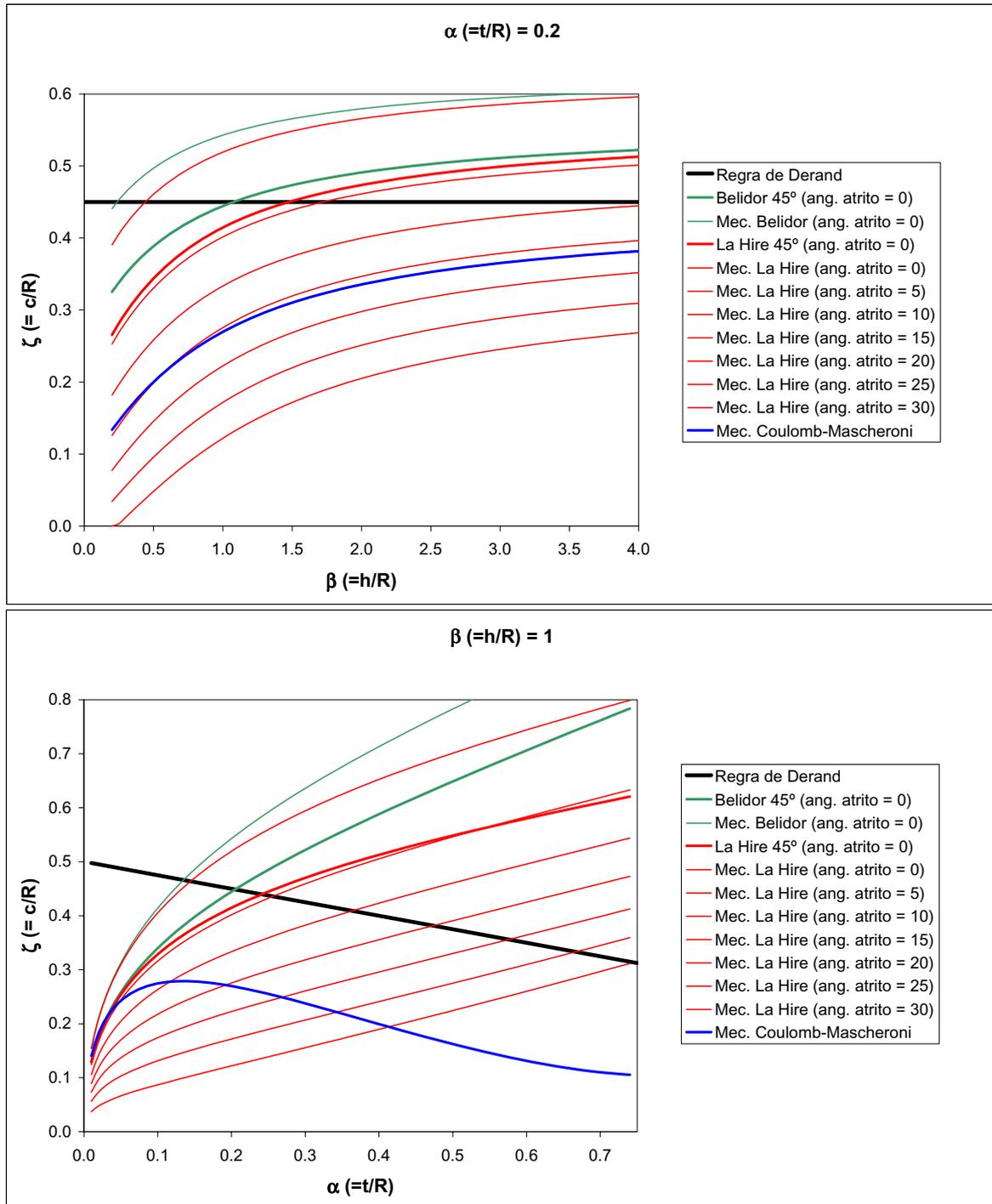


Figura 3.48 - Diagramas β - ζ e α - ζ para os mecanismos de escorregamento de La Hire e de Belidor e para o mecanismo rotacional de Coulomb-Mascheroni.

Como se pode observar, com a exceção da regra de Derand, a espessura dos pés direitos é função da sua altura. No entanto, o efeito da altura dos pés direitos no dimensionamento da sua

espessura não é tão significativo como inicialmente se poderia supor. De facto, a espessura não aumenta linearmente com a altura, uma vez que o aumento do braço do impulso horizontal, consequência do aumento da altura do pé direito, e que provoca o derrube do pé direito, é parcialmente compensado pelo correspondente aumento do seu peso, que tem um efeito estabilizador.

Na Figura 3.48 constata-se que os valores obtidos através das hipóteses de La Hire, considerando a junta fracturada localizada a 45° , não se afastam muito dos obtidos pela regra tradicional de Derand. Esta aproximação da regra de La Hire aos resultados tradicionais dava um relativo conforto na aplicação desta primeira regra de dimensionamento racional, visto ser confirmada por uma longa experiência de bons resultados[†].

3.8.2 - Coeficientes de Segurança Geométricos. Espessuras Mínimas

Uma forma de avaliar a capacidade resistente de uma estrutura arqueada quando submetida a um determinado carregamento é determinar a espessura mínima que o arco, abóbada ou cúpula poderá ter em condições de equilíbrio quando sujeito a essa acção. A relação entre a espessura real do arco e essa espessura mínima admissível, será uma medida da capacidade resistente real da estrutura quando submetida a uma determinada acção e poderá definir um coeficiente de segurança geométrico. Heyman^{Heyman, 1982} considera que uma metodologia baseada em coeficientes de segurança geométricos da ordem de 2 é suficientemente segura para estruturas de alvenaria sob acções de carácter permanente.

Considere-se um arco circular sujeito apenas à acção do seu peso próprio. Tendo em conta o perfil da linha de pressões em equilíbrio com o peso próprio do arco (catenária invertida), a situação correspondente à espessura mínima admissível do arco é a de uma linha de pressões tangente ao extradorso do arco no fecho e nas impostas e ao intradorso em pontos intermédios dos rins (Figura 3.49). Esta linha de pressões, que corresponde em simultâneo aos impulsos horizontais máximo e mínimo, é a única catenária que se conseguirá desenhar dentro da espessura desse arco, sendo que para uma espessura menor não será possível inscrever qualquer catenária dentro dos seus limites.

[†] A regra de Derand conduz a resultados excessivamente conservativos para arcos com geometrias correntes. No entanto, para pés direitos muito esbeltos e arcos muito espessos poderá conduzir a resultados contra a segurança.

Admita-se que o atrito entre juntas é suficiente para prevenir o escorregamento relativo dos elementos do arco, de modo que a única forma de formação dos mecanismos de colapso será através da geração de articulações nas secções entre os elementos, e considere-se que os troços entre as articulações são suficientemente estáveis, movendo-se como corpos rígidos articulados.

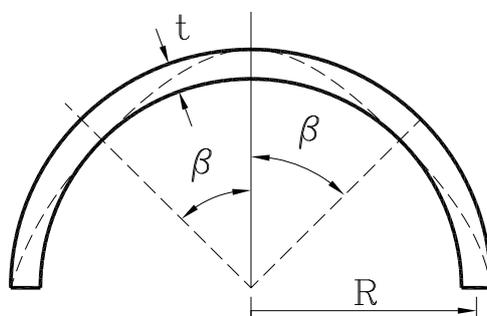


Figura 3.49 - Espessura mínima admissível de um arco circular submetido apenas à acção do seu peso próprio.

Tendo em conta os diagramas de corpo livre dos troços entre as articulações correspondentes aos pontos de tangência da linha de pressões com os limites do arco (Figura 3.50), e admitindo que o impulso R_A na secção fracturada nos rins actua perpendicularmente a essa secção transversal[†], obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio para o troço superior:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H - R_A \cos \beta = 0 \quad (3.67)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow Q_1 - R_A \sin \beta = 0 \quad (3.68)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -Q_1 d_1 + H(r + t - r \cos \beta) = 0 \quad (3.69)$$

em que:

$$Q_1 = (\gamma R t) \beta = \left(\gamma \left(r + \frac{t}{2} \right) t \right) \beta \quad (3.70)$$

$$d_1 = r \sin \beta - \left(r + \frac{t}{2} \right) \frac{1 - \cos \beta}{\beta} \quad (3.71)$$

sendo γ o peso próprio do arco por unidade de volume.

Observe-se que das equações (3.67) e (3.68) resulta $H = Q_1 \cot \beta$, donde se conclui que o valor

[†] Esta hipótese suplementar é fundamental para a resolução do problema de equilíbrio dos corpos rígidos que constituem o arco, sem ela o problema ficaria indeterminado.

do impulso horizontal só depende da posição da articulação nos rins do arco (ângulo β) e da carga (Q_1) acima dela.

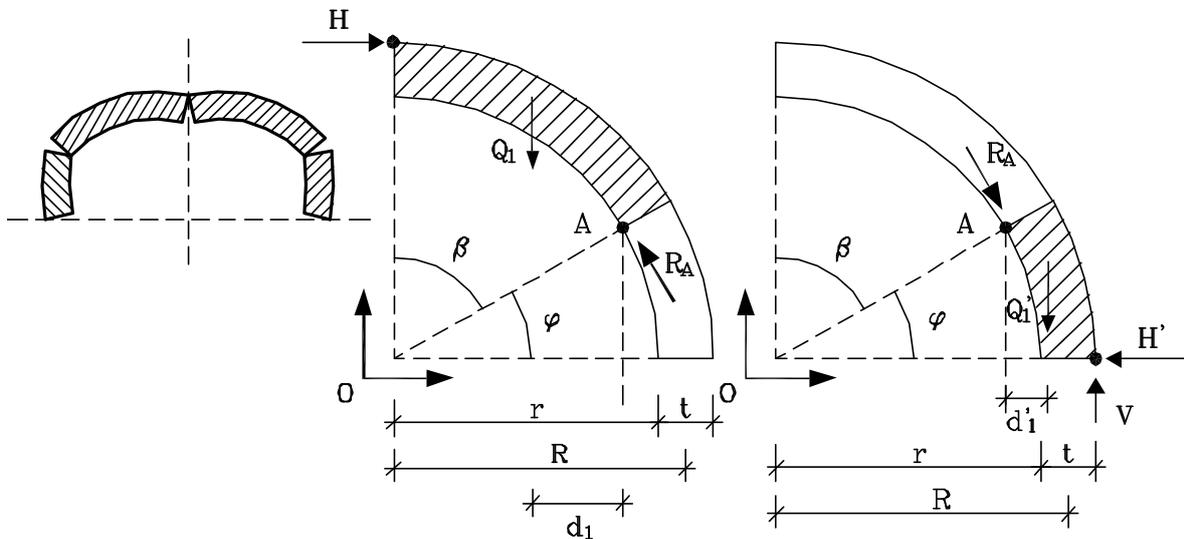


Figura 3.50 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido apenas à acção do seu peso próprio.

Das equações de equilíbrio anteriores obtém-se a seguinte expressão, que permite calcular a espessura mínima admissível do arco em função da localização da articulação nos rins do arco, isto é, do ângulo β , que nesta fase ainda é indeterminado:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = \frac{2(\beta - \sin \beta)(1 - \cos \beta)}{\beta(1 + \cos \beta)} \quad (3.72)$$

Considerando o equilíbrio do troço inferior (Figura 3.50), tem-se:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow -H' + R_A \cos \beta = 0 \quad (3.73)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow Q_1 + R_A \sin \beta - V = 0 \quad (3.74)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow Q_1 d_1 - V(r + t - r \sin \beta) + H' r \cos \beta = 0 \quad (3.75)$$

em que:

$$Q_1 = (\gamma R t) \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \left(\gamma \left(r + \frac{t}{2}\right) t\right) \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad (3.76)$$

$$d_1 = \frac{r + \frac{t}{2}}{\frac{\pi}{2} - \beta} \cos \beta - r \sin \beta \quad (3.77)$$

Das equações de equilíbrio do troço inferior, equações (3.73), (3.74) e (3.75), e considerando para a relação t/R o valor definido pela expressão (3.72), obtém-se a seguinte equação que permite determinar o ângulo de localização da junta fracturada nos rins do arco na situação correspondente à espessura mínima:

$$\beta \cot \beta \frac{2\beta \cos \beta + \sin \beta + \sin \beta (\cos \beta)^2}{2\beta \cos \beta + \sin \beta (\cos \beta)^2 - \sin \beta \cos \beta} = \frac{\pi}{2} \quad (3.78)$$

Resolvendo numericamente a expressão anterior, obtém-se $\beta = 58.82^\circ$, valor que conduz à seguinte espessura mínima admissível para um arco circular submetido à acção do seu peso próprio:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = 0.106 \quad (3.79)$$

Recorde-se que no método de Méry (parágrafos 2.3.3 e 3.3), para o arco circular é proposta uma localização da junta fracturada nos rins do arco equivalente a $\beta = 60^\circ$, valor que é próximo do valor exacto para um arco sujeito apenas à acção do seu peso próprio e, como se verá, coincidente com o valor exacto correspondente a uma carga uniformemente distribuída no vão do arco.

A análise anterior pode ser repetida para um arco circular abatido, correspondente a um ângulo de abertura 2α , menor que 180° (Figura 3.51).

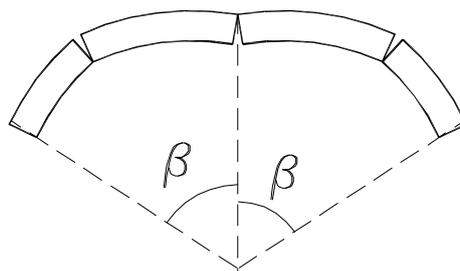


Figura 3.51 - Espessura mínima de um arco circular abatido.

O diagrama de corpo livre do troço superior permanece inalterado (Figura 3.52), pelo que as equações (3.67) a (3.72) continuam válidas.

Considerando as equações de equilíbrio correspondentes ao troço inferior e tendo em consideração a expressão (3.72), obtém-se a seguinte equação que permite determinar o valor

do ângulo β , em função do ângulo de abertura α :

$$\beta \cot \beta \frac{2\beta \cos \beta + \sin \beta + \sin \beta (\cos \beta)^2}{2\beta \cos \beta + \sin \beta (\cos \beta)^2 - \sin \beta \cos \beta} = \alpha \cot \frac{\alpha}{2} \quad (3.80)$$

Com base nas expressões (3.80) e (3.72) é possível determinar para cada valor do ângulo de abertura α , o valor do ângulo β e a relação (t/R) mínima admissível correspondente. Na Figura 3.54 representam-se gráficos com a variação da espessura mínima admissível e do impulso horizontal em função do ângulo de abertura do arco.

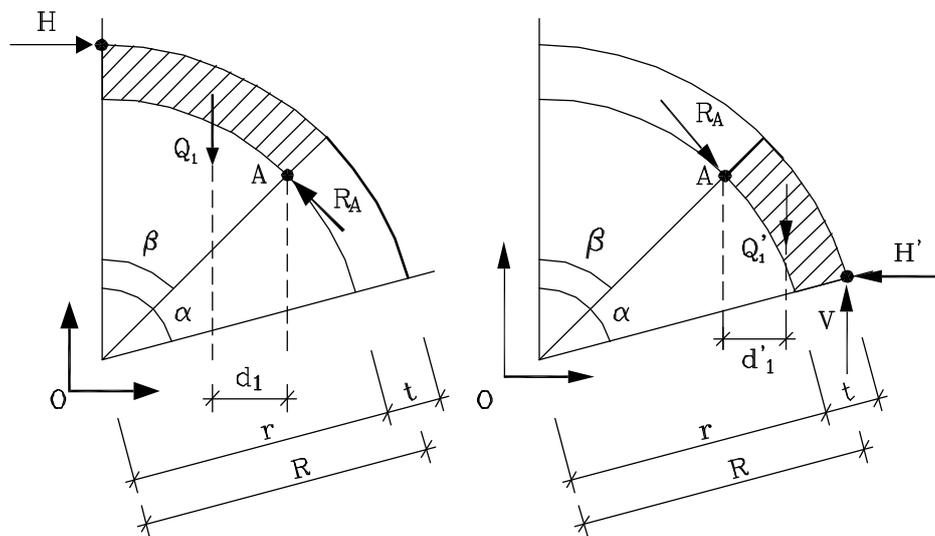


Figura 3.52 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido apenas à acção do seu peso próprio.

Como se pode observar na Figura 3.54, a espessura mínima admissível é crescente com o valor do ângulo α , pelo que num arco circular sujeito à acção do seu peso próprio a situação que corresponde a uma maior espessura mínima, será sempre o mecanismo com articulações junto das impostas e nunca um mecanismo com 2 articulações nas secções intermédias dos rins (Figura 3.53). O teorema cinemático da teoria da análise limite garante que o mecanismo correcto é aquele que maximiza a correspondente espessura mínima admissível.

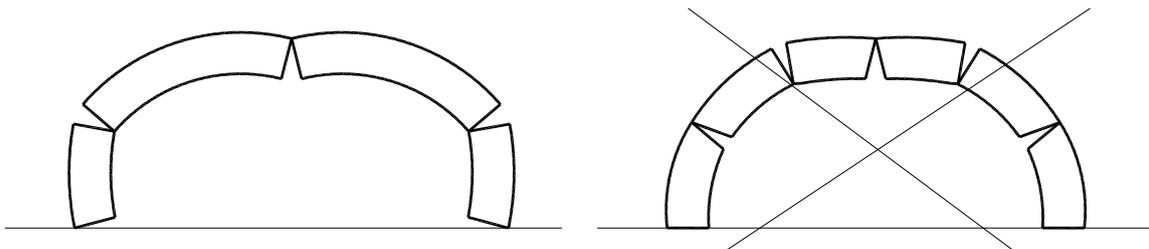


Figura 3.53 - Mecanismo de colapso correspondente à espessura mínima de um arco circular sujeito apenas à acção do seu peso próprio.

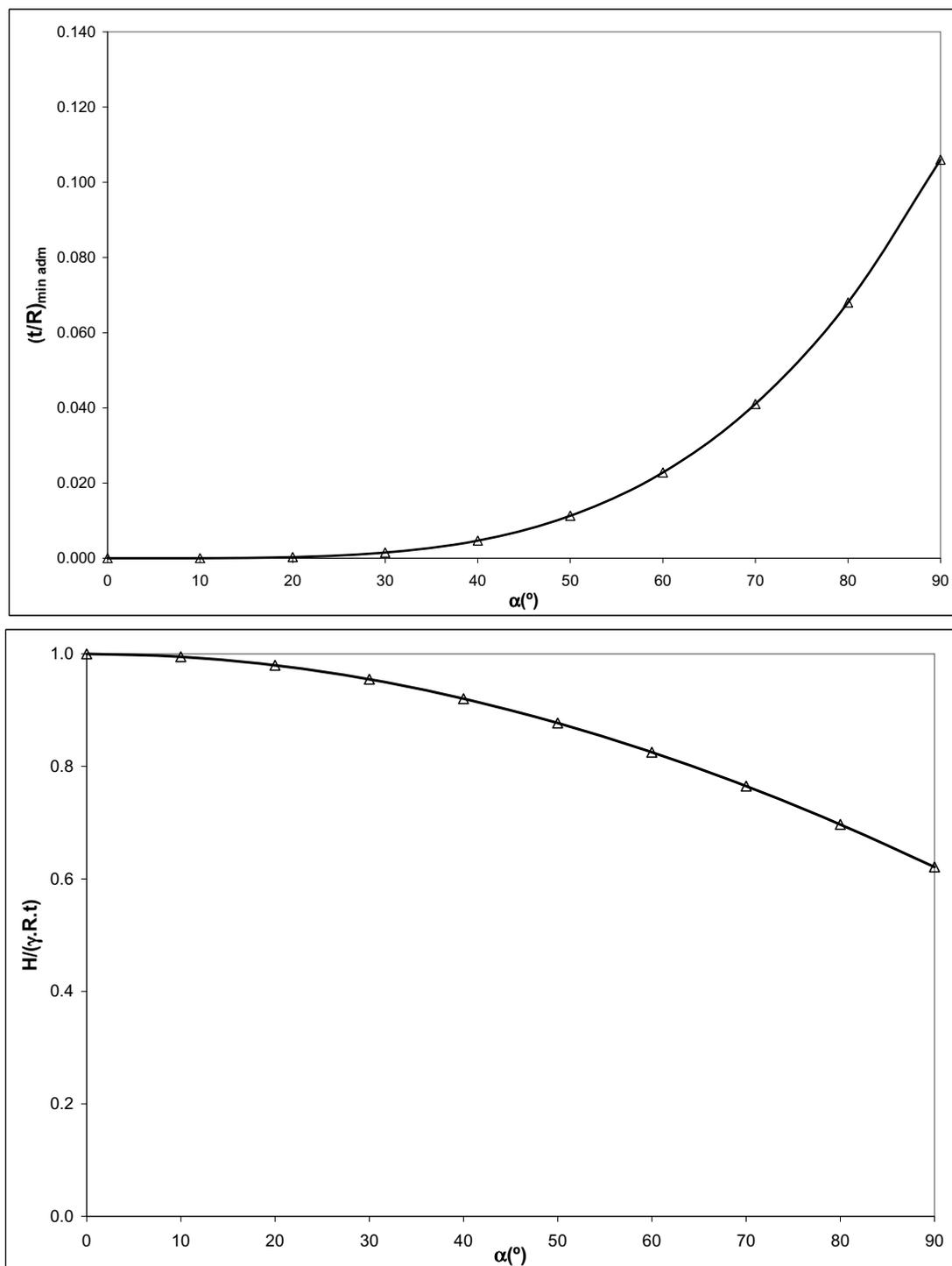


Figura 3.54 - Variação da espessura mínima admissível de um arco circular submetido apenas à acção do seu peso próprio e do impulso horizontal correspondente, em função do ângulo de abertura do arco.

Na Figura 3.55 representa-se, para arcos circulares com 20 m de vão, submetidos apenas à acção do seu peso próprio, a sua espessura mínima admissível em função da sua altura ($h=R(1-\cos\alpha)$). Como se pode verificar, considerando apenas a possibilidade de formação de mecanismos pela geração de articulações, sem ocorrência de escorregamentos relativos, e a acção exclusiva do

peso próprio do arco, para um mesmo vão, um arco abatido é mais resistente que um arco com maior altura. Esta conclusão resulta de a catenária se aproximar mais do perfil circular quanto menor for a sua flecha. No entanto, para perfis muito abatidos a hipótese de inexistência de escorregamentos relativos não é realista, não sendo válida a conclusão anterior. Nestes casos deverá também ser analisada a hipótese de mecanismos com escorregamento.

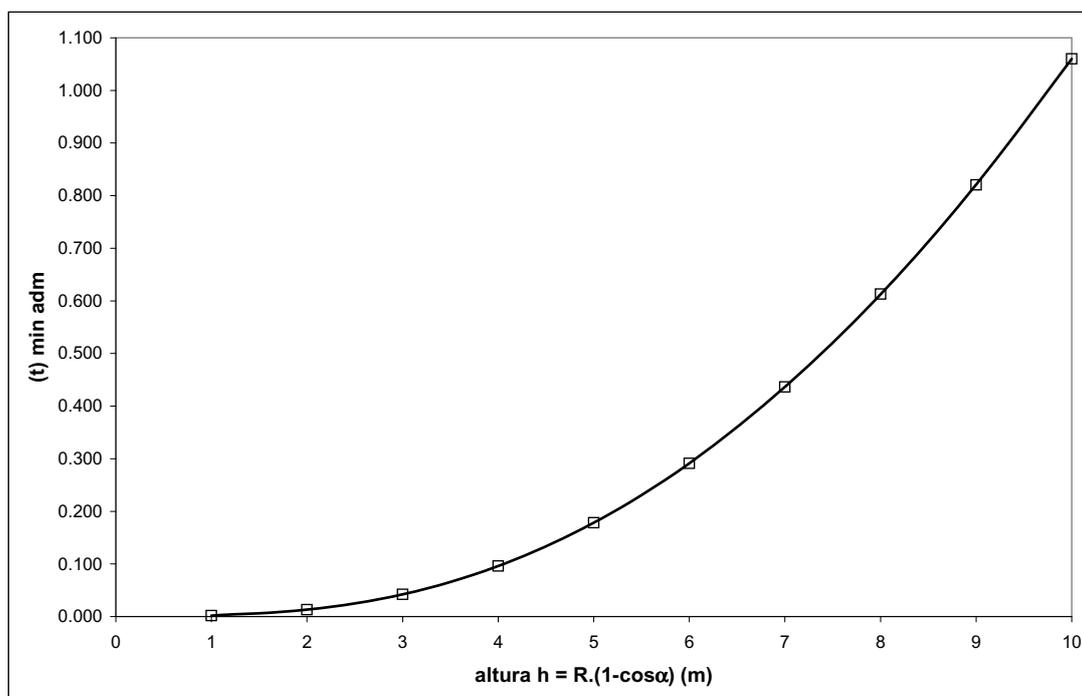


Figura 3.55 - Variação da espessura mínima admissível de um arco circular com 20 m de vão, submetido apenas à acção do seu peso próprio, em função da sua altura $f = R(1-\cos\alpha)$, na hipótese de inexistência de escorregamentos relativos.

Considerando o mesmo arco de perfil circular, desta vez sujeito apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída no seu vão (Figura 3.56) e tendo em conta que, dada a geometria parabólica da correspondente linha de pressões, o mecanismo associado à espessura mínima será idêntico ao anterior, obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio. Na Figura 3.57 representam-se os diagramas de corpo livre correspondentes a esta situação limite da linha de pressões.

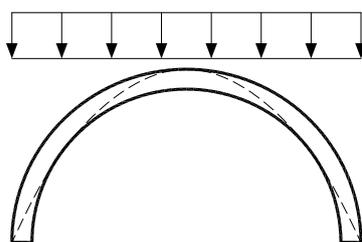


Figura 3.56 - Espessura mínima de um arco circular sujeito apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.

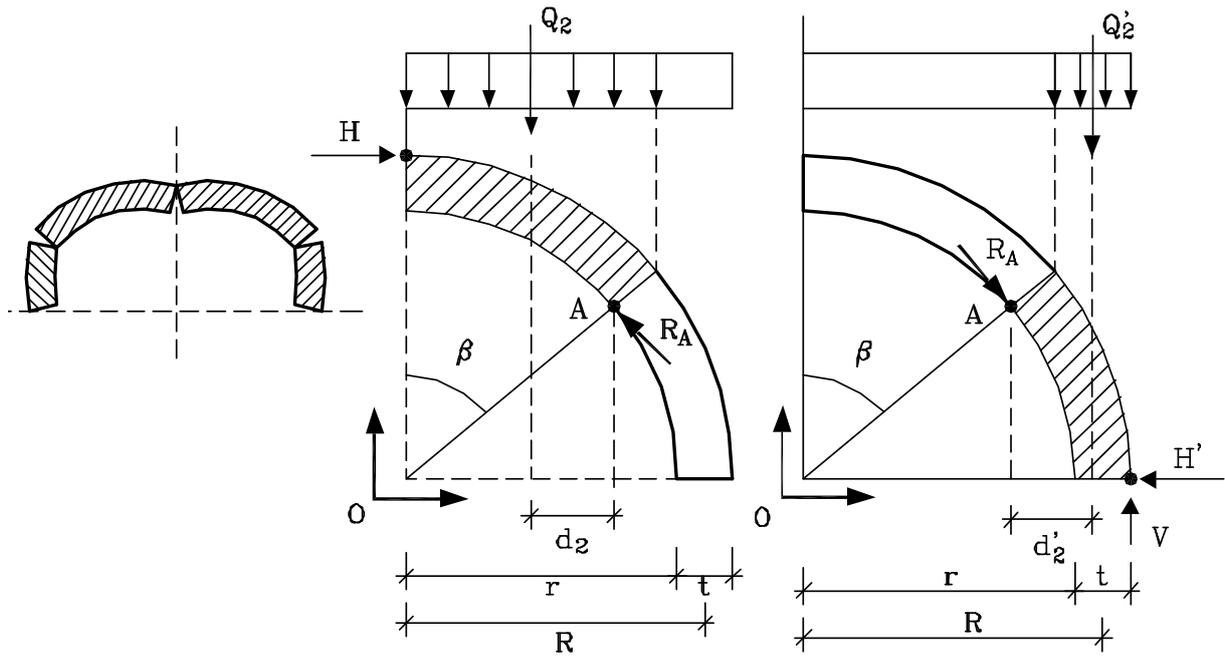


Figura 3.57 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.

Para o troço superior (Figura 3.57) tem-se:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H - R_A \cos \beta = 0 \quad (3.81)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow Q_2 - R_A \sin \beta = 0 \quad (3.82)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -Q_2 d_2 + H(r + t - r \cos \beta) = 0 \quad (3.83)$$

em que:

$$Q_2 = q(r + t) \sin \beta \quad (3.84)$$

$$d_2 = \frac{r - t}{2} \sin \beta \quad (3.85)$$

sendo q a intensidade da carga uniformemente distribuída.

E para o troço inferior (Figura 3.57):

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow -H' + R_A \cos \beta = 0 \quad (3.86)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow Q'_2 + R_A \sin \beta - V = 0 \quad (3.87)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow Q'_2 d_2 - V(r + t - r \sin \beta) + H r \cos \beta = 0 \quad (3.88)$$

em que:

$$Q'_2 = q(r + t)(1 - \sin \beta) \quad (3.89)$$

$$d_2 = \frac{r + t}{2}(1 - \sin \beta) + t \sin \beta \quad (3.90)$$

Das equações (3.85) e (3.86) conclui-se que, tal como acontecia anteriormente, a intensidade do impulso horizontal depende apenas da posição da articulação nos rins do arco e da carga acima dela.

As equações de equilíbrio do troço superior, equações (3.81), (3.82) e (3.83), conduzem à seguinte expressão que relaciona a espessura mínima admissível com o ângulo β de localização da junta de fractura nos rins do arco:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = \frac{2(1 - \cos \beta)^2}{2 + 2 \cos \beta + (\sin \beta)^2} \quad (3.91)$$

Tendo em conta a equação (3.91) e as equações de equilíbrio do troço inferior, equações (3.86), (3.87) e (3.88), obtém-se a seguinte expressão que permite determinar o ângulo de localização da articulação nos rins do arco, na situação correspondente à espessura mínima:

$$\frac{(1 - \cos \beta)^2 (1 + (\sin \beta)^2)}{2 + 2 \cos \beta + (\sin \beta)^2} = 1 \quad (3.92)$$

Resolvendo numericamente a expressão anterior, obtém-se $\beta = 60^\circ$, sendo a correspondente espessura mínima admissível do arco circular sujeito apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída no seu vão:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = 0.1333 \quad (3.93)$$

Tendo em conta os valores obtidos para as espessuras mínimas admissíveis para o arco submetido à acção do seu peso próprio e à acção de uma carga uniformemente distribuída no

seu vão, constata-se que para um arco circular a acção da carga uniforme é ligeiramente mais desfavorável do que a acção do peso próprio. Quer isto dizer, tendo em conta as geometrias obtidas para as linhas de pressões (parágrafo 3.7), que a geometria da catenária é mais próxima do perfil circular do que a geometria parabólica. Se o arco tiver a geometria duma catenária a espessura mínima admissível para a acção do seu peso próprio será, teoricamente infinita, assim como no caso de um arco parabólico sujeito à acção de uma carga uniformemente distribuída.

Repetindo a análise anterior para um arco de abertura 2α , inferior a 180° , obtêm-se as seguintes expressões que permitem calcular o valor do ângulo β , que define a localização da articulação nos rins do arco, e a correspondente espessura mínima admissível:

$$\frac{(1 - \cos \beta)^2 ((\sin \beta)^2 + \cos \alpha \cos \beta + (\sin \alpha)^2)}{(2 \cos \beta + (\sin \beta)^2)(\cos \beta - \cos \alpha)^2} = 1 \quad (3.94)$$

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = \frac{2(1 - \cos \beta)^2}{2 + 2 \cos \beta + (\sin \beta)^2} \quad (3.95)$$

Na Figura 3.58 representam-se os valores da espessura mínima admissível e na Figura 3.59 os valores do correspondente impulso horizontal, para diferentes valores do ângulo de abertura do arco.

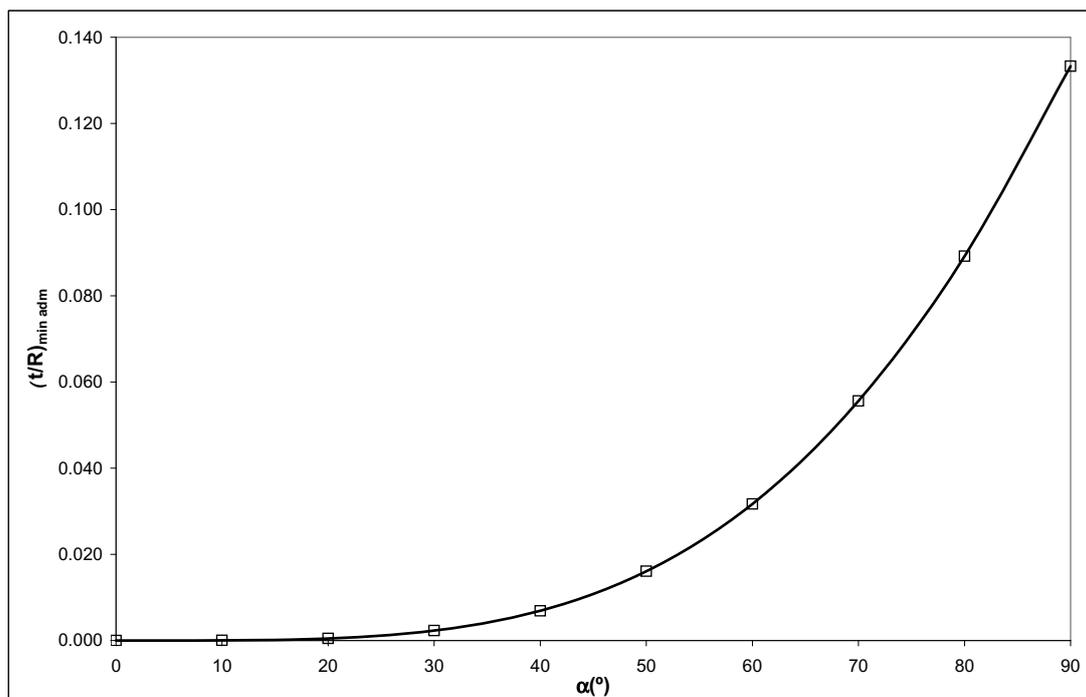


Figura 3.58 - Espessura mínima admissível em função do ângulo de abertura do arco (arco circular submetido apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída).

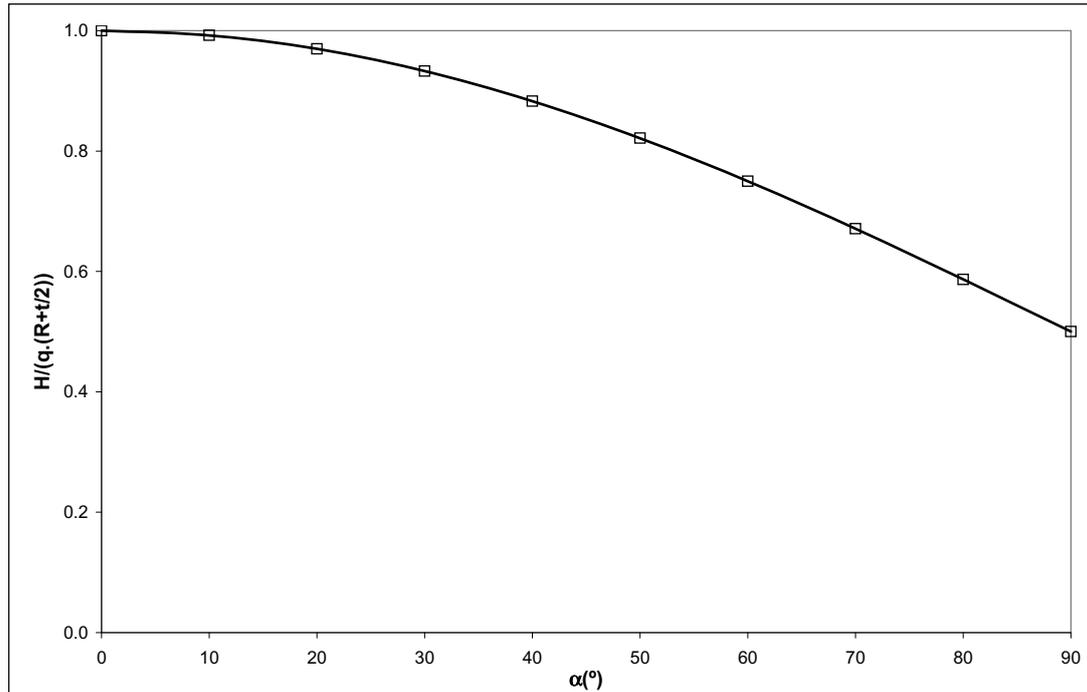


Figura 3.59 - Impulso horizontal correspondente à espessura mínima admissível em função do ângulo de abertura do arco (arco circular submetido apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída).

Observando a Figura 3.58 constata-se que, tal como no caso do peso próprio, para uma carga uniformemente distribuída no vão a espessura mínima admissível é crescente com o valor do ângulo de abertura do arco, pelo que, num arco circular sujeito apenas à acção de uma carga uniformemente distribuída, o mecanismo correspondente à espessura mínima terá sempre a articulação localizada na secção da imposta (Figura 3.53).

Considerando o efeito simultâneo do peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no vão de um arco circular, as equações de equilíbrio dos troços superior e inferior (Figura 3.60) conduzem às seguintes expressões, que permitem calcular a espessura mínima admissível (equação (3.96)) e a correspondente localização da articulação nos rins do arco (equação (3.97)), em que $\psi = \gamma Rt/q(R+t/2)$, sendo γ o peso próprio do arco por unidade de volume e q a carga uniformemente distribuída no vão do arco:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = \frac{4\psi\beta\left(1 - \cos\beta - \frac{\sin\beta}{\beta}\right) + 2\sin\beta(1 + (\cos\beta)^2) - 4(1 - \psi)\sin\beta\cos\beta}{2\psi\beta(\cos\beta + 1) + \sin\beta(2\cos\beta + 3 - (\cos\beta)^2)} \quad (3.96)$$

e :

$$\begin{aligned}
& \psi \left(-\frac{\pi}{2} + \beta \sin \beta + \cos \beta \left(1 + \frac{\beta \cos \beta}{\sin \beta} \right) + \left(\frac{1}{2} (2\psi (1 - \cos \beta) (\beta - \sin \beta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sin \beta (1 - \cos \beta)^2 (\cos \beta - \pi) \right) / (\psi (2\beta \cos \beta + (1 - \cos \beta) \sin \beta) \right. \\
& \quad \left. + \sin \beta (2 \cos \beta + (\sin \beta)^2)) \right) + \frac{(\cos \beta)^2}{2} - \frac{1}{2} (2\psi (1 - \cos \beta) (\beta - \sin \beta) \\
& \quad \left. + \sin \beta (1 - \cos \beta)^2 (1 + (\sin \beta)^2) / (\psi (2\beta \cos \beta + (1 - \cos \beta) \sin \beta) \right. \\
& \quad \left. + \sin \beta (2 \cos \beta + (\sin \beta)^2)) \right) = 0 \tag{3.97}
\end{aligned}$$

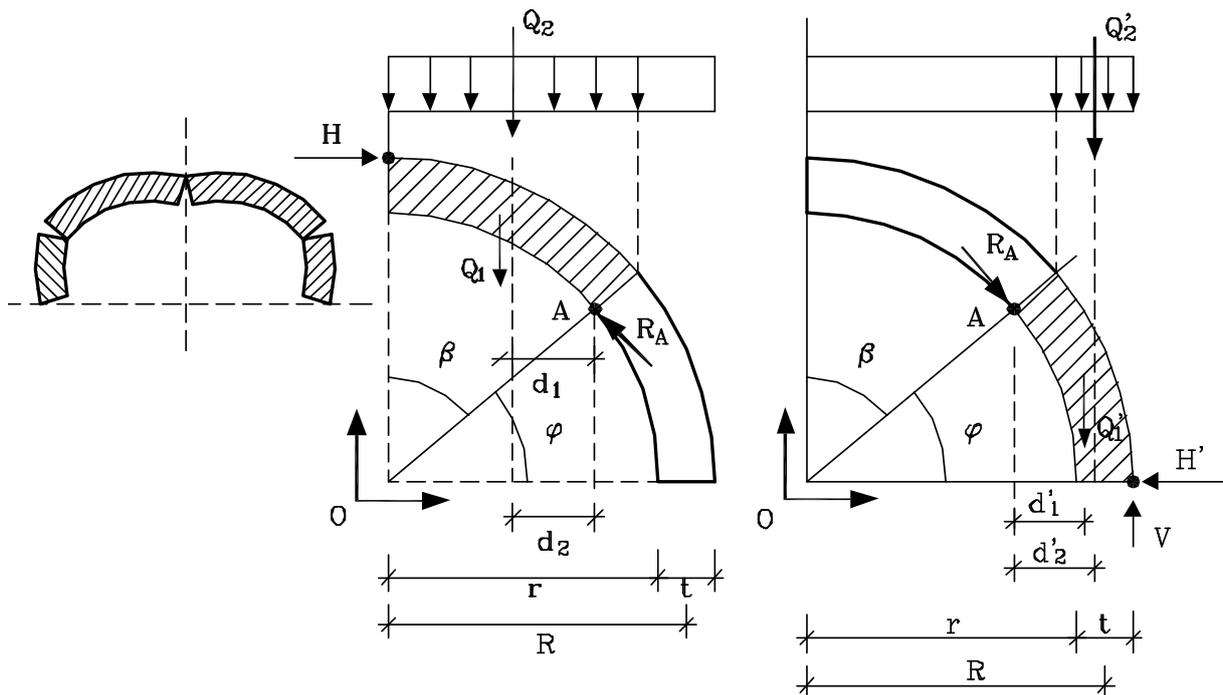


Figura 3.60 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.

Na Figura 3.61 representa-se a variação do valor da espessura mínima admissível para várias relações "peso próprio/carga uniforme". Constata-se nesse gráfico que a carga uniforme tem sempre um efeito desvantajoso na segurança do arco, por a espessura mínima admissível ser crescente com a sua intensidade.

Definindo o coeficiente de segurança geométrico como a relação entre a espessura real do arco e a espessura mínima admissível:

$$\Phi = \frac{\frac{t}{R} - \left(\frac{t}{R} \right)_{min}}{\left(\frac{t}{R} \right)_{min}} \tag{3.98}$$

Verifica-se que este coeficiente é decrescente com o aumento do valor da carga uniforme. No entanto, se a espessura real do arco for tal que a relação t/R é superior a 0.1333, o coeficiente de segurança geométrico, embora diminuindo com o aumento da carga uniforme, será sempre positivo. Deste modo, para uma relação $t/R > 0.1333$ é possível aumentar indefinidamente a intensidade da carga uniforme, sem que se atinja o colapso da estrutura. Para valores de t/R entre 0.1060 e 0.1333 poderá atingir-se valores negativos do coeficiente de segurança geométrico e para $t/R < 0.1060$ o equilíbrio não é possível qualquer que seja a intensidade da carga.

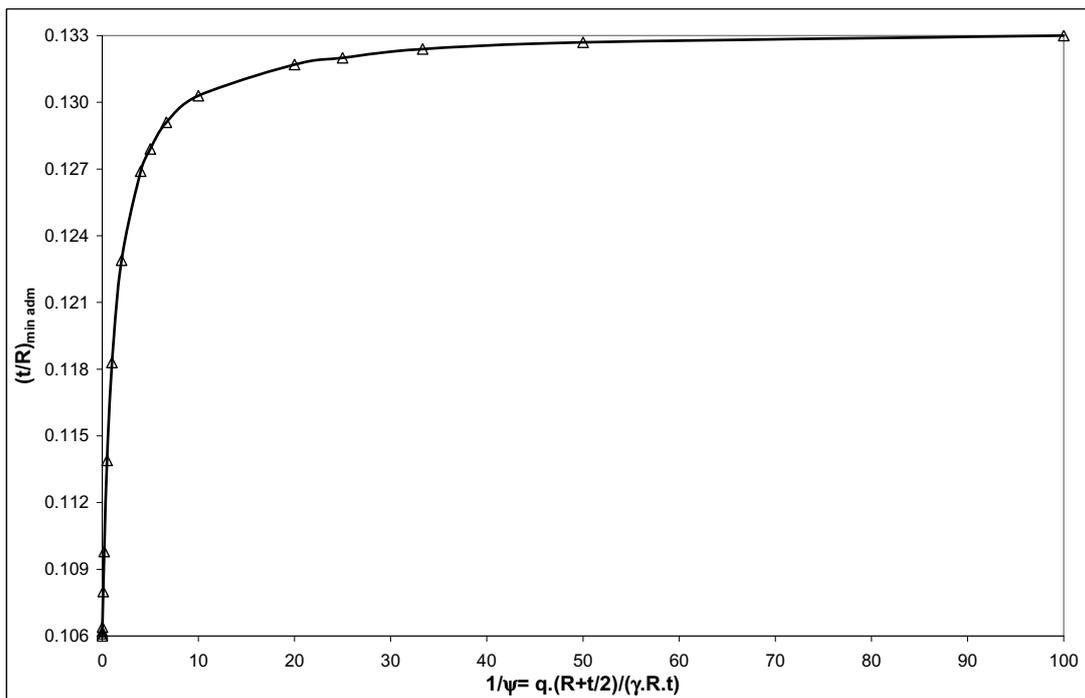


Figura 3.61 - Variação da espessura mínima admissível em função do valor da carga uniforme, para um arco circular sujeito à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.

A análise anterior também pode ser realizada para arcos de ângulos de abertura inferiores a 180° . Não havendo alteração no diagrama de corpo livre do troço superior (Figura 3.60), a expressão (3.96), que permite determinar a espessura mínima admissível, permanece válida:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = \frac{4\psi\beta\left(1 - \cos\beta - \frac{\sin\beta}{\beta}\right) + 2\sin\beta(1 + (\cos\beta)^2) - 4(1 - \psi)\sin\beta\cos\beta}{2\psi\beta(\cos\beta + 1) + \sin\beta(2\cos\beta + 3 - (\cos\beta)^2)} \quad (3.96)$$

Sendo $\psi = \gamma Rt/q(R+t/2)$, em que γ é o peso próprio do arco por unidade de volume e q a carga uniformemente distribuída no vão do arco, a expressão para o ângulo β correspondente à espessura mínima, que resulta da análise do equilíbrio do troço inferior (Figura 3.60), tem a forma:

$$\begin{aligned}
& \psi \left(-\alpha \sin \alpha + \beta \sin \beta + (\cos \beta - \cos \alpha) \left(\frac{\sin \beta + \alpha \cos \alpha}{\sin \beta} \right) \right. \\
& + \frac{1}{2} (2\psi(1 - \cos \beta)(\beta - \sin \beta) + \sin \beta(1 - \cos \beta)^2) \left(\cos \beta \right. \\
& \quad \left. - \cos \alpha \left(\frac{\sin \beta + 2\beta \cos \beta}{\sin \beta} \right) - 2\alpha \sin \alpha \right) / (\psi(2\beta \cos \beta \\
& + (1 - \cos \beta) \sin \beta) + \sin \beta(2 \cos \beta + (\sin \beta)^2)) \left. \right) + \frac{1}{2} ((\cos \beta)^2) \\
& + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\sin \beta)^2 - \cos \alpha \cos \beta + (2\psi(\beta - \sin \beta)(1 - \cos \beta) \\
& + \sin \beta(1 - \cos \beta)^2) \left(-\frac{1}{2} (\sin \alpha)^2 - \frac{1}{2} + (\sin \beta)^2 (-\cos \alpha \cos \beta) \right) \\
& / (\psi(2\beta \cos \beta + (1 - \cos \beta) \sin \beta) + \sin \beta(2 \cos \beta + (\sin \beta)^2)) = 0 \quad (3.99)
\end{aligned}$$

Na Figura 3.62 representam-se os valores da espessura mínima admissível, obtidos para diferentes valores do ângulo de abertura α . Como se pode observar, o declive das curvas sofre um acréscimo significativo a partir do ângulo $\alpha = 30^\circ$, pelo que, num arco a passagem de uma abertura de 180° para 60° corresponde a um acréscimo muito significativo no coeficiente de segurança geométrico.

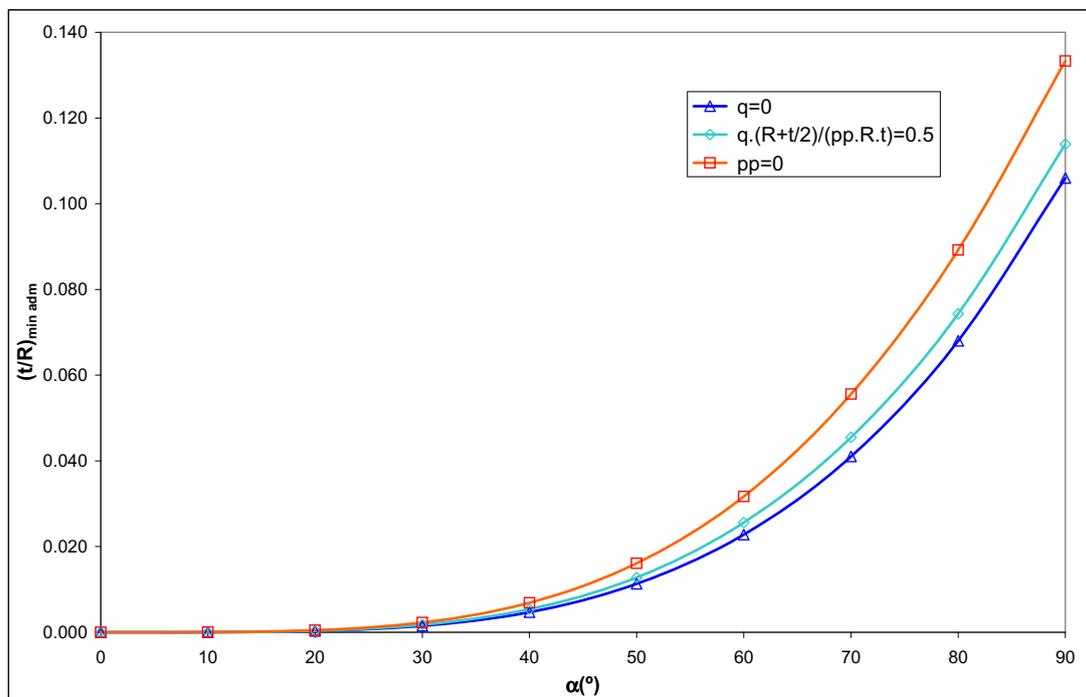


Figura 3.62 - Variação da espessura mínima admissível de um arco sujeito à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão, em função do seu ângulo de abertura.

Admitindo que o enchimento no extradorso do arco tem rigidez suficiente para impedir o movimento horizontal dos elementos do arco sob esse enchimento, não será possível a formação

de articulações nessa zona. Assim, o enchimento do extradorso corresponderá a uma diminuição do ângulo de abertura do arco (Figura 3.63) e terá, conseqüentemente, um efeito favorável na sua capacidade resistente.

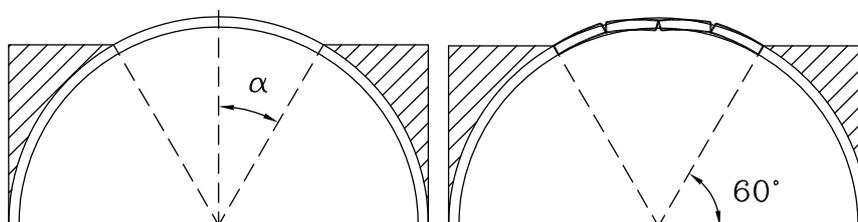


Figura 3.63 - Enchimento do extradorso do arco.

Considere-se agora um arco circular submetido à acção do peso próprio do material de enchimento no seu extradorso. Tendo em conta a geometria da linha de pressões obtida no parágrafo 3.4 (Figura 3.20), o mecanismo correspondente à espessura mínima admissível será diferente do anteriormente considerado para a acção do peso próprio do arco e da sobrecarga uniformemente distribuída no seu vão. De facto, dada a reduzida intensidade das cargas junto do fecho do arco, a linha de pressões é nesta zona praticamente horizontal, sendo a situação correspondente à espessura mínima admissível representada por uma linha de pressões tangente ao intradorso do arco no fecho e em pontos dos rins junto das impostas, e tangente ao extradorso do arco em pontos intermédios dos rins (Figura 3.64).

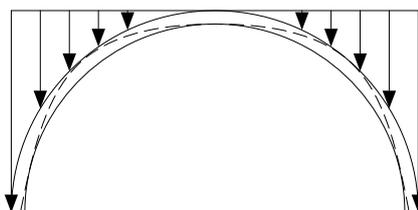


Figura 3.64 - Espessura mínima admissível de um arco circular submetido apenas à acção do peso próprio do material de enchimento no seu extradorso.

Na Figura 3.65 representam-se os diagramas de corpo livre dos troços superior e inferior, correspondentes à posição limite da linha de pressões definida na Figura 3.64.

Do equilíbrio do troço superior (Figura 3.65), tem-se:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H - R_A \cos \beta = 0 \quad (3.100)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow Q_3 - R_A \sin \beta = 0 \quad (3.101)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -Q_3 d_3 + H(r - (r + t) \cos \beta) = 0 \quad (3.102)$$

em que a resultante do peso do enchimento sobre o troço superior do arco é dado por:

$$Q_3 = \mu(r + t)^2 \left(\sin \beta - \left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \right) \quad (3.103)$$

e, portanto,

$$Q_3 d_3 = \mu(r + t)^3 \left(\sin \beta \left(\sin \beta - \frac{\sin \beta \cos \beta}{2} - \frac{\beta}{2} \right) - \frac{(\sin \beta)^2}{2} - \frac{((\cos \beta)^3 - 1)}{3} \right) \quad (3.104)$$

sendo μ o peso próprio do material de enchimento por unidade de volume.

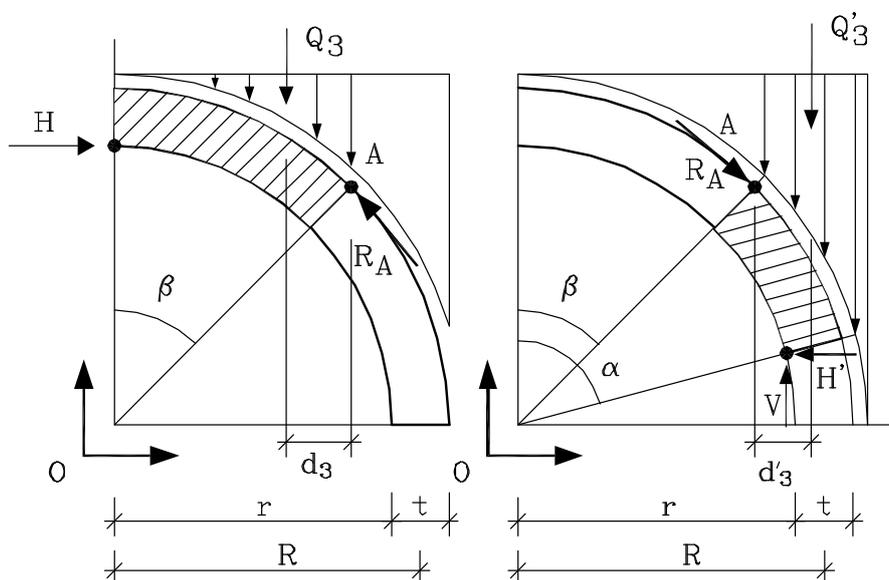


Figura 3.65 - Diagramas de corpo livre - arco circular submetido à acção do peso próprio do material de enchimento no seu extradorso.

Do equilíbrio do troço inferior (Figura 3.65), tem-se:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow -H' + R_A \cos \beta = 0 \quad (3.105)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow Q'_3 + R_A \sin \beta - V = 0 \quad (3.106)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow Q'_3 d'_3 - H'((r + t) \cos \beta - r \cos \alpha) + V(r \sin \alpha - (r + t) \sin \beta) = 0 \quad (3.107)$$

em que:

$$Q'_3 = \mu(r + t)^2 \left(\sin \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} - \sin \beta + \frac{\sin \beta \cos \beta}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \quad (3.108)$$

$$Q'_3 d'_3 = \mu(r+t)^3 \left(\sin \beta \left(\sin \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} - \left(\sin \beta - \frac{\sin \beta \cos \beta}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \right) - \frac{(\sin \alpha)^2 - (\sin \beta)^2}{2} - \frac{((\cos \alpha)^3 - (\cos \beta)^3)}{3} \right) \quad (3.109)$$

Note-se que, na definição do troço inferior se admitiu a possibilidade de a articulação junto da imposta ocorrer nos rins do arco numa posição definida pelo ângulo α .

Das equações de equilíbrio do troço superior resulta a expressão seguinte:

$$\left(\frac{t}{R} \right)_{min} = \frac{\sin \beta (-4(\cos \beta)^3 + 10 - 18 \cos \beta + 12(\cos \beta)^2) + 3\beta(\cos \beta - 1)}{\sin \beta (2(\cos \beta)^3 - 5 - 3 \cos \beta) + 3\beta(\cos \beta + 1)} \quad (3.110)$$

que define a espessura mínima admissível do arco em função do ângulo de localização da articulação dos rins do arco (β).

Tendo em conta a expressão (3.110) e as equações de equilíbrio do troço inferior, obtém-se a expressão que permite determinar para cada valor do ângulo α , o correspondente valor do ângulo β :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(10 - 11(\cos \beta)^4 + 11(\cos \beta)^5 - 7(\cos \beta)^6 + 2(\cos \beta)^7 \\ & - 3\beta \sin \beta \cos \beta (\cos \alpha)^2 - 10(\cos \alpha)^2 + 9(\cos \beta)^4 (\cos \alpha)^2 - 8(\cos \beta)^3 (\cos \alpha)^2 \\ & - 4(\cos \beta)^5 (\cos \alpha)^2 + 7(\cos \beta)^6 \cos \alpha + 12 \cos \beta (\cos \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 (\cos \beta)^2 \\ & - 5(\cos \beta)^4 (\cos \alpha)^3 + 5(\cos \beta)^3 (\cos \alpha)^3 + 2(\cos \beta)^5 (\cos \alpha)^3 - 2(\cos \beta)^7 \cos \alpha \\ & + 13 \cos \beta \cos \alpha - 3\beta^2 \cos \beta - 7 \cos \beta (\cos \alpha)^3 - 5\alpha \sin \alpha + 7(\cos \beta)^4 \cos \alpha \\ & - 2(\cos \beta)^3 \cos \alpha - 9(\cos \beta)^5 \cos \alpha - 9(\cos \beta)^2 \cos \alpha + 3\alpha (\cos \beta)^4 \sin \alpha \\ & - 2\alpha (\cos \beta)^5 \sin \alpha + 6\beta \sin \beta (\cos \alpha)^2 - 6\beta \sin \beta + 5(\cos \beta)^3 - 18 \cos \beta \\ & - 3\beta \sin \beta (\cos \alpha)^3 + 12\beta \sin \beta \cos \beta + 3\beta \sin \beta \cos \alpha + 3\alpha \sin \alpha \cos \beta \\ & + 2\alpha (\cos \beta)^2 \sin \alpha - \alpha (\cos \beta)^3 \sin \alpha - 6\beta \sin \beta (\cos \beta)^2 + 3\beta \sin \beta (\cos \beta)^3 \\ & + 3\beta^2 \cos \beta \cos \alpha - 2\beta \sin \beta (\cos \beta)^4 + 8(\cos \beta)^2 + 2\beta \sin \beta \cos \beta (\cos \alpha)^3 \\ & + 2\beta \sin \beta (\cos \beta)^4 \cos \alpha - 3\beta \sin \beta (\cos \beta)^3 \cos \alpha + 6\beta \sin \beta (\cos \beta)^2 \cos \alpha \\ & + 3\beta \alpha \sin \beta \sin \alpha - 11\beta \sin \beta \cos \beta \cos \alpha - 5 \cos \alpha + 5(\cos \alpha)^3) / (3\beta \sin \beta \\ & - (\cos \beta)^3 - 5 + 2(\cos \beta)^2 + 3 \cos \beta - 2(\cos \beta)^5 + 3(\cos \beta)^4) = 0 \quad (3.111) \end{aligned}$$

Na Figura 3.66 representa-se a variação da espessura mínima em função do ângulo α que localiza a articulação junto da imposta. Nesse gráfico é possível identificar a espessura mínima para um arco circular completo, que ocorre para $\alpha = 75^\circ$ com o valor:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = 0.073 \quad (3.112)$$

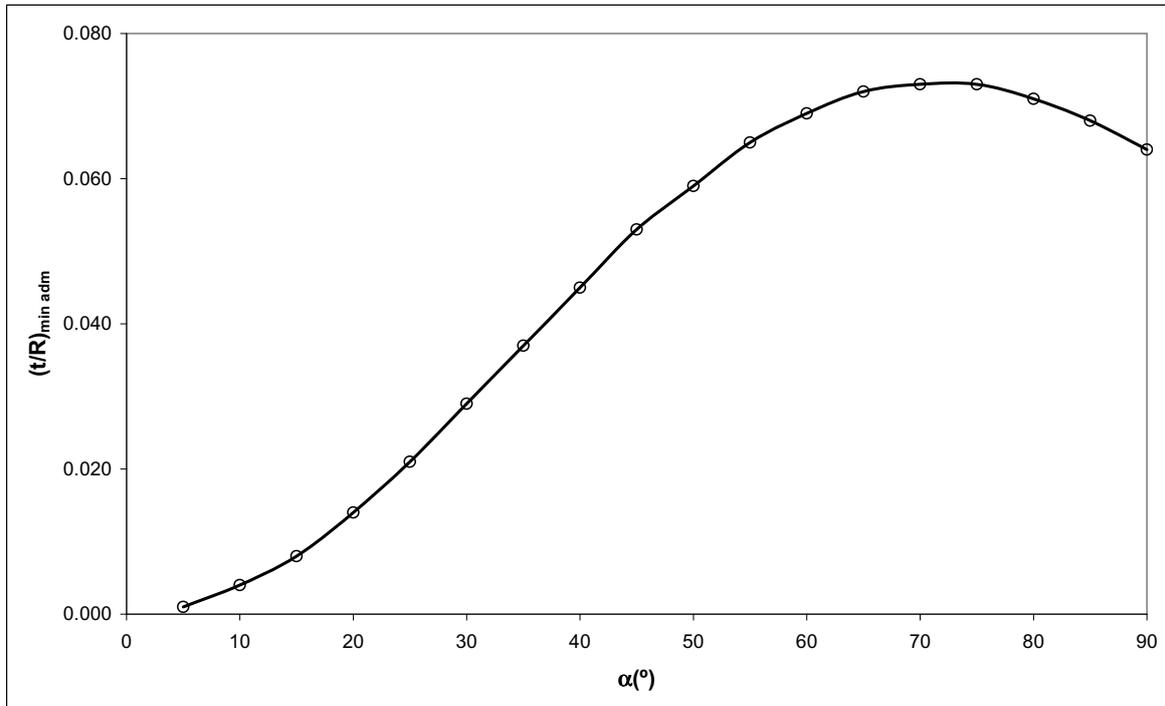


Figura 3.66 - Espessura mínima admissível de um arco submetido à acção do peso próprio do material de enchimento no extradorso, em função do ângulo de localização da articulação junto das impostas.

A partir da Figura 3.66 pode desenhar-se o gráfico das espessuras mínimas admissíveis para arcos circulares abatidos com um ângulos de abertura (2α) inferiores a 180° (Figura 3.67). Como se representa nesse gráfico, a partir do ângulo $\alpha = 75^\circ$ as articulações junto das impostas ocorrem sempre com a mesma localização, não havendo alteração no mecanismo correspondente à espessura mínima.

Considerando em simultâneo com a acção do peso próprio do enchimento no extradorso do arco, a acção do peso próprio do arco, verifica-se que o mecanismo correspondente à espessura mínima continua a ser o atrás descrito (Figura 3.64) se o efeito do enchimento for significativo quando comparado com o efeito do peso próprio do arco. Se, pelo contrário, for preponderante o efeito do peso próprio do arco, o mecanismo a considerar será o mecanismo correspondente ao peso próprio do arco, representado na Figura 3.49.

Tendo em conta a geometria da linha de pressões correspondente ao peso próprio do material de enchimento, poderá acontecer que nos mecanismos a articulação localizada junto do fecho se desloque ligeiramente em direcção dos rins do arco. Assim, os diagramas de corpo livre a considerar na análise do efeito conjunto dos dois pesos próprios são os indicados na Figura 3.68.

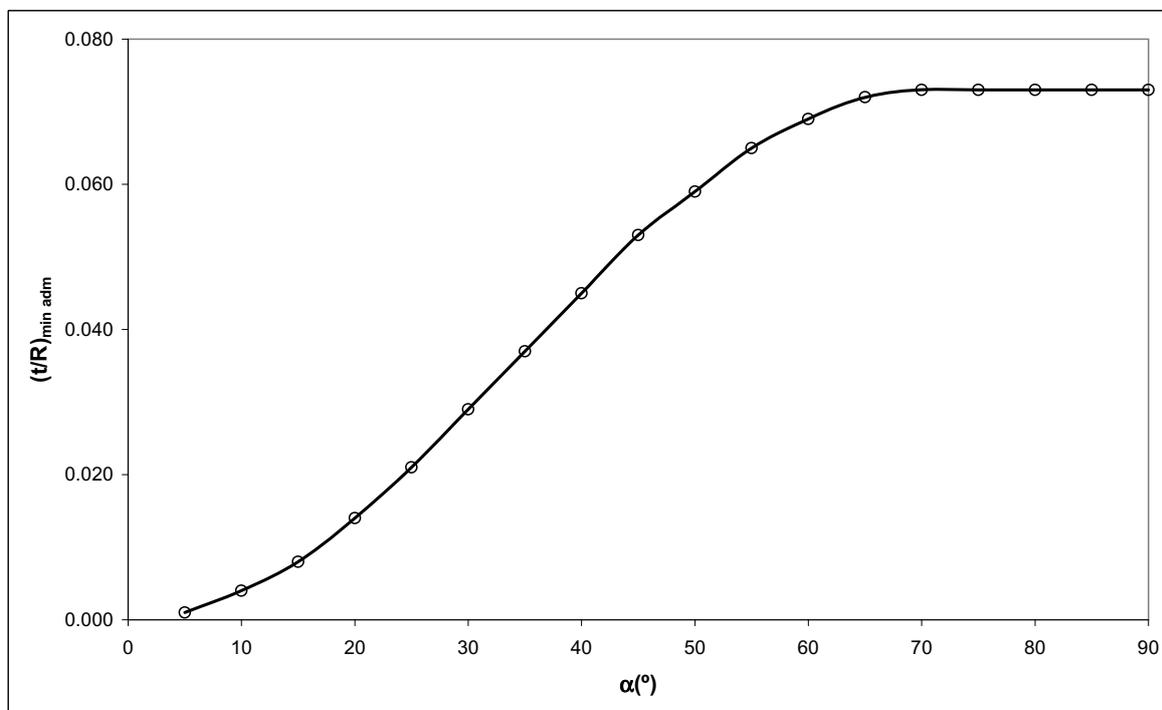


Figura 3.67 - Variação da espessura mínima admissível de um arco submetido apenas à acção do peso próprio do material de enchimento no seu extradorso, em função do ângulo de abertura do arco.

Da análise do equilíbrio dos diagramas de corpo livre representados na Figura 3.68, resultam as expressões que permitem determinar o valor da espessura mínima admissível, em função da relação entre as intensidades dos pesos próprios.

Na Figura 3.69 representam-se, para um arco circular completo sujeito à acção do seu peso próprio e do material de enchimento no seu extradorso, os resultados correspondentes ao mecanismo do peso próprio do arco (mecanismo 1 - Figura 3.68). No cálculo dos valores deste gráfico admitiu-se para o ângulo ψ , que define a localização das articulações junto do fecho, valores nulos e não nulos. Como se pode observar, as espessuras correspondentes a valores de ψ não nulos[†] são superiores às obtidas quando se considera ψ nulo. De acordo com o teorema cinemático da análise limite, os valores a considerar são os majorantes dos valores obtidos para

[†] Os valores do ângulo ψ foram determinados de modo a maximizar a espessura mínima e são variáveis com a relação entre as intensidades dos pesos próprios.

as espessuras mínimas admissíveis, os quais correspondem a valores de ψ não nulos. Neste mecanismo, tal como acontecia com o efeito isolado do peso próprio do arco, a situação que corresponde a uma maior espessura mínima admissível num arco circular completo é com as articulações inferiores junto das impostas.

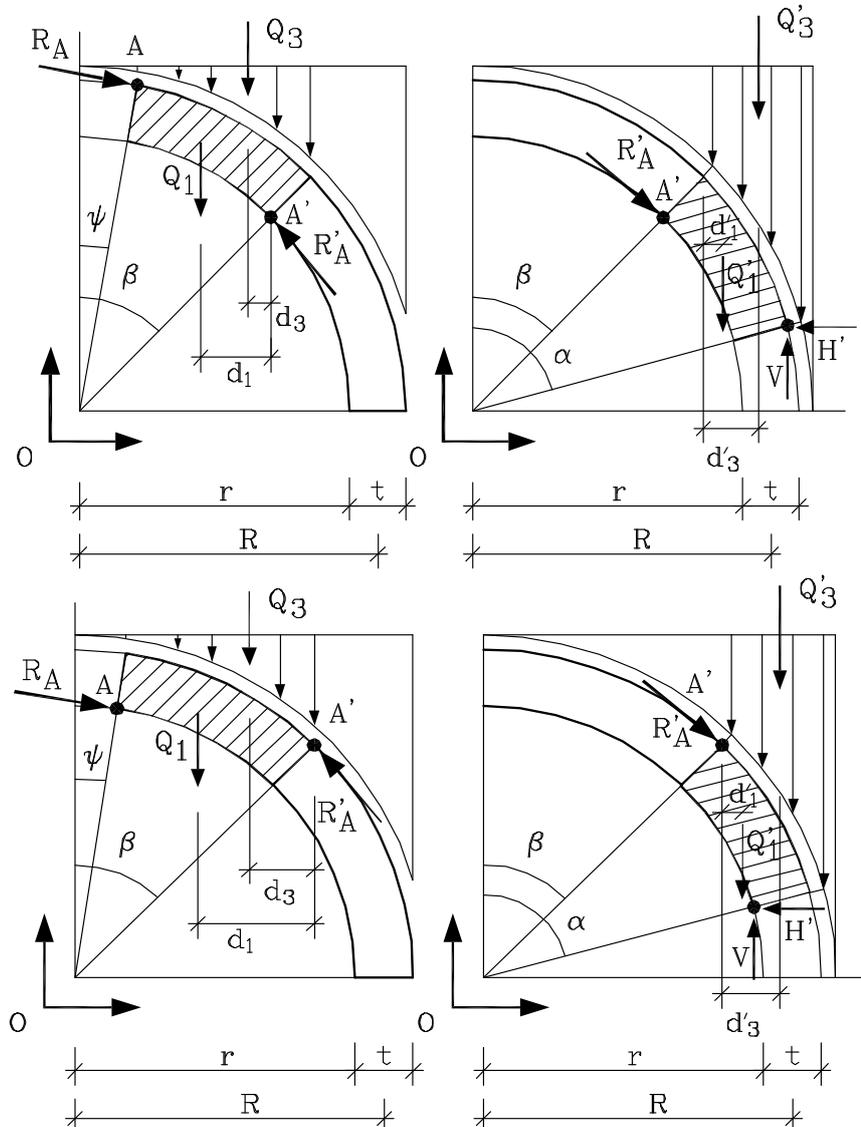


Figura 3.68 - Diagramas de corpo livre do arco circular submetido ao seu peso próprio e do material de enchimento no extradorso. Em cima: mecanismo 1 - efeito do peso próprio do arco preponderante; em baixo: mecanismo 2 - efeito do peso próprio do enchimento no extradorso do arco preponderante.

Na Figura 3.70 representam-se os valores das espessuras mínimas admissíveis obtidos considerando o mecanismo do peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco (mecanismo 2 - Figura 3.68). Os valores representados correspondem a ψ e α variáveis com a relação entre as intensidades dos pesos próprios e, em geral, são diferentes de 0° e 90° , respectivamente.

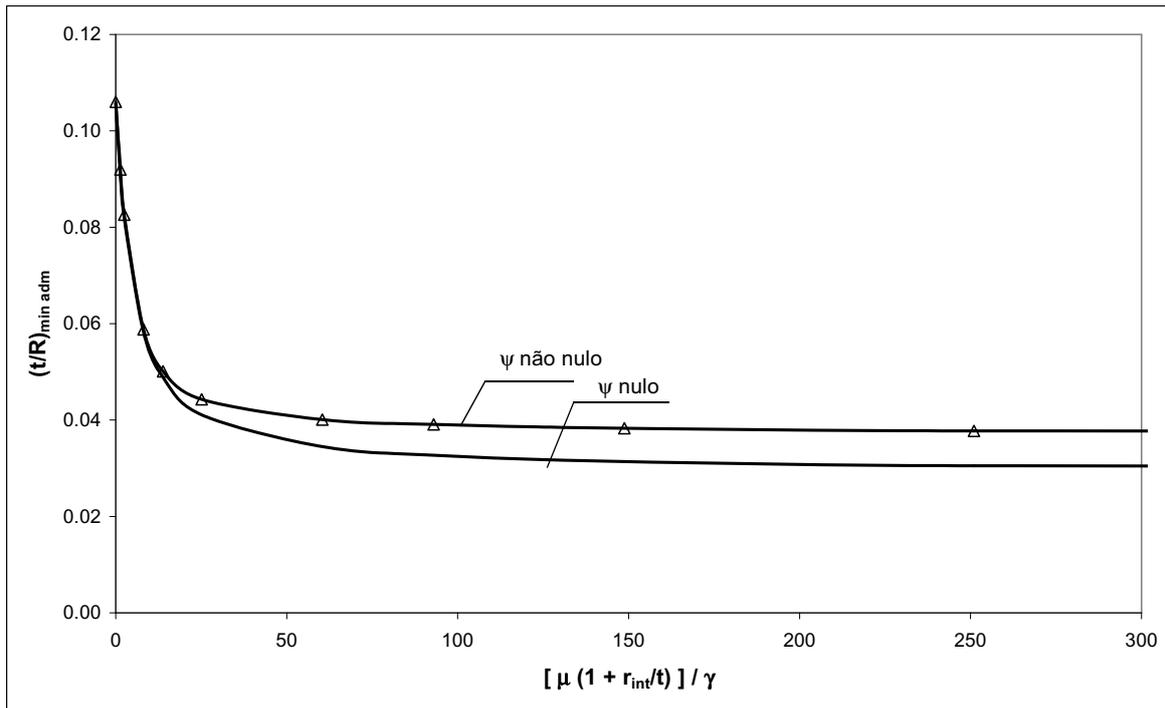


Figura 3.69 - Espessuras mínimas admissíveis de um arco circular completo sujeito à acção dos pesos próprios do arco e do material de enchimento no extradorso, obtidas através do mecanismo 1.

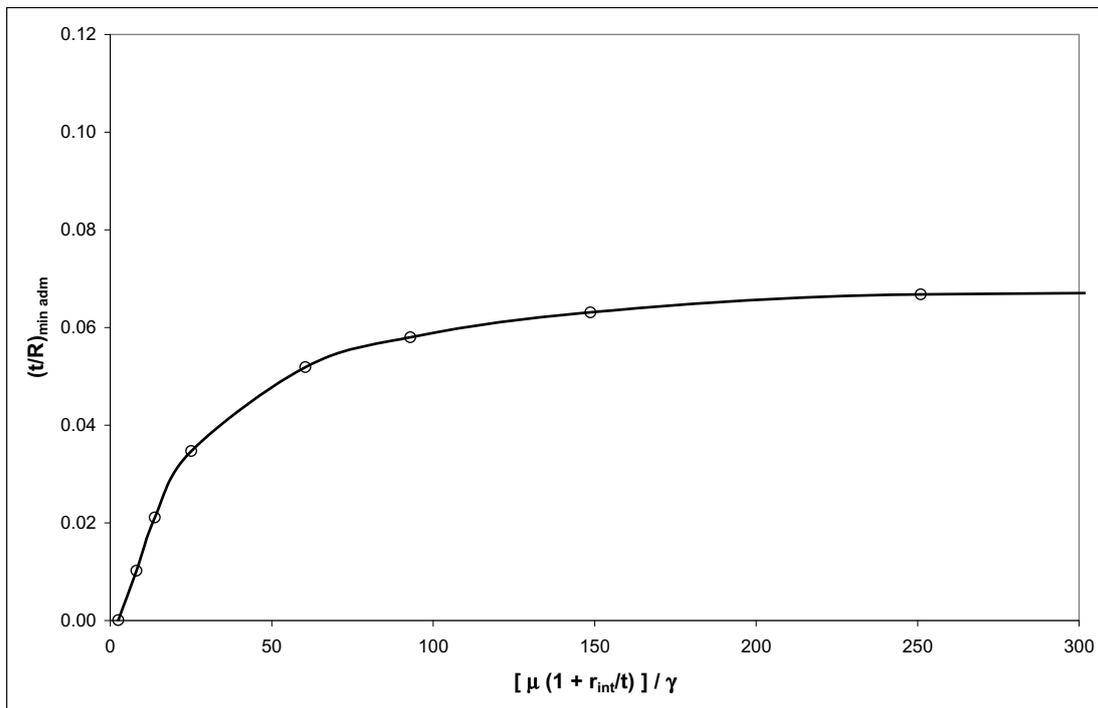


Figura 3.70 - Espessuras mínimas admissíveis de um arco circular completo sujeito à acção dos pesos próprios do arco e do material de enchimento no extradorso - obtidas através do mecanismo 2.

Na Figura 3.71 representa-se a envolvente dos diagramas das figuras anteriores, a qual, pelo teorema cinemático da análise limite, representa a variação das espessuras mínimas admissíveis

de um arco circular completo sujeito à acção dos pesos próprios do arco e do material de enchimento no seu extradorso. Como se pode observar, a espessura mínima admissível é decrescente com o aumento da intensidade do peso próprio do material de enchimento, o que mostra, uma vez mais, que o efeito das acções verticais correspondentes ao peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco é favorável para a sua estabilidade.

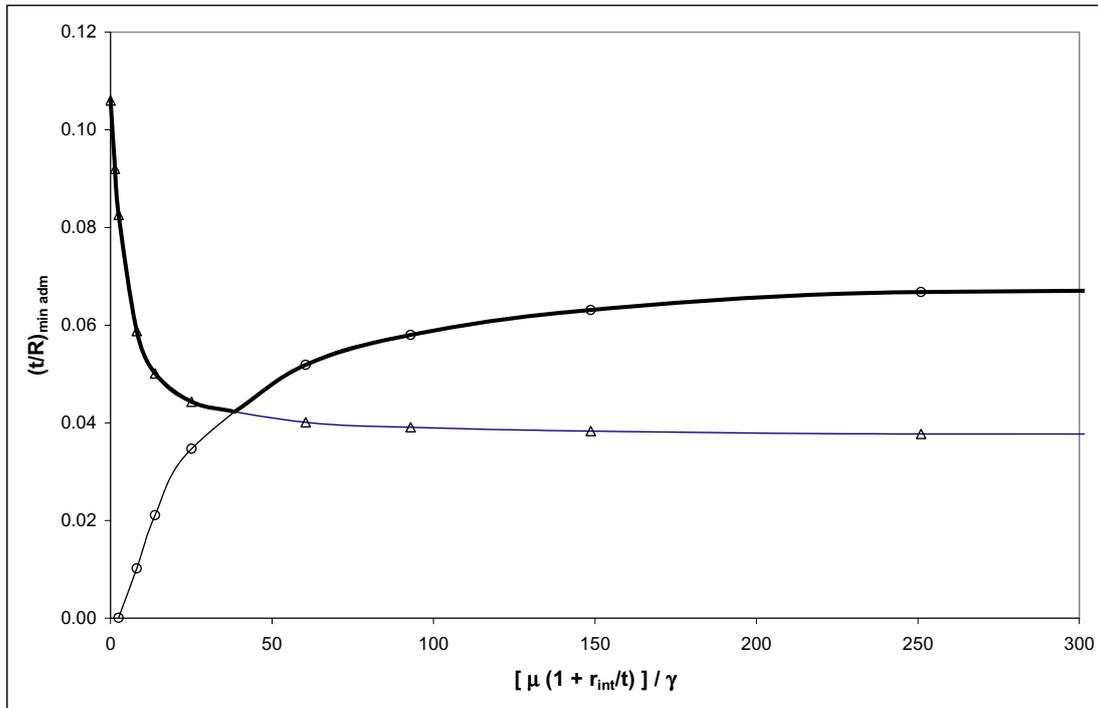


Figura 3.71 - Variação da espessura mínima admissível de um arco circular completo sujeito à acção do seu peso próprio e do material de enchimento no extradorso.

Num arco com uma dada geometria e sujeito a um dado carregamento, a posição da linha de pressões é indeterminada em virtude da redundância estática do problema. Assim, é possível identificar diferentes linhas de pressões incluídas na espessura do arco, sendo as correspondentes aos valores máximo e mínimo do impulso horizontal as que correspondem aos limites de localização das possíveis linhas de pressão (Figura 3.72). Deste modo, essas linhas limites definem uma região onde as linhas de pressão se podem localizar, quando em condições de equilíbrio, sendo a amplitude do intervalo entre as intensidades máxima e mínima do impulso horizontal, uma medida da segurança do arco.

O coeficiente de segurança geométrico, anteriormente definido como a relação entre a espessura real do arco e a sua espessura mínima admissível para as condições de carregamento em causa, pode ser reformulado tendo em conta os valores máximo (H_M) e mínimo (H_m) do impulso

horizontal actuante no arco. Deste modo, o coeficiente de segurança poderá ser definido por ^{Blasi e Foraboschi, 1994.}

$$\Phi = \frac{H_M - H_m}{(H_M + H_m) / 2} \quad (3.113)$$

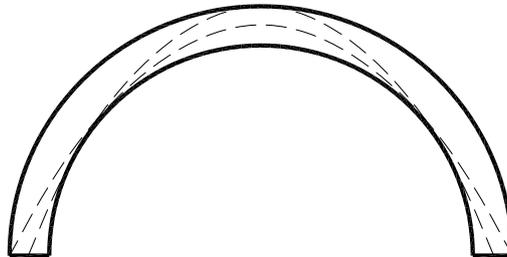


Figura 3.72 - Linhas de pressões correspondentes aos impulsos horizontal máximo e mínimo num arco circular completo.

Considerando um arco circular completo submetido à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída, as situações limites correspondentes aos impulsos horizontais máximo e mínimo são as representadas na Figura 3.73.

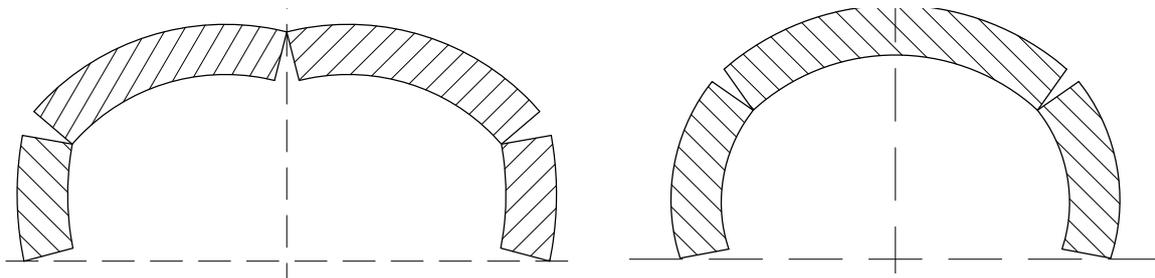


Figura 3.73 - Situações limites correspondentes aos impulsos horizontais máximo e mínimo.

Tendo em conta o diagrama de corpo livre do troço superior correspondente à situação de impulso horizontal mínimo (Figura 3.74) e sendo A a posição genérica da articulação nos rins do arco, a equação de equilíbrio de momentos em torno desse ponto é:

$$H_m((r + t) - r \cos \beta) - Q_1 d_1 - Q_2 d_2 = 0 \quad (3.114)$$

em que Q_1 , Q_2 , d_1 e d_2 são definidos, respectivamente, pelas equações (3.70), (3.84), (3.71) e (3.85), e H_m é o impulso horizontal mínimo.

Da expressão anterior obtém-se:

$$H_m = \left(r + \frac{t}{2}\right) t \gamma \left(r \sin \beta - \left(r - \frac{t}{2}\right) \frac{1 - \cos \beta}{\beta}\right) + \quad (3.115)$$

$$q(r + t) \sin \beta \left(\frac{r \sin \beta - \frac{r + t}{2} \sin \beta}{r + t - r \cos \beta}\right)$$

em que γ é o peso próprio do arco, por unidade de volume, e q a intensidade da carga uniformemente distribuída no vão do arco.

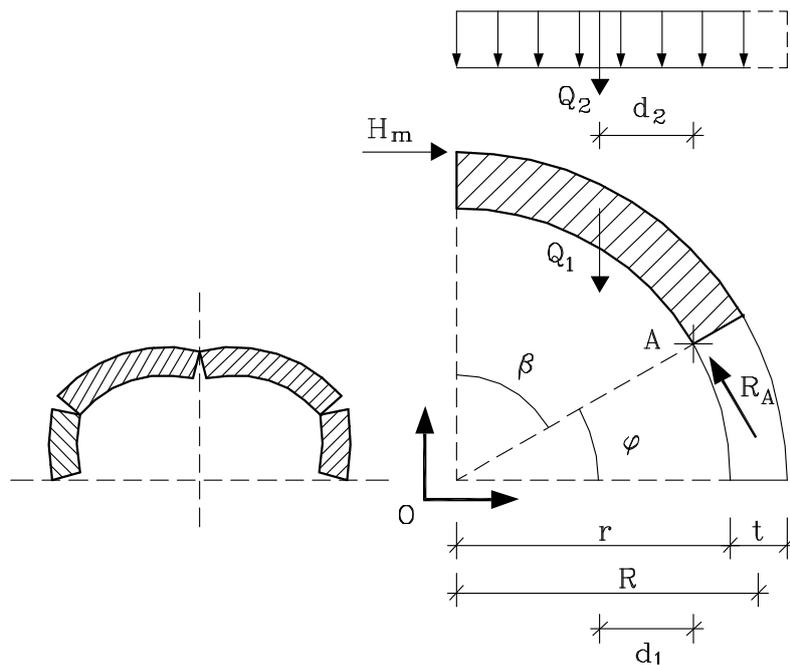


Figura 3.74 - Diagrama de corpo livre - situação limite de impulso horizontal mínimo, num arco circular completo sujeito à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.

Na expressão (3.115), o valor do impulso horizontal é função da posição da articulação A nos rins do arco (Figura 3.75), sendo o valor do ângulo β correspondente ao valor mínimo do impulso horizontal obtido através da maximização dessa expressão[†]. Deste modo, o valor de β será obtido pela resolução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dH_m}{d\beta} = 0 \quad (3.116)$$

O valor mínimo do impulso horizontal resulta da substituição na expressão (3.115) de β pelo valor encontrado na resolução da equação (3.116). Na Figura 3.76 representa-se o andamento da expressão (3.116) em função do ângulo β de localização da articulação A nos rins

[†] Pelos teoremas da análise limite.

do arco.

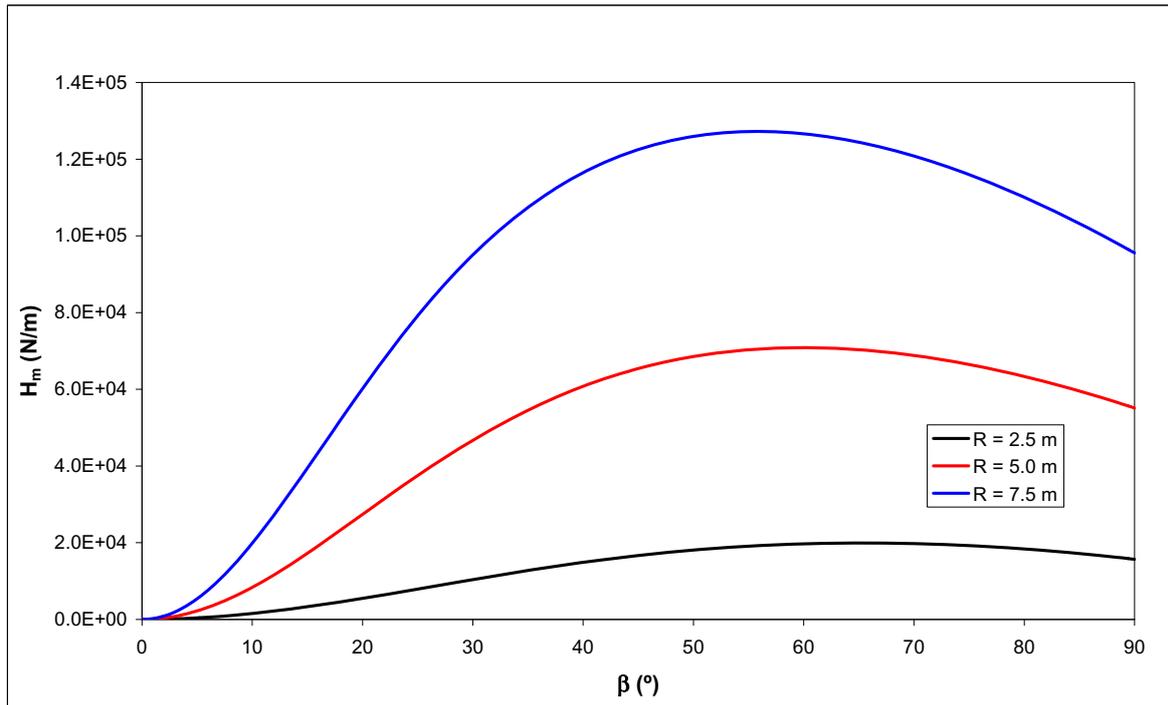


Figura 3.75 - Variação do impulso horizontal mínimo H_m em função do ângulo β de localização da articulação nos rins do arco ($q = 10 \text{ kN/m}^2$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 1.00 \text{ m}$, $R = 2.5; 5.0; 7.5 \text{ m}$).

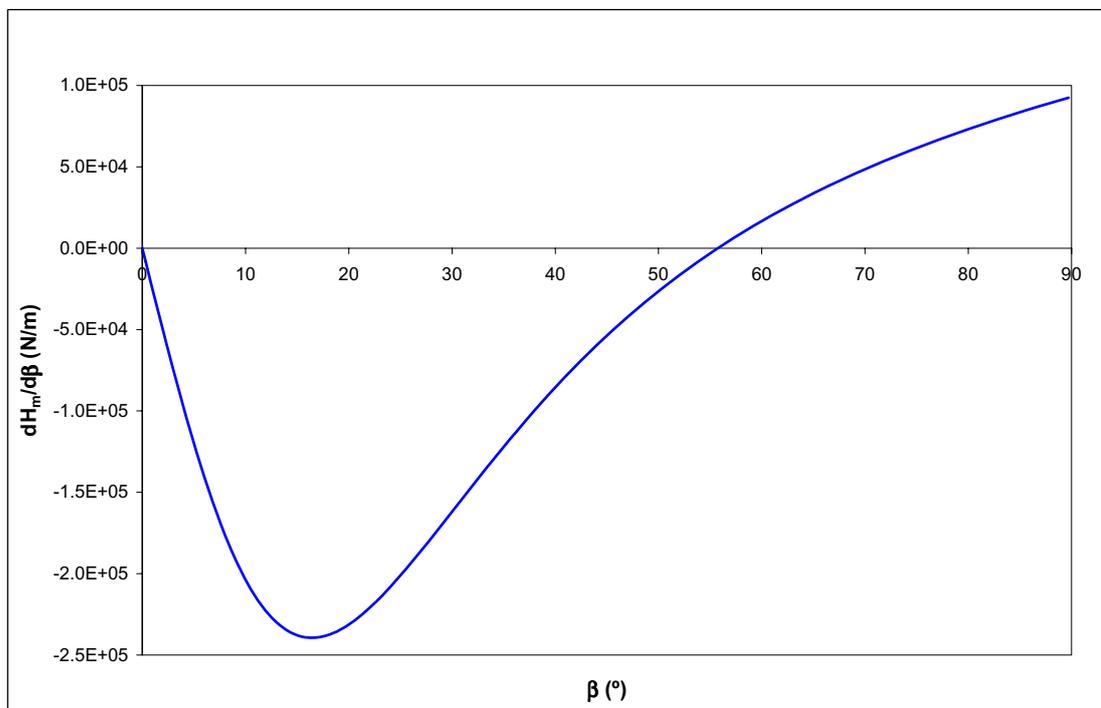


Figura 3.76 - Variação de $dH_m/d\beta$ em função do ângulo β de localização da articulação nos rins do arco ($q = 10 \text{ kN/m}^2$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 1.00 \text{ m}$, $R = 7.5 \text{ m}$).

A situação limite correspondente ao valor máximo do impulso horizontal é definida através de

duas articulações nos apoios e duas articulações no intradorso das pernas do arco (Figura 3.77).

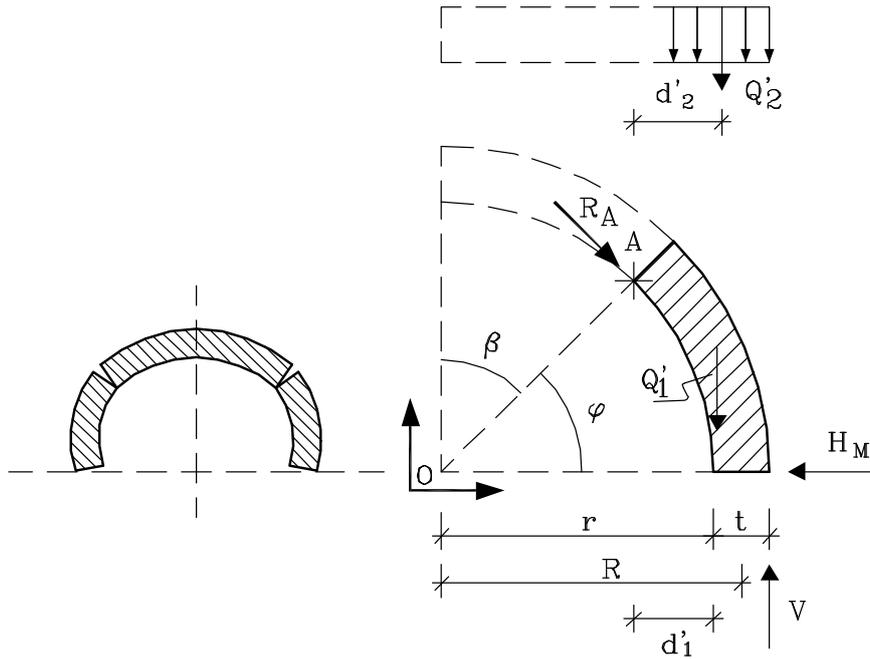


Figura 3.77 - Diagrama de corpo livre - situação limite de impulso horizontal máximo, de um arco circular completo sujeito à acção do seu peso próprio e de uma carga uniformemente distribuída no seu vão.

Sendo A a posição genérica da articulação nas pernas do arco, o equilíbrio de momentos do troço inferior conduz à seguinte expressão:

$$H_M r \cos \beta - V(r + t - r \sin \beta) + Q'_1 d'_1 + Q'_2 d'_2 = 0 \quad (3.117)$$

em que Q'_1, Q'_2, d'_1 e d'_2 são definidos, respectivamente, pelas equações (3.76), (3.89), (3.77) e (3.90).

Da equação (3.117) obtém-se:

$$H_M = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \left(r + \frac{t}{2} \right) t \gamma + q(r + t) \right) (r + t - r \sin \beta) - \left(r + \frac{t}{2} \right)^2 t \gamma \cos \beta \right. \\ \left. + \left(r + \frac{t}{2} \right) r t \gamma \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \sin \beta - 2q \left(\frac{r + t}{2} \right)^2 (1 - \sin \beta)^2 \right. \\ \left. - q(r + t)(1 - \sin \beta)t \sin \beta \right\} / (r \cos \beta) \quad (3.118)$$

Tal como no caso anterior, o valor do impulso horizontal é função da localização da articulação

A nos rins do arco (Figura 3.78), sendo o valor do ângulo β correspondente ao valor máximo do impulso horizontal obtido através da minimização desta expressão[†]. Assim, o valor do ângulo β será obtido pela resolução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dH_M}{d\beta} = 0 \quad (3.119)$$

O valor do impulso horizontal máximo resulta da expressão (3.118) pela substituição do valor de β encontrado na resolução da equação (3.119). Na Figura 3.79 representa-se o andamento dessa expressão em função do ângulo β que define a localização da articulação A nos rins do arco.

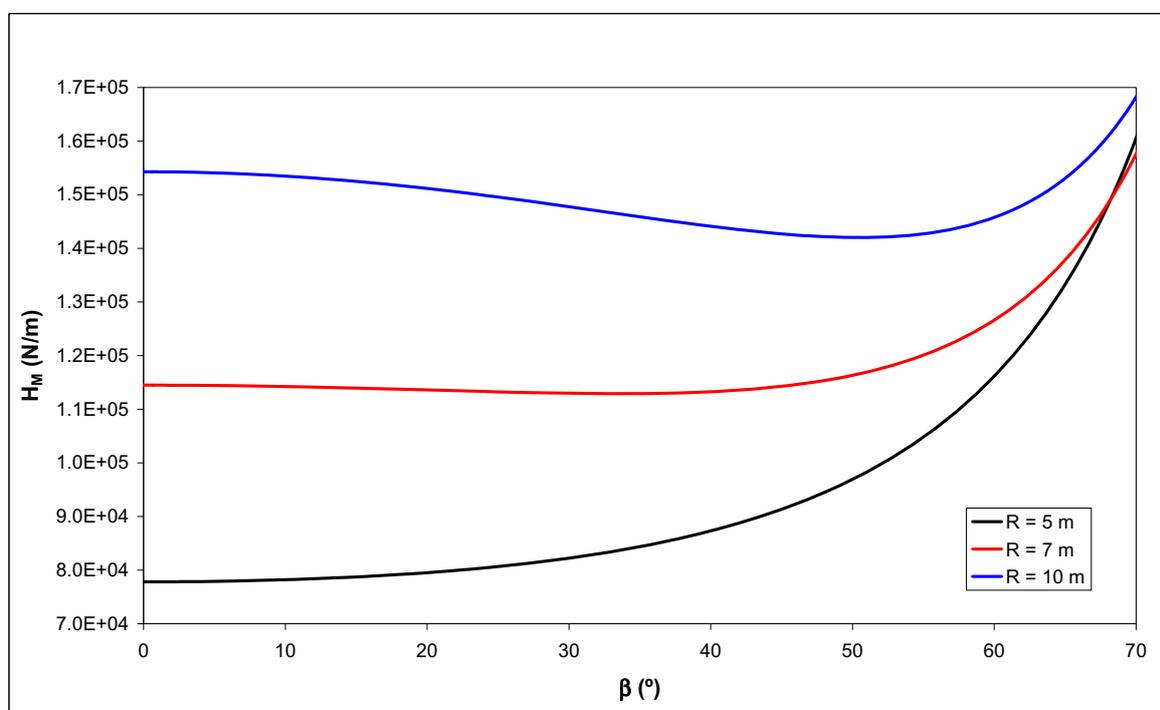


Figura 3.78 - Variação do impulso horizontal máximo H_M em função do ângulo β de localização da articulação nos rins do arco ($q = 10 \text{ kN/m}^2$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 1.00 \text{ m}$, $R = 2.5 ; 5.0 ; 7.5 \text{ m}$).

Para um dado arco, sujeito a um determinado carregamento, constata-se que ao diminuir a sua espessura o valor máximo do impulso horizontal diminui, ao passo que o valor mínimo desse impulso aumenta. Deste modo, haverá uma espessura para a qual esses dois valores se igualarão (Figura 3.80). Para esta espessura formar-se-ão em simultâneo as articulações correspondentes aos impulso horizontais máximo e mínimo, não sendo possível o equilíbrio do arco. Este valor equivale à espessura mínima admissível para o arco e correspondente carregamento.

[†] Pelos teoremas da análise limite.

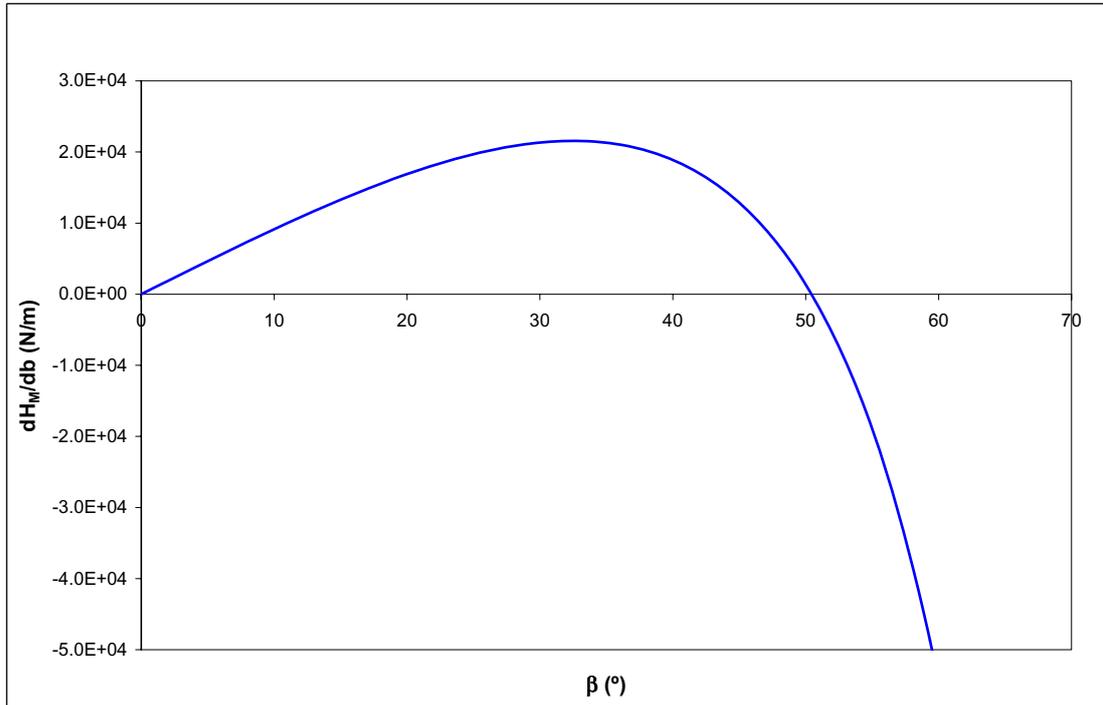


Figura 3.79 - Variação de $dH_M/d\beta$ em função do ângulo β de localização da articulação nos rins do arco ($q = 10 \text{ kN/m}^2$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 1.00 \text{ m}$, $R = 7.5 \text{ m}$).

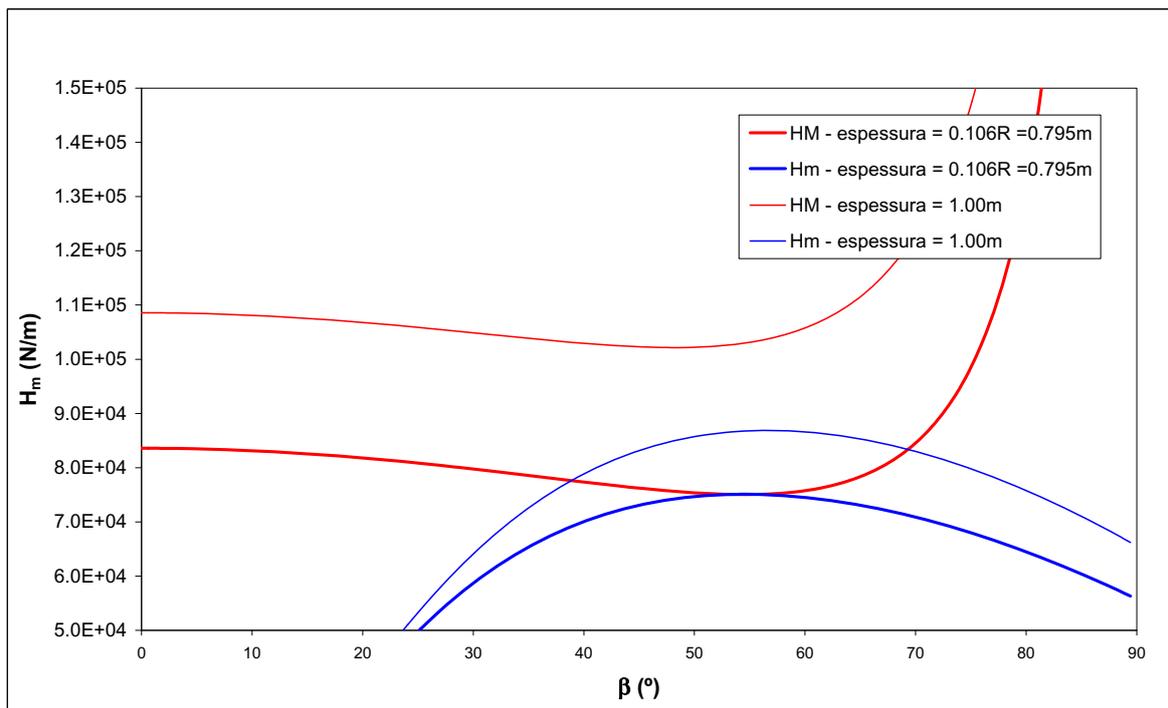


Figura 3.80 - Variação dos impulsos horizontais máximo e mínimo em função do ângulo β de localização da articulação nos rins do arco, para a situação correspondente à espessura mínima admissível ($t = 0.106R$) e para uma espessura superior à mínima ($q = 0$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $t = 0.795 \text{ m}$ e 1.00 m , $R = 7.5 \text{ m}$).

Considerando os resultados da Figura 3.80, identifica-se para a acção exclusiva do peso próprio

do arco uma relação entre a espessura mínima e o raio de:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = 0.106 \quad (3.120)$$

De igual forma, obteve-se para a acção exclusiva da carga uniformemente distribuída no vão do arco a seguinte relação:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = 0.133 \quad (3.121)$$

Valores coincidentes, como seria de esperar, com os obtidos anteriormente.

O efeito da limitação da resistência à compressão da alvenaria pode ser considerado nesta análise introduzindo uma diminuição na dimensão da espessura t do arco. Sendo σ_c^{adm} a tensão de compressão admissível do material, para se garantir que esse valor não é excedido, a distância da linha de pressões aos limites da secção do arco deverá ser inferior ao valor de ε dado por[†]:

$$\varepsilon = \frac{2N}{3\sigma_c^{adm}} \quad (3.122)$$

em que, tal como nos casos anteriores, se considerou para o arco uma largura unitária na direcção perpendicular ao seu plano.

Se se admitir a simplificação de que a distribuição das tensões de compressão na secção é uniforme, a expressão anterior toma a forma:

$$\varepsilon = \frac{N}{2\sigma_c^{adm}} \quad (3.123)$$

Para se garantir que a linha de pressões estará afastada dos limites da secção do arco de uma distância superior à distância limite ε , pode admitir-se no cálculo uma espessura fictícia da secção, t' , obtida através da redução de ε à altura real da secção:

$$t' = t - \varepsilon \quad (3.124)$$

[†] Conforme a expressão (3.12) do parágrafo 3.2.

Verifica-se que para ambas as situações limites, correspondentes ao impulso mínimo H_m e ao impulso máximo H_M , o valor do esforço normal condicionante é o correspondente à articulação nos rins do arco, cujo valor é definido por:

$$N_h = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(r + \frac{t}{2} \right) t \gamma + q \left(r + t \right) - \left(r + \frac{t}{2} \right) t \gamma \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \left(q r (1 - \sin \beta) \right)^2 + H^2} \quad (3.125)$$

em que H será H_m ou H_M , consoante o caso em estudo.

Substituindo a expressão (3.125) na equação (3.123), que define a excentricidade limite ϵ , e considerando a equação (3.124), obtém-se a seguinte expressão para a espessura reduzida t' :

$$t' = t - \frac{1}{2\sigma_c^{adm}} \sqrt{\left\{ \frac{\pi}{2} \left(r + \frac{t}{2} \right) t \gamma + q \left(r + t \right) - \left(r + \frac{t}{2} \right) t \gamma \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \left(q r (1 - \sin \beta) \right)^2 + H^2 \right\}} \quad (3.126)$$

Deste modo, após a determinação de H_m ou H_M para um dado valor da espessura t , essa espessura será reduzida através da expressão (3.126). Seguidamente deverá efectuar-se um novo cálculo para o valor limite da componente horizontal do impulso, tendo em conta a espessura reduzida t' . A este novo valor do impulso horizontal limite corresponderá uma nova diminuição da espessura e assim sucessivamente. O processo iterativo deverá terminar quando os resultados obtidos em duas iterações sucessivas são suficientemente próximos.

Na Figura 3.81 representam-se os resultados da análise de um arco circular completo com peso próprio $\gamma = 26 \text{ kN/m}^3$ e uma tensão limite de compressão $\sigma_{lim} = 7 \text{ MPa}$. Admitiu-se uma sobrecarga muito elevada, $q = 1000 \text{ kN/m}^2$, de modo a que surjam tensões de compressão no arco da ordem da tensão limite de compressão e o efeito da diminuição da espessura seja significativo. O raio considerado para o arco foi de 7.50 m e a espessura de 1.50 m.

Como se pode observar na Figura 3.81, os gráficos dos impulsos horizontais máximo e mínimo correspondentes à análise sem consideração da tensão limite de compressão (linhas de menor espessura na parte inferior do gráfico), estão suficientemente afastados, pelo que, nessa circunstância, a espessura admitida é superior à espessura mínima admissível. Nos gráficos da

análise em que se admitiu a redução da espessura do arco devida ao efeito da tensão limite de compressão (linhas de maior espessura na parte superior do gráfico) há sobreposição no intervalo de 45° a 70°, o que significa impulsos horizontais mínimos superiores aos impulsos horizontais máximos. Esta situação não é possível, o que indica que a espessura $t = 1.50$ m (que foi reduzida para 0.91 m por efeito da tensão limite de compressão) é inferior à mínima admissível.

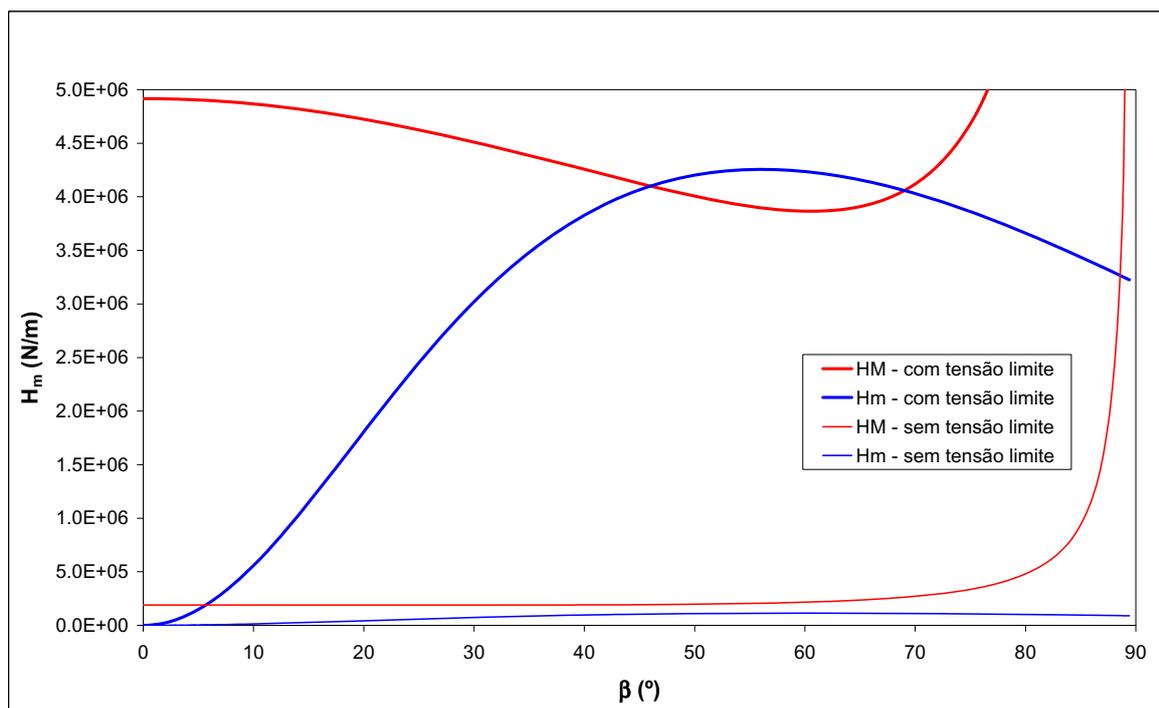


Figura 3.81 - Variação dos impulsos horizontais máximo e mínimo correspondentes às análises com e sem consideração do efeito da tensão limite de compressão ($q = 1000$ kN/m², $\gamma = 20$ kN/m³, $t = 1.50$ m, $R = 7.5$ m, $\sigma_{lim} = 7$ MPa).

Em geral, o efeito da tensão limite de compressão não é tão significativo como neste exemplo, em que se considerou uma sobrecarga muito elevada. Este processo iterativo para consideração da limitação da resistência à compressão do material, embora útil em casos especiais de carregamento, não tem, em geral, efeitos significativos, podendo não ser considerado nas situações correntes de carregamento e de resistência dos materiais.

3.8.3 - Arcos Sujeitos à Acção de Cargas Concentradas. Cargas de Colapso

Como referido no parágrafo 3.6, as estruturas de alvenaria, em particular os arcos e abóbadas com comportamento bidimensional, podem ser analisados pela teoria da análise limite.

Desprezando a deformabilidade dos elementos estruturais e admitindo que toda a deformação da estrutura ocorre localizadamente pela abertura das juntas entre elementos, pode considerar-se que estas estruturas têm um comportamento rígido-plástico semelhante ao que se considera na análise limite de estruturas. O cálculo das cargas de colapso de arcos ou abóbadas bidimensionais pode, então, ser efectuado utilizando as mesmas técnicas desenvolvidas para a análise limite de pórticos metálicos. Considerando um carregamento proporcional, a teoria da análise limite permite determinar o coeficiente majorador da solicitação que conduz ao colapso, i. e. a carga de colapso.

O teorema cinemático da análise limite (parágrafo 3.6) estabelece que de entre todas as distribuições de deformação, isto é, mecanismos, cinematicamente admissíveis, o que define o colapso é aquele que corresponde ao menor parâmetro de carga, sendo o parâmetro de carga correspondente a um dado mecanismo cinematicamente admissível calculado de modo a que a energia dissipada internamente seja igual à energia dissipada pelas forças exteriores. No caso das estruturas em alvenaria, este balanço corresponde ao equilíbrio dos trabalhos realizados pelas cargas variáveis (proporcionais) e pelas cargas permanentes.

O teorema estático da análise limite estabelece que de entre todas as distribuições de esforços estaticamente admissíveis, a que equivale ao colapso é a que corresponde ao maior parâmetro de carga. No caso de estruturas de alvenaria, uma distribuição de esforços estaticamente admissível corresponde a uma linha de pressões totalmente incluída no interior da espessura da estrutura.

Dos dois teoremas anteriores resulta o teorema da unicidade, que estabelece que se para um dado parâmetro de carga correspondente a uma distribuição de deformações cinematicamente admissível, se poder definir uma distribuição de esforços estaticamente admissível, então esse parâmetro de carga é o parâmetro de colapso.

Para um arco circular submetido à acção de cargas permanentes (peso próprio, sobrecarga uniformemente distribuída no vão e peso próprio do material de enchimento no extradorso) e de uma carga concentrada variável P , o correspondente mecanismo de colapso é formado por 4 articulações: duas junto das impostas e outras duas nos rins do arco (Figura 3.82). Admite-se, como anteriormente, que os troços entre articulações são suficientemente estáveis, movendo-se

como corpos rígidos e que o escorregamento das juntas está impedido. A localização das articulações, de acordo com o teorema cinemático, é a que minimiza a correspondente carga de colapso.

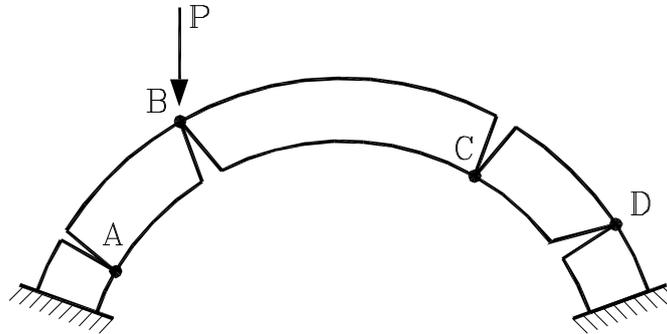


Figura 3.82 - Mecanismo de colapso de um arco submetido à acção de uma carga concentrada.

Considerando posições genéricas para as articulações do mecanismo cinematicamente admissível (Figura 3.83), o correspondente parâmetro de carga, neste caso a própria carga P , será determinada fazendo o balanço do trabalho realizado nesse campo de deslocamentos pela totalidade das forças aplicadas (Figura 3.84). A equação que define o valor da carga concentrada P é, portanto:

$$P\Delta v_P + (Q_{pp1}\Delta v_{pp1} + Q_{sc1}\Delta v_{sc1} + Q_{gg1}\Delta v_{gg1}) + (Q_{pp2}\Delta v_{pp2} + Q_{sc2}\Delta v_{sc2} + Q_{gg2}\Delta v_{gg2}) + (Q_{pp3}\Delta v_{pp3} + Q_{sc3}\Delta v_{sc3} + Q_{gg3}\Delta v_{gg3}) = 0 \quad (3.127)$$

em que $\Delta v_P, \Delta v_{pp1}, \Delta v_{pp2}, \Delta v_{pp3}, \Delta v_{sc1}, \Delta v_{sc2}, \Delta v_{sc3}, \Delta v_{gg1}, \Delta v_{gg2}$ e Δv_{gg3} são os deslocamentos verticais dos pontos de aplicação da carga concentrada P e das resultantes das cargas permanentes: peso próprio do arco (pp), sobrecarga uniformemente distribuída na sua largura (sc) e peso próprio do material de enchimento no extradorso do arco (gg).

Na equação (3.127), as intensidades das resultantes das cargas permanentes actuantes nos diferentes troços do arco e as dimensões dos deslocamentos dos pontos de aplicação das forças são dependentes dos valores dos ângulos $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$ e α_D , que definem a localização das articulações do mecanismo. Assim, definindo valores para esses ângulos, ou seja, definindo um mecanismo cinematicamente admissível, é possível determinar pela equação (3.127) a correspondente carga P .

De acordo com o teorema cinemático, para determinar o valor da carga de colapso deve

"percorrer-se" todas as possibilidades de localização das articulações e seleccionar o mecanismo que corresponde à menor intensidade da carga P ; essa é a carga de colapso da estrutura. Esta metodologia foi implementada numericamente, tendo-se considerado a possibilidade de os ângulos α_A , α_B , α_C e α_D variarem livremente. Nas análises efectuadas verificou-se que no mecanismo correspondente ao valor mínimo da carga P nem sempre a articulação D (Figura 3.83) ocorre na secção da imposta†.

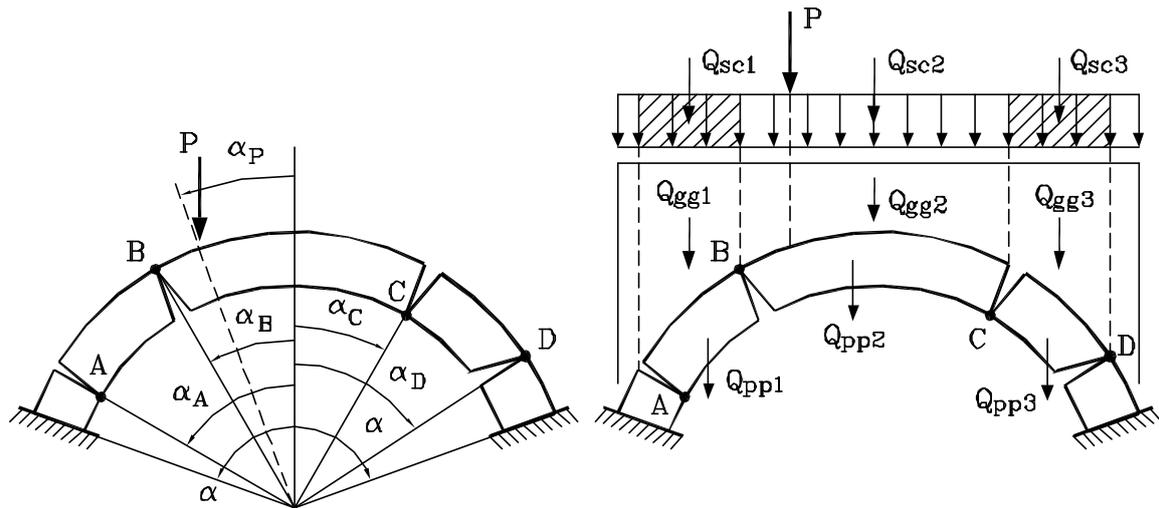


Figura 3.83 - Mecanismo cinematicamente admissível de um arco submetido à acção do peso próprio do arco e do material de enchimento no seu extradorso, sobrecarga uniforme e de uma carga concentrada.

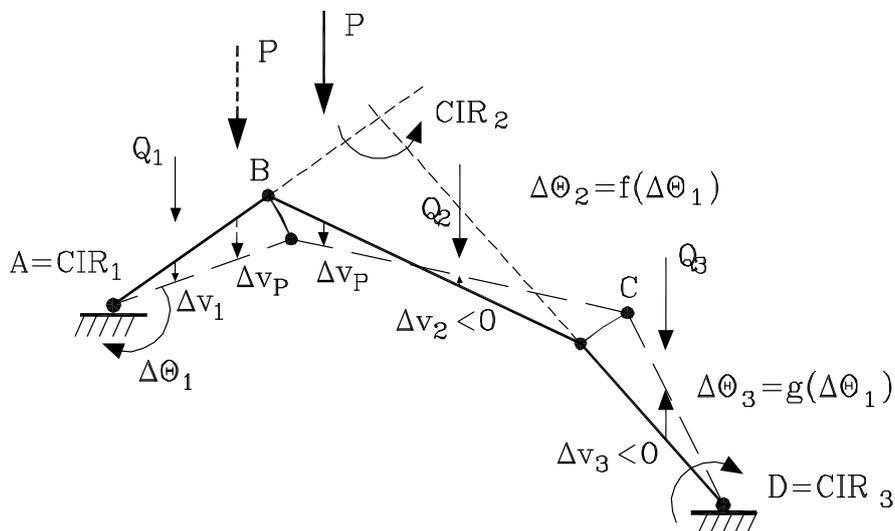


Figura 3.84 - Cálculo dos deslocamentos num mecanismo cinematicamente admissível.

Na Figura 3.86 e na Figura 3.87 representam-se os valores de cargas concentradas actuantes em arcos circulares correspondentes ao colapso, obtidos através da metodologia anterior, em que se

† Contrariamente ao assumido por outros autores ^{Crisfield, 1985}, que admitem a hipótese dessa articulação se localizar na base do arco.

considerou diferentes situações de carregamento permanente e diferentes relações vão-altura do arco (Figura 3.85).

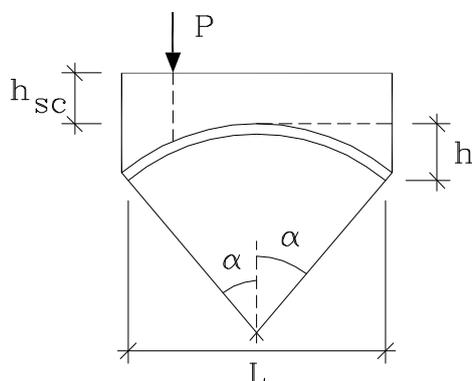


Figura 3.85 - Geometria do arco.

Como se pode observar na Figura 3.86 e na Figura 3.87, a intensidade da carga de colapso depende grandemente da localização do seu ponto de aplicação, da relação vão-altura do arco e da presença de cargas verticais de confinamento, correspondentes ao enchimento no extradorso do arco. Tal como nos casos estudados anteriormente, também no arco submetido à acção de cargas concentradas se verifica um efeito favorável do carregamento no extradorso. Arcos abatidos correspondem a cargas de colapso de intensidade superior e com pontos de aplicação correspondentes à carga de colapso mínima cada vez mais afastados do eixo do arco, não sendo possível definir a localização mais desfavorável da carga independentemente da relação vão-altura do arco. Na Figura 3.88 representa-se o gráfico das localizações mais desfavoráveis de cargas concentradas, verificando-se que para relações entre 2 e 4 a localização mais gravosa da carga se situa próxima de 1/3 a 1/4 do vão.

Observe-se que se admitiram nesta análise as hipóteses de aplicabilidade da teoria da análise limite a estruturas de alvenaria (parágrafo 3.6), isto é, considerou-se que a alvenaria apresenta uma resistência nula a tensões de tracção, uma resistência infinita ao esmagamento por compressão e que não ocorrem deslizamentos relativos nas juntas entre elementos. Considerando estas hipóteses, a resistência de arcos excessivamente abatidos sujeitos à acção de cargas concentradas tenderá para o infinito, uma vez que será sempre possível inscrever a linha de pressões correspondente à carga concentrada (bi-linear) na espessura do arco (Figura 3.89). No entanto, com o aumento da intensidade da carga de colapso correspondente a este mecanismo rotacional, o mecanismo de escorregamento tornar-se-á condicionante e, obviamente, a carga de colapso não é infinitamente grande.

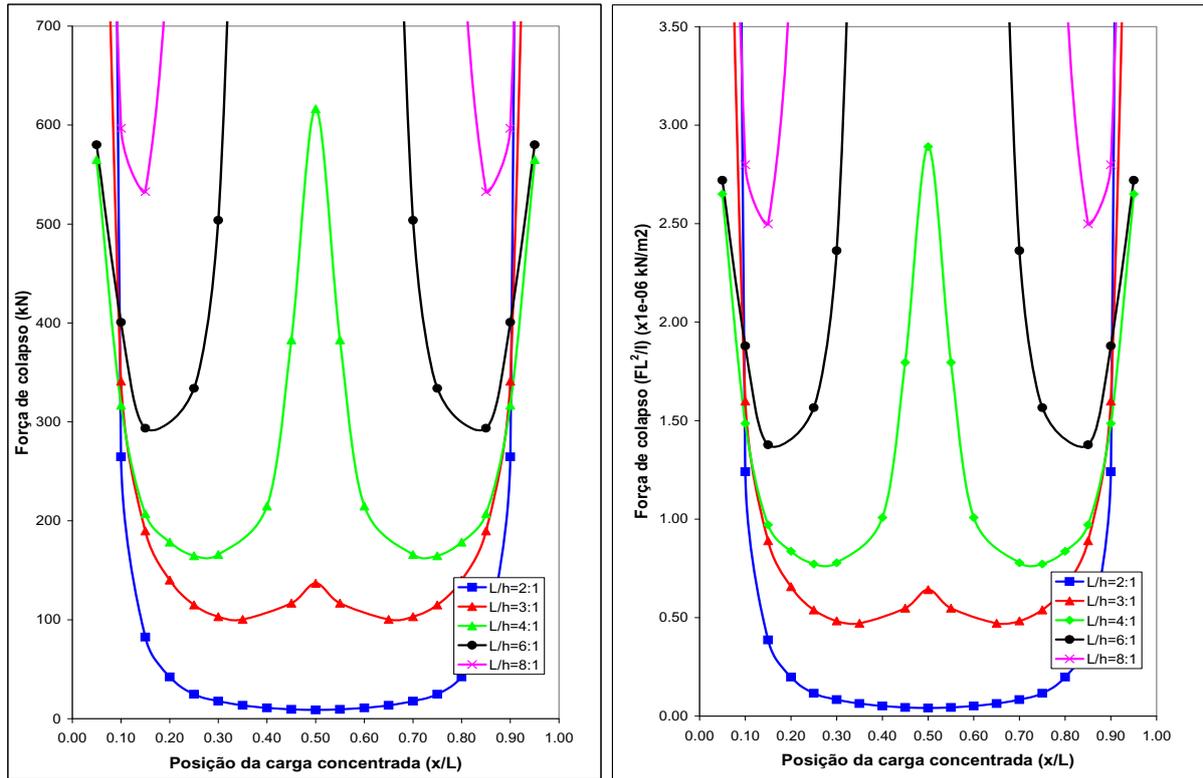


Figura 3.86 - Cargas de colapso em função da localização do ponto de aplicação e da relação L/h - acção exclusiva do peso próprio do arco ($pp = 26.8 \text{ kN/m}^3$) - esq: valores em kN; dta: valores normalizados.

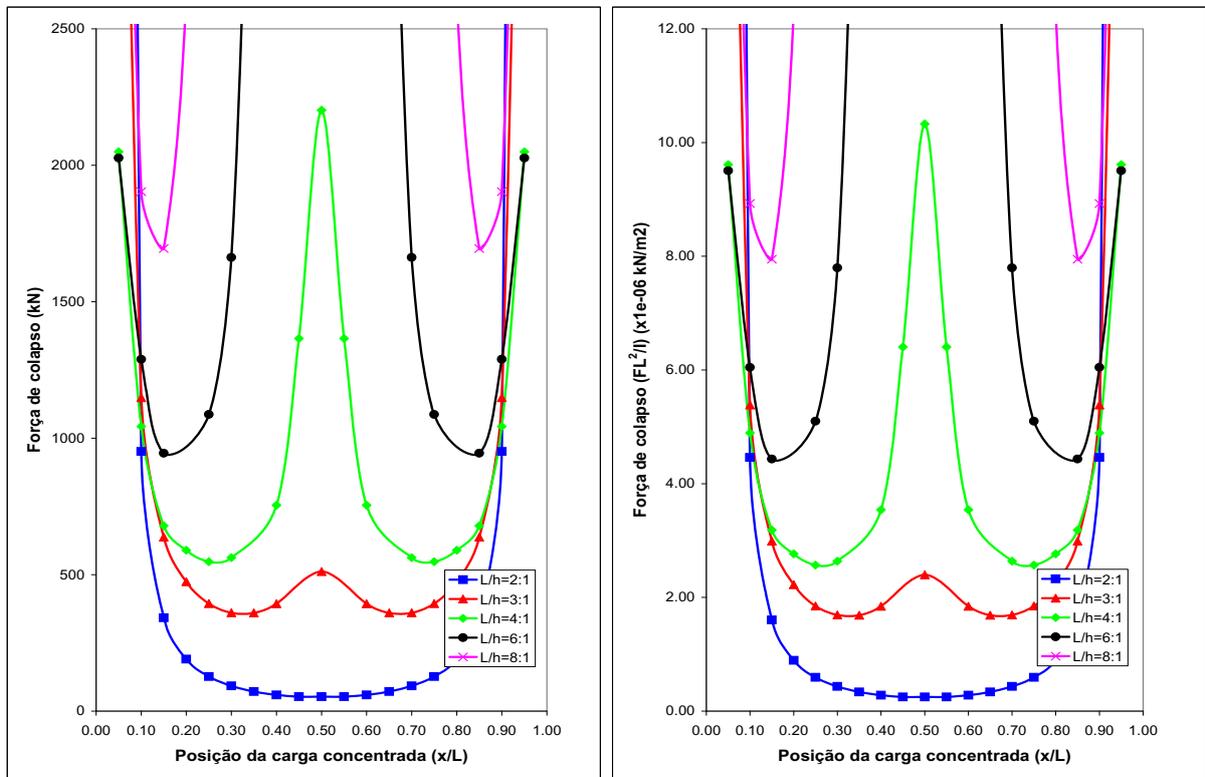


Figura 3.87 - Cargas de colapso em função da localização do ponto de aplicação e da relação L/h - acção do peso próprio do arco ($pp = 26.8 \text{ kN/m}^3$) e do material de enchimento no extradorso ($\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$), que se considerou com 1.76 m de altura acima do fecho ($h_{sc} = 1.76 \text{ m}$) - esq: valores em kN; dta: valores normalizados.

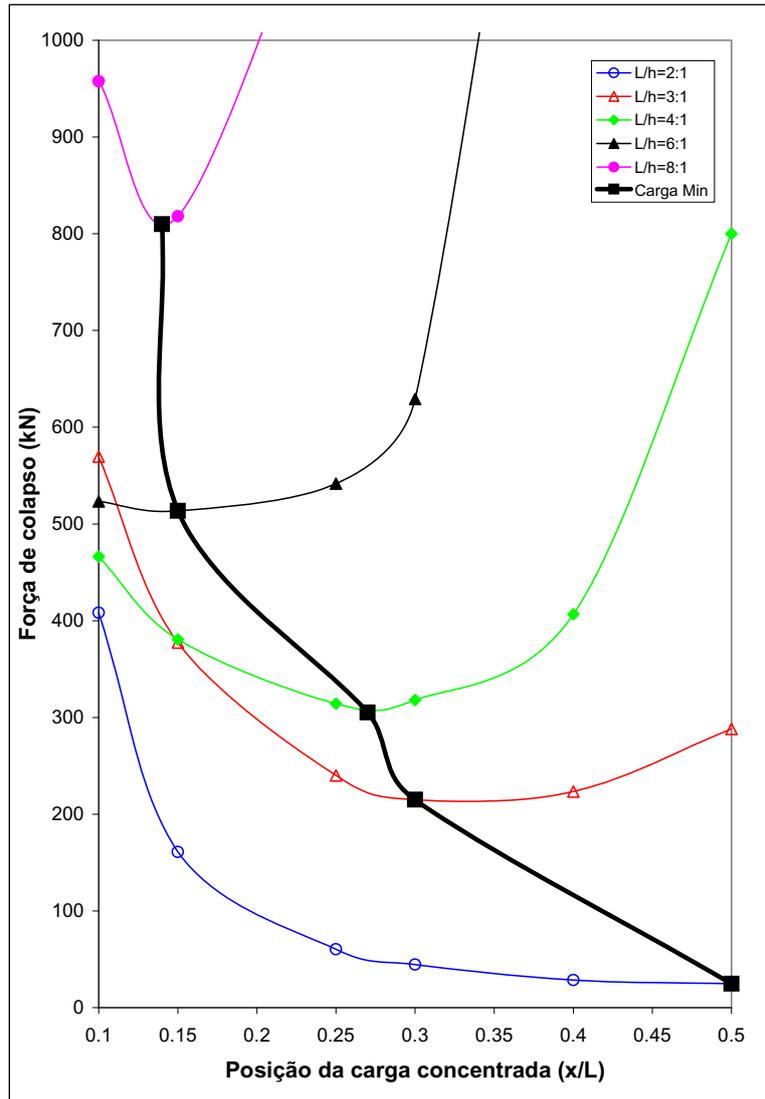


Figura 3.88 - Localização mais desfavorável da carga concentrada - arco sujeito à acção de uma carga concentrada e do seu peso próprio.

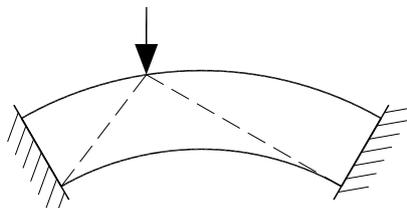


Figura 3.89 - Arco abatido e linha de pressões bi-linear correspondente à acção concentrada.

Como já foi referido, o efeito favorável do enchimento no extradorso do arco não se limita à função estabilizadora da acção vertical correspondente: quanto mais intensa for a acção vertical correspondente ao peso próprio do material de enchimento, maior capacidade de "absorção" do efeito da carga concentrada terá a correspondente linha de pressões e, conseqüentemente, mais estável será o arco. Por outro lado, a dispersão da carga concentrada através do material de

enchimento (Figura 3.90) resulta numa acção distribuída sobre o extradorso do arco, a qual produzirá, para um mesmo mecanismo cinematicamente admissível, menor trabalho que a carga concentrada (Figura 3.91). Deste modo, o valor da intensidade da carga de colapso que resulta da equação de balanço energético (3.127) será, evidentemente, maior.

Na Figura 3.90 representam-se duas alternativas para a simulação da distribuição da carga concentrada através do material de enchimento: uma em que se considera uma pressão uniforme sobre o extradorso do arco e, outra, em que se admite uma variação linear da pressão entre os 2 pontos extremos da área de influência da carga.

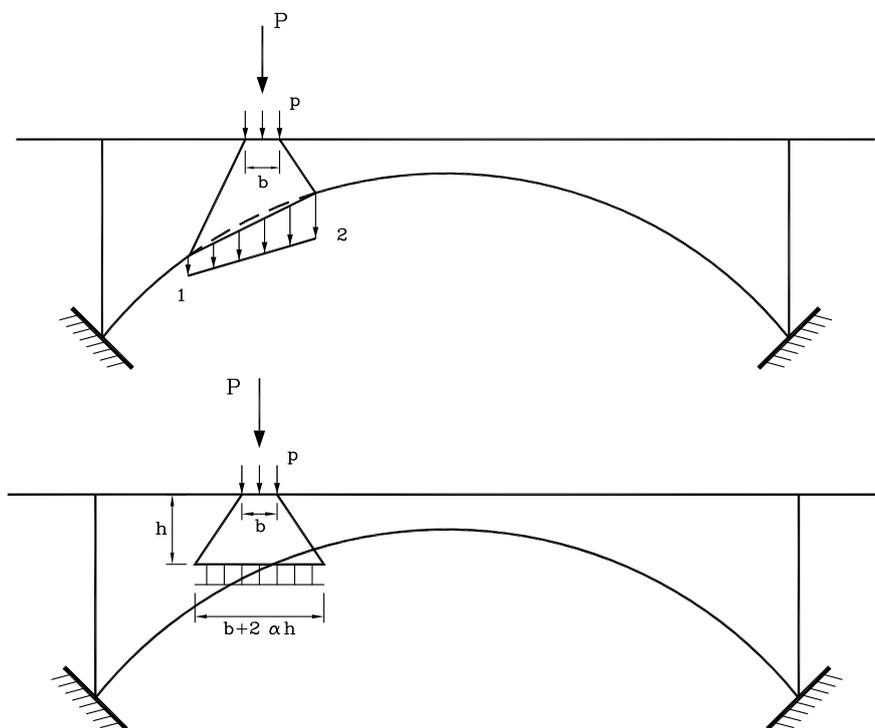


Figura 3.90 - Dispersão da carga concentrada através do material de enchimento no extradorso do arco.

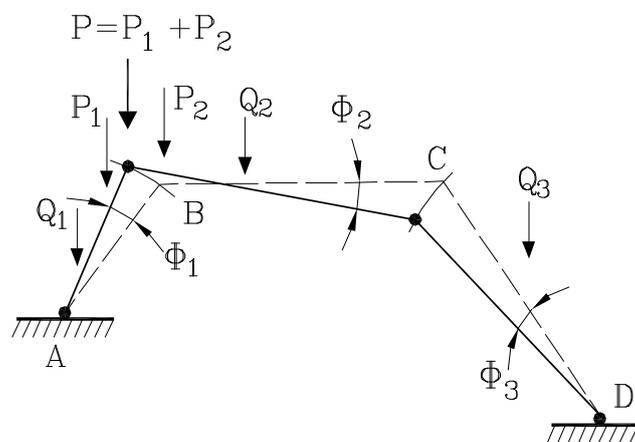


Figura 3.91 - Efeito da dispersão da carga concentrada através do material de enchimento.

Mais importante que os dois efeitos atrás descritos, parece ser o efeito de “rigidificação lateral” que o material de enchimento no extradorso produz na resposta do arco. Nos métodos de análise limite de arcos, que se discutem neste parágrafo, a consideração desse efeito pode efectuar-se, simplificada, através da consideração do impulso passivo do material que constitui o enchimento. Tendo em conta o arco representado na Figura 3.92 e considerando a rotação da cunha CDE , o trabalho realizado pelo impulso passivo H_f é:

$$\tau = H_f \Delta h = H_f \bar{y} \Delta \theta_3 \quad (3.128)$$

em que $\Delta \theta_3$ é a rotação do troço CD do arco e \bar{y} a ordenada que define a posição da resultante do impulso passivo H_f . A ordenada \bar{y} é dada por:

$$\bar{y} = d_0 - \frac{2(d_0^3 - d_C^3)}{3(d_0^2 - d_C^2)} \quad (3.129)$$

e a resultante H_f por:

$$H_f = \frac{1}{2} \rho k_p (d_0^2 - d_C^2) \quad (3.130)$$

sendo ρ a densidade do material de enchimento e k_p o coeficiente de impulso passivo, o qual é definido por:

$$k_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (3.131)$$

em que ϕ é o ângulo de atrito interno do material de enchimento.

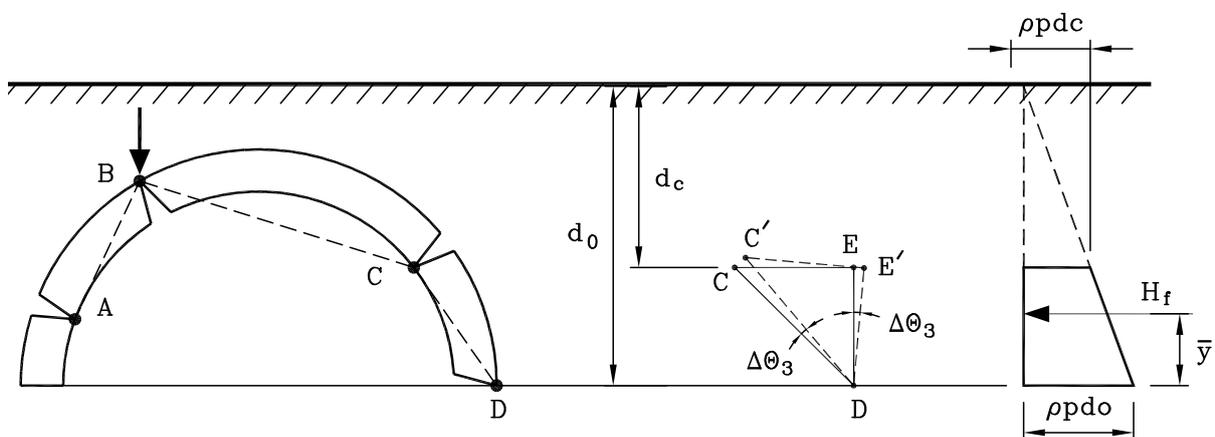


Figura 3.92 - Modelo para consideração do impulso do material de enchimento no extradorso do arco.

Introduzindo na equação (3.127) de balanço energético, o trabalho realizado pela resultante do impulso passivo (expressão (3.128)), obtém-se uma nova equação que permite determinar, em função do mecanismo cinematicamente admissível considerado, a correspondente carga P .

Na Figura 3.93 representam-se os resultados da implementação numérica desta estratégia, onde é visível a clara influência do efeito do impulso lateral do material de enchimento do extradorso do arco.

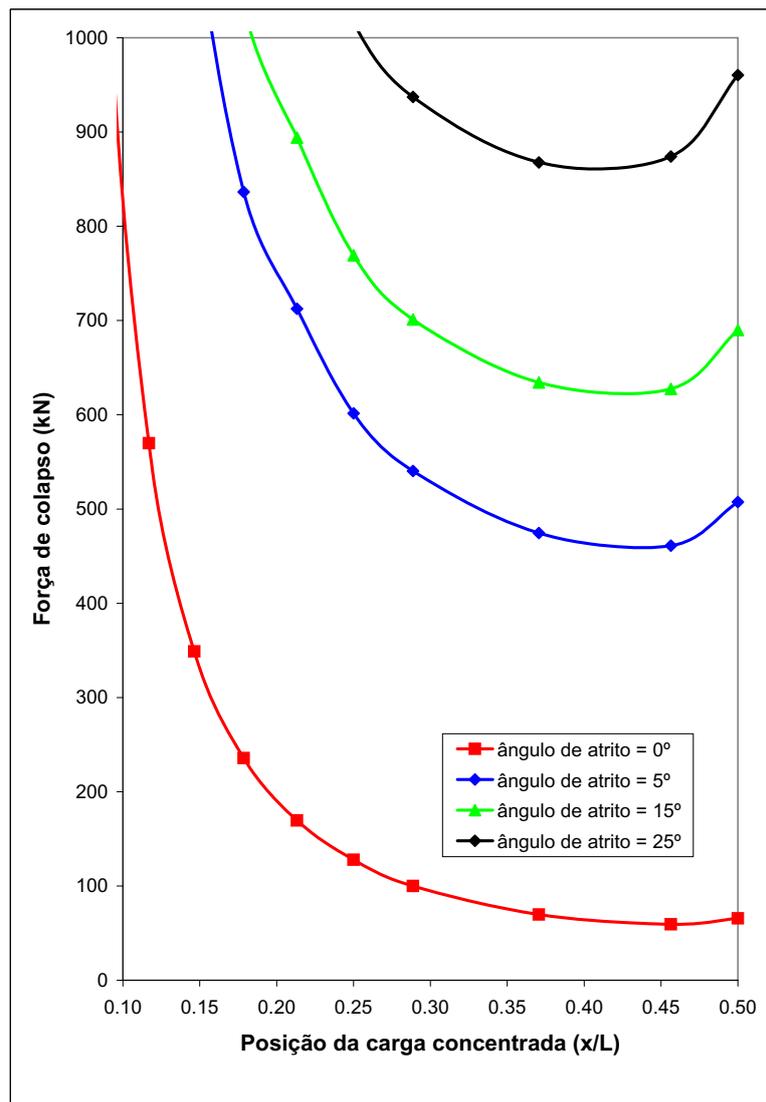


Figura 3.93 - Efeito do impulso passivo do material de enchimento - arco circular ($r = 5.18$ m, $t = 0.65$ m, $L/h = 2:1$) sujeito à acção do seu peso próprio (26.8 kN/m³), do peso próprio do material de enchimento (20.0 kN/m³), que se considerou ter a altura acima do fecho de 1.76 m ($h_{sc} = 1.76$ m).

O efeito da plastificação das secções por esmagamento das arestas de rotação também pode ser considerado neste tipo de análise ^{Crisfield,1985;Crisfield e Packaham,1987}. Para tal, admitindo a

plastificação das secções de fractura A , B , C e D , nas profundidades d_A , d_B , d_C e d_D , respectivamente (Figura 3.94), a equação de balanço energético tomará a forma:

$$\begin{aligned}
 P\Delta v_P + (Q_{pp1}\Delta v_{pp1} + Q_{sc1}\Delta v_{sc1} + Q_{gg1}\Delta v_{gg1}) + (Q_{pp2}\Delta v_{pp2} + Q_{sc2}\Delta v_{sc2} + Q_{gg2}\Delta v_{gg2}) + \\
 (Q_{pp3}\Delta v_{pp3} + Q_{sc3}\Delta v_{sc3} + Q_{gg3}\Delta v_{gg3}) + H_f\Delta h + \frac{1}{2}d_A^2\sigma_c^{adm} + \frac{1}{2}d_B^2\sigma_c^{adm}(1 + \Delta\theta_2) + \\
 \frac{1}{2}d_C^2\sigma_c^{adm}(\Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) + \frac{1}{2}d_D^2\sigma_c^{adm}\Delta\theta_3 = 0
 \end{aligned} \quad (3.132)$$

em que σ_c^{adm} é a tensão máxima admissível de compressão do material e os deslocamentos deverão ser calculados considerando que os eixos de rotação coincidem com as extremidades das zonas plastificadas (Figura 3.95).

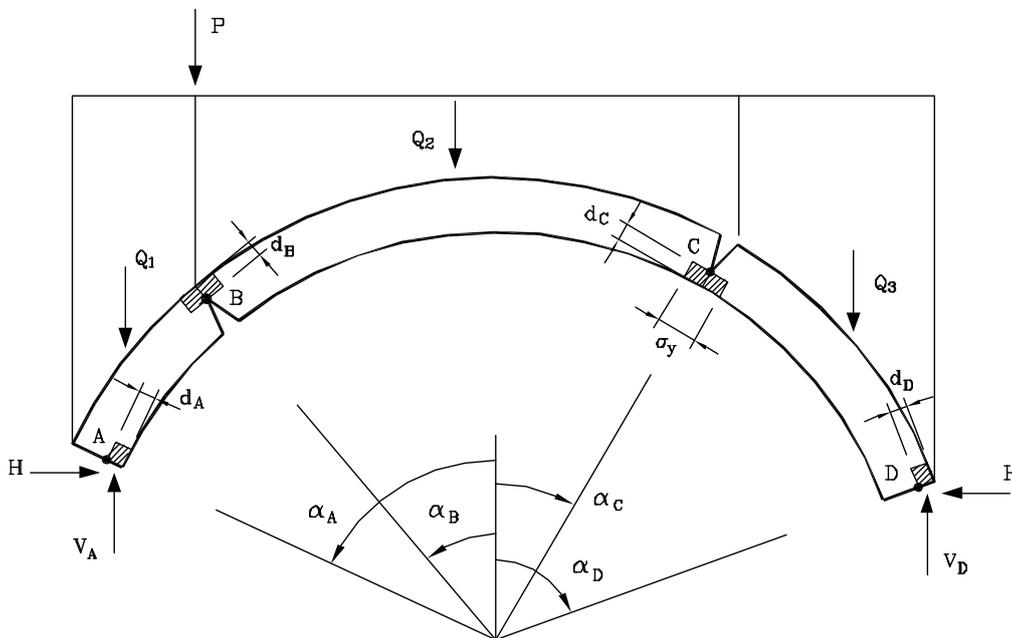


Figura 3.94 - Plastificação das secções do arco.

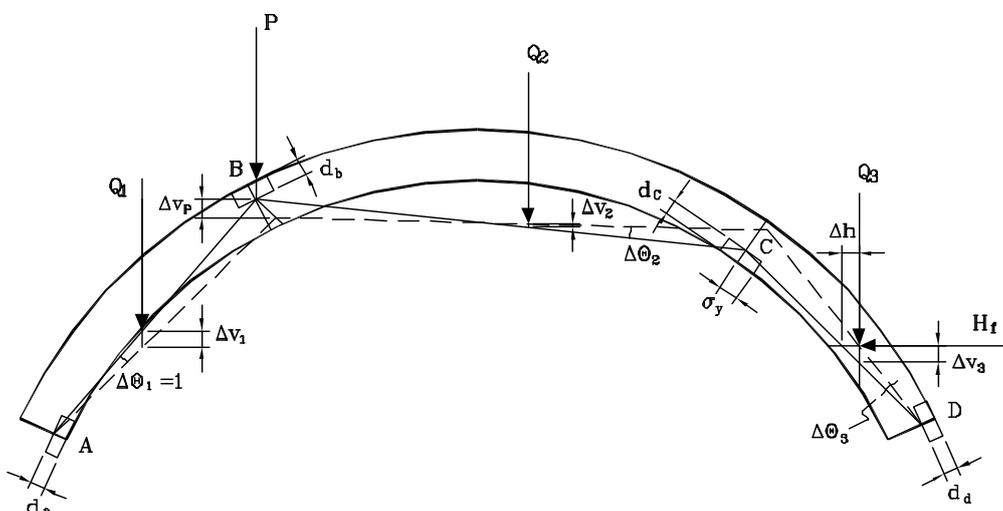


Figura 3.95 - Deslocamentos dos pontos de aplicação das forças.

Não sendo à partida conhecidas as dimensões das zonas plastificadas, d_A , d_B , d_C e d_D , uma alternativa é determiná-las iterativamente a partir da equação (3.132): considerando para cada mecanismo de 4 articulações uma primeira iteração com d_A , d_B , d_C e d_D nulos, da equação resultará um valor para a correspondente carga P e, por equilíbrio, para as intensidades dos esforços nas secções do arco; deste modo, será possível determinar as dimensões das zonas plastificadas a partir das seguintes expressões:

$$\sigma_c^{adm} d_A = V_A \sin \alpha_A + (H + H_f) \cos \alpha_A \quad (3.133)$$

$$\sigma_c^{adm} d_B = V_A - (Q_{pp1} + Q_{sc1} + Q_{gg1}) + (H + H_f) \cos \alpha_B \quad (3.134)$$

$$\sigma_c^{adm} d_C = V_D - (Q_{pp3} + Q_{sc3} + Q_{gg3}) \sin \alpha_C + (H + H_f) \cos \alpha_C \quad (3.135)$$

em que V_A , V_B , V_C e V_D são as componentes verticais dos esforços nas secções A , B , C e D e α_A , α_B , α_C e α_D são os ângulos que definem a localização das articulações (Figura 3.94).

Esta metodologia não foi, no entanto, implementada numericamente por ser muito trabalhosa e por se julgar não ser condicionante na maioria dos problemas reais.

Como observação final, refira-se que o método de análise limite, que admite um comportamento rígido-plástico do material que constitui a estrutura, é uma ferramenta adequada e simples para a determinação dos parâmetros de carga correspondentes ao colapso em estruturas com carregamentos proporcionais. No entanto, com esta técnica não se conhecerá a evolução dos deslocamentos que ocorrem na estrutura. Para a determinação da dimensão dos deslocamentos serão necessárias outras técnicas, nomeadamente análises elasto-plásticas, cujos resultados convergirão para os resultados da análise limite.

Na Figura 3.96 representam-se os resultados obtidos numericamente pela análise limite sem consideração de efeitos geométricos de 2ª ordem e pela correspondente análise rígido-plástica de 2ª ordem[†]. Como se verá no capítulo 4, os resultados de uma análise elasto-plástica sem

[†] A curva de descarga rígido-plástica, isto é, a análise rígido-plástica de 2ª ordem, obtém-se fazendo variar o deslocamento generalizado correspondente ao grau de liberdade do mecanismo (que se formou pela geração de articulações em quatro secções do arco) e determinando, pela equação de equilíbrio escrita na configuração deformada do arco, o correspondente valor da carga P .

consideração dos efeitos geometricamente não lineares convergirão para o limite rígido-plástico e os resultados duma análise elasto-plástica com consideração dos efeitos geometricamente lineares convergirão para a trajectória de descarga rígido-plástica correspondente à análise rígido-plástica de 2ª ordem.

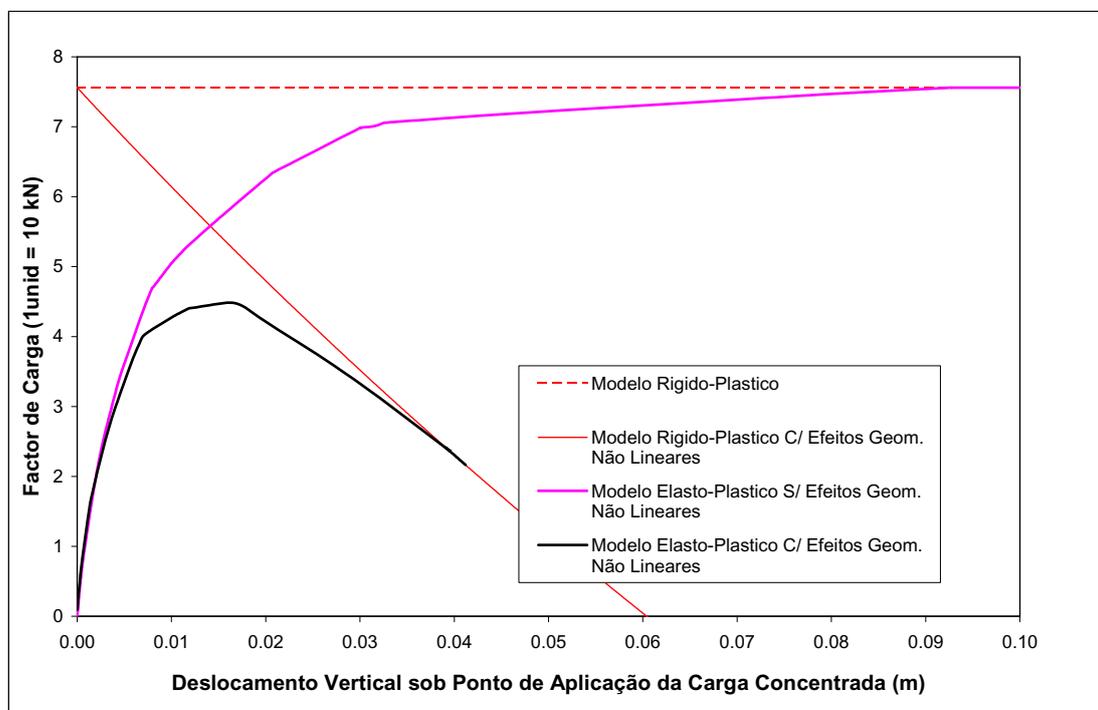


Figura 3.96 - Relações força-deslocamento do ponto de aplicação da carga concentrada num arco circular.

3.9 - ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS - CÚPULAS E ABÓBADAS

O conceito de linha de pressões, anteriormente definido para estruturas de comportamento bidimensional, pode ser generalizado para estruturas arqueadas tridimensionais, como cúpulas e abóbadas, dando origem ao conceito de superfície de pressões. Esta superfície será uma membrana sujeita apenas a esforços de compressão, em equilíbrio com as cargas actuantes, e que, para se assegurar a estabilidade, deverá estar totalmente incluída na espessura da estrutura[†]. A teoria das membranas, desenvolvida para o estudo de cascas finas^{††}, é a metodologia analítica aplicável na análise das superfícies de pressões dessas estruturas tridimensionais.

[†] Os teoremas da análise limite, em particular o teorema estático, permanecem válidos nestas estruturas de alvenaria tridimensionais.

^{††} Nas quais se pode desprezaro efeito dos momentos flectores e considerar apenas os esforços devidos às tensões na superfície média da casca.

Como é sabido, a teoria das membranas é estaticamente determinada[†]. No entanto, a sua aplicação ao estudo de superfícies de pressões revela-se complexa pois é desconhecida à partida a geometria da superfície e, também, porque o conceito de superfície de pressões requer uma solução de membrana totalmente comprimida.

Nos parágrafos seguintes a teoria das membranas é utilizada no estudo de abóbadas e cúpulas em alvenaria através de duas abordagens. Uma em que, embora reconhecendo que essas estruturas não podem ser consideradas cascas finas^{††}, se utiliza a teoria das membranas para determinar aproximações equilibradas das distribuições de esforços internos nessas estruturas. Como se verá, é possível retirar algumas conclusões, mesmo que qualitativas, através deste estudo. A outra abordagem é a aplicação da teoria das membranas na análise do equilíbrio da superfície de pressões, de forma análoga ao que se fez com as linhas de pressões em arcos. A verificação da estabilidade da estrutura é, então, realizada pela identificação duma membrana comprimida em equilíbrio com as cargas actuantes e da verificação do seu posicionamento no interior da estrutura.

Em alternativa à metodologia anterior, pode decompor-se a estrutura tridimensional em sub-estruturas bidimensionais, mutuamente apoiadas, e aplicar os princípios desenvolvidos para a análise de arcos. Os teoremas da análise limite garantem que se as sub-estruturas forem por si só estáveis, também o será o conjunto tridimensional. A decomposição da cúpula em lúnulas admitida por Poleni enquadra-se neste tipo de análise.

A metodologia de resolução das equações de equilíbrio da superfície de pressões, por se revelar trabalhosa e de difícil aplicação em casos reais, não é uma ferramenta prática muito útil, sendo preferível na análise de estruturas reais a aplicação da metodologia de decomposição da estrutura em sub-estruturas planas ou o recurso à análise numérica^{†††}. Não obstante a dificuldade de aplicação da primeira metodologia, é interessante estudar os seus resultados, que

† A simplificação básica da teoria das membranas, isto é, a não consideração dos esforços internos de flexão, resulta numa metodologia estaticamente determinada e que conduz, com a excepção das zonas na vizinhança das fronteiras, a uma estimativa de esforços internos das cascas finas suficientemente rigorosa.

†† Usualmente consideram-se cascas finas aquelas que apresentam uma espessura inferior a 5% do raio de curvatura local^{Heyman, 1967; Timoshenko, 1959}.

††† No entanto, em particular quando os modelos numéricos a utilizar não incorporam algoritmos não lineares, alguns autores^{Oppenheim, 1989} preferem as metodologias analíticas e gráficas, por conduzirem a soluções equilibradas e por o analista ter maior controlo do processo de cálculo.

possibilitam a compreensão do funcionamento da estrutura em causa.

3.9.1 - Abóbadas

3.9.1.1 - Metodologias Analíticas

A abóbada cilíndrica é a extensão tridimensional do arco, podendo, no caso de estruturas contínuas e longas, onde os efeitos de fronteira são pouco relevantes, utilizar-se os modelos planos anteriormente estudados para arcos.

No caso de abóbadas de aresta é também possível utilizar modelos bidimensionais, desde que se considere uma decomposição da abóbada em diferentes arcos mutuamente apoiados (Figura 3.97). Encontrando-se uma solução equilibrada e estável para a estrutura decomposta fica automaticamente garantida a estabilidade da estrutura completa. A verificação da estabilidade de uma abóbada de aresta através da sua decomposição em arcos será exemplificado no parágrafo seguinte pela aplicação de metodologias gráficas.

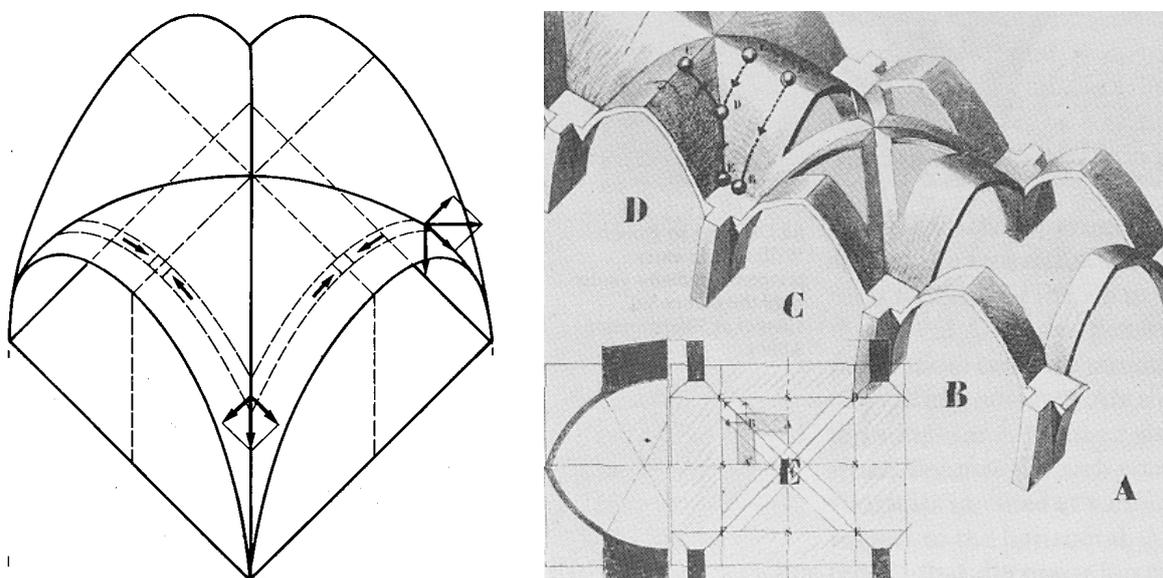


Figura 3.97 - Modelo simplifcativo de comportamento estrutural de uma abóbada de aresta e respectiva analogia da esfera rolante proposta por Abraham em 1934^{Mark,1982}.

Considere-se agora a solução de membrana para a superfície de pressões de uma abobada cilíndrica. As equações de equilíbrio do troço elementar da superfície (Figura 3.98) são:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \phi} = -X \quad (3.136)$$

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} = -Y \quad (3.137)$$

$$N_{\varphi} = -Zr \quad (3.138)$$

em que N_x , $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$ e N_{φ} são os esforços actuantes nos bordos do troço elementar, por unidade de comprimento, r o raio de curvatura da casca cilíndrica e X , Y e Z as componentes segundas os eixos cartesianos da acção exterior (por unidade de superfície).

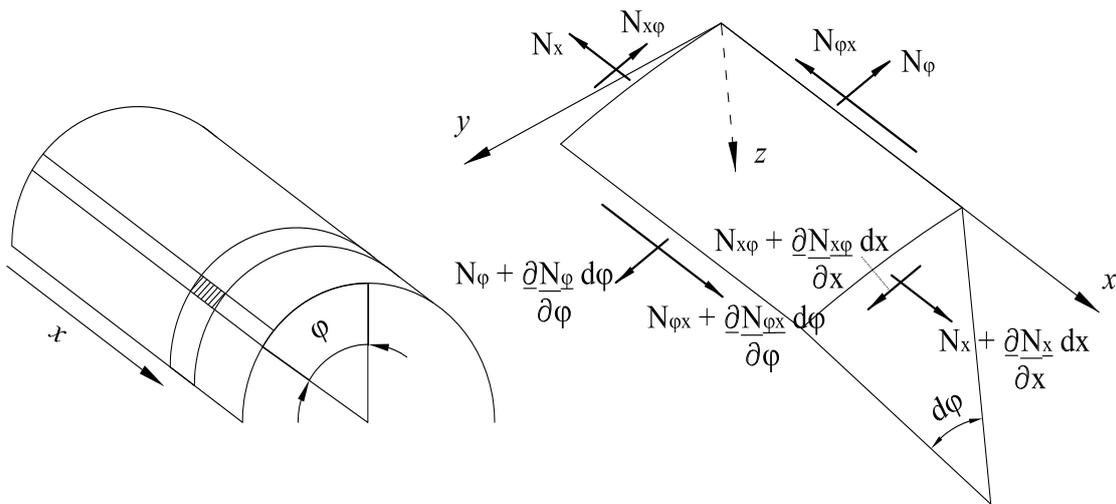


Figura 3.98 - Troço elementar da abóbada cilíndrica.

Admitindo que a única acção externa na abóbada é o seu peso próprio γ (por unidade de superfície), tem-se:

$$X = 0 \quad (3.139)$$

$$Y = -\gamma \sin \varphi \quad (3.140)$$

$$Z = \gamma \cos \varphi \quad (3.141)$$

Tendo em conta as equações (3.139), (3.140) e (3.141) e introduzindo a equação (3.138) na expressão (3.137), obtém-se:

$$N_{x\varphi} = -2\gamma x \sin \varphi + f_1(\varphi) \quad (3.142)$$

e introduzindo a equação (3.142) na expressão (3.136):

$$N_x = \frac{\gamma x^2}{r} \cos \varphi - \frac{x}{r} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + f_2(\varphi) \quad (3.143)$$

em que $f_1(\varphi)$ e $f_2(\varphi)$ são funções arbitrárias de integração, que deverão ser determinadas a partir das condições de fronteira do problema.

Observe-se que o esforço N_φ é determinado sem qualquer referência às condições de fronteira, sendo apenas dependente da curvatura local da superfície:

$$N_\varphi = -\gamma r \cos \varphi \quad (3.144)$$

Para $\varphi = 0^\circ$, tem-se $N_\varphi = -\gamma r$, sendo este o esforço, por unidade de comprimento, actuante no fecho da abóbada cilíndrica.

Considere-se agora uma abóbada de aresta formada pela intersecção de superfícies cilíndricas (Figura 3.99) e analise-se um troço dessa abóbada (troço $ABCDEF$). Tendo em conta as considerações anteriores, a força distribuída no fecho da abóbada terá intensidade γr^2 (por metro de desenvolvimento), o que corresponde a uma força total de $2\gamma r^2$. Dado que, por simetria, nos lados AD e CF não existem forças de corte com componentes segundo a direcção X (Figura 3.100), a força horizontal no fecho da abóbada terá de ser equilibrada por uma acção horizontal exterior.

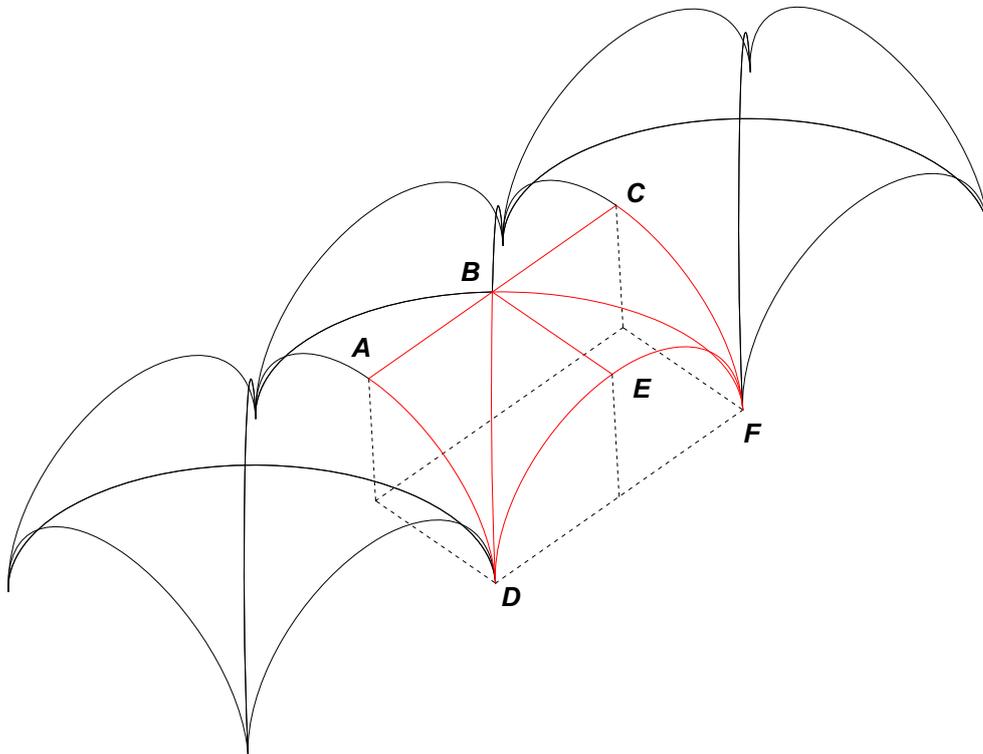


Figura 3.99 - Abóbada de aresta formada pela intersecção de superfícies cilíndricas.

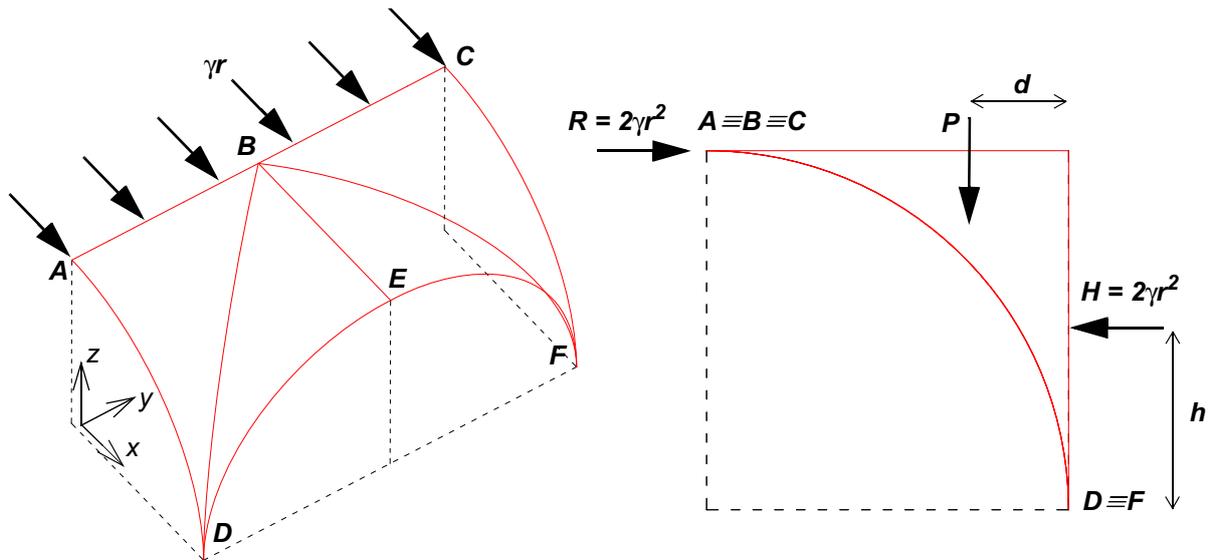


Figura 3.100 - Diagramas de corpo livre do troço da abóbada de aresta.

Sendo $P = 2.283\gamma r^2$ o peso total do troço da abóbada $ABCDEF$ e $d = 0.468r$ a distância, medida na horizontal, do centro de gravidade desse troço ao ponto D , o equilíbrio requer a existência de uma força horizontal de intensidade $H = 2\gamma r^2$, com sentido contrário ao da força no fecho e aplicada a uma altura $h = r - (Pd)/(2\gamma r^2) = 0.466r$.

Numa abóbada de aresta real esta acção horizontal resulta do efeito de arcos botantes ou contrafortes, os quais deverão introduzir na estrutura forças horizontais com localizações próximas das indicadas na Figura 3.101. A existência dos tradicionais enchimentos junto dos apoios (Figura 3.102) possibilita a transmissão à abóbada dessas reacções horizontais e, por outro lado, conduz a uma diminuição da altura h da linha de acção da reacção horizontal, em virtude de o peso desse enchimento produzir em torno do eixo DF um momento estabilizante.

Em abóbadas góticas a distribuição de esforços difere da solução de membrana identificada para as abóbadas cilíndricas, correspondendo à solução para abóbadas de perfil ogival uma altura h da linha de acção da reacção horizontal inferior à obtida para abóbadas de aresta cilíndricas. No entanto, a conclusão da necessidade de uma reacção horizontal a uma determinada altura acima da cota dos encontros é também válida para a abóbada gótica, assim como a da necessidade de enchimento superior das zonas junto dos apoios[†].

[†] Heyman^{Heyman, 1966} afirma que, idealmente, o topo dos arcos botantes em abóbadas góticas deverá estar localizado próximo de meia altura da abóbada, sendo necessário o preenchimento superior da abóbada até essa altura.

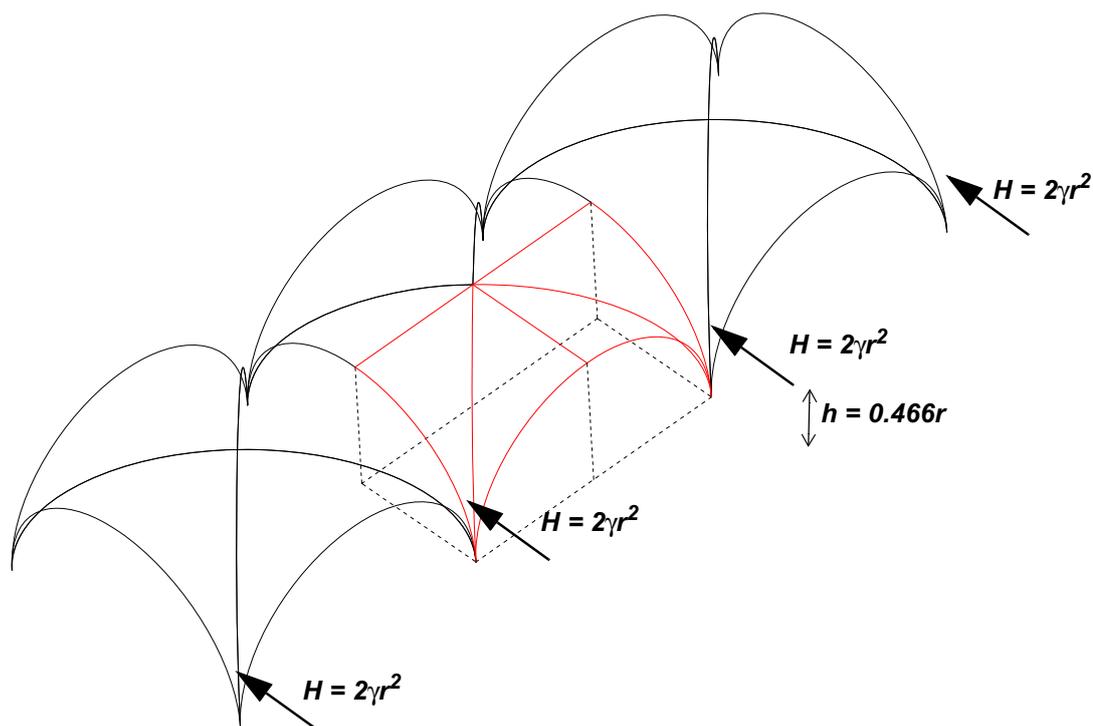


Figura 3.101 - Localização das reações horizontais que resultam da existência de arcos botantes ou contrafortes, necessárias para o equilíbrio da abóbada de aresta.

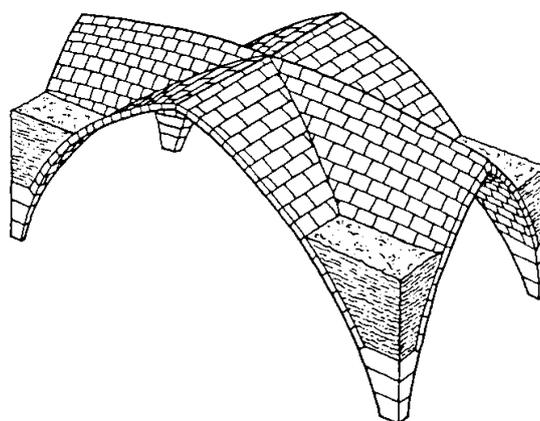


Figura 3.102 - Preenchimento dos encontros das abóbadas de aresta, necessário para a mobilização da reação horizontal que equilibra a estrutura^{Mark e Robison, 1993}.

As nervuras das abóbadas de aresta eram utilizadas com um triplo propósito: em primeiro lugar, conferiam à abóbada um efeito harmonioso e facilitavam o disfarce das juntas e das intersecções de superfícies; construtivamente, as nervuras eram frequentemente utilizadas como estrutura primária de suporte do cimbrio para a construção da restante abóbada; e do ponto de vista estrutural, as nervuras reforçavam as zonas onde se previam concentrações de tensões.

Prosseguindo o estudo da solução de membrana para a abóbada de aresta de perfil cilíndrico é possível justificar a necessidade do reforço das arestas através de nervuras. Observe-se que a

solução de membrana obtida não corresponde à distribuição real dos esforços na abóbada, mas sim a uma solução em equilíbrio com as cargas actuantes, o que, de acordo com o teorema estático da análise limite, é suficiente para a verificação da estabilidade da estrutura.

Analisando novamente o troço da abóbada representado na Figura 3.100 e tendo em conta que o plano AD é um plano de simetria, constata-se que a função arbitrária de integração $f_1(\varphi)$ da solução de membrana deverá ser nula, uma vez que nessa aresta não poderão existir esforços de corte. Admitindo, por simplicidade, que de igual forma na aresta DE também não existem esforços de corte, a função arbitrária de integração $f_2(\varphi)$ também será nula. Assim, as equações da solução de membrana tomam a forma:

$$N_\varphi = -\gamma r \cos \varphi \quad (3.144)$$

$$N_{x\varphi} = -2\gamma x \sin \varphi \quad (3.145)$$

$$N_x = \frac{\gamma x^2}{r} \cos \varphi \quad (3.146)$$

Se na superfície cilíndrica for efectuado um corte horizontal (Figura 3.103), a análise do equilíbrio de forças na direcção vertical para esse troço da abóbada requer a existência de forças adicionais. De facto, o peso P do troço superior da abóbada é dado por:

$$P = 8\gamma r^2(\varphi + \cos \varphi - 1) \quad (3.147)$$

e a componente vertical da resultante dos esforços N_φ actuantes nos quatro quadrantes por:

$$8\gamma r^2(1 - \sin \varphi) \sin \varphi \cos \varphi \quad (3.148)$$

o que resulta numa força desequilibrada de intensidade:

$$8\gamma r^2(\varphi + \cos \varphi - 1 - (1 - \sin \varphi) \sin \varphi \cos \varphi) \quad (3.149)$$

Assim, deverão existir nas arestas da superfície quatro forças F (Figura 3.103) com componentes verticais iguais a um quarto da intensidade definida por (3.149), ou seja, tendo em conta que $\sqrt{2} \tan \phi = \tan \varphi$ (em que ϕ é o ângulo de inclinação da aresta), de intensidade:

$$F = 2\gamma r^2 \cot \varphi \sqrt{2 + (\tan \varphi)^2 ((\sin \varphi)^2 \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi + \varphi + \cos \varphi - 1)} \quad (3.150)$$

Verifica-se que o valor máximo da expressão anterior é próximo de $1.2\gamma r^2$, o que, se se admitir que a nervura tem a mesma espessura que a restante abóbada, corresponde a um aumento da tensão na zona das arestas da abóbada[†], podendo ser necessário a existência de nervuras reforçando essas arestas.

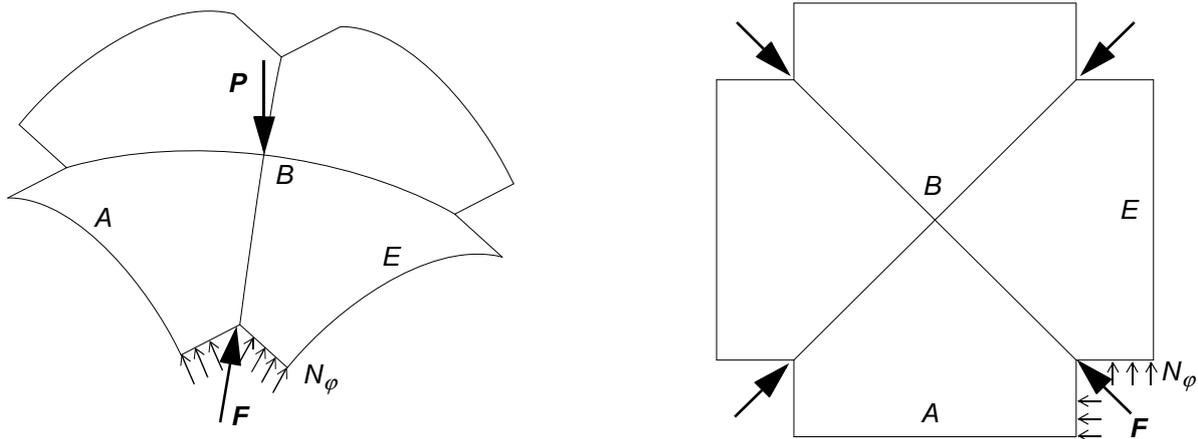


Figura 3.103 - Corte horizontal da superfície cilíndrica da abóbada de aresta.

Embora seja previsível que a distribuição de esforços real na abóbada seja diferente da solução de membrana admitida^{††}, esta é uma solução em equilíbrio com as cargas actuantes, pelo que o dimensionamento da secção das nervuras poderá ser conseguido através deste raciocínio.

3.9.1.2 - Metodologias Gráficas

Como referido, o estudo das estruturas tridimensionais pode também ser realizado através da sua decomposição em sub-estruturas de comportamento bidimensional e aplicando as técnicas desenvolvidas para a análise de arcos. É o caso da divisão de uma cúpula num conjunto de lúnulas e o da decomposição da abóbada de aresta num conjunto de pequenos arcos que se apoiam em arcos principais localizados nas suas arestas (Figura 3.97). Estas hipóteses simplificativas desprezam uma componente tridimensional do comportamento real da estrutura, o que significa considerar-se uma hipótese mais desfavorável do que aquela que corresponde à realidade. Assim, verificando-se que a estrutura é estável para esta situação mais desfavorável,

[†] Na abóbada, tendo em conta os resultados anteriores e admitindo uma espessura t , a tensão máxima é da ordem de $\gamma r/t$.

^{††} A distribuição real dos esforços N_φ não é uniforme ao nível de cada secção horizontal, como admitido na solução de membrana (Figura 3.103).

também o será para o caso real.

A análise da decomposição da abóbada de aresta em arcos pode ser realizada graficamente como proposto no *Manuale dell' architetto* do *Consiglio Nazionale delle Ricerche*, editado em 1946^{Ciappi, 1950; Giuffrè, 1986}. Este método gráfico, que é representado na Figura 3.104 consiste, resumidamente, nos seguintes passos:

- Considere-se 1/8 da abóbada cilíndrica (simplificação que é permitida pela simetria do problema) e divida-se essa parcela em n arcos de igual espessura (no exemplo representado consideraram-se 4 arcos, sendo os respectivos eixos designados por t_1, t_2, t_3 e t_4);
- Considere-se o arco de maior vão (isto é, t_n , ou seja, t_4 no exemplo da figura) e aplique-se o método de Méry com a regra do terço central (desenho 1 da Figura 3.104). Assim, deverá traçar-se o polígono funicular das cargas actuantes admitindo uma localização arbitrária para o seu pólo O e calcular-se pelos princípios da estática gráfica a localização da linha de acção da resultante dessas acções (recta gg'). De acordo com as hipóteses do método de Méry a linha de pressões deverá tocar os limites do núcleo central no fecho e na imposta[†]. Deste modo, deverá considerar-se que o impulso está aplicado no fecho do arco no limite superior do terço central (ponto Q) e na imposta no limite inferior do terço central (ponto S). Pelo equilíbrio do arco e tendo em conta que o impulso no fecho é, por simetria, horizontal, o impulso na imposta deverá ter como linha de acção a direcção definida pela recta SG , que se obtém unindo o ponto S ao ponto G de intersecção da linha de acção da resultante das cargas actuantes e da linha de acção do impulso horizontal no fecho. Deste modo fica determinado o polo do polígono funicular (O') e, conseqüentemente, a intensidade do impulso horizontal H . Obtém-se, assim, para o arco de maior vão uma linha de pressões equilibrada com as acções exteriores (linha contínua encarnada no desenho 1), que deverá estar totalmente incluída no terço central do arco^{††}.

Note-se que o impulso horizontal calculado anteriormente não é, em geral, o verdadeiro impulso instalado na estrutura. Por um lado a simplificação de divisão da abóbada em arcos não

† Como referido anteriormente, o método de Méry preconiza para arcos circulares uma articulação na parte inferior do arco localizada a 60° (Figura 3.16). No entanto, neste método gráfico para abóbadas considera-se que essa articulação se localiza na imposta.

†† Uma vez que se está a admitir a regra do terço central; caso contrario, bastaria garantir que a linha de pressões está incluída na espessura do arco.

corresponde à realidade e, por outro, devido à hiperstasia do problema, a linha de pressões do arco é indeterminada, tendo-se obtido apenas uma das possíveis linhas de pressões. No entanto, trata-se de uma solução equilibrada e o teorema estático da análise limite garante que se a estrutura for estável com estas hipóteses, também o será em comportamento real.

Ao considerar-se a divisão da abóbada em arcos de igual largura, as cargas que discretizam o carregamento de cada arco serão semelhantes. De facto, no último arco (n) as cargas aplicadas são P_1, P_2, \dots, P_n , no penúltimo ($n-1$) são P_1, P_2, \dots, P_{n-1} , e assim sucessivamente. Deste modo, os troços (entre eixos dos arcos) da linha de pressões calculada anteriormente para o arco de maior vão coincidem com possíveis linhas de pressões dos outros arcos e, assim, a verificação da segurança do arco de maior garante, também, a segurança dos restantes.

Pela coincidência das várias linhas de pressões admitidas para os arcos elementares resulta que todos os eles têm o mesmo impulso horizontal H , sendo essa a acção horizontal que cada um exercerá sobre a aresta da abóbada. Tendo em conta que na aresta da abóbada convergem sempre dois arcos simétricos (Figura 3.97) a acção horizontal resultante em cada nível terá intensidade $\sqrt{2}H$ e a acção vertical intensidade $2P_1$ para o arco 1, $2(P_1 + P_2)$ para o arco 2 e assim sucessivamente. Os respectivos pontos de aplicação são definidos pelos pontos I, II, III, IV, \dots da linha de pressões calculada no passo anterior.

- Trace-se agora o semi arco diagonal elíptico AB (desenho 2 da Figura 3.104), correspondente à aresta da abóbada, e as respectivas acções verticais e horizontais impostas por cada um dos arcos elementares[†]:

$$V_i = \sum_{k=1}^i 2P_k \quad \text{e} \quad H_i = \sqrt{2}H \quad \text{aplicados no ponto } I.I^{(i)} \quad (3.151)$$

- Aplicando os princípios descritos anteriormente, desenhe-se o polígono funicular das acções impostas pelos arcos elementares, determine-se uma linha de pressões em equilíbrio com as cargas actuates e verifique-se a estabilidade da aresta da abóbada através da posição relativa da linha de pressões obtida e dos limites do arco elíptico. Para tal, poderá adoptar-se um critério menos conservativo que o da regra do terço central, bastando verificar se a linha de pressões encontrada se encontra suficientemente afastada dos limites

[†] Note-se que escala de forças do desenho 2 é 1/4 da escala de forças utilizada no desenho 1.

representa uma solução equilibrada. Considerou-se, então, para pólo do polígono funicular o ponto P , o que corresponde a admitir um impulso horizontal nulo, e traçou-se a correspondente linha de pressões (linha contínua encarnada no desenho 2), vindo a verificar-se que essa linha estava totalmente inclusa nos limites do arco elíptico, ou seja que o arco elíptico era estável.

Tendo em conta que no exemplo apresentado todas as linhas de pressões e correspondentes impulsos para os diferentes arcos em que a abóbada foi decomposta, são soluções em equilíbrio com as acções exteriores[†] que verificam as condições de resistência, o teorema estático da análise limite garante a estabilidade da estrutura global.

3.9.2 - Cúpulas

3.9.2.1 - Metodologias Analíticas

Considere-se uma membrana com a forma de uma superfície de revolução e carregada simetricamente em relação ao seu eixo. As equações do troço elementar dessa superfície são^{Timoshenko, 1959}:

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 N_\varphi) - r_1 N_\theta \cos \varphi + Y r_0 r_1 = 0 \quad (3.152)$$

$$r_0 N_\varphi + r_1 N_\theta \sin \varphi + Z r_0 r_1 = 0 \quad (3.153)$$

em que N_θ e N_φ são os esforços, por unidade de comprimento, actuantes nas arestas do troço elementar da superfície (Figura 3.105), r_0 e r_1 são, respectivamente, os raios de curvatura do paralelo e meridiano^{††} correspondentes ao troço elementar, θ e φ os ângulos que definem, respectivamente, a posição do meridiano e do paralelo, e Y e Z as componentes segundo os eixos coordenados locais, por unidade de área, da acção exterior.

A equação (3.153) pode ainda ser escrita na forma:

[†] Embora não sejam, necessariamente, correspondentes aos verdadeiros esforços instalados na estrutura.

^{††} A superfície de revolução é obtida pela rotação de uma curva plana, designada por meridiano, em torno de um eixo localizado no mesmo plano. Cada ponto do meridiano descreve no movimento de rotação que gera a superfície, uma trajectória circular, designada por círculo paralelo. Um troço elementar da superfície é, então, definido por dois meridianos e dois paralelos adjacentes.

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -Z \quad (3.154)$$

em que $r_2 = r_0/\sin\varphi$ é também um raio de curvatura da casca (Figura 3.105).

No caso de uma superfície esférica sujeita apenas à acção do seu peso próprio, a resolução das equações (3.152) e (3.154) conduz à seguinte solução *Heyman, 1967 e 1977*:

$$N_\varphi = -\frac{\gamma R}{1 + \cos\varphi} \quad (3.155)$$

$$N_\theta = \gamma R \left(\frac{1}{1 + \cos\varphi} - \cos\varphi \right) \quad (3.156)$$

em que R é o raio de curvatura da esfera e γ o seu peso próprio por unidade de superfície.

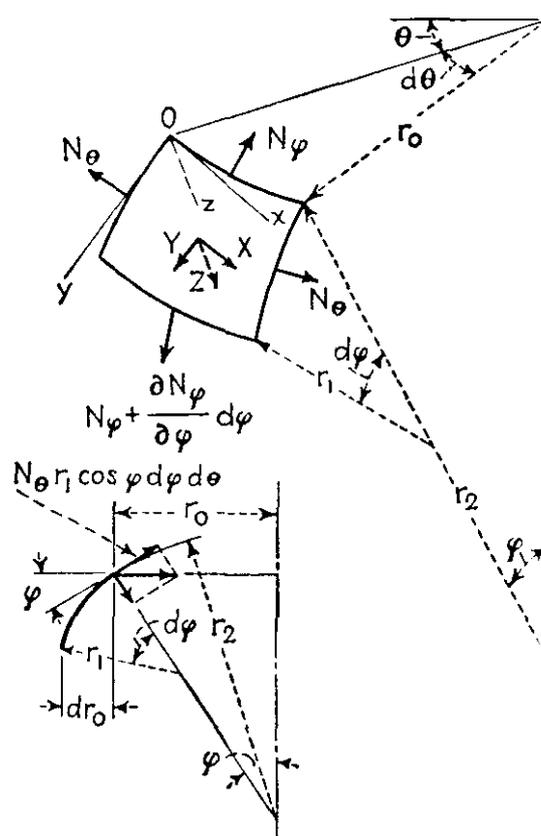


Figura 3.105 - Troço elementar da membrana de revolução *Timoshenko, 1959.*

As expressões anteriores conduzem a resultados com grande grau de precisão em cascas finas em cujos apoios as reacções são tangentes aos meridianos. Para outras condições de apoio ocorrerá flexão nas zonas próximas dos apoios e essas expressões só conduzirão a bons

resultados em zonas suficientemente afastadas dos apoios.

Na Figura 3.107 representam-se os resultados correspondentes às expressões (3.155) e (3.156), onde se pode verificar que os esforços meridionais N_φ (Figura 3.106) são sempre negativos, isto é, de compressão, ao passo que os esforços circunferenciais (segundo os paralelos) N_θ são de compressão apenas para ângulos φ menores que 51.8° . Para ângulos superiores, surgem esforços circunferenciais de tracção.

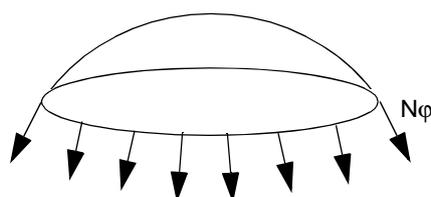


Figura 3.106 - Membrana esférica - esforços meridianais.

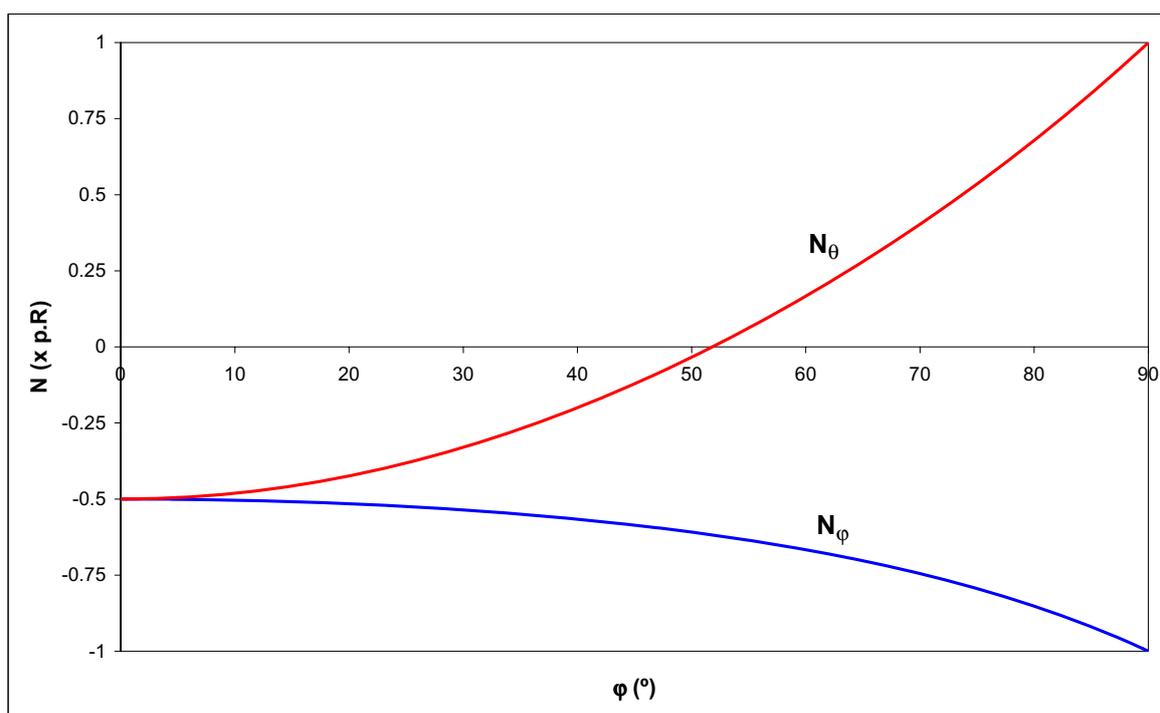


Figura 3.107 - Resultados da solução das equações diferenciais de equilíbrio de uma membrana esférica sujeita apenas à acção do seu peso próprio.

Embora a teoria das membranas não seja directamente aplicável às estruturas de alvenaria, por estas não poderem ser consideradas, em geral, cascas finas, algumas conclusões podem ser retiradas da solução de membrana. Em particular, as tensões circunferenciais de tracção que surgem pelo equilíbrio da membrana têm uma distribuição semelhante à que ocorre em cúpulas esféricas de alvenaria (Figura 3.108).

Considere-se agora uma cúpula esférica com um lanternim de diâmetro r (Figura 3.109). Tendo em conta as equações de equilíbrio (3.152) e (3.154), a solução correspondente exclusivamente ao peso próprio é:

$$N_{\varphi} = -\gamma R \frac{\cos \varphi_i - \cos \varphi}{(\sin \varphi)^2} \quad (3.157)$$

$$N_{\theta} = \gamma R \left(\frac{\cos \varphi_i - \cos \varphi}{(\sin \varphi)^2} - \cos \varphi \right) \quad (3.158)$$

em que γ é o peso próprio da membrana, por unidade de área, R o seu raio e φ_i o ângulo que define a abertura do lanternim (Figura 3.109).

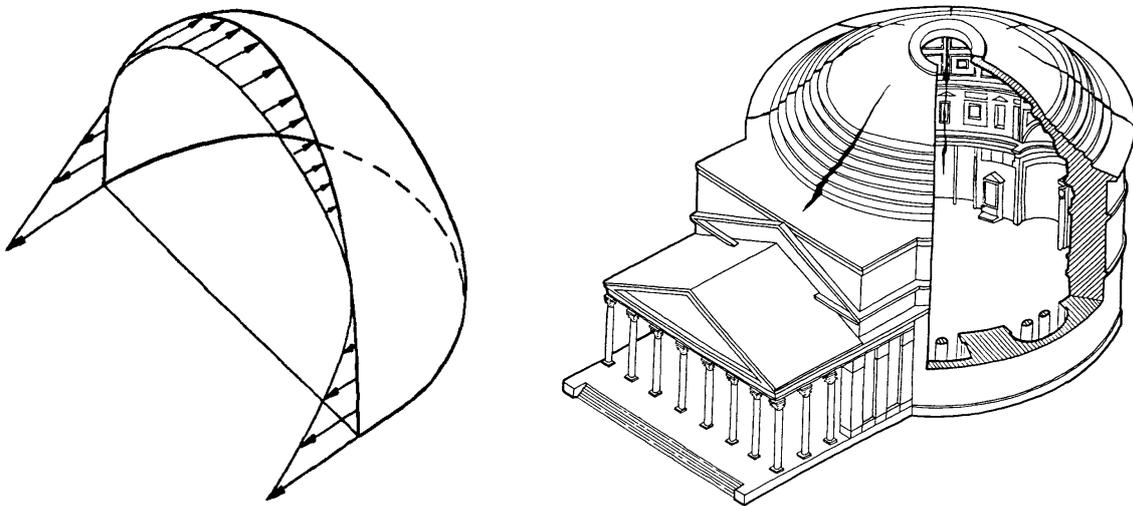


Figura 3.108 - Esquerda: Tensões circunferenciais na solução da casca fina esférica sujeita apenas à acção do seu peso próprio; Direita: Fendilhação meridional da cúpula do Pártenon em Roma^{Mark e Robison,1993}.

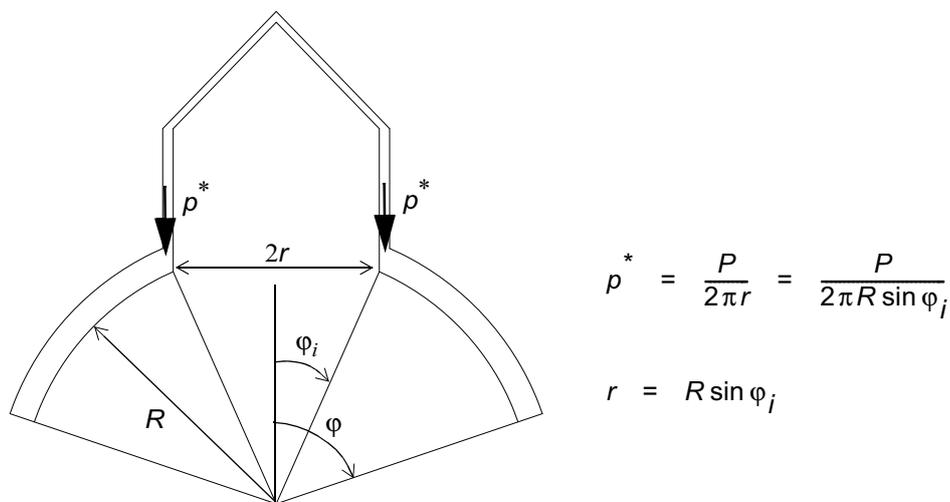


Figura 3.109 - Modelo de cúpula esférica com lanternim.

Para aberturas de pequena dimensão, por exemplo para $\varphi_i = 5^\circ$, verifica-se (Figura 3.110) que a

partir de uma determinada amplitude do ângulo φ , no exemplo para φ próximo de 30° , os valores dos esforços meridionais e circunferenciais obtidos pelas equações (3.157) e (3.158) são coincidentes com os que se obtêm na análise da membrana sem abertura. Verifica-se assim, que a cúpula com abertura é, à semelhança da cúpula sem aberturas, uma estrutura estável e que, devido ao efeito do seu comportamento tridimensional, dispensa o seu fecho.

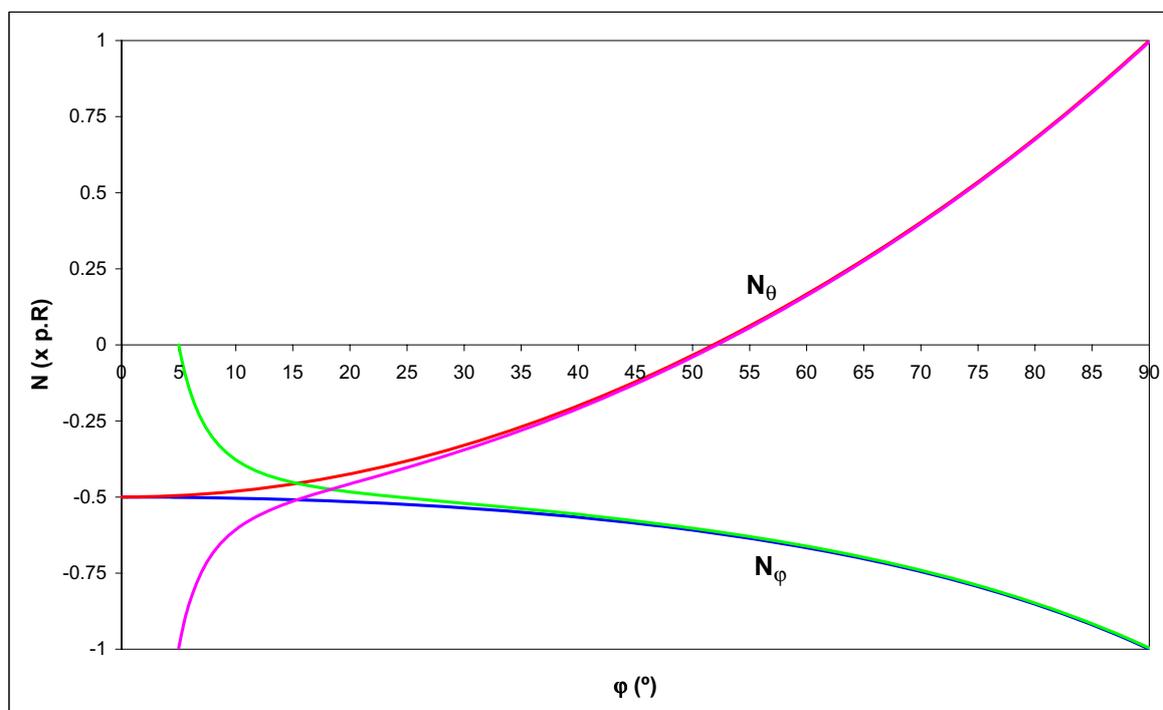


Figura 3.110 - Resultados das soluções das equações diferenciais de equilíbrio de uma membrana esférica com e sem lanternim, sujeita apenas à acção do seu peso próprio.

Através das soluções (3.157) e (3.158) pode também mostrar-se que é, pelo menos teoricamente, possível construir uma cúpula esférica sem o recurso a um cimbra de escoramento[†]. Na Figura 3.111 representam-se, para diferentes ângulos de abertura φ_i , (de 90° a 0°), que podem corresponder a diferentes fases construtivas, os correspondentes esforços meridionais N_φ e circunferenciais N_θ . Pode constatar-se nessa figura que junto do bordo livre superior, os esforços circunferenciais são de compressão, só passando a tracção em zonas mais próximas da extremidade inferior. Analisando uma secção do troço da cúpula (Figura 3.112) constata-se que os esforços de compressão na parte superior resultam numa acção horizontal H que equilibra o momento destabilizante provocado pelo peso V dessa secção do troço da cúpula.

[†] As grandes cúpulas medievais e da renascença não foram certamente executadas sem cimbra (embora existam algumas lendas, como a referente à cúpula da basílica de Florença), mas existem estruturas semelhantes de menores dimensões, como os "iglos" do antártico que são tradicionalmente construídos sem suporte.

Considerando agora o efeito do peso P do lanternim, que corresponde à carga p^* distribuída ao longo do desenvolvimento da abertura do lanternim (Figura 3.109), a solução da teoria das membranas é:

$$N_{\varphi} = -p^* \frac{\sin \varphi_i}{(\sin \varphi)^2} \quad (3.159)$$

$$N_{\theta} = p^* \frac{\sin \varphi_i}{(\sin \varphi)^2} \quad (3.160)$$

Donde, sobrepondo aos resultados (3.157) e (3.158) correspondentes ao peso próprio da casca, se obtém a solução para o efeito conjunto do peso próprio da membrana e do lanternim:

$$N_{\varphi} = -\gamma R \frac{\cos \varphi_i - \cos \varphi}{(\sin \varphi)^2} - p^* \frac{\sin \varphi_i}{(\sin \varphi)^2} \quad (3.161)$$

$$N_{\theta} = \gamma R \left(\frac{\cos \varphi_i - \cos \varphi}{(\sin \varphi)^2} - \cos \varphi \right) + p^* \frac{\sin \varphi_i}{(\sin \varphi)^2} \quad (3.162)$$

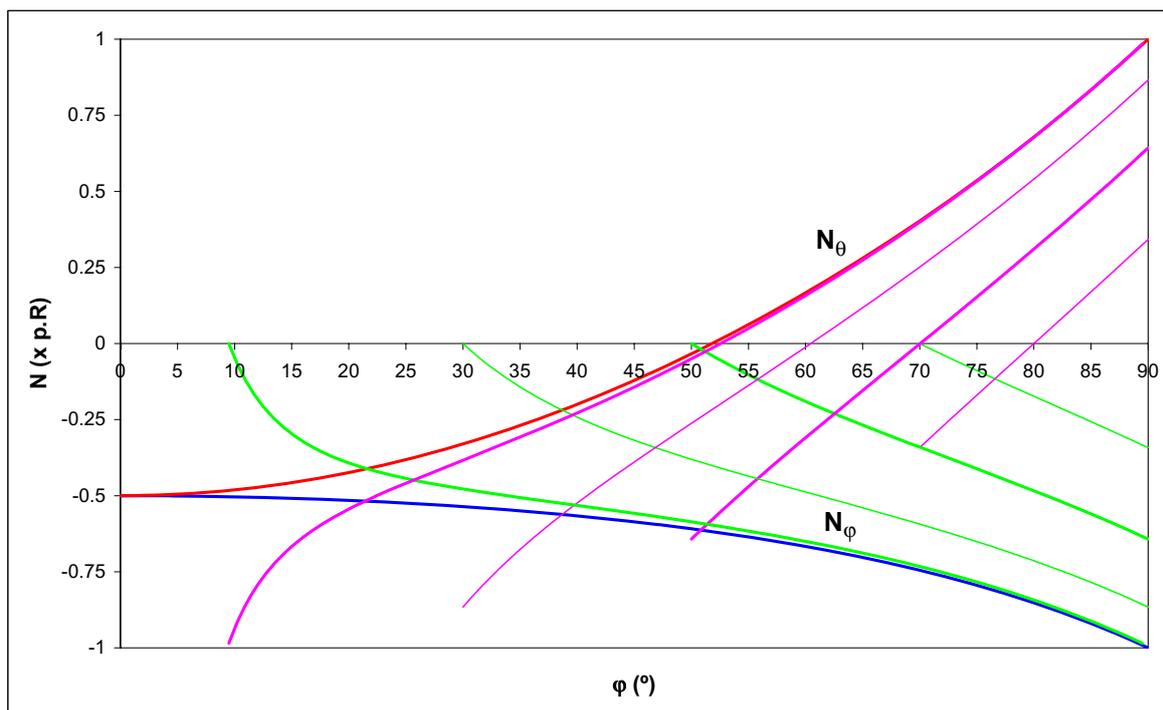


Figura 3.111 - Esforços meridianos e circunferenciais para diferentes fases construtivas da cúpula esférica sujeita apenas à acção do seu peso próprio.

Considerando os resultados anteriores e admitindo para a cúpula um raio $R = 40$ m e um lanternim de peso total 5000 kN, definido por um ângulo $\varphi_i = 5^\circ$, obtém-se os seguintes esforços (por unidade de comprimento) no bordo da abertura, devidos apenas à acção do peso do lanternim:

$$N_{\varphi}(\varphi=\varphi_i) = -228.26 \frac{\sin 5}{(\sin 5)^2} = -2619.02 \text{ kN/m} \quad (3.163)$$

$$N_{\theta}(\varphi=\varphi_i) = 228.26 \frac{\sin 5}{(\sin 5)^2} = 2619.02 \text{ kN/m} \quad (3.164)$$

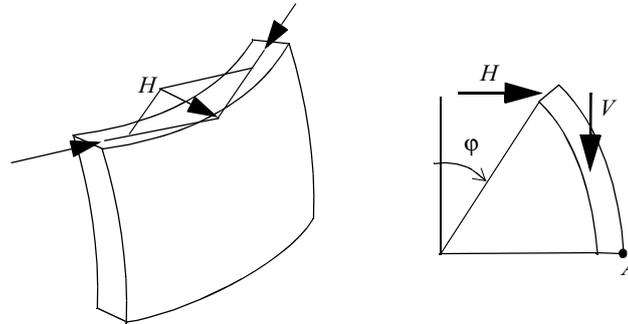


Figura 3.112 - Equilíbrio do troço da cúpula esférica.

Pretendendo-se eliminar as tensões de tracção circunferenciais no bordo da abertura, ao efeito do peso próprio da cúpula deverá corresponder uma tensão $N_{\theta} = -2619.02 \text{ kN/m}$. Assim, tem-se:

$$N_{\theta}(\varphi=\varphi_i) = -2619.02 \text{ kN/m} = \gamma 40(0 - \cos 5) \rightarrow \gamma = 65.73 \text{ kN/m}^2 \quad (3.165)$$

Admitindo para o material que constitui a cúpula esférica um peso próprio de 25 kN/m^3 , a sua espessura deverá ser:

$$t = 65.73 / 25 = 2.63 \text{ m} \quad (3.166)$$

Considerando estes valores particulares, que correspondem às dimensões de grandes cúpulas, representam-se na Figura 3.113 os correspondentes valores dos esforços meridionais e circunferenciais.

Pode constatar-se a interacção entre os efeitos do peso próprio (da cúpula e do lanternim) verificando-se, numa fase inicial, até 20° aproximadamente, um aumento da intensidade do esforço de compressão circunferencial, simultaneamente com uma diminuição do esforço meridional de compressão. Fora dessa região as curvas têm um andamento semelhante ao das figuras anteriores, verificando-se a ocorrência de esforços circunferenciais de tracção para $\varphi = 51.8^\circ$.

Como se viu, para uma cúpula esférica a solução da teoria das membranas conduz a esforços de tracção circunferenciais para ângulos φ superiores a 51.8° , ao passo que na parte superior da cúpula, isto é, para φ inferior a 51.8° , apenas existem esforços de compressão. No entanto, as intensidades desses esforços circunferenciais de compressão podem ser pequenas quando comparadas com as dos esforços de tracção que resultam dos efeitos de variações de temperatura e fluência *Oppenheim, 1989*. Assim, em certos casos, a consideração desses esforços de compressão na análise da estabilidade da estrutura poderá ser contra a segurança. Desprezando as tensões de compressão na direcção circunferencial, pode procurar-se uma solução conservativa, a qual será validada pelos teoremas da análise limite (que garantem que encontrando um estado de equilíbrio nestas condições, também será possível o equilíbrio nas condições reais, menos desfavoráveis).

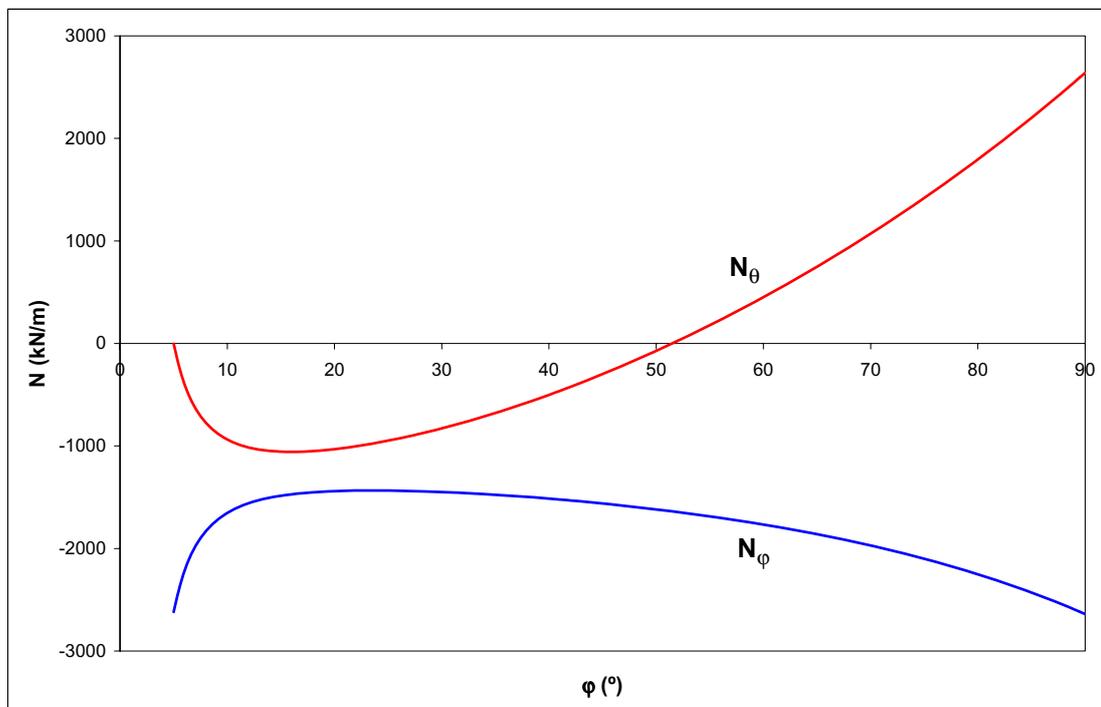


Figura 3.113 - Esforços meridianos e circunferenciais numa membrana esférica com lanternim.

Na teoria das membranas considera-se que a superfície da membrana coincide com a superfície média da casca. Na análise limite apenas é necessário que essa membrana, designada por superfície de pressões, esteja sujeita a esforços de compressão e se situe no interior da espessura da cúpula. Desprezando os esforços circunferenciais, as equações (3.152) e (3.153) de equilíbrio do troço elementar da membrana reduzem-se a:

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 N_\varphi) + \gamma r_0 r_1 \sin \varphi = 0 \quad (3.167)$$

$$N_{\varphi} = -r_1 \gamma \cos \varphi \quad (3.168)$$

em que se admitiu, por simplicidade, que os esforços N_{φ} são positivos quando de compressão.

Substituindo a equação (3.168) na equação (3.167), tem-se:

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 r_1 \cos \varphi) + r_0 r_1 \sin \varphi = 0 \quad (3.169)$$

Sendo a solução desta equação diferencial, que define a superfície de pressões, dada por[†]:

$$r_0 r_1 (\cos \varphi)^2 = C \quad (3.170)$$

em que C é uma constante de integração.

Tendo em conta as seguintes relações geométricas entre os raios de curvatura $r_1(\varphi)$ e $r_0(z)$ e o comprimento do meridiano s , (Figura 3.114):

$$\frac{dr_0}{ds} = \cos \varphi \quad (3.171)$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = r_1 \quad (3.172)$$

$$\frac{dz}{dr_0} = \tan \varphi \quad (3.173)$$

a equação (3.170) pode ser integrada e a solução para a geometria da superfície de pressões expressa apenas em função de r_0 e φ :

$$\frac{r_0^2}{2C} = \ln \left(\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) + C_1 \quad (3.174)$$

sendo C_1 uma constante de integração.

A expressão anterior pode ainda ser escrita na forma:

[†] Observe-se que escrevendo (3.170) na forma $r_0 r_1 \cos \varphi \cos \varphi = 0$ e derivando, obtém-se $\frac{d}{d\varphi}(r_0 r_1 \cos \varphi) \cos \varphi - r_0 r_1 \cos \varphi \sin \varphi = 0$, a qual depois de dividida por $\cos \varphi$, é a expressão (3.169).

$$\tan \varphi = \sinh \left(\frac{r_0^2}{2C} - C_1 \right) \quad (3.175)$$

A coordenada vertical da superfície de pressões será obtida através da integração da expressão anterior, isto é, por:

$$z = \frac{r_*}{2} \left\{ \frac{1}{B} \int_0^x e^{t^2} dt - B \int_0^x e^{-t^2} dt \right\} \quad (3.176)$$

em que $B = e^{C_1}$, $r_* = \sqrt{2C}$ e $x = r_0/r_*$.

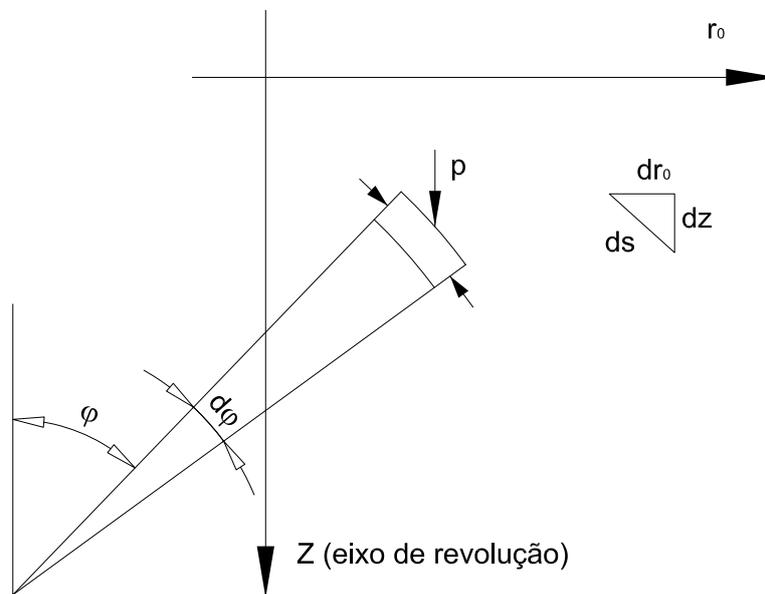


Figura 3.114 - Troço elementar da superfície de pressões.

Se o peso próprio da casca for o único carregamento, a superfície de pressões deverá ter tangente horizontal no fecho ($\varphi = 0$), pelo que da equação (3.175) se tem $C_1 = 0$. A expressão anterior ficará então:

$$z = \frac{r_*}{2} \left\{ \int_0^x e^{t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt \right\} \quad (3.177)$$

Os valores dos dois integrais representados na expressão (3.177) podem ser obtidos, para qualquer valor de x , através de valores tabelados ^{Abramowitz e Stegan, 1972}.

Deste modo, a equação (3.177) representa uma família de superfícies de pressões, em função do valor admitido para o factor de escala r_* . Na Figura 3.115 representa-se a superfície de pressões

normalizada em relação ao factor de escala r_* e na Figura 3.116 a correspondente família de superfícies de pressões.

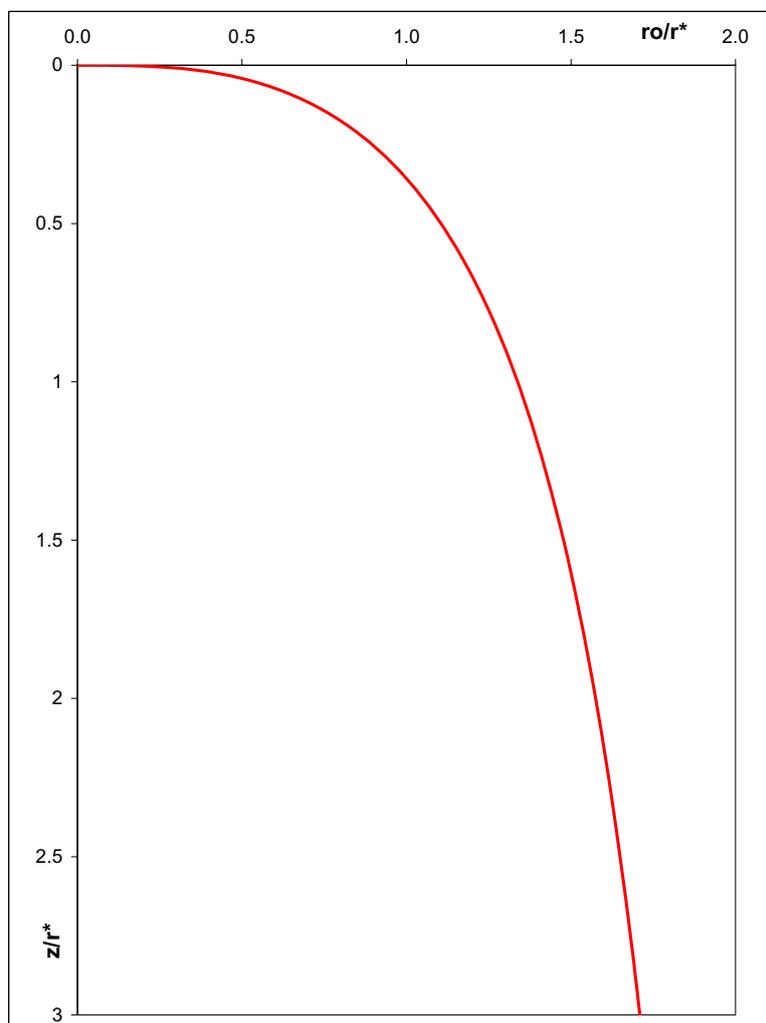


Figura 3.115 - Superfície de pressões normalizada (acção do peso próprio da cúpula).

Uma vez obtida a expressão que define a família de superfícies de pressões para uma cúpula com uma dada geometria, a sua estabilidade fica garantida se for possível identificar uma superfície de pressões totalmente incluída na sua espessura. Na Figura 3.116 representa-se a família de superfícies de pressões e uma superfície totalmente incluída na espessura da cúpula. No caso representado, a cúpula tem a espessura mínima admissível, verificando-se apenas ser possível incluir na sua espessura uma única superfície de pressões.

A consideração das tensões circunferenciais de compressão na parte superior da cúpula[†] pode

[†] Que foram desprezadas na análise que deu origem às superfícies de pressões representadas na Figura 3.116.

ser efectuada decompondo a superfície de pressões em duas parcelas: uma correspondente à parte da cúpula comprimida circunferencialmente e outra correspondente à parte traccionada. Este método de decomposição da cúpula em duas parcelas de comportamentos distintos era já proposto por Henry Eddy em 1878, e posteriormente adaptado numa metodologia gráfica por Maurice Lévy, em 1888^{Pesciullesi et al.,1997;Rapallini e Tempesta,1998}.

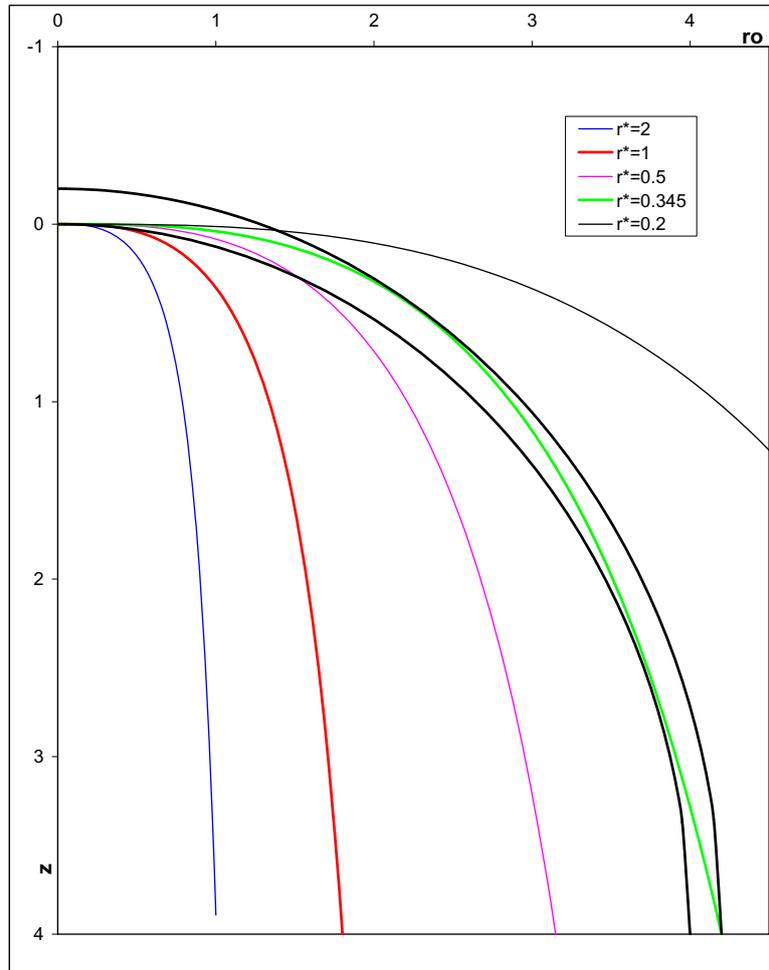


Figura 3.116 - Família de superfícies de pressões.

Aproveitando a ideia original de Eddy, pode determinar-se as superfícies de pressões das parcelas superior e inferior da cúpula esférica, reunindo-as numa única superfície de pressões. Deste modo, considerando para a parte comprimida da cúpula a solução da teoria das membranas para a superfície esférica e admitindo nessa zona que a superfície de pressões é coincidente com a superfície média da cúpula, tem-se a seguinte expressão para a superfície de pressões na parcela da cúpula esférica totalmente comprimida:

$$y_s = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (3.178)$$

em que R é o raio médio da cúpula (Figura 3.117) e o sufixo s indica que se trata da superfície de pressões correspondente ao troço superior.

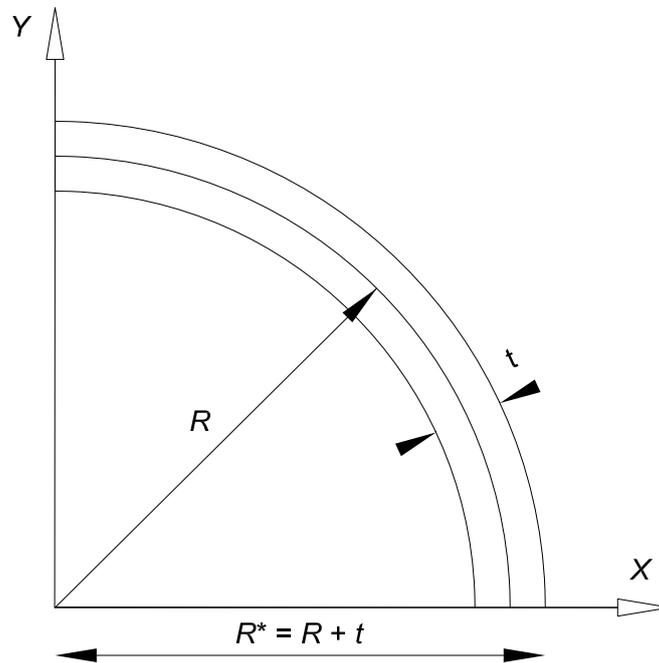


Figura 3.117 - Geometria da cúpula esférica.

Admitindo a hipótese de não resistência à tracção da alvenaria, na parcela inferior da cúpula considera-se que as tensões circunferenciais se anulam nas zonas onde ocorreriam tracções. Nessas zonas, sujeita apenas a esforços de compressão meridionais, admite-se um comportamento bidimensional semelhante ao dos arcos. Assim, a superfície de pressões correspondente à parcela inferior da cúpula é obtida pela análise do equilíbrio dos troços elementares das lúnulas que constituem a cúpula (Figura 3.118).

Do equilíbrio das forças nas direcções vertical e horizontal, tem-se:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(N \cos \varphi) = 0 \Rightarrow H = N \cos \varphi \quad (3.179)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(N \sin \varphi) = p(x) \quad (3.180)$$

donde:

$$\frac{d}{dx}(N \sin \varphi) = \frac{d}{dx}(H \tan \varphi) = H \frac{d^2 y}{dx^2} \Rightarrow H \frac{d^2 y}{dx^2} = p(x) \quad (3.181)$$

Tendo em conta a largura variável do troço da cúpula (Figura 3.118), tem-se:

$$p(x)dx = \gamma t \frac{Rx}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \quad (3.182)$$

em que t é a espessura da cúpula e γ o seu peso próprio por unidade de volume. Considerando uma cúpula homogénea de espessura constante pode admitir-se, por simplicidade, $\gamma t = 1$.

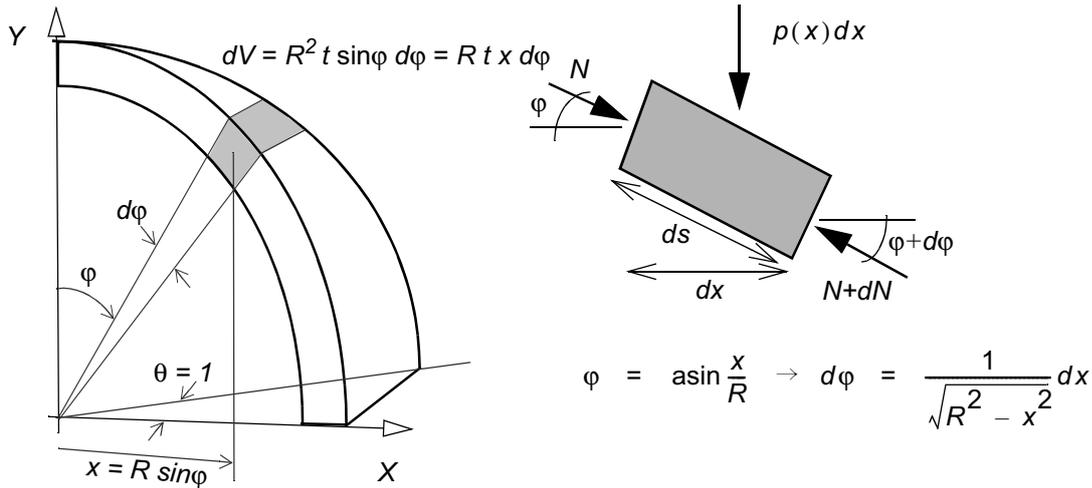


Figura 3.118 - Diagrama de corpo livre do troço elementar da cúpula.

Das expressões (3.181) e (3.182), tem-se, então:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Rx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (3.183)$$

A solução da equação diferencial anterior, que define a geometria da superfície de pressões, é:

$$y_i(x) = \frac{Rx}{2H} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^3}{2H} \operatorname{asin} \left(\frac{x}{R} \right) + C_1 x + C_2 \quad (3.184)$$

em que C_1 e C_2 são constantes de integração, H é o impulso horizontal, ainda indeterminado, e o índice i indica que se trata da coordenada y da superfície de pressões correspondente ao troço inferior da cúpula.

Admitindo a simetria da superfície de pressões, tem-se.

$$\left[\frac{dy_i}{dx} \right]_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{R^2}{H} \quad (3.185)$$

e impondo que a superfície de pressões passe no ponto exterior da base da cúpula (ponto A na Figura 3.117), será:

$$y_i(x = R^* = R + e) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{R^2}{H} \left(R^* - \frac{\pi R}{4} \right) \quad (3.186)$$

Tendo em conta as hipóteses anteriores, que determinam os valores das constantes de integração, obtém-se a seguinte expressão para a superfície de pressões:

$$y_i(x) = \frac{Rx}{2H} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^3}{2H} \operatorname{asin} \left(\frac{x}{R} \right) + \left(-\frac{R^2}{H} \right) x + \frac{R^2}{H} \left(R^* - \frac{\pi R}{4} \right) \quad (3.187)$$

Admitindo que as tangentes das duas superfícies de pressões correspondentes às parcelas superior e inferior da cúpula são coincidentes no ponto onde elas se intersectam, obtém-se a seguinte expressão, que permite determinar o impulso horizontal H da superfície de pressões da parcela inferior da cúpula em função da coordenada x_p do ponto de intersecção das duas superfícies:

$$\left[\frac{dy_i}{dx} \right]_{x=x_p} = \left[\frac{dy_s}{dx} \right]_{x=x_p} \Rightarrow H = \frac{R \sqrt{R^2 - x_p^2}}{x_p} - \frac{R^2 - x_p^2}{x_p} \quad (3.188)$$

A coordenada x_p do ponto de intersecção das duas curvas, designado por Lévy por ponto neutro^{Paradiso et al.,2003}, obtém-se a seguinte equação:

$$y_i = y_s \Rightarrow \left(\frac{R \sqrt{R^2 - x_p^2}}{x_p} - \frac{R^2 - x_p^2}{x_p} \right) \sqrt{R^2 - x_p^2} - \frac{x_p}{2} \sqrt{R^2 - x_p^2} \quad (3.189)$$

$$- \frac{R^2}{2} \operatorname{asin} \left(\frac{x_p}{R} \right) + Rx_p - R \left(R^* - \frac{\pi R}{4} \right) = 0$$

Na Figura 3.119 representam-se duas soluções para cúpulas circulares de diferentes espessuras. Observe-se que em ambos os casos o ângulo correspondente à intersecção das superfícies é inferior ao ângulo $\varphi = 51.8^\circ$ obtido pela teoria das membranas para início das tracções na direcção circunferencial. Na Figura 3.119, a solução da direita corresponde, aproximadamente, à situação limite de espessura mínima da cúpula, tendo-se determinado a seguinte relação $(t/R)_{\min}$ admissível $\cong 0.050$.

Na análise da estabilidade de cúpulas pode, também, considerar-se a simplificação utilizada por Poleni na análise da cúpula da basílica de S. Pedro em Roma, que admitiu que ela se comportava como um conjunto de arcos de largura variável correspondentes a lúnulas diametralmente opostas, simplesmente justapostos[†]. Assim, a análise da cúpula torna-se bidimensional, podendo-se generalizar as análises realizadas nos parágrafos 3.7 e 3.8.2 para arcos.

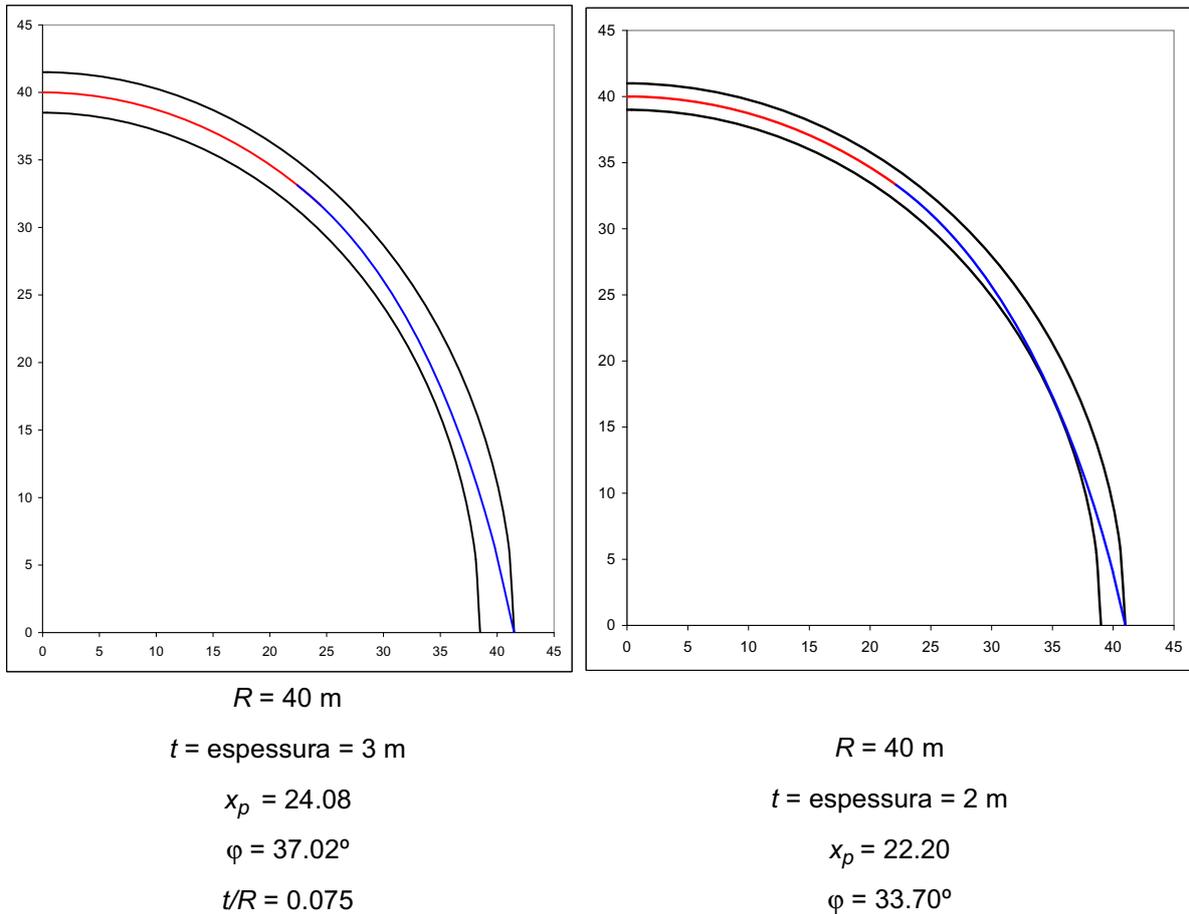


Figura 3.119 - Superfícies de pressões de cúpulas esféricas de 40 m de raio, calculadas com base na sua decomposição em duas partes (superior e inferior) - acção do peso próprio da cúpula.

Considerando uma das lúnulas bidimensionais que compõe a cúpula, a geometria da linha de pressões correspondente à acção do peso próprio da cúpula é obtida pela análise do equilíbrio elementar da linha de pressões (Figura 3.120). Admitindo, por simplicidade, que é unitário o produto da espessura da cúpula pelo seu peso específico ($\gamma t = 1$), obtém-se a seguinte expressão para o perfil da linha de pressões da cúpula homogénea^{††}:

[†] O teorema estático da análise limite garante que se cada um desses arcos de largura variável que resultam da decomposição da cúpula estiver em equilíbrio, também será estável a cúpula real que apresenta um comportamento tridimensional mais favorável.

^{††} A qual é, por se admitir as mesmas hipóteses de comportamento bidimensional para a cúpula, idêntica à expressão (3.187) da geometria da superfície de pressões inferior.

$$y(x) = -\frac{Rx}{2H}\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{R^3}{2H}\operatorname{asin}\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{R^2}{H}x \quad (3.190)$$

em que R é o raio de curvatura da cúpula e H o impulso horizontal. A indeterminação estática do problema é traduzida na expressão anterior pelo valor do impulso horizontal H que é indeterminado. Na Figura 3.121 representa-se a família de curvas correspondente à expressão (3.190).

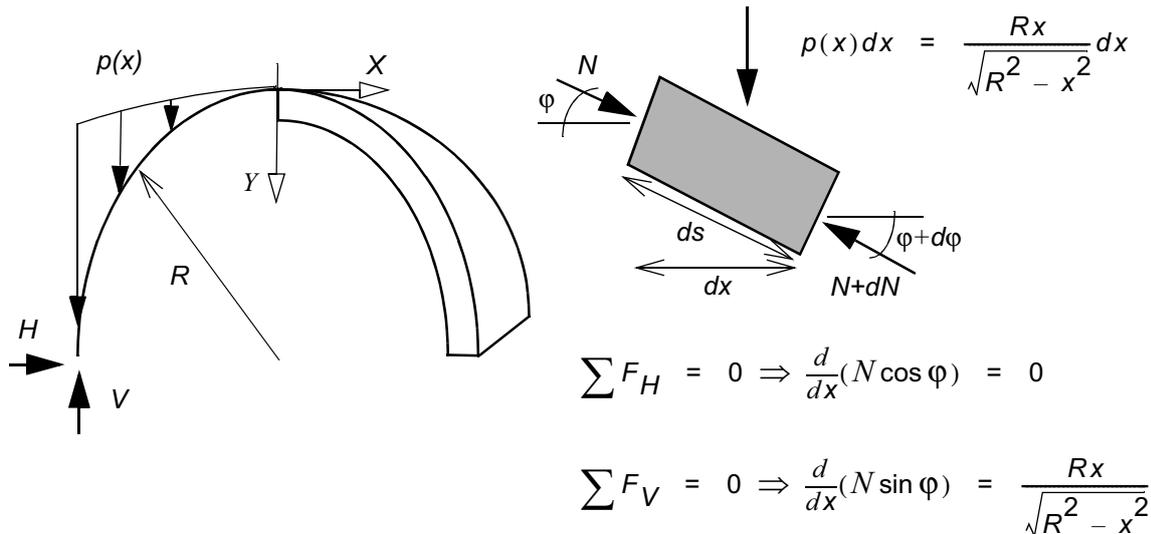


Figura 3.120 - Determinação da linha de pressões correspondente à acção do peso próprio de uma lúnula da cúpula esférica.

Considerando ainda a decomposição da cúpula em lúnulas diametralmente opostas e tendo em conta a geometria obtida para a linha de pressões em equilíbrio com o seu peso próprio (Figura 3.121), a situação correspondente à espessura mínima da cúpula é a de uma linha de pressões tangente ao extradorso do arco nas impostas e próximo do fecho e ao intradorso numa secção intermédia (Figura 3.122).

O mecanismo correspondente à situação de espessura mínima é formado por articulações nos pontos de tangência da linha de pressões com os limites da espessura do arco, verificando-se que a parte central da cúpula, junto ao fecho, sofre um movimento de translação de corpo rígido[†] no sentido descendente, enquanto que as lúnulas adjacentes são empurradas para o exterior, rodando em torno do seu ponto de apoio (Figura 3.122).

[†] Admite-se, tal como no caso dos arcos (parágrafo 3.8), que as zonas da estrutura entre juntas fracturadas são suficientemente estáveis, formando corpos rígidos em movimento.

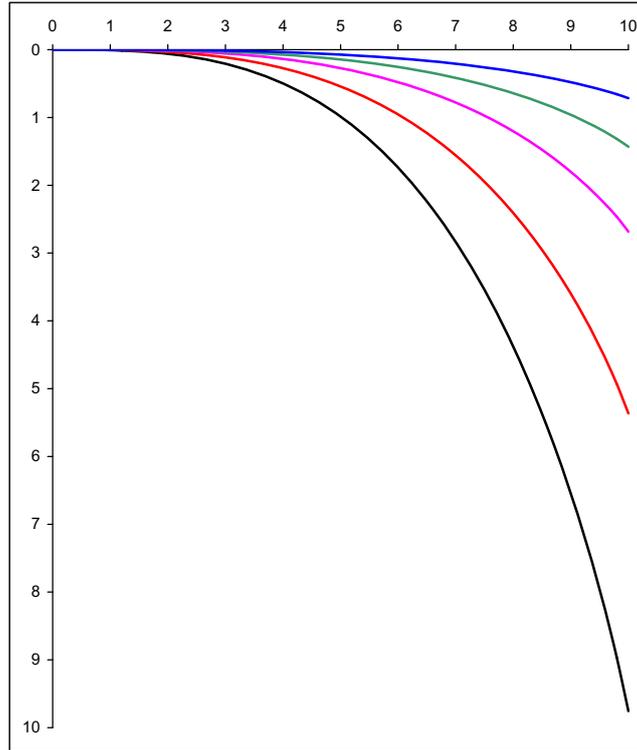


Figura 3.121 - Família de linhas de pressões correspondentes à acção do peso próprio de uma lúnula da cúpula esférica ($R = 10\text{m}$).

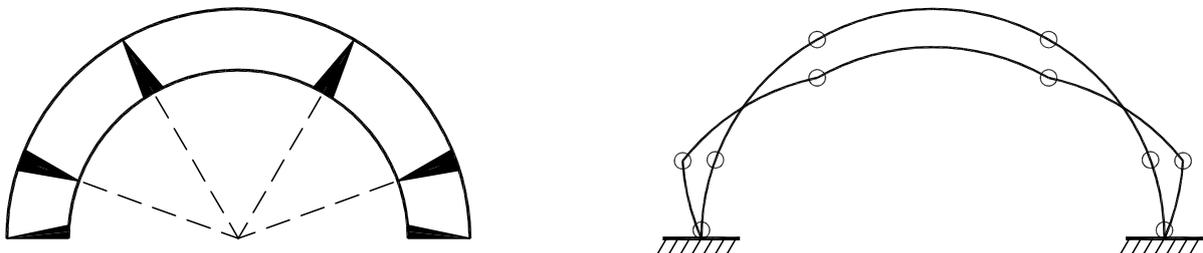


Figura 3.122 - Decomposição da cúpula em lúnulas - mecanismo correspondente à espessura mínima admissível.

A identificação do valor da espessura mínima é conseguida através da análise do equilíbrio dos corpos rígidos que formam o conjunto. Considere-se os diagramas de corpo rígido correspondentes ao mecanismo da Figura 3.122 e admita-se localizações genéricas para as articulações (ângulos ψ , β e α na Figura 3.123).

Impondo que o impulso R_A na secção A deverá ser tangente ao extradorso do arco, tem-se:

$$H = Q_1 \cot \psi = \gamma R^2 t (1 - \cos \psi) \cot \psi \quad (3.191)$$

Da mesma forma, o impulso R_B em B deverá actuar perpendicularmente à secção da articulação,

donde se obtém:

$$H = (Q_1 + Q_2) \cot \beta = \gamma R^2 t (1 - \cos \beta) \cot \beta \quad (3.192)$$

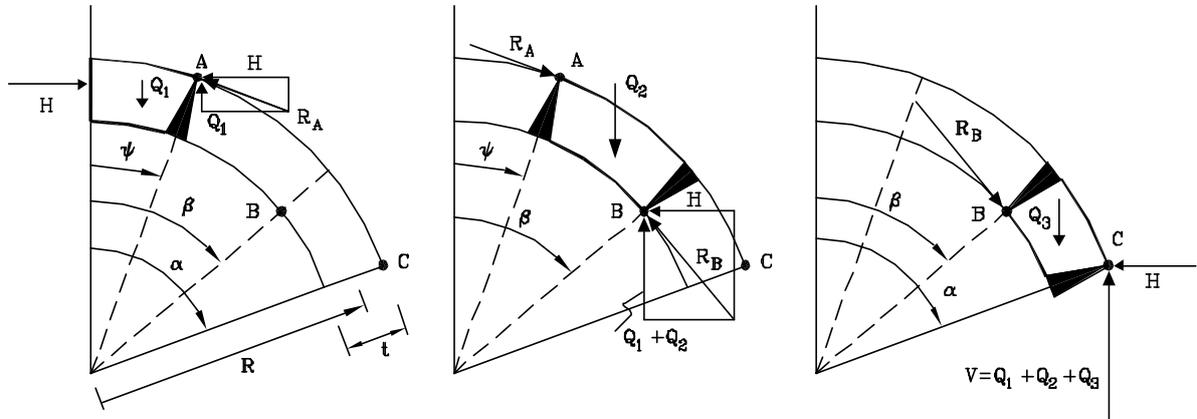


Figura 3.123 - Diagrama de corpo livre - arco de largura variável correspondente à decomposição de uma cúpula esférica em lúnulas e submetida apenas à acção do seu peso próprio.

Das equações (3.191) e (3.192) resulta a seguinte relação entre os ângulos ψ e β que definem as localizações das articulações A e B :

$$(1 - \cos \psi) \cot \psi = (1 - \cos \beta) \cot \beta \quad (3.193)$$

Considerando o equilíbrio de momentos em torno do ponto B , das forças actuantes no troço definido pelas articulações A e B e tendo em conta a expressão (3.192), obtém-se a seguinte equação, que define a espessura mínima admissível em função dos ângulos ψ e β , ainda indeterminados:

$$\left(\frac{t}{R}\right)_{min} = 2 \{ \tilde{g}(\beta)(\cos \psi - \cos \beta) + f(\psi)(\sin \psi - \sin \beta) + h(\psi, \beta) - \sin \beta + i(\psi, \beta) \} / \{ \tilde{g}(\beta)(\cos \psi + \cos \beta) + f(\psi)(\sin \psi + \sin \beta) + h(\psi, \beta) \sin \beta \} \quad (3.194)$$

em que:

$$\tilde{g}(\beta) = (1 - \cos \beta) \cot \beta \quad (3.195)$$

$$f(\psi) = (1 - \cos \psi) \quad (3.196)$$

$$h(\psi, \beta) = (\cos \psi - \cos \beta) \quad (3.197)$$

$$i(\psi, \beta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\beta - \sin \beta \cos \beta - \psi + \sin \psi \cos \psi}{\cos \psi - \cos \beta} \right\} \quad (3.198)$$

Considerando agora o equilíbrio de momentos em torno do ponto B , das forças actuantes no troço definido pelas articulações B e C (Figura 3.123) e tendo em conta as expressões (3.192) e (3.194), obtém-se a seguinte expressão que permite determinar o ângulo β de localização da articulação B em função do ângulo α que define a abertura do arco:

$$\begin{aligned} & g(\psi)(\cos \alpha - \cos \beta) + l(\alpha)(\sin \alpha - \sin \beta) + j(\beta, \alpha)(\sin \beta - k(\beta, \alpha)) + \\ & \{ \tilde{g}(\beta)(\cos \psi - \cos \beta) + f(\psi)(\sin \psi - \sin \beta) + h(\psi, \beta) - \sin \beta + i(\psi, \beta) \} / \\ & \{ \tilde{g}(\beta)(\cos \psi + \cos \beta) + f(\psi)(\sin \psi + \sin \beta) + h(\psi, \beta) \sin \beta \} \\ & \{ g(\psi)(\cos \alpha + \cos \beta) + l(\alpha)(\sin \alpha + \sin \beta) - j(\beta, \alpha) \sin \beta \} = 0 \end{aligned} \quad (3.199)$$

em que:

$$g(\psi) = (1 - \cos \psi) \cot \psi \quad (3.200)$$

$$l(\alpha) = (1 - \cos \alpha) \quad (3.201)$$

$$j(\beta, \alpha) = (\cos \beta - \cos \alpha) \quad (3.202)$$

$$k(\beta, \alpha) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \beta + \sin \beta \cos \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} \right\} \quad (3.203)$$

Aplicando as expressões (3.199) e (3.194) para diferentes valores do ângulo de abertura da cúpula, obtém-se o gráfico da Figura 3.124, que representa o valor da espessura mínima admissível da cúpula em função do seu ângulo de abertura.

Na Figura 3.124 pode constatar-se que, considerando a cúpula como um conjunto de arcos de largura variável, simplesmente justapostos, obtém-se uma solução mais estável ($(t/R)_{min\ admissível} = 0.042$ para $\alpha = 90^\circ$) do que a correspondente ao arco isolado de espessura constante ($(t/R)_{min\ admissível} = 0.106$ para $\alpha = 90^\circ$). Este facto deve-se a o peso próprio do arco de largura variável corresponder a uma linha de pressões mais próxima do perfil circular do que a catenária, que representa a linha de pressões do arco isolado sujeito à acção do seu peso próprio. Obviamente, a consideração do efeito tridimensional do comportamento real da cúpula, corresponderá a uma solução $(t/R)_{min\ admissível}$ ainda menor.

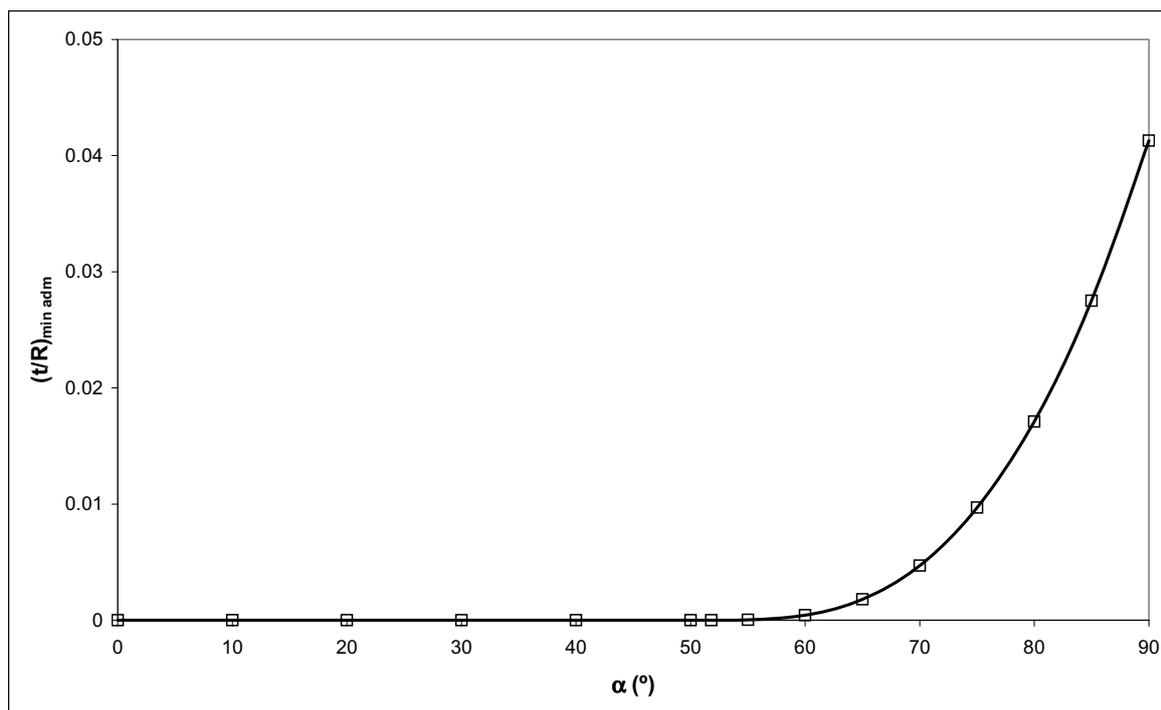


Figura 3.124 - Variação da espessura mínima admissível de uma cúpula circular submetida apenas à ação do seu peso próprio, em função do ângulo de abertura da cúpula.

Como se pode observar na Figura 3.124, para ângulos de abertura da cúpula inferiores a $51,8^\circ$, os valores obtidos para as espessuras mínimas admissíveis são nulos[†]. Esta conclusão, que está de acordo com o resultado da teoria das membranas, resulta de ser sempre possível encontrar para aberturas inferiores a $51,8^\circ$ uma linha de pressões na família de linhas definida pela expressão (3.190), totalmente incluída na espessura do arco. Esta situação é equivalente à que ocorre numa viga horizontal em alvenaria solicitada por uma carga concentrada (Figura 3.125): não obstante a linha de pressões correspondente à solicitação não ter a geometria do eixo da viga, qualquer que seja a sua espessura, é sempre possível encontrar uma linha de pressões bilinear totalmente incluída na espessura da viga.

Note-se que, de acordo com a equação (3.191), a intensidade do impulso horizontal é função do ângulo ψ que define a localização da articulação A . Maximizando o valor do impulso horizontal definido por essa expressão, tem-se:

$$\frac{dH}{d\psi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\psi}((1 - \cos \psi) \cot \psi) = 0 \Rightarrow (\sin \psi)^2 \cos \psi + \cos \psi - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\psi = 51,8^\circ \quad (3.204)$$

[†] Recordar-se que se admitiu a hipótese de a alvenaria ter resistência ilimitada à compressão.

valor que corresponde, exactamente, ao anteriormente obtido. Deste modo, para ângulos de abertura da cúpula inferiores a 51.8° , o impulso horizontal não tomará a sua intensidade máxima, ou seja, não corresponderá a uma articulação na base, pelo que não se estará perante uma situação de espessura mínima admissível.

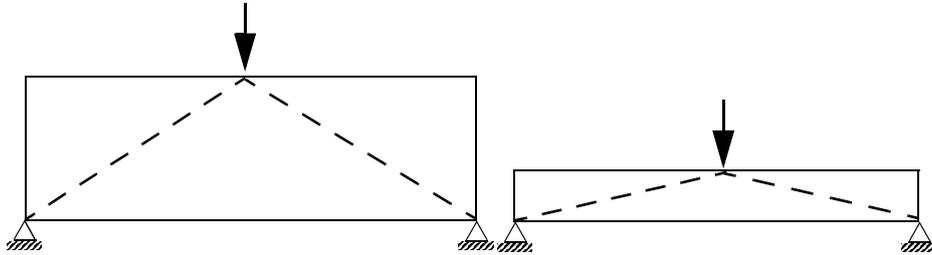


Figura 3.125 - Viga em alvenaria solicitada por uma carga concentrada.

O aumento da estabilidade da cúpula com a diminuição da sua abertura, em particular quando o ângulo α se aproxima de 60° , era do conhecimento (empírico) dos mestres construtores, que executavam enchimentos nos extradorsos das cúpulas de modo a aumentar a sua estabilidade (Figura 3.126).



Figura 3.126 - Enchimento do extradorso da abóbada da nave do mosteiro de Alcobaça.

3.9.2.2 - Metodologias Gráficas

Considerando a decomposição da cúpula em lúnulas podem aplicar-se na verificação da estabilidade da cúpula os métodos gráficos de análise desenvolvidos para arcos. Seguindo essas metodologias, na Figura 3.127 representa-se a análise da linha de pressões correspondente a uma lúnula de uma cúpula esférica.

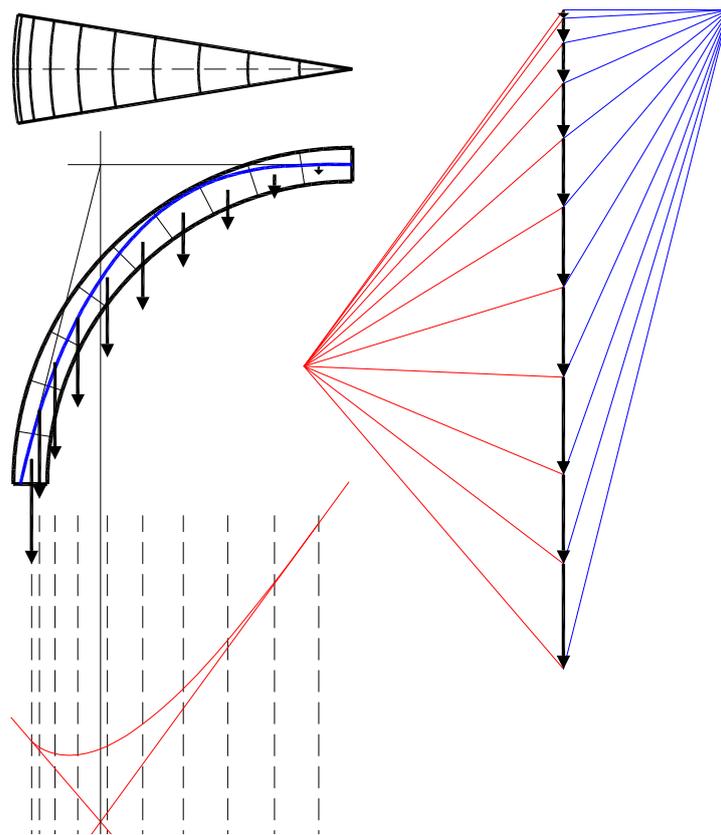


Figura 3.127 - Decomposição da cúpula em lúnulas - Análise gráfica.

3.10 - CONCLUSÕES

Neste capítulo estudaram-se métodos gráficos e analíticos aplicáveis na análise estrutural de construções em alvenaria, nomeadamente arcos, abóbadas e cúpulas. Estes métodos, por conduzirem a soluções estaticamente equilibradas e por envolverem, em geral, processos de cálculo ou gráficos de simples aplicação são metodologias úteis em estudos preliminares. Os seus resultados constituem, também, primeiras aproximações que facilitarão a calibragem de modelos numéricos.

A base destes métodos, gráficos ou analíticos, é o conceito de linha de pressões, sendo a estabilidade da estrutura avaliada em função da posição dessa linha no interior das secções transversais. No caso de um arco, a estrutura estará totalmente comprimida se a linha de pressões se localizar no interior do terço central de todas as suas secções transversais. A decorrente regra do terço central, impõe que o arco seja dimensionado de modo a que em serviço esteja totalmente comprimido. Esta regra de dimensionamento, embora frequentemente

utilizada, é excessivamente conservativa, uma vez que é suficiente que a linha de pressões se localize no interior das secções transversais para garantir a estabilidade.

A simplicidade da verificação da segurança das estruturas em alvenaria através do controle da posição da linha de pressões é contrariada pela dificuldade de determinação da linha de pressões correspondente ao carregamento. De facto, nos arcos a determinação da linha de pressões não é possível apenas com o recurso às equações da estática, sendo necessário equações que envolvem a deformabilidade da estrutura.

Nas metodologias clássicas, como o método de Méry, a indeterminação estática dos arcos é resolvida arbitrando três pontos de passagem da linha de pressões: habitualmente pontos correspondentes às articulações que se formam nos mecanismos correspondentes aos impulsos horizontais máximo e mínimo. No entanto, estes processos de resolução da tripla hiperstasia do arco só são validados pelo teorema estático da análise limite, que viria a ser enunciado posteriormente à divulgação destes métodos.

Como se apresentou neste capítulo, admitindo certas hipóteses no comportamento estrutural das alvenarias, a teoria da plasticidade, assim como os teoremas fundamentais da análise limite, são válidos na análise deste tipo de estruturas. Em particular, o teorema estático, por validar as metodologias clássicas, revela-se de grande importância.

O teorema estático garante que se for possível encontrar uma linha de pressões equilibrada com as solicitações e totalmente incluída na espessura da estrutura, então esta estará em equilíbrio. Deste modo, para garantir a estabilidade da estrutura, não é necessário identificar a linha de pressões realmente instalada na estrutura, mas apenas uma linha de pressões compreendida nos limites das suas secções. Este é o princípio utilizado implicitamente nas metodologias clássicas, que apenas identificam uma das possíveis linhas de pressão em equilíbrio com as solicitações.

A validade da teoria da análise limite permite que a análise das estruturas de alvenaria se efectue de forma semelhante à normalmente utilizada nas estruturas metálicas. Nomeadamente, o estudo dos mecanismos cinematicamente admissíveis possibilita o cálculo de cargas de colapso e das espessuras mínimas admissíveis.

O comportamento altamente não linear das estruturas em alvenaria, devido à sua fraca resistência à tracção, inviabiliza a utilização dos métodos elásticos na resolução da indeterminação estática dos arcos. No entanto, dada a divulgação do método empírico MEXE, apresentou-se neste capítulo o método elástico de Pippard que lhe deu origem.

Não obstante a indeterminação estática dos arcos, é possível determinar famílias de geometrias de linhas de pressões correspondentes a determinados carregamentos. O estudo inverso, de identificação de famílias de carregamentos correspondentes a determinados perfis das linhas de pressões, permite justificar que o carregamento dos rins do arco, por deslocar a linha de pressões para o interior da espessura de arcos circulares, é uma acção estabilizadora. A análise das linhas de pressões correspondentes aos enchimentos do extradorso dos arcos leva a concluir que além do efeito favorável atrás referido, o carregamento dos rins dos arcos conduz à diminuição da intensidade dos impulsos horizontais nos apoios.

O efeito favorável do enchimento do extradorso dos arcos não se limita, no entanto, às consequências da distribuição vertical das cargas no andamento das linhas de pressões. A rigidificação lateral produzida pelo material de enchimento, cujos efeitos serão estudados no capítulo seguinte, tem, como é sabido, uma enorme influência na resposta dos arcos. Neste capítulo apresentou-se uma metodologia simplificada de análise limite de arcos em que esse efeito é tido em conta através da consideração dos impulsos passivos do material existente no extradorso do arco.

A espessura mínima admissível de um arco para uma dada solicitação é uma medida da estabilidade do arco, sendo possível definir um coeficiente de segurança geométrico com base nessa espessura ou nos valores dos impulsos horizontais máximo e mínimo. Também pela análise das espessuras mínimas correspondentes a vários tipos de carregamento se conclui que o carregamento dos rins dos arcos, através do enchimento do extradorso, é favorável para a estabilidade dos arcos.

A análise dos mecanismos cinematicamente admissíveis correspondentes a uma dada acção concentrada permite identificar as localizações mais desfavoráveis para o ponto de aplicação da carga, verificando-se que são muito dependentes da relação vão/altura do arco e da intensidade das acções permanentes (peso próprio do arco e do material de enchimento no extradorso e

carga uniforme). O efeito do impulso lateral do material de enchimento, assim como o da resistência à compressão dos blocos do arco, também podem ser considerados neste tipo de análise.

Os efeitos geometricamente não lineares, que se estimam ser consideráveis em estruturas de grande vão, não foram, no entanto, considerados neste tipo de análises. Esses efeitos serão estudados no próximo capítulo.

A extensão natural do conceito de linha de pressões para o espaço tridimensional é o conceito de superfície de pressões e a teoria das membranas é a ferramenta analítica indicada para o estudo do equilíbrio dessas superfícies. Tratando-se de uma teoria estaticamente determinada, a teoria das membranas possibilita a determinação de soluções estaticamente equilibradas que fornecem indicações quanto ao comportamento das estruturas tridimensionais. No caso das cúpulas, a solução de membrana permite identificar as zonas traccionadas que correspondem a linhas de fractura nas estruturas reais e no caso de abóbadas de aresta, permite justificar a necessidade do enchimento do seu extradorso junto dos apoios.

Em estruturas tridimensionais reais, de geometria complexa, a análise da sua estabilidade pela teoria das membranas pode revelar-se uma tarefa trabalhosa, sendo nesses caso preferível decompôr a estrutura em sub-estruturas bidimensionais e aplicar os princípios analíticos e gráficos desenvolvidos para os arcos. Os teoremas da análise limite garantem que se as sub-estruturas forem por si só estáveis, também o será o conjunto tridimensional.

CAPÍTULO 4 - MODELAÇÃO NUMÉRICA DE ESTRUTURAS EM ALVENARIA

4.1 - INTRODUÇÃO

As características constitutivas dos materiais que constituem as alvenarias, que se traduzem numa razoável resistência das alvenarias à compressão e numa baixa resistência a tensões de tracção, a anisotropia dos seu comportamento e a presença de superfícies de descontinuidade tornam a modelação numérica de estruturas de alvenaria uma tarefa complexa.

Alguns modelos já desenvolvidos permitem a simulação das principais características do comportamento material não linear das alvenarias e também dos efeitos geométricos de 2ª ordem, possibilitando a simulação do comportamento mecânico, desde a fase inicial até à completa degradação do material. No entanto, a utilização destes modelos tem elevados custos computacionais e exige uma refinada caracterização mecânica dos materiais, não sendo sempre possível, ou adequado, a sua utilização na modelação numérica de estruturas em alvenaria.

A escolha da técnica de modelação numérica, assim como do grau de refinamento do modelo, dependem dos objectivos do estudo, do tipo e qualidade de informação mecânica e geométrica disponível e, também, das capacidades computacionais e da qualificação do analista. Em certas situações análises menos sofisticadas revelam-se mais adequadas, e noutras, poderá ser aconselhável para uma mesma estrutura efectuar várias modelações com diferentes graus de refinamento.

No ponto seguinte descrevem-se as mais importantes metodologias de modelação numérica de

estruturas de alvenaria, seguindo a classificação proposta por Vieira de Lemos^{Lemos, 1998b} e dando especial ênfase aos métodos dos elementos finitos e dos elementos discretos, que serão aprofundadamente descritos nos parágrafos 4.4, 4.5 e 4.6 e de cuja aplicação resultam os estudos numéricos que se apresentam neste trabalho.

No parágrafo 4.3 pretende-se caracterizar mecanicamente o material compósito designado por alvenaria, definindo os parâmetros essenciais para a sua modelação numérica e no parágrafo 4.7 apresentam-se análises numéricas de estruturas de alvenaria, que demonstram a aptidão dos métodos de elementos finitos e discretos na modelação do comportamento não linear dessas estruturas e permitem avaliar os parâmetros que regem o seu comportamento mecânico.

4.2 - METODOLOGIAS DE ANÁLISE NUMÉRICA EM ESTRUTURAS DE ALVENARIA

4.2.1 - Elementos Estruturais e Macro-Elementos

A metodologia mais simples de modelação de estruturas de edifícios antigos baseia-se nas técnicas correntes de modelação de edifícios pelo método dos elementos finitos. Nesta metodologia as várias componentes da estrutura (colunas, arcos, abóbadas, paredes, etc...) são modeladas através da combinação de elementos estruturais, nomeadamente elementos de viga, de laje ou de casca, para os quais se admite, em geral, um comportamento elástico linear. Por vezes são introduzidas artificialmente articulações ou módulos de elasticidade reduzidos, de forma a simular simplificadaamente efeitos materiais não lineares.

Estes modelos simplificados de análise fornecem informações úteis para estudos preliminares e, em certas circunstâncias, consoante a dimensão e complexidade da estrutura, são uma boa alternativa (Figura 4.1).

Quando as estruturas dos edifícios são constituídas por paredes de grandes dimensões, nas quais se pode admitir em determinadas áreas distribuições de tensão uniformes e que certos painéis se comportam como elementos rígidos, é possível modelar os edifícios através de macro-elementos que simulam painéis de parede (Figura 4.2). Através desta metodologia reduz-se

significativamente o número de graus de liberdade do modelo e, conseqüentemente, o consumo de recursos computacionais, o que é particularmente relevante em análises dinâmicas. Os macro-elementos que discretizam a estrutura podem ter comportamento rígido ou deformável, sendo, em geral, os danos modelados nas interfaces que ligam os diversos elementos^{Brencich et al.,1998}.

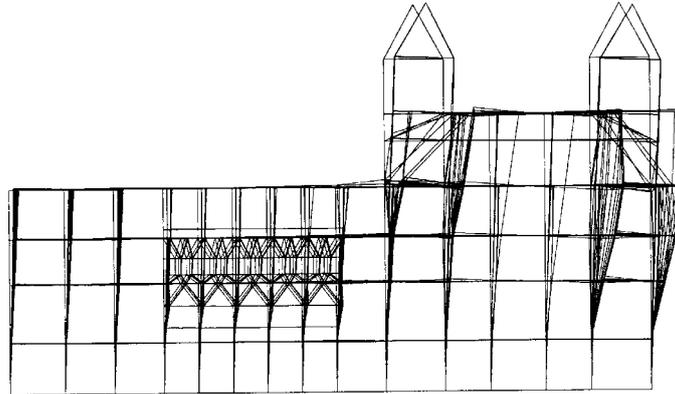


Figura 4.1 - Modelo de elementos estruturais (elementos de viga) do mosteiro de São Vicente de Fora em Lisboa - configuração deformada do primeiro modo de vibração^{Vaz,1997}.

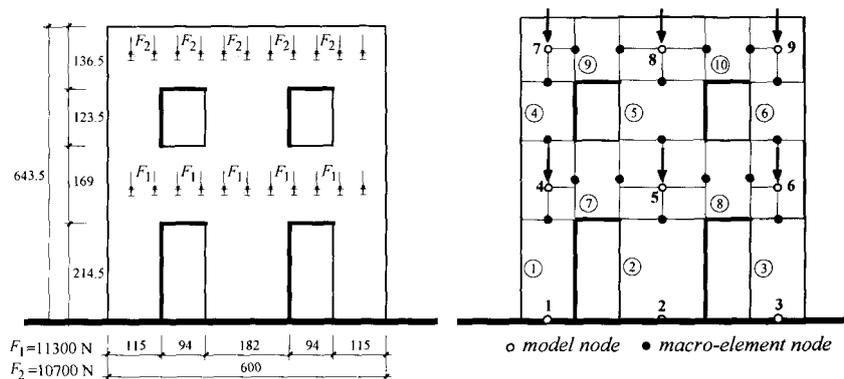


Figura 4.2 - Exemplo de discretização de uma parede de alvenaria com aberturas através de uma malha de macro-elementos^{Brencich e Lagomarsino,1997}.

4.2.2 - Modelos Contínuos de Elementos Finitos

A dificuldade em representar correctamente na malha de elementos finitos os componentes maciços das estruturas das construções antigas (como por exemplo, contrafortes, paredes e colunas) através de elementos estruturais bidimensionais, levou à utilização de elementos finitos tridimensionais contínuos. Com estes elementos a alvenaria é modelada como um meio homogêneo contínuo, sem distinção entre os diversos blocos e juntas que a possam constituir.

Este tipo de modelação envolve, quando o grau de refinamento é significativo, um elevado número de graus de liberdade, o que implica um esforço computacional considerável. Embora esta metodologia seja mais adequada para modelos parciais das estruturas de edifícios antigos, os meios computacionais actuais já permitem a construção e análise de malhas de dimensão considerável.

Na modelação de estruturas de grande dimensão são usualmente considerados modelos materiais elásticos lineares, os quais, não permitindo a correcta simulação das alvenarias, de comportamento não linear, fornecem, no entanto, informações úteis para a compreensão qualitativa do comportamento da estrutura. Permitem, nomeadamente, identificar zonas onde ocorrem fendilhações e deformações permanentes, avaliar o nível das tensões de compressão instaladas na estrutura e identificar localizações para colocação de reforços estruturais. São diversos os exemplos existentes na literatura de modelação de estruturas monumentais através de modelos contínuos de comportamento elástico linear (Figura 2.37 e Figura 4.3).

Nas situações em que os estados de tensão são compostos fundamentalmente por tensões de compressão, com tensões de tracção de baixa intensidade, pode ser aceitável a aproximação obtida através da análise elástica linear. Noutros casos, os resultados desses modelos apenas poderão ser encarados como primeiras aproximações e deverá recorrer-se a modelos que simulem o comportamento não linear das alvenarias.

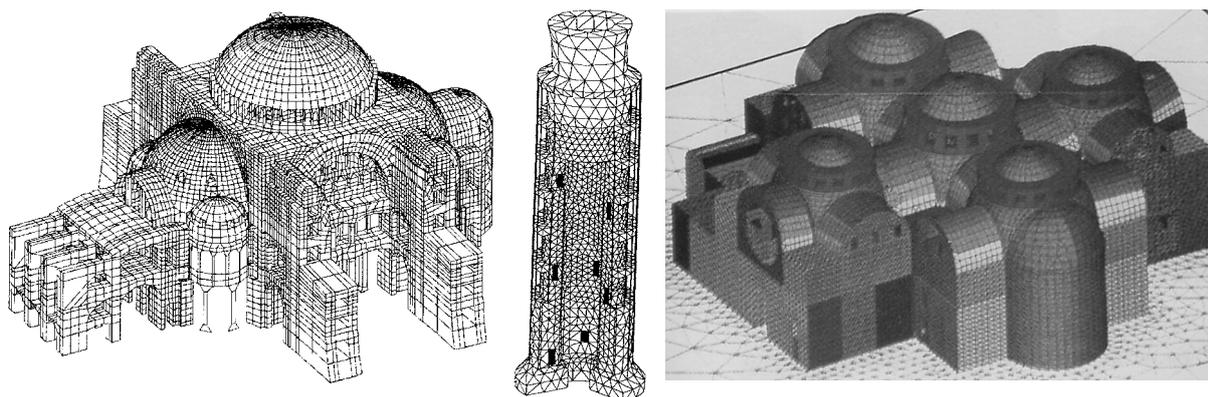


Figura 4.3 - Modelos de comportamento elástico linear (Esq.: Basílica de Sta. Sofia em Istambul^{Croci,1998}; Centro: Torre de Pisa^{Macchi et al.,1993}; Dta.: Basílica de S. Marcos em Veneza^{Mola e Vitaliani,1997}).

Em certas circunstâncias as aproximações elásticas lineares podem ser melhoradas pela introdução de modificações na malha de elementos finitos. Por exemplo, Mola^{Mola e Vitaliani,1997} modelou elasticamente a basílica de S. Marcos em Veneza (Figura 4.3)

considerando nas zonas de concentração de fendilhação módulos de elasticidade de valor reduzido e simulando explicitamente as juntas de maior dimensão através de descontinuidades na malha de elementos finitos.

A simulação estrutural de painéis de alvenaria regular, constituídos por arranjos periódicos de unidades e argamassa, com a modelação explícita de todos os componentes (unidades e juntas) e considerando os seus parâmetros constitutivos, pode tornar-se uma tarefa impraticável, mesmo em painéis de dimensões moderadas. Assim, as técnicas de homogeneização que permitem modelar um meio descontínuo periódico através de elementos contínuos homogêneos com características mecânicas equivalentes (Figura 4.4), representam uma possível ferramenta para a modelação de estruturas de alvenaria regular.

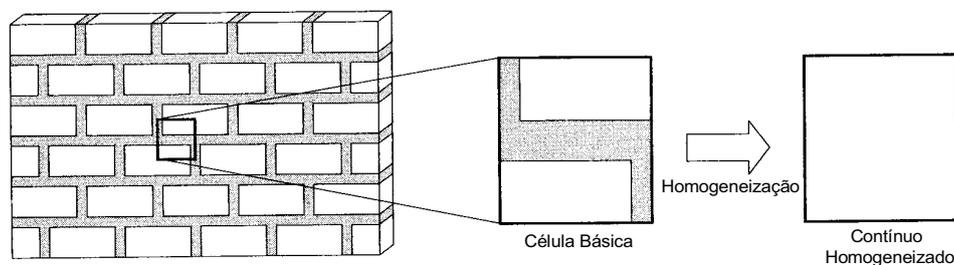


Figura 4.4 - Esquema da técnica de homogeneização de painéis de alvenaria regular.

Nas teorias de homogeneização o comportamento global do meio homogeneizado é deduzido a partir do comportamento de cada um dos componentes, geralmente em dois passos sucessivos de homogeneização, cada um deles correspondente a uma orientação distinta das juntas. Embora este processo de homogeneização em dois passos tenha sido utilizado muito satisfatoriamente no caso de análises elásticas lineares, é de salientar que em análises não lineares, onde a relação entre a rigidez das unidades e das juntas se torna maior, esta técnica simplificada de homogeneização conduz a resultados não aceitáveis^{Zucchini e Lourenço,2002}. Tendo em conta a inadequabilidade deste processo de homogeneização, alguns autores^{Lourenço,1997;Anthoine,1995} propuseram metodologias de homogeneização com um único passo.

Nas construções antigas nem sempre é possível identificar a regularidade necessária para a aplicação das metodologias de homogeneização, pelo que estas técnicas nem sempre são aplicáveis. No entanto, nas pontes de alvenaria encontra-se uma certa ordem nas unidades, o que permite a adopção desta estratégia. É de salientar o trabalho de Middleton^{Middleton et al.,1997} de

homogeneização tridimensional em arcos de alvenaria, através de um passo de homogeneização referente às juntas verticais e horizontais e de um passo posterior que é aplicado, seguindo a metodologia proposta por Lee^{Lee et al.,1996}, quando se detecta o início da fendilhação de qualquer um dos componentes da alvenaria.

Em alternativa à aplicação rigorosa da teoria de homogeneização à célula básica, outras linhas de investigação têm sido desenvolvidas, sendo de salientar a aplicação da teoria generalizada de Cosserat na modelação homogeneizada de estruturas periódicas constituídas por blocos^{Muhlhaus,1993}. A teoria de Cosserat baseia-se numa extensão da mecânica clássica dos meios contínuos, na qual se considera a micro estrutura dos meios homogéneos e graus de liberdade de rotação adicionais em cada ponto material. As rotações adicionais de Cosserat são a chave da homogeneização, sendo a influência da rotação relativa entre blocos de estruturas de alvenaria regular considerada através desses graus de liberdade adicionais.

O domínio de validade da homogeneização pela teoria de Cosserat é definido com base num comprimento característico, representativo da micro-estrutura[†], sendo válida essa homogeneização em estruturas de alvenaria regular quando a dimensão da estrutura for superior a 5 vezes a dimensão dos blocos^{Sulem,1997}.

Na sequência da investigação do comportamento não linear do betão, foram desenvolvidos alguns modelos de análise não linear para meios contínuos, sendo os modelos de elasto-plasticidade, de fenda distribuída e de dano aqueles que podem ser utilizados na simulação do comportamento não linear das alvenarias em modelos contínuos.

Os modelos elasto-plásticos têm sido largamente utilizados na caracterização do comportamento não linear do betão comprimido. Neste contexto, o escoamento plástico é associado a alterações na estrutura interna do material, devidas fundamentalmente à propagação da micro-fendilhação, fenómeno que constitui também nas alvenarias comprimidas o principal factor de não linearidade. Os modelos elasto-plásticos que permitem a simulação das características mecânicas das alvenarias à compressão podem também ser associados a outros modelos não lineares que descrevam o comportamento frágil sob tracção, nomeadamente os modelos de fenda distribuída.

† Da ordem da dimensão do grão da micro estrutura^{Oliveira,1999}.

O comportamento do material fendilhado impõe a utilização de modelos específicos, correntemente agrupados sob a designação de modelos de fendilhação. No âmbito do método dos elementos finitos e na análise do comportamento do betão fissurado, têm sido adoptados dois conceitos distintos de representação da fendilhação, ambos aplicáveis na análise do comportamento frágil das estruturas de alvenaria: o conceito de fenda discreta e o de fenda distribuída.

O conceito de fenda discreta, associado à concepção natural de fractura, modela a fenda (ou junta, no caso de alvenarias constituídas por blocos) explicitamente através da separação dos nós pertencentes aos elementos adjacentes, introduzindo-se assim, uma superfície de descontinuidade na malha de elementos finitos.

Os modelos de fenda distribuída representam o sólido fendilhado como um meio contínuo em que o efeito da fendilhação é modelado através da modificação das relações constitutivas definidas para o material. A utilização destes modelos é particularmente vantajosa do ponto de vista computacional, uma vez que admite a formação de fendas com localização e orientação genéricas, preservando ao longo da análise a topologia da malha de elementos finitos original[†].

Este modelo é naturalmente apto para a modelação da fendilhação difusa, situação que ocorre em algumas alvenarias de edifícios antigos. No entanto, para alvenarias regulares de blocos é difícil incorporar neste modelo a influência das juntas no comportamento fissurado da alvenaria.

A aplicação dos modelos de fenda distribuída na análise de problemas com fractura de tipo localizado revelava nos modelos iniciais falta de objectividade da solução relativamente à malha de elementos finitos, existindo uma forte dependência entre a solução obtida e o refinamento da malha adoptada^{Alfaiate,1992}. Esta dificuldade conduziu à definição de modelos incorporando um critério energético de propagação da fendilhação, formulado com base na

[†] No caso do betão e de algumas alvenarias irregulares, a propagação das fendas efectua-se progressivamente no meio contínuo, com o aumento do carregamento, e sem um percurso pré-definido, sendo necessário numa análise através de modelos de fenda discreta alterar continuamente a topologia da malha de elementos finitos. Em alvenarias regulares de blocos em que a argamassa entre juntas apresente uma resistência significativamente inferior à resistência das unidades, situação que é frequente em construções antigas, o problema de alteração contínua da topologia da malha de elementos finitos numa análise de fenda discreta não se coloca, dado que as juntas entre unidades, que correspondem às superfícies potenciais de fractura, poderão ser previamente discretizadas.

energia de fractura do material[†] e expresso através da inclusão de um ramo descendente no diagrama tensão-deslocamento normal (Figura 4.5). Ajustando o ramo descendente desse diagrama, em função dos parâmetros materiais (resistência à tracção f_t e energia de fractura G_f) e da largura de banda, identificada com a zona da fractura e dependente da configuração da malha de elementos finitos, é possível assegurar que na propagação da fendilhação através de um elemento é consumido o valor correcto da energia de fractura, desta forma, obter resultados objectivos relativamente ao refinamento adoptado para a malha de elementos finitos^{Bazant, 1985}.

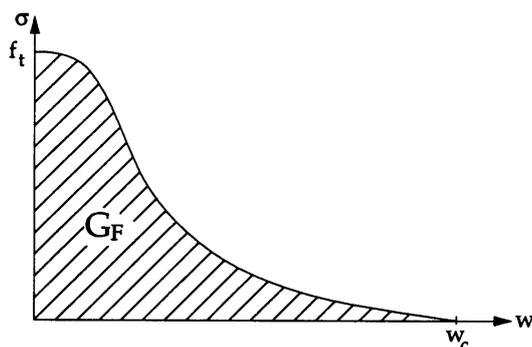


Figura 4.5 - Energia de fractura G_f , diagrama $s-w$ (tensão normal-abertura da fenda).

Relativamente aos critérios de definição da evolução da orientação da fenda, os modelos de fenda distribuída podem classificar-se ainda em modelos de fenda fixa (“fixed crack model”) ou de fenda rotativa (“rotating crack model”). Nos primeiros, a orientação inicial da fenda permanece fixa durante todo o processo de cálculo, admitindo-se apenas a possibilidade de formação de fendas segundo outras direcções. Nos modelos de fenda rotativa permite-se que a orientação da fenda inicial varie, de forma discreta ou contínua, acompanhando a rotação das direcções principais de tensão.

Outras direcções têm sido privilegiadas no âmbito dos modelos de fendilhação distribuída, em particular os modelos obtidos por extensão do conceito de dano ao tratamento da fractura por tracção. Os modelos de dano em meios contínuos foram introduzidos na análise do comportamento do betão para descrever a progressiva degradação das propriedades mecânicas do material, verificada numa fase anterior ao desenvolvimento de fendas macroscópicas. Basicamente a teoria do dano procura modelar os processos de degradação do material através de um conjunto de variáveis internas, escalares (em modelos isotrópicos) ou tensoriais (em

[†] A energia de fractura de um material (G_f) é uma propriedade material, que, por definição^{Hillerborg et al., 1976}, representa a energia necessária para a formação de uma superfície de fenda com área unitária.

modelos anisotrópicos), que reflectem o estado de danificação local ou global da estrutura.

Nos modelos de dano há um tratamento unificado do comportamento em tracção e em compressão, evitando-se a utilização de equações constitutivas de natureza distinta que dificulta a implementação e afecta a convergência do cálculo.

A aplicação de modelos de dano na modelação do comportamento de estruturas tem sido orientada para as estruturas de betão armado, sendo muito reduzida a experiência de simulação de construções antigas em alvenaria através destes modelos. Salienta-se, somente, a tentativa de aplicação do modelo de dano desenvolvido na Universidade Politécnica da Catalunha^{Oñate et al.,1996} (Figura 4.6), verificando-se, no entanto, a necessidade de estudos de calibração mais desenvolvidos.

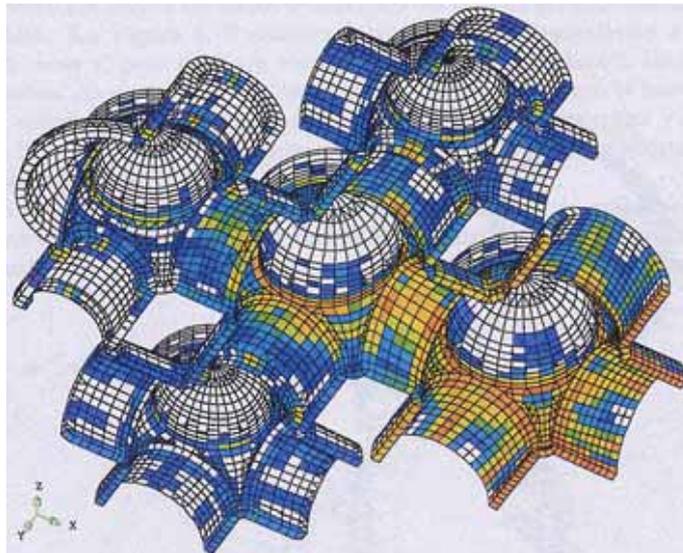


Figura 4.6 - Resultados da aplicação de um modelo de dano na análise estática da basílica de S. Marcos em Veneza - índices de dano para a aplicação de um peso próprio 4 vezes superior ao real^{Hanganu et al.,1997}.

Para a simulação da fractura do betão em meios contínuos existem ainda outros modelos, como por exemplo os modelos resultantes da adopção de formulações não locais e os modelos do gradiente, os quais ainda não foram suficientemente testados no âmbito das estruturas de alvenaria.

Em conclusão é possível dizer que os numerosos exemplos de aplicação dos modelos contínuos na análise de problemas de fractura localizada em estruturas de betão revelaram um razoável desempenho. A persistência de algumas dificuldades neste tipo de análises, designadamente, a

deficiente relaxação das tensões de tracção instaladas no material adjacente à fenda macroscópica, a influência da orientação da malha na direcção da propagação da fenda e problemas de instabilidade e bifurcação numérica, aconselham um cuidado especial na avaliação dos resultados obtidos, sendo de privilegiar, sempre que possível, o uso de modelos de fenda discreta^{Rots, 1988}. Assim, no caso de estruturas de alvenaria em edifícios antigos, com a excepção de situações onde se preveja a ocorrência de fendilhação difusa (como por exemplo em paredes de alvenaria de pedra e cal) ou de análises macroscópicas (nas quais é impraticável reproduzir explicitamente as juntas entre os elementos), é aconselhável a utilização de modelos descontínuos de fenda discreta.

No presente trabalho as aplicações de análise não linear em modelos de elementos finitos contínuos para o estudo do comportamento das alvenarias de edifícios antigos foram realizadas através de modelos de fenda distribuída.

4.2.3 - Modelos Descontínuos de Elementos Finitos

Nas alvenarias regulares de blocos as juntas entre unidades constituem, em virtude da sua fraca resistência a tensões de tracção, a maior fonte de não linearidades no comportamento estrutural. Assim, a representação explícita das juntas e a modelação do seu comportamento mecânico é um passo natural na tentativa de simulação rigorosa das construções em alvenaria.

Na modelação da junta entre unidades, isto é, da argamassa de assentamento e das duas superfícies de adesão argamassa-unidade (Figura 4.7), podem ser adoptadas diferentes estratégias, em função do grau de refinamento pretendido. Na estratégia mais refinada, as unidades e as juntas em argamassa são modeladas com elementos finitos contínuos, sendo as áreas de adesão argamassa-unidade simuladas através de elementos de interface de espessura nula (Figura 4.7). Assim, as ligações mais fracas da alvenaria, isto é, as áreas de adesão, são explicitamente modeladas, podendo a fractura ocorrer nas faces superior ou inferior da argamassa de assentamento.

Nesta metodologia mais refinada a argamassa da junta e as unidades são modeladas com as suas características mecânicas (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e leis constitutivas), sendo assim possível simular a deformação lateral da junta de argamassa (Figura 4.8), factor que

é importante na modelação do esmagamento por compressão. De facto, quando comprimida, a junta mais deformável tende a expandir-se lateralmente, sendo esse movimento restringido pelas unidades mais rígidas e gerando-se, assim, um complexo campo de tensões de compressão na junta e de tracção nas unidades.

Este nível de refinamento na modelação corresponde, naturalmente, a um grande esforço computacional e só é possível em análises detalhadas de pequenos modelos.

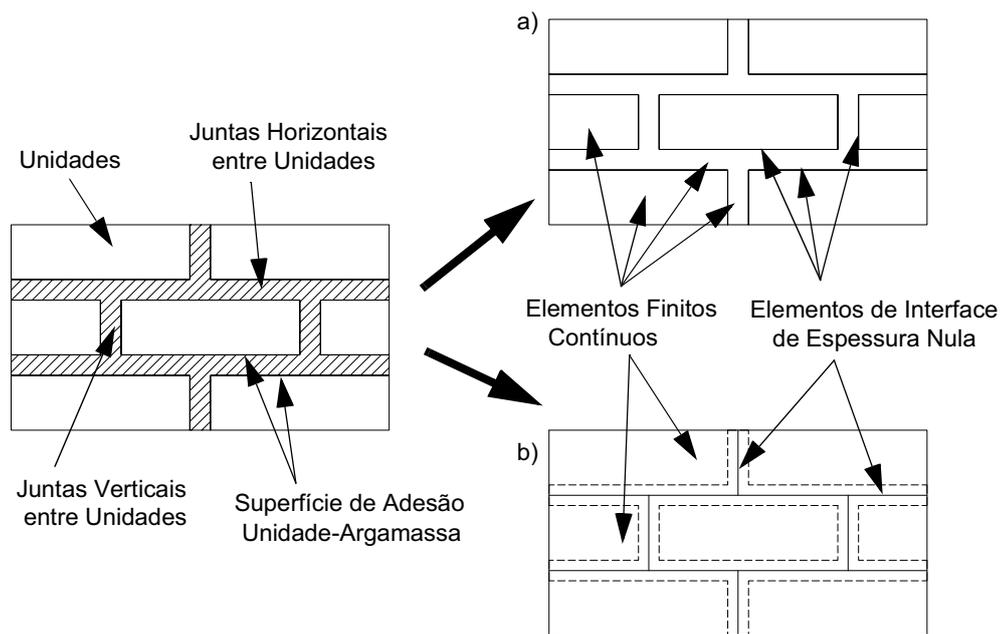


Figura 4.7 - Modelação descontínua de paredes de alvenaria regular com elementos finitos - Modelação detalhada (a) e simplificada (b) das juntas entre unidades.

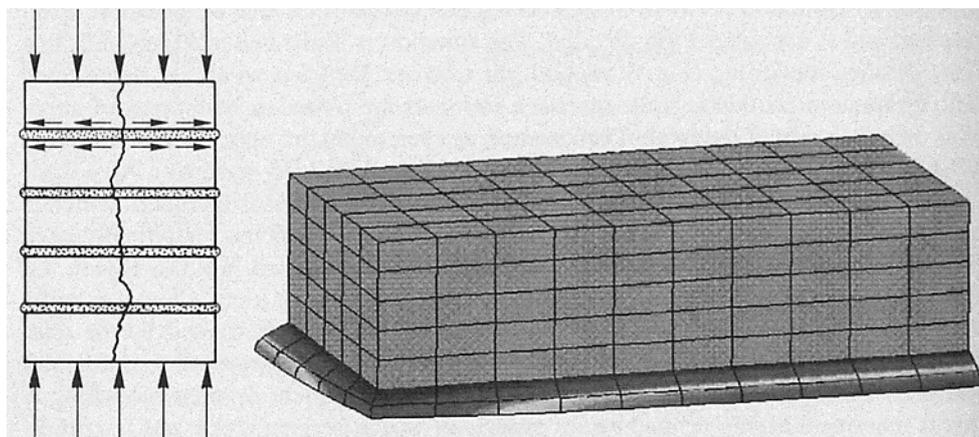


Figura 4.8 - Modelação detalhada da alvenaria: interacção junta em argamassa - unidade ^{CUR,1997}.

Em modelos de maiores dimensões poderá utilizar-se uma metodologia simplificada em que a junta é simulada através de um único elemento de interface de espessura nula, sendo as unidades

modeladas por elementos finitos contínuos (Figura 4.7). Com esta estratégia, designada de fenda discreta e semelhante à modelação explícita das fendas nas estruturas de betão, reduz-se o número de elementos que simulam a junta e, conseqüentemente, o tempo de cálculo. É de referir, no entanto, que na simulação de painéis de parede de dimensões moderadas, mesmo com esta estratégia simplificada, o número de graus de liberdade dos sistemas é elevado, pelo que a simulação de grandes estruturas não poderá ser efectuada com base neste tipo de modelação. Deverá recorrer-se a modelos contínuos de elementos finitos ou considerar no modelo um número de elementos de interfaces inferior ao número de juntas real, obtendo-se assim um conjunto de macro-elementos contínuos, conectados por elementos de interface, que simulam o comportamento de conjuntos de unidades.

Esta técnica simplificada apresenta a desvantagem de não simular a deformabilidade lateral da junta quando comprimida entre as unidades. No entanto, este efeito apenas é significativo quando o comportamento à compressão é condicionante, situação que não corresponde à maioria dos casos práticos.

Observe-se, também, que no caso de alvenarias de junta seca, isto é, sem inclusão de argamassa de assentamento nas juntas entre unidades, a estratégia descrita como simplificada é a mais correcta para a simulação das juntas.

O elemento fundamental em qualquer uma das metodologias descritas, é o elemento de interface, que representa uma superfície potencial de fractura, por tracção e/ou corte. Os elementos de interface foram inicialmente utilizados por Ngo e Scordelis^{Ngo e Scordelis,1967} na simulação discreta da fendilhação no betão, posteriormente por Goodman^{Goodman et al.,1968} no domínio da mecânica das rochas, e por Page^{Page,1978}, na área das alvenarias. Desde então têm sido desenvolvidos diversos modelos de comportamento não linear para interfaces em alvenarias, sendo de destacar o modelo constitutivo desenvolvido por Lourenço^{Lourenço,1996}, que inclui um critério de plastificação da interface por tracção, corte e compressão. A robustez deste modelo foi testada com base em resultados experimentais, verificando-se um bom ajustamento. Gambarotta e Lagomarsino^{Gambarotta e Laomarsino,1997} desenvolveram posteriormente um modelo constitutivo no âmbito da teoria do dano, sendo o dano na interface medido através de uma variável interna associada a uma taxa de libertação de energia de deformação, à qual as componentes normal e tangencial de deformação inelástica estão

relacionadas.

Verifica-se que a consideração de modelos em que a deformação inelástica é concentrada totalmente nos elementos de interface, conduz a modelos de elementos finitos robustos, capazes de simular completamente todo o percurso de carregamento da estrutura, desde a fase inicial até à completa degradação do material^{Lourenço, 1996}.

No caso das alvenarias regulares existentes nas construções antigas as juntas apresentam resistências significativamente inferiores às unidades, pelo que é previsível que o percurso da fractura se efectue através das juntas entre unidades. Nestes casos é habitual admitir para os elementos de contínuo que simulam as unidades um comportamento elástico linear. No entanto, em certas circunstâncias, particularmente nas alvenarias mais recentes em que a resistência das juntas se aproxima da resistência das unidades, é possível que a fenda se propague também através das unidades. Nesses casos poderá considerar-se um modelo não linear para os elementos contínuos que modelam os blocos ou, simplificado, introduzir no meio da unidade um elemento de interface vertical de comportamento não linear. Menos corrente é a adopção de uma estratégia de modelação de fenda discreta semelhante à utilizada na análise do betão fissurado, em que o percurso da fenda é simulado através duma alteração contínua da topologia da malha de elementos finitos (Figura 4.9).

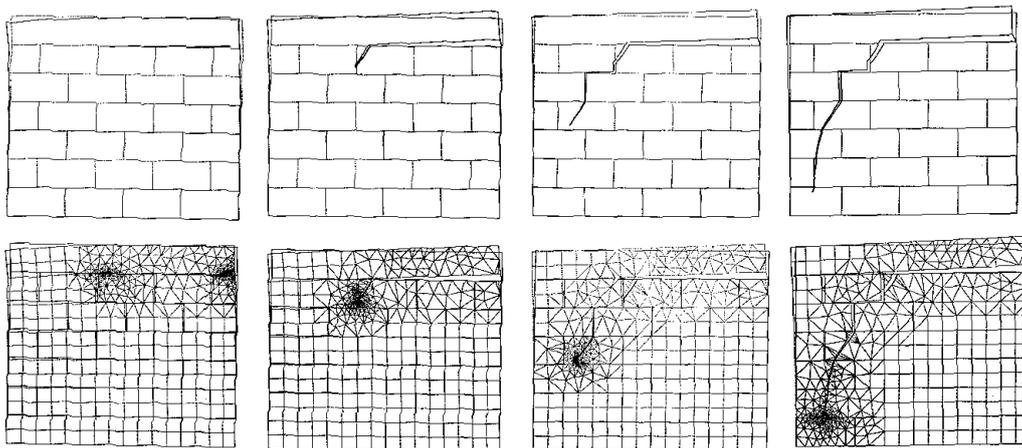


Figura 4.9 - Modelação da propagação da fractura numa parede de alvenaria através da alteração contínua da topologia da malha de elementos finitos^{Cormeau e Shire, 1995}.

No presente trabalho as aplicações de análise não linear em modelos descontínuos de elementos finitos para o estudo do comportamento das alvenarias regulares de edifícios antigos foram realizadas através de modelos de fenda discreta e com uma modelação simplificada das juntas

entre unidades, ou blocos.

4.2.4 - Modelos de Elementos Discretos

O método dos elementos discretos é um método numérico de análise de estruturas desenvolvido explicitamente para a análise estática e dinâmica de estruturas descontínuas[†]. Este método, inicialmente desenvolvido por Peter Cundall^{Cundall,1971;1988} no âmbito da mecânica das rochas, caracteriza-se principalmente por permitir a ocorrência de deslocamentos e rotações finitas de corpos discretos e por permitir, durante a análise, o reconhecimento de novos contactos entre corpos e a eliminação de contactos obsoletos. Assim, este método permite a simulação do completo destacamento de corpos discretos inicialmente em contacto.

Em virtude das suas características, a aplicação do método dos elementos discretos estendeu-se para além do domínio da mecânica das rochas, vindo a ser aplicado em outros domínios da engenharia. A análise de solos e materiais granulares^{Ghaboussi e Barbosa,1990}, de sólidos fracturados^{Trent et al.,1995} e, mais recentemente, de alvenarias de blocos (Figura 4.10) são áreas onde os modelos de elementos discretos têm vindo a ser utilizados.

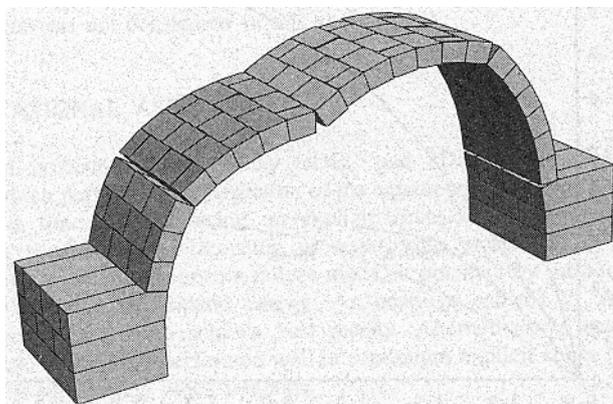


Figura 4.10 - Modelo tridimensional de elementos discretos de uma ponte em alvenaria^{Lemos,1995}.

Existem algumas aplicações do método dos elementos discretos na análise do comportamento estático e dinâmico de construções em alvenaria^{Azevedo et al., 2001}, embora a sua validação a partir de resultados experimentais seja ainda incipiente.

O método dos elementos discretos é particularmente indicado para a análise de problemas em

[†] Um meio descontínuo difere de um meio contínuo pela existência de interfaces e contactos entre corpos discretos que compõem a estrutura.

que uma parcela significativa da deformação ocorre pelo movimento relativo entre os corpos discretos que compõem a estrutura. Os corpos discretos podem ser modelados como rígidos ou deformáveis, sendo a hipótese de corpos rígidos suficientemente realista em situações em que o nível de deformação dos blocos é baixo quando comparado com a deformação das juntas.

Com a consideração da deformabilidade dos corpos discretos, o método dos elementos discretos aproxima-se dos modelos descontínuos de elementos finitos com modelação simplificada das juntas entre unidades. À parte das técnicas de solução de ambos os métodos[†], a diferença reside na modelação do contacto entre os corpos: no método dos elementos finitos consideram-se elementos de interface e no método dos elementos discretos contactos pontuais.

Dentro da designação do método dos elementos discretos existem, no entanto, algumas variações. Peter Cundall^{Cundall e Hart,1992} identifica quatro grandes classes:

- 1) os métodos dos elementos distintos - que usam esquemas explícitos para resolver directamente as equações de movimento dos corpos discretos, admitindo corpos rígidos ou deformáveis e contactos deformáveis, sendo possível uma pequena interpenetração nos contactos;
- 2) os métodos modais - idênticos aos anteriores, mas que consideram a deformabilidade dos blocos através de sobreposição modal^{Hocking et al.,1985};
- 3) os métodos de deformação descontínua - que admitem contactos rígidos e corpos rígidos ou deformáveis, em que a condição de não interpenetração nos contactos é conseguida através de esquemas iterativos^{Shi,1989};
- 4) os métodos baseados na conservação da quantidade de movimento - que admitem contactos e corpos rígidos e estudam o movimento através do balanço da quantidade de movimento entre corpos durante uma colisão instantânea^{Hahn,1988}.

No presente trabalho o método dos elementos discretos utilizado (e descrito no parágrafo 4.5) é

[†] O método dos elementos finitos tradicional é um método implícito enquanto que o método dos elementos discretos baseia-se na integração explícita das equações de movimento dos corpos discretos aplicando-se a técnica da relaxação dinâmica nas análises estáticas.

o anteriormente designado por método dos elementos distintos, desenvolvido por Peter Cundall e que deu origem ao programa de cálculo UDEC^{Itasca,2000} (utilizado nas análises que se apresentam no parágrafo 4.7). Por ser um dos primeiros métodos de elementos discretos e por o programa de cálculo UDEC ser um dos algoritmos mais divulgados, a designação de método dos elementos discretos refere-se correntemente ao método dos elementos distintos. Atendendo à tradição já muito consolidada desta designação, ela será a utilizada no presente trabalho.

4.3 - CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DAS ALVENARIAS REGULARES

Nos últimos anos tem-se assistido a um grande desenvolvimento dos modelos numéricos para simulação do comportamento não linear de estruturas constituídas por materiais frágeis ou quasi-frágeis, como são o betão e a alvenaria. No entanto, a caracterização experimental desses materiais, particularmente no que diz respeito às alvenarias, sofreu uma evolução mais lenta e nem sempre estão disponíveis resultados experimentais para os parâmetros requeridos pelos modelos numéricos. Apenas recentemente a comunidade científica mostrou interesse em campanhas de ensaios experimentais com o objectivo de caracterizar mecanicamente as alvenarias regulares. No que diz respeito às construções antigas, a caracterização experimental é ainda mais recente e menos completa, sendo notória a falta de experiência nesta área, em comparação com outros domínios de investigação mais desenvolvidos, como os do betão, dos solos e das rochas.

Os ensaios experimentais realizados na última década visaram sobretudo estruturas de alvenaria regular recente, de tijolo ou blocos, sendo raros ensaios nouro tipo de alvenarias. No entanto, as características fundamentais das alvenarias ensaiadas podem ser traduzidas para qualquer outro tipo de alvenaria ou material onde a adesão, coesão e atrito entre unidades constituam as características básicas do comportamento mecânico. Assim, não obstante a ainda insuficiente caracterização das alvenarias antigas, os resultados referentes a alvenarias recentes permitem aferir os parâmetros necessários para os modelos numéricos.

Pretende-se neste parágrafo identificar os parâmetros básicos que definem o comportamento das alvenarias, nomeadamente das existentes em edifícios antigos, sendo a caracterização

completa e exaustiva deste material compósito remetida para a literatura^{Drysdale et al.,1999;CUR,1997}.

Como referido, a alvenaria regular é um material compósito constituído por unidades e juntas, que, dependendo da combinação e arranjo dos diferentes elementos, corresponde a uma enorme variedade de soluções construtivas. Apesar das diferenças entre as diversas tipologias possíveis das alvenarias, há características comuns a todas elas, que resultam da própria natureza dos materiais que as constituem. Em particular, a baixa resistência à tracção, a resistência ao corte das juntas traduzida por leis do tipo Coulomb e o gradual decréscimo de resistência sob progressiva deformação (que se designa por amolecimento) são características relevantes do comportamento das alvenarias.

Para níveis de tensão normal de compressão moderados[†] a tensão tangencial máxima em juntas argamassadas, ou secas, pode ser traduzida pela lei de Coulomb, que representa uma relação linear entre a tensão tangencial e a tensão normal de compressão:

$$\tau = c_u + \sigma \tan \phi \quad (4.1)$$

em que c_u representa a tensão residual de corte, ou coesão, ϕ o ângulo de atrito interno da junta, σ a tensão normal de compressão e τ a tensão tangencial máxima admissível. Para juntas secas o valor da coesão c_u é, naturalmente, nulo.

O amolecimento é uma característica fundamental dos materiais quasi-frágeis (Figura 4.11), como o betão, as argamassas, os tijolos cerâmicos, a pedra e a rocha, e resulta de uma progressiva propagação de defeitos internos. Mesmo antes do início do carregamento esses materiais apresentam micro-fendilhação interna, devida a fenómenos de retracção ou de arrefecimento durante a sua formação, que aumenta em virtude da imposição de deformações. Inicialmente a micro-fendilhação é estável, crescendo apenas com o incremento da carga, verificando-se na proximidade da carga de pico um aumento da aceleração da sua propagação tendo então origem as fendas macroscópicas. Estas são instáveis, pelo que a intensidade da carga aplicada terá de diminuir para se evitar o seu crescimento descontrolado e se poder

[†] Para valores elevados da tensão normal de compressão na junta o critério de rotura de Coulomb deixa de ser válido, passando a rotura a incluir o esmagamento das unidades e/ou da argamassa.

acompanhar o fenómeno. Num ensaio de carga com controlo de deformação, o crescimento das fendas macroscópicas resulta num amolecimento da resposta e na localização da fendilhação numa pequena zona do espécime, enquanto as restantes zonas descarregam elasticamente.

O fenómeno de amolecimento é identificado experimentalmente em espécimes de alvenaria em solicitações de tracção, corte e compressão, verificando-se no caso da compressão uma forte dependência do amolecimento das condições de fronteira e dimensões do espécime.

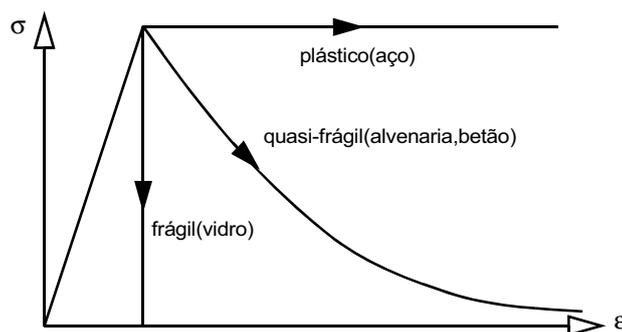


Figura 4.11 - Diagramas representativos dos comportamentos frágil, quasi-frágil e plástico.

Tendo em conta a Figura 4.12, que representa diagramas tensão-deslocamento em ensaios de tracção, de corte e de compressão de espécimes de alvenaria, é possível distinguir o seguinte conjunto de parâmetros representativos do comportamento da alvenaria: a rigidez elástica, a tensão de pico e a energia de fractura que caracteriza a curva de amolecimento.

A tensão de pico é desde sempre considerada um parâmetro fundamental na caracterização do comportamento mecânico dos materiais. Atingida a tensão máxima torna-se necessário estabelecer uma lei de evolução da abertura da fenda, a qual pode ser conseguida através do conceito de energia de fractura.

A energia de fractura (G_f) define a quantidade de energia requerida para propagar uma fenda de superfície unitária, sendo representada pela área limitada pelas curvas tensão-deslocamento representadas na Figura 4.12. No caso de ensaios de tracção e corte a forma da curva de amolecimento é independente das dimensões dos espécimes e das condições de fronteira, podendo considerar-se que as correspondentes energias de fractura são parâmetros materiais[†].

[†] Dada a forte dependência das curvas de amolecimento de ensaios de compressão com as condições de fronteira e dimensões do espécime, o conceito de energia de fractura de compressão (G_c na Figura 4.12) como propriedade material não é unanimemente aceite pela comunidade científica^{Hillerborg,1988}.

Como representado, no caso do comportamento inelástico ao corte, a energia de fractura (G_f^{II}) é definida pela área limitada pelo diagrama tensão-deslocamento correspondente ao ensaio realizado na ausência de tensão de confinamento.

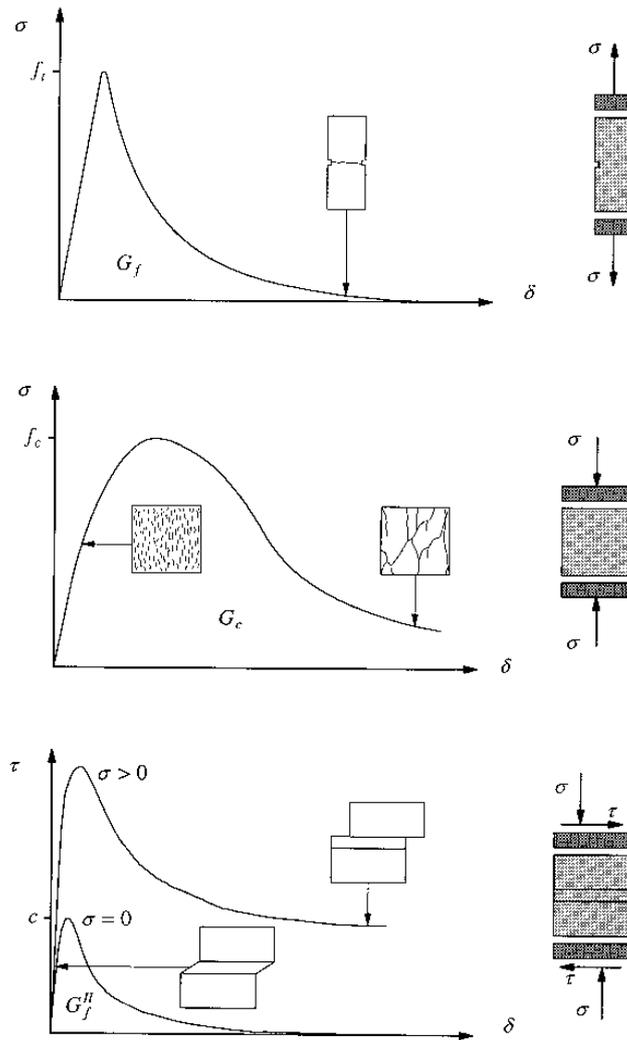


Figura 4.12 - Comportamentos típicos de espécimes de alvenaria submetidos a ensaios de tracção, compressão e corte - comportamento quasi-frágil ^{Lourenço,1996}.

Em alvenarias regulares, de uma forma geral, adoptam-se para os seus componentes, blocos e juntas argamassadas, curvas de amolecimento definidas em função das energias de fractura através de relações exponenciais negativas. Rots ^{CUR,1997} propõe para alvenarias regulares em tijolo cerâmico com juntas argamassadas as seguintes relações exponenciais para as curvas de amolecimento e tracção e em corte:

$$\sigma = f_t e^{\left(\frac{-f_t}{G_f} u\right)} \quad \text{e} \quad c = c_u e^{\left(\frac{-c_u}{G_f^{II}} v_{pl}\right)} \quad (4.2)$$

em que σ é a tensão normal da tracção, f_t a correspondente tensão resistente, G_f a energia de fractura em modo de tracção directa (modo I), u a abertura da fenda, c a coesão, c_u o valor máximo da coesão, G_f^{II} a energia de fractura em corte puro (modo II) e v_{pl} o deslizamento plástico na junta.

As propriedades da alvenaria são dependentes das características dos seus componentes. Por exemplo, como refere o eurocódigo 6^{CEN,1995}, a resistência à compressão da alvenaria é função das resistências das juntas argamassadas e das unidades[†]. Por outro lado, as características da interface de ligação unidade-argamassa, que constitui o elo mais fraco da alvenaria, condicionam a resposta não linear à tracção das juntas entre unidades e, consequentemente, da alvenaria.

Para blocos cerâmicos maciços típicos da construção holandesa, Van der Pluijm^{Pluijm,1992} obteve, em ensaios realizados na direcção transversal e na direcção longitudinal, valores para a resistência à tracção entre 1.5 e 3.5 MPa e para a correspondente energia de fractura valores entre 0.06 e 0.13 Nmm/mm². Quanto à interface de adesão unidade-argamassa, esse autor identificou para a rotura em modo I uma curva de amolecimento exponencial com energias de fractura variando entre 0.005 e 0.02 Nmm/mm² e tensões de pico de 0.3 a 0.9 MPa. Para a rotura em modo II, o mesmo autor encontrou valores para a energia de fractura entre 0.01 e 0.25 Nmm/mm², valores que são dependentes da intensidade da tensão de confinamento. Nesta campanha de ensaios obtiveram-se ainda valores para os outros parâmetros que definem o comportamento ao corte das interfaces unidade-argamassa: para a coesão inicial valores entre 0.1 e 1.8 MPa; para o ângulo de atrito interno inicial ϕ_0 , valores de $\tan\phi_0$ variando entre 0.7 e 1.2; para o ângulo de atrito interno residual ϕ_r , valores de $\tan\phi_r$ aproximadamente constantes e iguais a 0.75; e para o ângulo de dilatância ψ , que mede o deslocamento vertical durante o escorregamento de corte, valores de $\tan\psi$ entre 0.2 e 0.7, dependendo da intensidade da tensão de confinamento.

† O Eurocódigo 6^{CEN,1995} indica, para efeitos de dimensionamento de paredes, a seguinte expressão para o cálculo da resistência à compressão da alvenaria:

$$f_c \text{ alvenaria} = 0.60 f_c \text{ unidade}^{0.65} f_c \text{ argamassa}^{0.25}$$

em que $f_c \text{ unidade}$ e $f_c \text{ argamassa}$ são, respectivamente, as resistências à compressão das unidades e das argamassas das juntas. Assim, o Eurocódigo 6 considera que a resistência à compressão da alvenaria depende exclusivamente das resistências à compressão dos seus componentes, desprezando outros aspectos, como a espessura relativa das juntas, dimensões das unidades, preenchimento das juntas e a interpenetração da argamassa nas unidades. No entanto, esta expressão conduz a resultados razoáveis para painéis de alvenaria de tijolo cerâmico, embora por vezes sobrestime a resistência real dos painéis de parede.

Resultados de recentes campanhas de caracterização experimental de alvenarias em pedra com juntas secas^{Ramos,2002;Oliveira,2002} apontam para resistências ao corte de juntas não polidas de 0, 0.34, 0.69 e 1.08 MPa, para níveis de compressão normal de 0, 0.50, 1.00 e 1.50 MPa, respectivamente. Para a tangente do ângulo de atrito interno obtiveram-se valores da ordem de 0.60 e para o ângulo de dilatação valores nulos. Nos ensaios realizados sobre as pedras, em arenito catalão, foram obtidas resistências à tracção de 4 MPa e energias de fractura em modo I de 0.113 Nmm/mm².

Comportamento da Alvenaria em Compressão Uniaxial

Tradicionalmente a resistência à compressão uniaxial na direcção normal às juntas horizontais da alvenaria era, até à recente introdução dos métodos numéricos na modelação das alvenarias, a mais relevante informação estrutural.

A resposta a solicitações de compressão das alvenarias é condicionada pela diferença relativa das propriedades elásticas das unidades e da argamassa. Devido às diferenças de rigidez, quando a alvenaria é comprimida a argamassa tende a expandir lateralmente mais do que as unidades. Assim, a ligação por atrito e coesão entre a argamassa e as unidades conduz a um confinamento lateral da argamassa que desenvolve esforços de corte na interface e produz um estado de tensão triaxial de compressão na argamassa e um estado biaxial de compressão e tracção na unidade. Em virtude deste complexo estado de tensão ocorrem no provete fendas paralelas à direcção de carregamento, as quais se desenvolvem com o aumento da carga, originando o seu colapso.

Deste modo, a dimensão, rigidez e resistência da argamassa de assentamento têm uma clara influência no comportamento da alvenaria comprimida.

No que diz respeito à alvenaria com juntas secas, não argamassadas, verifica-se que em compressão uniaxial apresenta uma resistência mais reduzida do que espécimes semelhantes com juntas com argamassa^{Roca et al,2001}. Este facto pode ser explicado pela ausência de um material de interface que uniformize as tensões na junta.

É sabido que em ensaios de compressão axial o comportamento dos espécimes em alvenaria é grandemente influenciado pelas suas dimensões e pelas condições de fronteira do

ensaio^{Vermelfoort,1997}, sendo geralmente aceite pela comunidade científica a normalização do ensaio proposta pelo RILEM^{RILEM,1994}.

Comportamento da Alvenaria em Tracção Uniaxial

Em solicitações de tracção em alvenarias o colapso poderá estar associado à rotura das superfícies de adesão unidade-argamassa ou à rotura das unidades, dependendo da relação relativa das resistências à tracção desses componentes. Nestes casos limite, a resistência à tracção da alvenaria é função directa das resistências das unidades ou das áreas de adesão. Noutras situações, em que o colapso se dá pela fractura indistinta das unidades e das áreas de adesão, a resistência da alvenaria não pode ser aferida directamente a partir dessas resistências elementares.

Backes^{Backes,1985} efectuou uma série de ensaios de tracção em alvenarias e identificou vários modos de colapso, em função da diferença relativa das resistências à tracção dos componentes. Num dos modos, em que as fendas se propagam em zig-zag pelas juntas entre unidades, verificou haver na curva de resposta uma resistência residual (Figura 4.13), sendo o comportamento pós-pico governado pelas superfícies de adesão verticais e horizontais. Num outro modo, em que as fendas atravessam, mais ou menos verticalmente, unidades e juntas verticais, verificou haver uma progressiva degradação da resistência até zero. Neste caso, o comportamento pós-pico é governado simultaneamente pelo comportamento das juntas e das unidades, isto é, pelas energias de fractura das unidades e das juntas verticais.

Comportamento da Alvenaria sob estados de tensão Biaxiais

Devido à anisotropia das unidades e à existência de juntas, que constituem superfícies de debilidade do material, as alvenarias são materiais que apresentam um comportamento mecânico diferenciado consoante a direcção das solicitações. A resistência das alvenarias é, portanto, dependente da orientação das tensões principais relativamente aos eixos materiais (isto é, da orientação das juntas e unidades), não sendo possível descrever o comportamento constitutivo da alvenaria sob acções biaxiais através das suas características em regime uniaxial. São poucos os resultados experimentais relativos à resistência das alvenarias quando submetidas a estados de tensão biaxial, sendo o trabalho de Page^{Page,1981;1983} o estudo mais

completo até agora realizado. Na Figura 4.14 representam-se os resultados deste trabalho experimental realizado sobre painéis de alvenaria regular de tijolos cerâmicos, sendo de salientar a sua variação com a alteração dos ângulos entre a direcção de solicitação e o eixos materiais. Note-se que estes resultados só são directamente aplicáveis a alvenarias semelhantes às ensaiadas; para outros tipos de alvenaria será necessário identificar experimentalmente novas curvas envolventes.

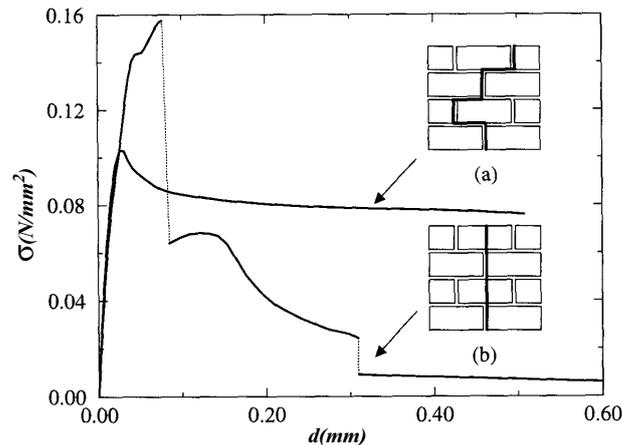


Figura 4.13 - Curvas tensão-deslocamento obtidas em ensaios experimentais de tracção uniaxial em alvenaria: (a) com argamassa de menor resistência; (b) com argamassa de maior resistência ^{Backes,1985}.

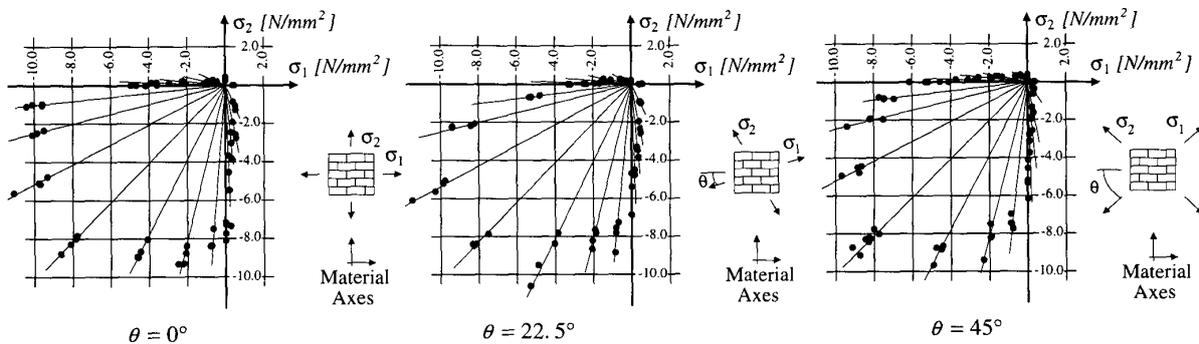


Figura 4.14 - Resultados experimentais de ensaios biaxiais em painéis de alvenaria ^{Page,1981;1983}.

Na Figura 4.15 representam-se diferentes modos de colapso para diversas orientações de solicitação. Na tracção uniaxial o colapso ocorre por fractura das juntas verticais e deslizamento das juntas horizontais ou, se a resistência das juntas for significativa, também por fractura das unidades. A fractura das unidades será tanto mais pronunciada quanto maior for o confinamento vertical, que se traduz num aumento da intensidade das forças de atrito nas juntas. Por outro lado, se a tensão de confinamento vertical for muito elevada poderão ocorrer danos internos (micro-fendilhação e micro-deslizamentos) que resultarão na diminuição da resistência à tracção na direcção perpendicular.

Em carregamento biaxial com tracção e compressão o colapso ocorre em planos normais ao painel de parede, com fendilhação e deslizamentos nas juntas ou por uma combinação de danos na juntas e fractura das unidades. Em carregamentos biaxiais de compressão verifica-se um aumento de resistência relativamente aos ensaios uniaxiais, ocorrendo no colapso, independentemente da orientação das tensões principais, a separação lateral a meio da espessura do painel. O aumento de resistência com o estado de compressão biaxial pode ser explicado pelo atrito nas juntas e atrito interno nas unidades.

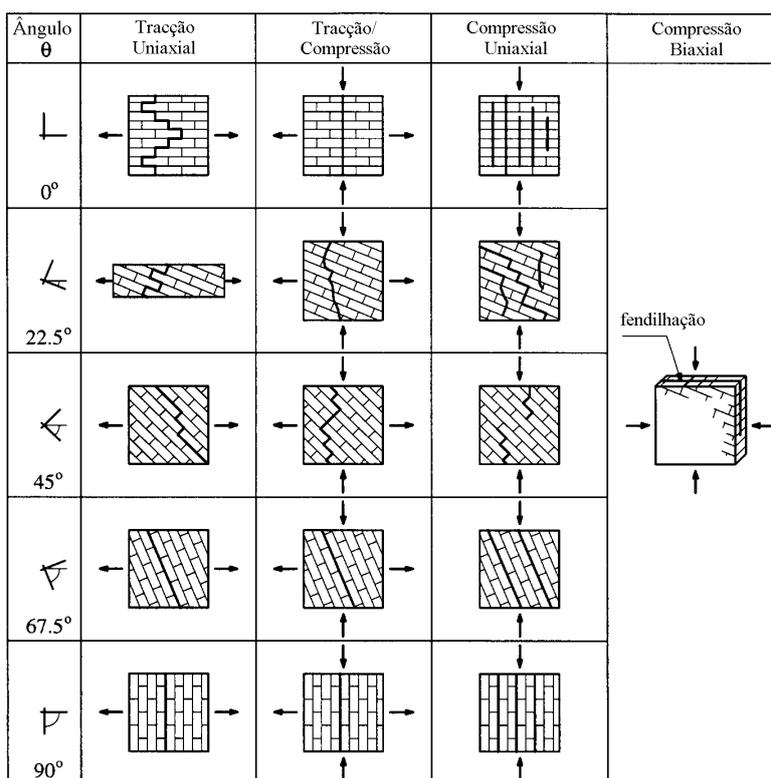


Figura 4.15 - Modos de colapso de painéis de alvenaria sob estados de tensão biaxiais *Dhanasekar et al., 1985*.

4.4 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA MODELAÇÃO DA ALVENARIA

4.4.1 - Estrutura do Método dos Elementos Finitos na Análise Não Linear

Segundo alguns autores *Borst e Sluys, 1999* o método dos elementos finitos baseado na formulação de compatibilidade (ou de deslocamentos) é o método de discretização espacial mais adequado para a maioria das aplicações com relações constitutivas não lineares. De facto, a sua

formulação é simples, permitindo que se implementem facilmente relações constitutivas, mesmo as mais complexas.

Deste modo, a estrutura do método dos elementos finitos que se descreve neste parágrafo[†] e que corresponde à estrutura dos programas de cálculo utilizados neste trabalho (Diana 8.1^{Diana,2002} e Castem 3M^{Buchet et al.,2000}), baseiam-se na formulação de compatibilidade.

As equações locais de equilíbrio de um corpo tridimensional de volume V podem ser escritas na forma:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho g_x = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho g_y = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z = 0 \quad (4.5)$$

em que σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{xz} e σ_{yz} são as componentes do tensor das tensões, g_x , g_y e g_z as componentes do vector da aceleração da gravidade e ρ a massa específica do corpo.

Introduzindo o operador matricial L definido por:

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

as equações diferenciais de equilíbrio (4.3), (4.4) e (4.5) podem ser escritas condensadamente na seguinte forma matricial:

$$L^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

$$\text{em que } \mathbf{g}^T = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} \end{bmatrix} .$$

[†] Para uma descrição mais completa do método dos elementos finitos poderá consultar-se a literatura especializada^{Zienkiewicz,1991a);1991b);Bathe,1976}.

A equação anterior pode ser escrita na forma variacional:

$$\int_V (\delta \mathbf{u}^T [\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}]) dV = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

em que $\delta \mathbf{u}^T = [\delta u_x \quad \delta u_y \quad \delta u_z]$ representa um campo de deslocamentos virtual.

Integrando por partes e aplicando o teorema da divergência, a equação variacional (4.8) toma a forma:

$$\int_V (\mathbf{L} \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (4.9)$$

em que \mathbf{t} é o vector das tensões actuantes na superfície S que constitui a fronteira do domínio V .

A equação anterior representa o principio dos trabalhos virtuais, que estabelece que se uma estrutura em equilíbrio sob a acção de um determinado sistema de forças exteriores é submetida a um campo de deslocamentos virtuais, o trabalho virtual realizado pelas forças exteriores (δW_{ext} - representado na equação (4.9) pelo seu termo direito) iguala o trabalho realizado pelas forças interiores (δW_{int} - representado na equação (4.9) pelo seu termo esquerdo).

A equação (4.9) é o ponto de partida para a aproximação de elementos finitos, sendo em formulações de compatibilidade os deslocamentos dos nós dos elementos finitos as incógnitas fundamentais.

Considerando a discretização espacial do domínio em elementos finitos de n nós e introduzindo o vector $\mathbf{a}_i = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T$, que armazena as componentes do deslocamento do nó genérico i , o campo de deslocamentos contínuo no domínio de um elemento finito $\mathbf{u}_i = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T$ pode ser aproximado através da seguinte expressão:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n h_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{a}_i \quad (4.10)$$

em que $h_i(\xi, \eta, \zeta)$ representa as n funções de aproximação do campo de deslocamentos, habitualmente designadas por funções de interpolação.

Sendo $\mathbf{a}_e = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$ o vector que armazena os vectores dos deslocamentos de todos os nós do elemento finito genérico e , a expressão (4.10) pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{a}_e \quad (4.11)$$

em que \mathbf{H} é a matriz das funções de interpolação, definida por :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & \dots & h_n & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 & h_n & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 & 0 & h_n \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

O vector \mathbf{a}_e pode ainda relacionar-se com o vector \mathbf{a} que armazena os deslocamentos da totalidade dos nós da discretização espacial do domínio através da matriz de incidências \mathbf{Z}_e , que reflecte a topologia da discretização:

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{Z}_e\mathbf{a} \quad (4.13)$$

Considerando as equações (4.11) e (4.13), a equação variacional de equilíbrio (4.9) pode agora ser escrita na forma:

$$\sum_{e=1}^{NEL} \int_{V_e} (\mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{Z}_e\delta\mathbf{a})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \sum_{e=1}^{NEL} \int_{V_e} \rho (\mathbf{H}\mathbf{Z}_e\delta\mathbf{a})^T \mathbf{g} dV + \sum_{e=1}^{NEL} \int_{S_e} (\mathbf{H}\mathbf{Z}_e\delta\mathbf{a})^T \mathbf{t} dS \quad (4.14)$$

em que todos os integrais são estendidos ao domínio V_e ou à fronteira S_e de cada um dos NEL elementos que discretizam a estrutura.

Tendo em conta que a equação (4.14) deverá ser verificada para todo e qualquer campo virtual de deslocamentos e considerando a matriz $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{H}$, a equação de equilíbrio poderá ser escrita na forma:

$$\sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{g} dV + \sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{Z}_e^T \int_{S_e} \mathbf{H}^T \mathbf{t} dS \quad (4.15)$$

em que o termo esquerdo desta equação representa o vector das forças internas (f_{int}) geradas pelas tensões no interior do copo e o termo direito representa o vector das forças externas (f_{ext}) geradas pelo carregamento.

A equação (4.15) refere-se a análises estáticas de problemas mecânicos, não fazendo sentido do ponto de vista físico o conceito de tempo. No entanto, numa análise estática não linear é fundamental ordenar a sequência dos acontecimentos, sendo necessário um parâmetro para esse efeito. O conceito de tempo é, assim, utilizado em sentido abstracto para materializar a acção externa como uma sequência de incrementos de carga[†].

Admitindo que é conhecido o tensor das tensões σ no instante t (σ^t), o tensor das tensões no instante $t+\Delta t$, que é desconhecido, poderá ser expresso por:

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + \Delta\sigma \quad (4.16)$$

Substituindo esta decomposição na equação (4.15) obtém-se:

$$\sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \Delta\sigma dV + \sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \sigma^t dV = \mathbf{f}_{ext} \quad (4.17)$$

em que o termo direito da equação, que representa o vector das forças externas, é calculado no instante $t+\Delta t$.

As equações representadas na expressão (4.17) podem ser não lineares por duas razões: em primeiro lugar o incremento de tensão $\Delta\sigma$ depende, em geral, de forma não linear do incremento de deformação $\Delta\epsilon$ (não linearidade material) e, em segundo lugar, o volume V_e onde se estende a integração poderá ser desconhecido no instante $t+\Delta t$ (não linearidade geométrica).

Considere-se, por agora, que o problema é geometricamente linear, sendo conhecido o volume

[†] Em princípio seria possível impor na equação de equilíbrio o vector das forças externas f_{ext} num único incremento de carga. No entanto, é necessário recorrer a processos iterativos para obter a solução do conjunto de equações (não lineares) que resulta da discretização de um modelo contínuo não linear. No caso de incrementos de carga muito grandes é muito difícil, por vezes impossível, obter uma solução convergente. Por outro lado, os resultados experimentais mostram que na maioria dos materiais a resposta depende do caminho de carga, sendo essencial para a simulação do comportamento mecânico real a imposição de pequenos incrementos de carga.

V_e em todos os instantes. Deste modo, o segundo integral na expressão (4.17), que representa o vector das forças internas no instante t , é conhecido e poderá passar para o lado direito da equação:

$$\sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^t \quad (4.18)$$

A resolução do conjunto de equações não lineares representado pela expressão (4.18) requer a utilização de técnicas iterativas, para as quais é necessário, em geral, a repetida linearização do sistema de equações. Assim, é necessário linearizar a relação entre o incremento de tensões $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ e o incremento de deslocamentos nodais $\Delta \mathbf{a}$.

O incremento de tensões $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ depende (não linearmente) do incremento do tensor das deformações $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, o qual é também função do incremento do campo de deslocamentos $\Delta \mathbf{u}$, isto é:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta \boldsymbol{\sigma}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u})) \quad (4.19)$$

Linearizando $\Delta \boldsymbol{\sigma}$, tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^t \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} \right)^t (\Delta \mathbf{u}) \quad (4.20)$$

em que o índice t se refere ao instante t .

Introduzindo as funções de interpolação definidas através da expressão (4.11) tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^t \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} \right)^t \mathbf{H} \Delta \mathbf{a}_e \quad (4.21)$$

Definindo a matriz de rigidez tangente \mathbf{D} no instante t por:

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^t \quad (4.22)$$

e tendo em conta que:

$$\mathbf{L} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} \right)^t \quad (4.23)$$

o incremento de tensões pode ser escrito na forma:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DLH} \Delta \mathbf{a}_e = \mathbf{DB} \Delta \mathbf{a}_e = \mathbf{DBZ}_e \Delta \mathbf{a} \quad (4.24)$$

Substituindo a equação (4.24) na expressão (4.18) tem-se:

$$\sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{DBZ}_e \Delta \mathbf{a} dV = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^t \quad (4.25)$$

Tendo em conta que os incrementos dos deslocamentos nodais não dependem das coordenadas espaciais, o vector $\Delta \mathbf{a}$ poderá sair do interior do integral, obtendo-se assim um conjunto linearizado de N equações a N incógnitas, sendo N o número total de graus de liberdade do modelo de elementos finitos:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}^t \quad (4.26)$$

em que a matriz de rigidez tangente \mathbf{K} é definida no instante t por:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dV \mathbf{Z}_e \quad (4.27)$$

Na equação (4.26) as relações não lineares tensão-deformação assim como as relações não lineares entre deformações e deslocamentos incrementais são linearizadas no início do incremento de carga, isto é, no instante t , enquanto que o carregamento corresponde ao instante $t+\Delta t$. Assim, haverá um desequilíbrio entre a solução obtida pela expressão (4.26) e a solução exacta (Figura 4.16). Este afastamento, que será tanto maior quanto maior for a dimensão do incremento de carga, pode ser minimizado através de um processo iterativo.

Assim, no processo incremental-iterativo a primeira aproximação do vector dos deslocamentos incrementais é obtida por:

$$\Delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,0}^t) \quad (4.28)$$

em que o índice 1 indica que se trata da primeira aproximação do incremento dos deslocamento

e o índice 0 indica que o vector das forças internas é calculado no início do incremento de carga ($\mathbf{f}_{int,0} = \mathbf{f}_{int}^t$).

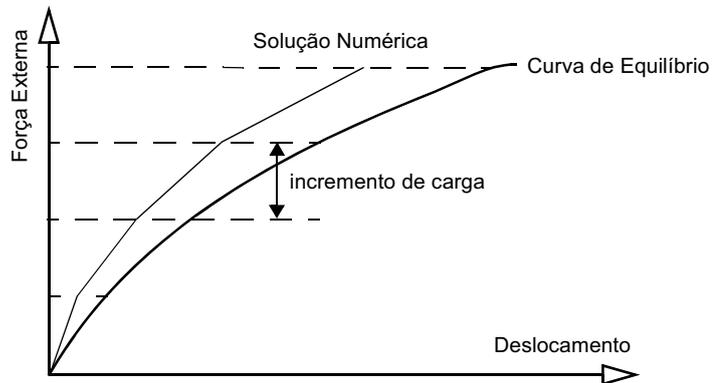


Figura 4.16 - Procedimento puramente incremental - desequilíbrio entre a acção externa e o vector das forças internas.

A partir do vector incremental $\Delta \mathbf{a}_1$ pode determinar-se uma primeira aproximação do incremento de deformações $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1$ e deste, utilizando as relações tensão-deformação, o incremento das tensões $\Delta \boldsymbol{\sigma}_1$. O tensor das tensões no final da primeira iteração é, então:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (4.29)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}^t$ representa o tensor das tensões no início do incremento de carga. Em geral o vector das forças internas $\mathbf{f}_{int,1}$, calculado com base nas tensões $\boldsymbol{\sigma}_1$ não está em equilíbrio com o vector das forças externas $\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t}$, pelo que é necessário adicionar ao vector incremental $\Delta \mathbf{a}_1$ uma correcção $\delta \mathbf{a}_2$ correspondente a esse desequilíbrio e definida por:

$$\delta \mathbf{a}_2 = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int,1}) \quad (4.30)$$

O incremento dos deslocamentos nodais na segunda iteração será então:

$$\Delta \mathbf{a}_2 = \Delta \mathbf{a}_1 + \delta \mathbf{a}_2 \quad (4.31)$$

Da mesma forma que na primeira iteração, podem calcular-se as quantidades incrementais $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_2$ e $\Delta \boldsymbol{\sigma}_2$ e o tensor $\boldsymbol{\sigma}_2$ ($\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta \boldsymbol{\sigma}_2$) e determinar uma nova correcção para a iteração seguinte. O processo iterativo, que se representa na Figura 4.17, prosseguirá até que o desequilíbrio entre o vector das forças internas e o vector das forças externas seja suficientemente baixo.

No ponto seguinte são discutidas as metodologias incrementais e iterativas correntemente utilizadas na resolução de problemas não lineares, assim como os critérios de convergência que determinam a interrupção do processo iterativo.

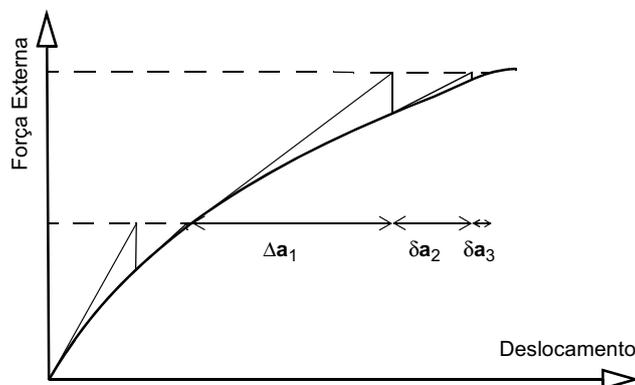


Figura 4.17 - Procedimento incremental com iterações de equilíbrio.

4.4.2 - Algoritmos de Solução Não Linear em Problemas Estáticos

4.4.2.1 - Controle de Cargas e de Deslocamentos

Basicamente existem dois métodos para impor num modelo estrutural um carregamento externo. O processo mais imediato consiste na aplicação das acções externas através de incrementos de carga. Alternativamente, poderá impor-se incrementos de deslocamentos, que produzem o desenvolvimento de tensões internas na estrutura, as quais correspondem a forças nodais, cuja resultante equivale à acção externa que produziria esses incrementos de deslocamentos inicialmente prescritos.

A escolha do método de controle (de cargas ou de deslocamentos) depende do problema em causa, embora, em geral, o controle de deslocamentos se mostre mais estável que o controle de cargas. De facto, o controle de deslocamentos conduz a matrizes de rigidez melhor condicionadas, que resulta em convergências mais rápidas, e permite a ultrapassagem de picos na resposta global, o que não é possível através do controle de cargas (Figura 4.18).

4.4.2.2 - Método do Comprimento do Arco

Devido ao seu comportamento frágil, é frequente em modelos de estruturas em alvenaria a ocorrência de "reveses" nas curvas de resposta global (Figura 4.19). A ultrapassagem destas

irregularidades (usualmente designadas por “snap-backs”) não é possível através dos métodos anteriores, sendo necessário métodos mistos que resultam da combinação dos controlos de carga e de deslocamentos. O método mais elegante para este tipo de problemas é o designado método do comprimento do arco (“arc-length method”), originalmente proposto por Riks^{Riks,1972} e Wemper^{Wemper,1971} e posteriormente modificado por Crisfield^{Crisfield,1981}, tendo em vista a sua adaptação a programas de elementos finitos.

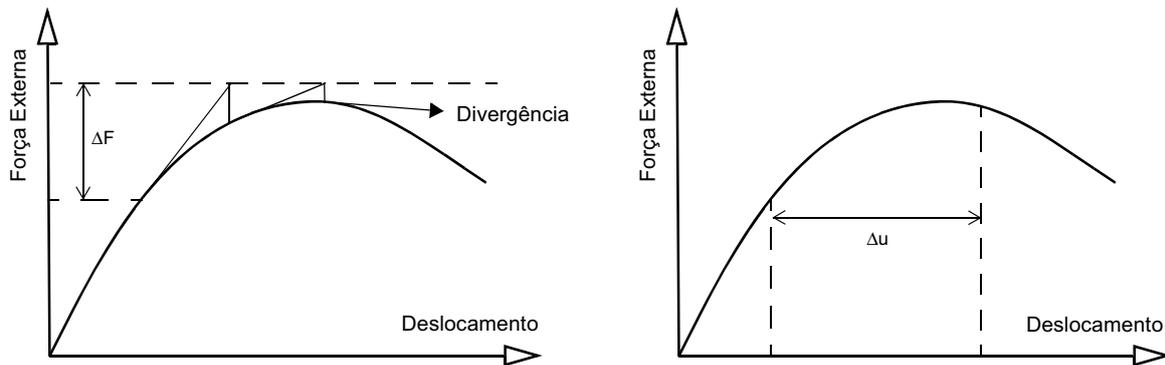


Figura 4.18 - Controle de cargas (esquerda) e de deslocamentos (direita).

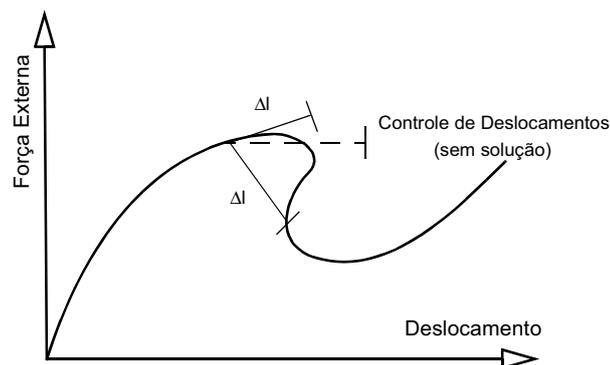


Figura 4.19 - “Reveses” (“snap-backs”) nas curvas de resposta global.

Considerando a equação (4.26) e substituindo o incremento de carga $\Delta \bar{f}_{ext}$ por um incremento variável $\Delta \lambda \bar{f}_{ext}$, sendo $\Delta \lambda$ um parâmetro escalar e \bar{f}_{ext} o vector unitário correspondente à carga exterior, a correcção do vector incremental dos deslocamento na iteração genérica $j+1$ toma a forma:

$$\delta a_{j+1} = \mathbf{K}^{-1} (\Delta \lambda \bar{f}_{ext} + \mathbf{f}_{ext}^t - \mathbf{f}_{int,j}) \quad (4.32)$$

A diferença essencial entre o método do comprimento do arco e o método de controle de cargas é que o factor escalar de carga $\Delta \lambda$ não é fixo, constituindo uma variável adicional ($\Delta \lambda_{j+1}$), a qual é determinada a partir da seguinte equação de constrangimento em função do vector incremental dos deslocamentos:

$$\Delta \mathbf{a}_{j+1}^T \Delta \mathbf{a}_{j+1} + \beta^2 \Delta \lambda_{j+1}^2 \bar{\mathbf{f}}_{ext}^T \bar{\mathbf{f}}_{ext} = \Delta l^2 \quad (4.33)$$

que impõe que a norma do vector incremental dos deslocamentos $\Delta \mathbf{a}_{j+1}$, aumentada do incremento variável de carga, permanece constante e igual a um comprimento prescrito Δl durante o passo de incremento de carga. Na expressão (4.33) o parâmetro β representa um factor de escala entre termos de deslocamentos e de cargas, o qual deverá ser definido pelo utilizador[†].

Na Figura 4.20 representa-se para um sistema de um grau de liberdade o procedimento do método do comprimento do arco que resulta da aplicação da equação de constrangimento (4.33).

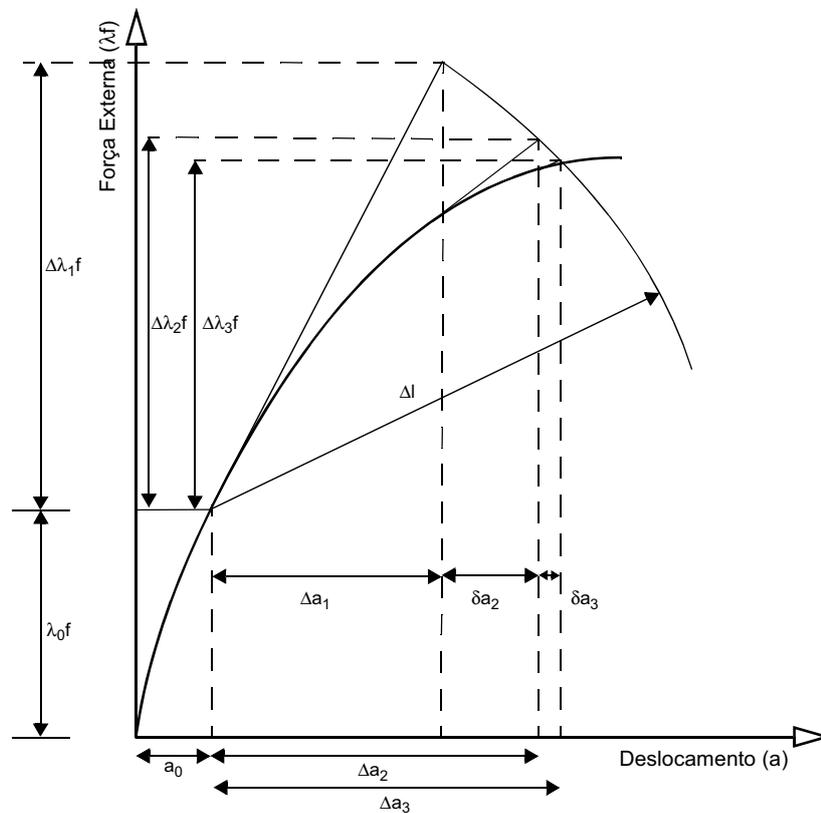


Figura 4.20 - Método do comprimento do arco - representação esquemática.

Uma desvantagem do método do comprimento do arco descrito é a equação (4.33) corresponder a uma expressão algébrica quadrática em $\Delta \lambda_{j+1}$, o que levanta dificuldades na escolha da raiz apropriada da equação quadrática. Em alternativa alguns autores propõem a linearização da equação (4.33), evitando assim a complexidade associada às expressões quadráticas.

[†] Verifica-se, no entanto, que o parâmetro β não tem grande influência na performance do método do comprimento do arco *Borst e Sluys, 1999; Crisfield, 1991*.

Ramm^{Ramm, 1981} sugeriu a seguinte linearização:

$$\Delta \mathbf{a}_{j+1}^T \Delta \mathbf{a}_{j+1} + \beta^2 \Delta \lambda_j \Delta \lambda_{j+1} \bar{\mathbf{f}}_{ext}^T \bar{\mathbf{f}}_{ext} = \Delta l^2 \quad (4.34)$$

que corresponde ao denominado método do plano normal actualizado (“updated normal path method”). A diferença entre o método do plano normal actualizado e o método correspondente à equação restritiva quadrática, habitualmente designado por método esférico (“spherical path method”), é pequena quando os incrementos de carga forem pequenos (Figura 4.21).

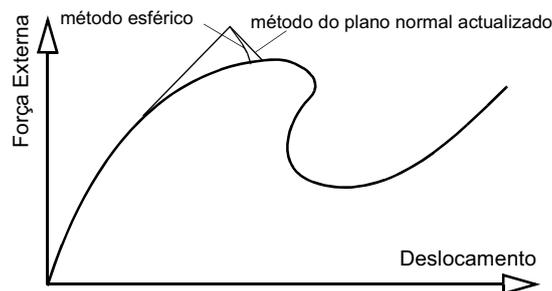


Figura 4.21 - Método do comprimento do arco - método esférico (“spherical path method”) e método do plano normal actualizado (“updated normal path method”).

Para comportamentos não lineares globais os métodos baseados nas equações restritivas (4.33) e (4.34), envolvendo a totalidade dos graus de liberdade do sistema, conduzem a bons resultados. No entanto, quando a não linearidade resulta de colapsos locais, como, por exemplo, a abertura de uma fenda, é mais eficiente do ponto de vista numérico considerar nas equações restritivas apenas os graus de liberdade envolvidos directamente nesse comportamento local. No caso particular de uma fenda ou de uma junta, nas equações de constringimento deverá considerar-se a sua abertura relativa, correspondente à diferença dos deslocamentos dos nós situados nas suas extremidades. Este controle indirecto dos deslocamentos, que no caso de fendas e juntas é designado por controle de abertura da fenda (CMOD - “crack mouth opening displacement”), é admissível do ponto de vista físico[†] e robusto do ponto de vista numérico^{Alfaiate et al., 1997}.

O método de controle CMOD é particularmente indicado para as análises fisicamente não lineares de modelos de estruturas de alvenaria com modelação explícita das unidades e juntas.

Definidas as equações restritivas do método do comprimento do arco, resta identificar a

[†] Este tipo de controle indirecto de deslocamentos foi também usado para obter “snap-backs” nas curvas de resposta experimentais^{Ingraffea, 1989; Schlangen e van Mier 1993}.

dimensão adequada do comprimento Δl , que determina a dimensão da primeira iteração do incremento de carga. Um dos processos para estimar a dimensão Δl baseia-se no número de iterações desejado para o novo incremento de carga, sendo a dimensão no incremento de carga $j+1$ definida por:

$$\Delta l_{j+1} = \Delta l_j \left(\frac{N^{j+1}}{N^j} \right)^\gamma \quad (4.35)$$

em que Δl_j é o comprimento do arco no incremento de carga imediatamente anterior, N^{j+1} é o número de iterações desejado neste incremento e N^j o número de iterações no incremento precedente. O parâmetro γ toma usualmente o valor $1/2$.

Este processo, embora simples, conduz a bons resultados^{Crisfield, 1981} e a experiência demonstra que é estável no caso de comportamentos mecânicos com amolecimento, como acontece nas alvenarias.

Um outro processo para a determinação do incremento de carga da primeira iteração baseia-se na constatação de que o trabalho:

$$\Delta W^2 = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{f}_{ext}^T \Delta \mathbf{a} \quad (4.36)$$

representa um bom indicador da estabilidade da estrutura. Deste modo, poderá seccionar-se o incremento de carga da primeira iteração ($\Delta \lambda_1$) de modo a que o valor da energia definida por (4.36) seja idêntica no incremento de carga em causa e no incremento precedente, isto é:

$$\frac{1}{2} \Delta \lambda_j \bar{\mathbf{f}}_{ext}^T \Delta \mathbf{a}_j = \frac{1}{2} \Delta \lambda_1 \bar{\mathbf{f}}_{ext}^T \Delta \mathbf{a}_{j+1} \quad (4.37)$$

Admitindo $\mathbf{f}_{ext}^t \approx \mathbf{f}_{int,0}$, tem-se $\Delta \mathbf{a}_{j+1} \approx \Delta \lambda_1 \Delta \mathbf{a}_{j+1}^{\Pi}$, em $\Delta \mathbf{a}_{j+1}^{\Pi} = \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{ext}$, donde se obtém a seguinte expressão para o incremento de carga:

$$\Delta \lambda_1 = \sqrt{\frac{|\Delta \lambda_j \bar{\mathbf{f}}_{ext}^T \Delta \mathbf{a}_j|}{|\bar{\mathbf{f}}_{ext}^T \Delta \mathbf{a}_{j+1}^{\Pi}|}} \quad (4.38)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez tangente na primeira iteração.

4.4.2.3 - Procedimentos Iterativos

Nas considerações anteriores admitiu-se, implicitamente, que a matriz de rigidez tangente do sistema de equações era calculada em todas as iterações do incremento de carga. Este procedimento, que corresponde ao método de Newton-Raphson (Figura 4.22), não é absolutamente necessário. Em alternativa surgiram diversos métodos alternativos que dispensam a repetida construção da matriz de rigidez tangente. Dentro dessas alternativas destacam-se o método de Newton-Raphson Modificado, que considera em todas as iterações a matriz de rigidez tangente calculada no início do incremento (Figura 4.23), o método da Rigidez Linear Constante, que considera em todas as iterações a matriz de rigidez elástica linear, e os métodos Quase-Newton, que utilizam a informação de soluções anteriores para obter melhores aproximações no processo iterativo. Estes métodos encontram-se exaustivamente descritos na literatura *Crisfield, 1991; Borst e Sluys, 1999* e estão disponíveis em qualquer dos programas de cálculo utilizados neste trabalho. A escolha do método depende do problema em análise, apresentando o método de Newton-Raphson a vantagem de conduzir a um menor número de iterações, embora cada uma delas corresponda a um significativo consumo de recursos computacionais.

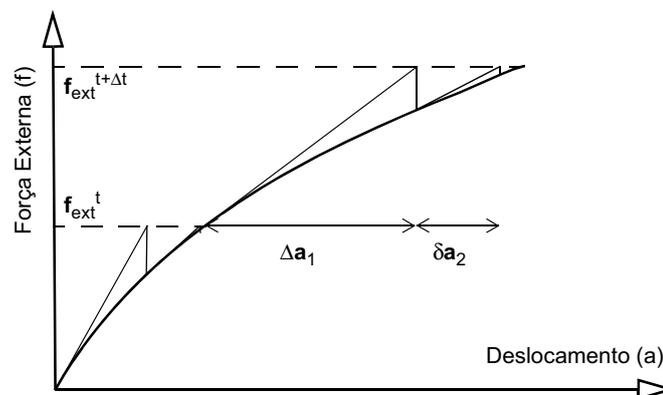


Figura 4.22 - Método de Newton-Raphson.

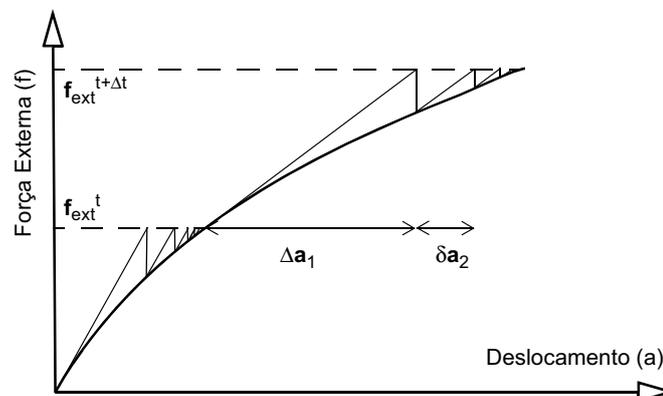


Figura 4.23 - Método de Newton-Raphson Modificado.

4.4.2.4 - Algoritmo de Pesquisa em Linha

Os métodos iterativos atrás descritos convergem para a solução exacta se a previsão da solução for razoavelmente boa. No entanto, se essa previsão for distante da posição de equilíbrio os processos iterativos poderão não convergir. Esta situação acontece com frequência em estruturas com fortes não linearidades, como no caso das alvenarias, sendo necessário o recurso a metodologias que melhorem a convergência dos métodos.

O algoritmo de pesquisa em linha (“line search method”) é um procedimento de melhoria das condições de convergência, correntemente utilizado juntamente com os procedimentos iterativos anteriormente descritos *Crisfield, 1991*.

A ideia básica do algoritmo de pesquisa em linha é aplicar um factor de escala η_{j+1} ao vector iterativo-incremental $\delta \mathbf{a}_{j+1}$ de modo a que se minimize a energia potencial dentro da direcção definida pelo vector dos deslocamentos $\delta \mathbf{a}_{j+1}$. Da mesma forma que um mínimo local da energia potencial representa o equilíbrio, o mínimo da energia potencial dentro da direcção $\delta \mathbf{a}_{j+1}$ representa a melhor solução possível.

Considerando a expansão em série de Taylor da energia potencial Π , que é função dos deslocamentos, tem-se:

$$\Pi(\mathbf{a}_{j+1}) = \Pi(\mathbf{a}_j) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}}\right)^T \delta \tilde{\mathbf{a}}_{j+1} + \frac{1}{2} \delta \tilde{\mathbf{a}}_{j+1}^T \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{a}} \partial \tilde{\mathbf{a}}}\right) \delta \tilde{\mathbf{a}}_{j+1} + \dots \quad (4.39)$$

em que $\delta \tilde{\mathbf{a}}_{j+1} = \eta_{j+1} \delta \mathbf{a}_{j+1}$ representa a correcção do vector dos deslocamentos $\delta \mathbf{a}_{j+1}$.

A minimização da energia potencial requer que:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}}\right)^T \delta \tilde{\mathbf{a}}_{j+1} = 0 \quad (4.40)$$

ou seja, tendo em conta que $\delta \tilde{\mathbf{a}}_{j+1} = \eta_{j+1} \delta \mathbf{a}_{j+1}$:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}}\right)^T \delta \mathbf{a}_{j+1} = 0 \quad (4.41)$$

Uma vez que a derivada da energia potencial pode ser escrita na forma:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\mathbf{a}}}\right) = \mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{a}_j + \eta_{j+1} \delta \mathbf{a}_{j+1}) \quad (4.42)$$

o parâmetro η_{j+1} pode determinar-se a partir da seguinte expressão:

$$s(\eta_{j+1}) = (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{a}_j + \eta_{j+1} \delta \mathbf{a}_{j+1}))^T \delta \mathbf{a}_{j+1} = 0 \quad (4.43)$$

Na prática não é necessário resolver exactamente a expressão anterior, sendo suficiente determinar o multiplicador η_{j+1} por interpolação linear dos valores da expressão anterior para $\eta_{j+1}=0$ e $\eta_{j+1}=1$ *Borst e Sluys, 1999*, isto é (Figura 4.24):

$$s(0) = (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{a}_j))^T \delta \mathbf{a}_{j+1} \quad (4.44)$$

e

$$s(1) = (\mathbf{f}_{ext}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{a}_j + \delta \mathbf{a}_{j+1}))^T \delta \mathbf{a}_{j+1} \quad (4.45)$$

Em geral não é necessário encontrar a solução $s(\eta)=0$ para estabilizar o processo iterativo global, bastando encontrar um valor de η_{j+1} que corresponda a um valor da função $s(\eta)$ menor que $\Psi s(0)$. Normalmente é suficiente considerar para a tolerância Ψ um valor entre 0.70 e 0.90.

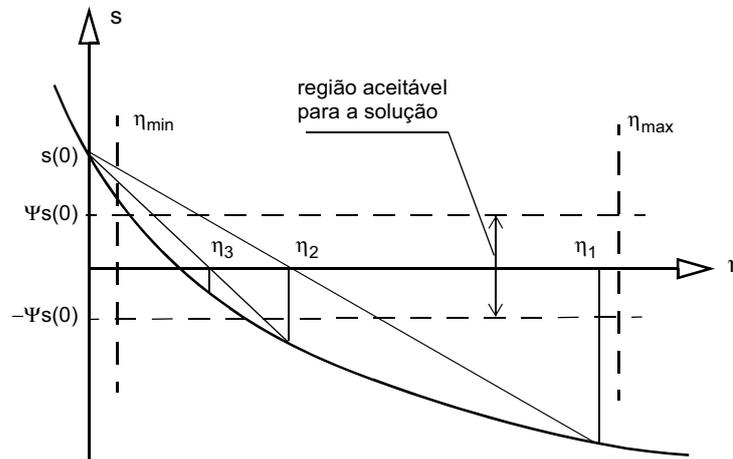


Figura 4.24 - Determinação do multiplicador η_{j+1} por interpolação linear.

4.4.2.5 - Critérios de Convergência

O processo iterativo deverá ser interrompido quando os resultados se apresentam satisfatórios. Assim, é necessário definir critérios de convergência que uma vez satisfeitos interromperão o

processo iterativo e permitirão a passagem para o incremento de carga seguinte.

Definidos habitualmente em termos de forças e deslocamentos nodais, os critérios correntemente utilizados podem ser incluídos numa das três categorias seguintes^{Póvoas,1991}:

- i) critério de convergência formulado em termos de forças;
- ii) critério de convergência formulado em termos de deslocamentos;
- iii) critério de convergência formulado em termos energéticos.

O critério de convergência formulado em termos de forças estabelece uma comparação entre a norma da força desequilibrada na iteração em causa e o produto da norma da força desequilibrada na primeira iteração por uma tolerância de convergência ε . O processo iterativo será interrompido quando for verificada a seguinte desigualdade:

$$|\mathbf{g}_j| = |\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int,j}| \leq \varepsilon |\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int,1}| = |\mathbf{g}_0| \quad (4.46)$$

No critério de convergência formulado em termos de deslocamentos a convergência é confirmada através da comparação da norma dos deslocamentos incrementais com a norma dos deslocamentos incrementais da primeira iteração multiplicada por um parâmetro de convergência ε . A desigualdade que deverá ser verificada para interromper o processo iterativo é definida por:

$$|\delta \mathbf{a}_j| \leq \varepsilon |\Delta \mathbf{a}_1| \quad (4.47)$$

O critério de convergência formulado em termos energéticos é aquele que é mais frequentemente utilizado em análises não lineares e o que se utilizou nas análises realizadas no âmbito deste trabalho. Neste critério o processo iterativo é interrompido quando:

$$\mathbf{f}_{int,j}^T \delta \mathbf{a}_j \leq \varepsilon \mathbf{f}_{int,1}^T \Delta \mathbf{a}_1 \quad (4.48)$$

A escolha do critério de convergência, assim como da tolerância correspondente, depende do problema em estudo, sendo importante a escolha de um valor apropriado que conduza a um

número de iterações relativamente baixo, sem que se prejudique o rigor dos resultados obtidos. A experiência mostra que, adoptando os critérios de convergência formulados em termos de forças, deslocamento e energia, os valores dos parâmetros de convergência não deverão ultrapassar, respectivamente, 1×10^{-3} , 1×10^{-6} e 1×10^{-4} . Nas análises não lineares realizadas no presente trabalho considerou-se o critério de convergência energético com um parâmetro de convergência de 1×10^{-4} .

4.4.3 - Modelos Não Lineares para Materiais Quase-Frágeis

Como referido, a maior fonte de não linearidade de materiais quase-frágeis como a alvenaria e o betão simples é a fendilhação que resulta da fraca resistência à tracção destes materiais. Basicamente, com elementos finitos existem duas metodologias para modelação deste comportamento: através de modelos descontínuos, que corresponde ao conceito de fenda discreta, ou através de modelos contínuos, que corresponde ao conceito de fenda distribuída.

4.4.3.1 - Modelos Descontínuos - Modelos de Fenda Discreta

Nos modelos de elementos finitos de fenda discreta a superfície de fractura é modelada explicitamente na malha de elementos finitos através da inserção de elementos de interface de espessura nula nas localizações onde é previsível a ocorrência da fractura. No caso das alvenarias regulares as juntas entre unidades constituem superfícies potenciais de fractura e são, em geral, modeladas através de elementos de interface.

Os modelos de comportamento dos elementos de interface deverão reproduzir o comportamento material das alvenarias (ver parágrafo 4.3), nomeadamente no que diz respeito à fractura em face de tensões de tracção e comportamento de corte.

Formação da Fenda por Tracção

Nos elementos de interface as relações constitutivas relacionam a tensão normal à interface (σ) e as tensões tangenciais (τ) com o deslocamento normal à interface (u_n), isto é, a abertura da fenda, e os deslocamentos de escorregamento relativo ao longo da interface (u_t). No caso de uma estrutura bidimensional essa relação tem inicialmente a forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_t \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Enquanto a tensão normal σ nos pontos de integração do elemento de interface for inferior à tensão de tracção de tracção máxima admissível do material, a relação constitutiva anterior definirá um comportamento elástico-linear. Habitualmente, em regime elástico linear admite-se para as constantes de rigidez valores muito elevados, de modo a evitar a interpenetração dos elementos finitos contíguos à interface.

Uma vez atingida a tensão de tracção máxima admissível (f_t), a relação constitutiva do elemento de interface é alterada sendo a rigidez normal degradada progressivamente até zero de acordo com uma lei de amolecimento (Figura 4.25). Poderá adoptar-se diferentes leis de amolecimento, sendo a curva exponencial negativa (equação (4.2)) aquela que mais se aproxima dos resultados experimentais. Por esta razão, mas também porque conduz a uma boa estabilidade numérica, foi esta a lei de amolecimento utilizada no presente trabalho, sempre que se adoptaram valores não nulos para a resistência à tracção e para a energia de fractura em modo I.

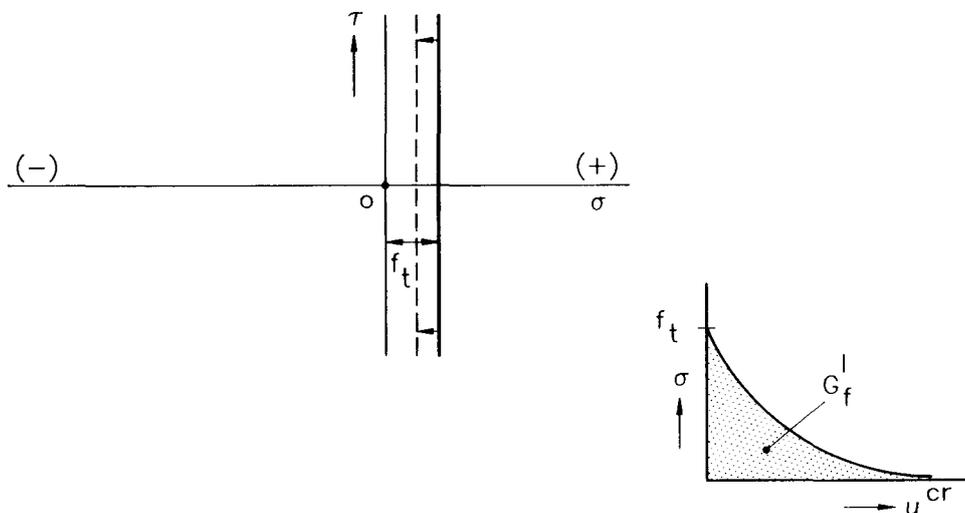


Figura 4.25 - Modelo para a formação das fendas por tracção em elementos de interface.

Além da lei de amolecimento da tensão normal σ , que estabelece uma relação entre essa tensão e a abertura da fenda, é também necessário definir leis para a evolução da tensão de corte após o início da fendilhação. Uma possibilidade é admitir que a rigidez de corte se anula imediatamente após o início da fractura. No entanto, o embricamento entre as faces da fenda poderá permitir a transferência de tensões de corte mesmo após o início da fractura por tracção.

Por outro lado, quando a intensidade das tensões de corte no instante da fractura é elevada, o seu súbito anulamento poderá conduzir a instabilidades numéricas^{CUR,1997}. Assim, em vez do total anulamento da rigidez de corte após a fractura, pode considerar-se nas relações constitutivas, como proposto por Rots^{CUR,1997}, apenas uma redução do valor dessa rigidez. Não obstante a possibilidade de utilização desse modelo de degradação da resistência de corte nos programas de cálculo utilizados neste trabalho, os modelos descontínuos apresentados nos parágrafos seguintes foram construídos admitindo que a rigidez de corte se anula no instante de início da fractura por tracção[†].

Em certos modelos de fenda discreta considera-se a decomposição dos deslocamentos na interface numa parcela de deformação elástica e numa outra correspondente à deformação da fenda^{CUR,1997}. No entanto, a deformação elástica é normalmente pequena e a decomposição poderá ser omitida. Esta omissão, que resulta numa metodologia designa por formulação total, apresenta a vantagem de simplificar grandemente o processo iterativo e foi a utilizada neste trabalho.

Modelo de Corte de Coulomb

Nas alvenarias o critério de Coulomb representa uma boa aproximação para comportamento ao corte das interfaces, sendo o critério de rotura definido em função de dois parâmetros (equação (4.1)): a coesão, que representa a tensão de corte máxima na ausência de tensão normal, e o ângulo de atrito interno.

O tensor das tensões na interface é representado no espaço das tensões por um ponto definido pelos valores das tensões normal σ e de corte τ . Como indicado na Figura 4.26, o deslizamento da interface ocorre quando esse ponto atingir a superfície que representa o critério de Coulomb. Durante este processo a coesão c não mantém o seu valor máximo c_u , ocorrendo um gradual decréscimo do seu valor com o crescimento do deslizamento. Este decréscimo do valor da coesão resulta numa translacção da superfície de Coulomb para o lado esquerdo do espaço das tensões (Figura 4.26). Como referido no parágrafo anterior, o amolecimento da coesão pode ser constatado experimentalmente sendo habitualmente sugerido para a sua representação numérica

[†] Por um lado, nas estruturas estudadas o comportamento físico das juntas é melhor aproximado por um modelo sem retenção de corte e, por outro, a intensidade das tensões de corte envolvidas nas análises em causa não resulta em problemas numéricos.

a relação exponencial negativa traduzida pela equação (4.2).

O modelo de corte é formulado no contexto da plasticidade, o que implica a decomposição dos deslocamentos em parcela elástica e plástica. Uma lei de escoamento determinará o incremento da deformação plástica durante o deslizamento, o que requer um parâmetro adicional, designado por dilatância, que correlaciona a deformação normal com o aumento do deslizamento. A dilatância é altamente relevante nos problemas onde exista confinamento das interfaces. Embora disponível nos programas de cálculo utilizados neste trabalho, o modelo de corte de Coulomb para as interfaces não foi explicitamente utilizado nos exemplos que se apresentam neste capítulo.

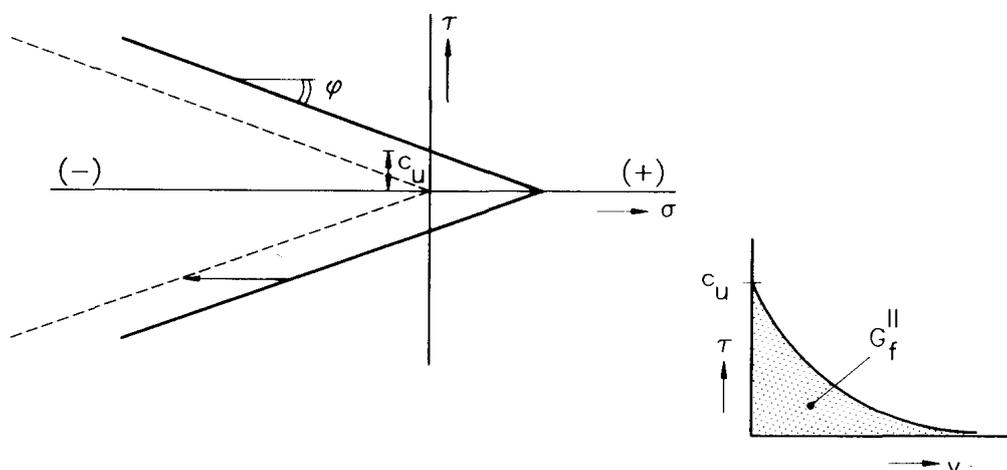


Figura 4.26 - Modelo de corte de Coulomb para elementos de interface.

Modelo Combinado

Uma alternativa para o modelo material das interfaces pode resultar da combinação dos dois modelos anteriores, isto é, do modelo de fractura e do modelo de escorregamento por corte. Neste modelo combinado (Figura 4.27) admite-se que a interface se encontra fendilhada ou plastificada (por corte), mas nunca simultaneamente nem sucessivamente. No presente trabalho, e sempre que se pretendeu simular o comportamento ao corte das interfaces, utilizou-se este modelo combinado.

Outros Modelos Alternativos

Alternativas às superfícies de rotura definidas no modelo anterior têm sido sugeridas na

literatura^{CUR,1997}. A consideração de uma superfície de cedência parabólica (Figura 4.28) apresenta algumas vantagens, nomeadamente por se conseguir a utilização de um único critério para os dois fenómenos: fractura por tracção e escorregamento por corte. No entanto, o ajustamento desta superfície aos resultados experimentais é deficiente.

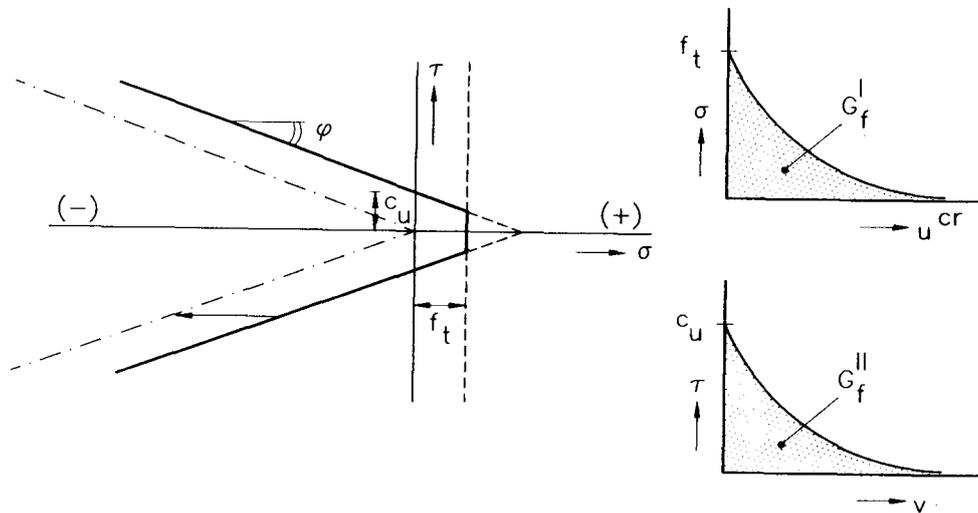


Figura 4.27 - Combinação do critério de Coulomb com o critério de fractura por tracção.

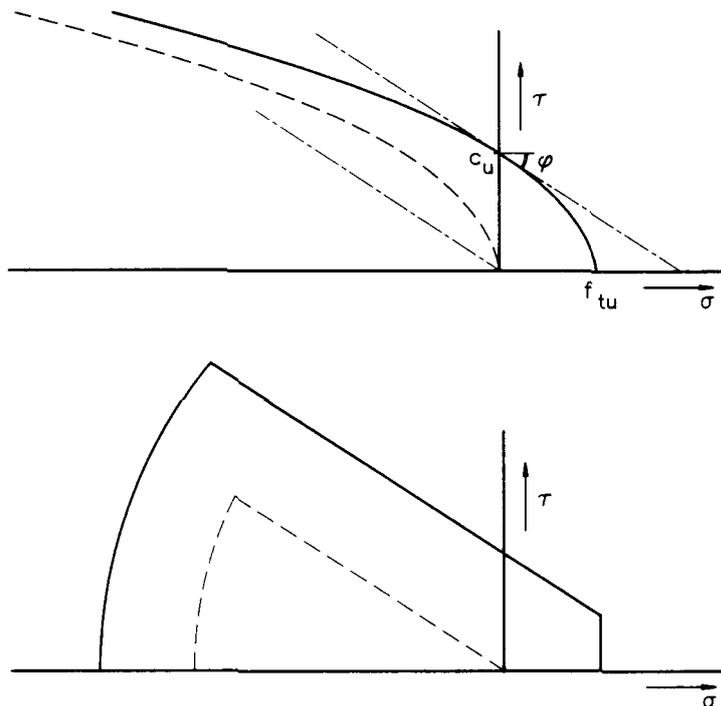


Figura 4.28 - Modelos alternativos para comportamento das interfaces - em cima: critério parabólico para tracção/corte e compressão/corte; em baixo: multi-superfície de plasticidade com limite de compressão.

Uma outra alternativa, envolvendo os dois fenómenos anteriores e o esmagamento por compressão, foi sugerida por Lourenço^{Lourenço,1996}. Neste modelo, representado esquematicamente na Figura 4.28, é introduzido um critério limite relacionado com os danos

por esmagamento, definindo-se assim três domínios e outros tantos parâmetros de amolecimento.

No presente trabalho utilizou-se este modelo de superfície de rotura composta (tracção-corte-compressão) com objectivo de verificar a influência do esmagamento local dos vértices dos blocos na resposta global de arcos de alvenaria. Noutros estudos, onde não era esperado uma influência significativa do limite de compressão, nem escorregamentos por corte, o modelo utilizado foi o de fenda discreta com rotura por tracção.

4.4.3.2 - Modelos Contínuos - Modelos de Fenda Distribuída

Nos modelos de fenda distribuída a estrutura é imaginada como um sólido contínuo onde as relações tensão-deformação, inicialmente isotrópicas, são transformadas em leis ortotrópicas no instante de formação da fenda.

Como referido, os modelos de fenda distribuída podem classificar-se em modelos de fenda fixa, onde a orientação da fenda é inalterável durante toda a análise, e em modelos de fenda rotativa, permitindo-se a rotação da fenda acompanhando o movimento dos eixos principais de tensão.

Modelo de Fenda Fixa Tradicional

Quando a tensão principal máxima excede a resistência à tracção do material, ou mais genericamente, quando a combinação das tensões principais viola o critério de rotura por tracção (Figura 4.29), tem início uma fenda fixa com orientação perpendicular à direcção principal correspondente. O modelo material, até então elástico linear, é substituído por uma relação ortotrópica com os eixos de ortotropia definidos pela direcção normal à fenda (direcção n) e pelas direcções tangenciais ao plano da fenda (direcções t e s).

Tradicionalmente, e para o caso bidimensional, a lei de tensão-deformação para o material fendilhado tem a forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{nt} & 0 \\ E_{nt} & E_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & G_{nt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{tt} \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

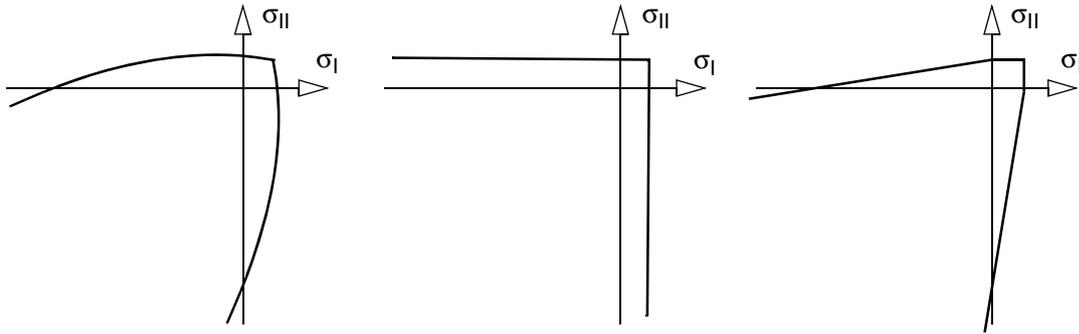


Figura 4.29 - Critério de rotura por tracção (esq.: experimental; centro e dta: modelos).

Nas versões iniciais dos modelos de fenda distribuída fixa consideravam-se nulas as constantes elásticas E_{nn} , E_{nt} e G_{nt} , o que correspondia a um súbito anulamento das tensões σ_{nn} e σ_{nt} logo após a formação da fenda:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

No entanto, como se referiu, devido ao embricamento das faces da fenda é possível a transmissão de tensões normais σ_{nn} e de corte σ_{nt} após a formação da fenda. Por outro lado, a súbita alteração de uma lei isotrópica elástica linear (4.50) para uma lei ortotrópica com rigidez normal e de corte nulas (4.51), resulta numa forte descontinuidade, que se traduz em dificuldades de convergência numérica.

Assim, com vista a melhorar a aproximação do comportamento material e, sobretudo, a eliminar as dificuldades numéricas, os modelos de fenda distribuída passaram a incorporar factores de redução da rigidez normal ($0 \leq \mu \leq 1$) e da rigidez de corte ($0 \leq \beta \leq 1$) que possibilitam, após a formação da fenda, uma redução constante, ou gradual, das tensões normal e de corte:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Para o factor de redução da rigidez de corte (β), designado por factor de retenção de corte, muito investigadores adoptam simplesmente um valor constante (usualmente $\beta = 0.20$), sendo também

possível a implementação de um factor β dependente da deformação normal da fenda (ϵ_{nn}). Embora esta última alternativa simule melhor a realidade experimental, a adopção de um factor de retenção constante conduz, nos problemas correntes, a resultados bastante aceitáveis e à eliminação dos problemas de instabilidade numérica.

Um refinamento final da expressão (4.52) pode ser conseguido através da consideração do efeito de Poisson após a formação da fenda, obtendo-se assim a conhecida formulação de Bazant^{Bazant e Oh, 1983}.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1 - \nu^2 \mu} & \frac{\nu \mu E}{1 - \nu^2 \mu} & 0 \\ \frac{\nu \mu E}{1 - \nu^2 \mu} & \frac{E}{1 - \nu^2 \mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta E}{2(1 + \nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ \epsilon_{tt} \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Não obstante a disponibilidade de outros modelos de fenda distribuída no programa de cálculo Diana, os exemplos da formulação de fenda distribuída no presente trabalho foram realizados através do modelo de fenda fixa tradicional.

Modelo de Fenda Distribuída com Decomposição da Deformação

Os vectores de deformação representados nas equações anteriores correspondem à deformação total do material fendilhado, que inclui a abertura da fenda e a deformação do material intacto entre fendas. Deste modo, nas leis tensão-deformação não há qualquer distinção entre o material intacto e as fendas. Uma desvantagem desta metodologia é o ajustamento das suas leis tensão-deformação às leis obtidas experimentalmente, as quais são definidas em função da abertura da fenda e não da deformação total. Outra desvantagem é a combinação no modelo numérico da fendilhação com outro fenómeno não linear (como por exemplo a plasticidade), a qual não é possível através de uma formulação total.

A resolução desta deficiência é conseguida através da decomposição da deformação total (ϵ) numa parcela correspondente à deformação da fenda (ϵ^{fenda}) e numa outra correspondente ao material intacto entre fendas ($\epsilon^{intacto}$)^{Rots, 1988}. Numa formulação incremental tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{fenda} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{intacto} \quad (4.54)$$

Esta decomposição aproxima o conceito de fenda distribuída ao conceito de fenda discreta, no qual o material intacto é modelado separadamente da fenda.

Considere-se, por simplicidade, um problema bidimensional e seja $\Delta \boldsymbol{e}^{fenda}$ o vector que armazena os incrementos de deformação da fenda, definidos em relação ao sistema local de eixos da fenda (Figura 4.30):

$$\Delta \boldsymbol{e}^{fenda} = [\Delta \varepsilon_{nn}^{fenda} \Delta \gamma_{nt}^{fenda}]^T \quad (4.55)$$

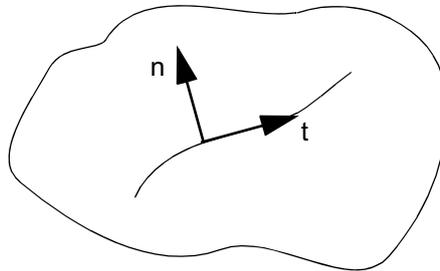


Figura 4.30 - Sistema local de eixos coordenados orientado segundo o plano da fenda.

O vector $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{fenda}$ que armazena as componentes da deformação relativas ao sistema global de eixos pode ser obtido a partir do vector $\Delta \boldsymbol{e}^{fenda}$ através da matriz de cosenos directores N que reflecte a orientação da fenda:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{fenda} = [\Delta \varepsilon_{xx}^{fenda} \Delta \varepsilon_{yy}^{fenda} \Delta \gamma_{xy}^{fenda}]^T = N \Delta \boldsymbol{e}^{fenda} \quad (4.56)$$

Uma característica fundamental dos modelos de fenda fixa é a matriz de cosenos directores N ser fixa a partir do instante de formação da fenda.

No sistema local de eixos da fenda pode definir-se o vector $\Delta \boldsymbol{t}^{fenda}$ que armazena as tensões nas faces da fenda:

$$\Delta \boldsymbol{t}^{fenda} = [\Delta t_n^{fenda} \Delta t_t^{fenda}]^T \quad (4.57)$$

em que Δt_n^{fenda} é a tensão incremental normal à fenda e Δt_t^{fenda} é a tensão incremental de corte na fenda.

A relação entre o vector incremental das tensões relativo aos eixos globais $\Delta\sigma$ e o vector incremental das tensões na fenda Δt^{fenda} é:

$$\Delta t^{fenda} = N^T \Delta\sigma \quad \text{em que} \quad \Delta\sigma = [\Delta\sigma_{xx} \Delta\sigma_{yy} \Delta\tau_{xy}]^T \quad (4.58)$$

Para completar o conjunto de equações é agora necessário definir um modelo constitutivo para o material intacto e uma relação tensão-deformação para a fenda distribuída. Para o material intacto entre fendas tem-se:

$$\Delta\sigma = D^{intacto} \Delta\epsilon^{intacto} \quad (4.59)$$

em que a matriz $D^{intacto}$ representa a rigidez instantânea do material intacto.

Da mesma forma, para a fenda distribuída tem-se:

$$\Delta t^{fenda} = D^{fenda} \Delta e^{fenda} \quad (4.60)$$

em que a matriz D^{fenda} armazena os parâmetros que definem o comportamento da fenda em modo I e em modo II.

Combinando as equações (4.54), (4.56), (4.58), (4.59) e (4.60), obtém-se a seguinte relação global tensão-deformação para o material fendilhado, definida no sistema global de eixos:

$$\Delta\sigma = D^{intacto} [\Delta\epsilon - N \Delta e^{fenda}] \quad (4.61)$$

Multiplicando a expressão anterior por N^T e substituindo (4.58) e (4.60) no lado esquerdo da equação anterior, obtém-se a seguinte relação entre a deformação local da fenda e a deformação global:

$$\Delta e^{fenda} = [D^{fenda} + N^T D^{intacto} N]^{-1} N^T D^{intacto} \Delta\epsilon \quad (4.62)$$

Finalmente, a relação entre as tensões globais e as deformações globais pode ser obtida substituindo a expressão (4.62) em (4.61):

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \{ \mathbf{D}^{intacto} - \mathbf{D}^{intacto} \mathbf{N} [\mathbf{D}^{fenda} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{intacto} \mathbf{N}]^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^{intacto} \} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.63)$$

em que as matrizes $\mathbf{D}^{intacto}$ e \mathbf{D}^{fenda} poderão ser variáveis no intervalo correspondente ao incremento de carga.

Na maioria das aplicações pode admitir-se a hipótese das pequenas deformações da fenda, pelo que os termos não diagonais da matriz \mathbf{D}^{fenda} podem ser desprezados. Assim, a matriz que rege o comportamento da fenda pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{D}^{fenda} = \begin{bmatrix} D^I & 0 \\ 0 & D^{II} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

em que D^I é o módulo de deformabilidade da fenda em modo I e D^{II} a constante de rigidez em modo II, os quais traduzem as propriedades de fractura do material.

Os parâmetros D^I e D^{II} , correspondentes à formulação com decomposição da deformação, podem relacionar-se com os correspondentes parâmetros μ e β da formulação total (equação (4.52)). Tendo em conta que a decomposição da deformação implica o funcionamento do material intacto e da fenda como molas em série, tem-se (Figura 4.31):

$$\frac{1}{E} + \frac{1}{D^I} = \frac{1}{\mu E} \quad \text{donde} \quad D^I = \frac{\mu}{1 - \mu} E \quad (4.65)$$

e

$$\frac{1}{G} + \frac{1}{D^{II}} = \frac{1}{\beta G} \quad \text{donde} \quad D^{II} = \frac{\beta}{1 - \beta} G \quad (4.66)$$

Modelo de Fenda Distribuída Multi-Direccional

Uma outra vantagem da decomposição da deformação total em deformação do material intacto e deformação da fenda é a possibilidade da sub-decomposição da deformação da fenda em diferentes contribuições de um conjunto de fendas multidireccionais, que podem ocorrer simultaneamente num único ponto de integração. De facto, a propagação das fendas, inicialmente formadas em tracção (modo I), dá-se através de um modo misto corte-tracção que produz uma progressiva rotação dos eixos principais de tensão. Assim, é possível a ocorrência de novas fendas cada vez que as tensões principais correspondentes a essas novas direcções

principais ultrapassam o limite admissível de resistência à tracção do material.

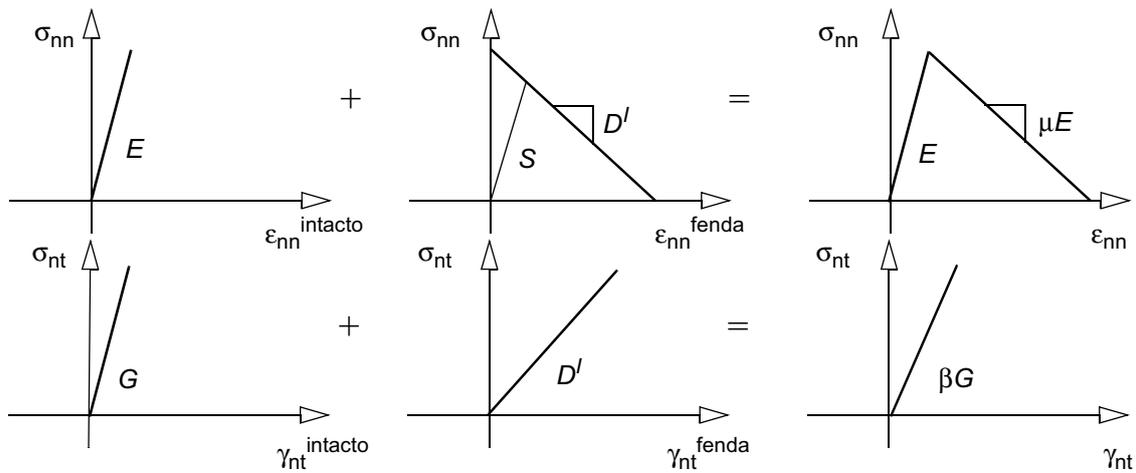


Figura 4.31 - Arranjo em série da deformação (normal e tangencial) do material intacto e da fenda.

Deste modo, a deformação da fenda pode ser decomposta em diferentes parcelas:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{fenda} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{fenda} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_2^{fenda} + \dots \quad (4.67)$$

cada uma correspondente a uma possível fenda.

Nesta metodologia cada uma das fendas (fixas) está associada a um sistema local de eixos, correspondendo-lhe um vector local de deformação ($\Delta \mathbf{e}_i^{fenda}$), um vector local de tensões ($\Delta \mathbf{t}_i^{fenda}$) e uma matriz de transformação (N_i). Assim, agrupando os vectores correspondentes às diversas fendas possíveis, tem-se:

$$\Delta \hat{\mathbf{e}}^{fenda} = [\Delta \mathbf{e}_1^{fenda} \Delta \mathbf{e}_2^{fenda} \dots]^T \quad (4.68)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{t}}^{fenda} = [\Delta \mathbf{t}_1^{fenda} \Delta \mathbf{t}_2^{fenda} \dots]^T \quad (4.69)$$

$$\hat{\mathbf{N}} = [N_1 N_2 \dots] \quad (4.70)$$

donde, tendo em conta as equações (4.56) e (4.60), se tem:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{fenda} = \hat{\mathbf{N}} \Delta \hat{\mathbf{e}}^{fenda} \quad (4.71)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{t}}^{fenda} = \hat{\mathbf{D}}^{fenda} \Delta \hat{\mathbf{e}}^{fenda} \quad (4.72)$$

Repetindo o procedimento descrito anteriormente para a fenda singular, obtém-se a seguinte relação global tensão-deformação:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \left\{ \mathbf{D}^{intacto} - \mathbf{D}^{intacto} \hat{\mathbf{N}} [\hat{\mathbf{D}}^{fenda} + \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{D}^{intacto} \hat{\mathbf{N}}]^{-1} \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{D}^{intacto} \right\} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.73)$$

em que as matrizes $\hat{\mathbf{N}}$ e $\hat{\mathbf{D}}^{fenda}$, que resultam da assemblagem de múltiplas fendas, substituem as correspondentes matrizes da fenda singular existentes na expressão (4.63).

Com este modelo de fenda multi-direccional é possível a ocorrência de um número arbitrário de fendas num único ponto de integração, permitindo-se a formação de novas fendas cada vez que as novas direcções principais correspondem a valores principais de tensão de intensidade superior aos limites de resistência. No entanto, a existência de múltiplas fendas num único ponto de integração resulta num rápido decrescimento da rigidez de corte, o que poderá conduzir a problemas de instabilidade numérica. Por essa razão, foi introduzido um ângulo limite que apenas permite a formação de novas fendas quando o ângulo entre a direcção principal de tensão e a normal à fenda precedente lhe for superior.

Uma característica dos modelos de fenda fixa (singular ou multi-direccional) é a inclusão explícita de um termo de corte (β e D^H). Numa formulação de fenda rotativa, que se descreve de seguida, esse termo não é necessário, nem mesmo possível^{Rots,1988}.

Modelo de Fenda Distribuída Rotativa

O desalinhamento entre as direcções principais de tensão e as direcções das fendas levou Cope^{Cope et al.,1980} a considerar a rotação contínua dos eixos materiais de ortotropia acompanhando o movimento dos eixos principais de tensão. Neste modelo de fenda rotativa a orientação da fenda muda continuamente com os eixos principais de tensão, sem qualquer registo em memória da orientação dos danos anteriores, não sendo, assim, possível a reactivação de danos ocorridos em fases anteriores do carregamento.

No modelo de fenda rotativa considera-se um único termo de corte que força a coaxialidade dos eixos principais de tensão e de deformação, o que introduz simplicidade, mas que, dado a fenda ocorrer sempre em modo I, não permite a consideração de modelos para o comportamento ao

corde da fenda. Assim, nos modelos de fenda rotativa é eliminada a escolha de um factor de retenção de corte mas, por outro lado, a desvantagem é o deficiente ajustamento do comportamento do modelo ao corte com a realidade experimental.

4.5 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS NA MODELAÇÃO DA ALVENARIA

Um meio descontínuo difere de um meio contínuo pela existência de contactos e interfaces entre os corpos discretos que compõem a estrutura. Um modelo numérico que simule o comportamento estrutural de um meio descontínuo deverá ter em conta os dois tipos de comportamento mecânico existentes na estrutura:

- i) comportamento mecânico das descontinuidades;
- ii) comportamento mecânico dos corpos discretos.

O método dos elementos discretos caracteriza-se principalmente por permitir a ocorrência de deslocamentos e rotações finitas dos corpos discretos e por permitir durante a análise o reconhecimento de novos contactos e a eliminação de contactos obsoletos. Este método é particularmente indicado para a análise de problemas em que uma parcela significativa da deformação do sistema ocorre pelo movimento relativo entre os blocos discretos que compõem a estrutura.

4.5.1 - Deformabilidade dos Blocos Discretos

Os blocos discretos que constituem o domínio a analisar podem ser simulados no método dos elementos discretos como rígidos ou deformáveis. No caso de se considerar blocos rígidos, toda a deformabilidade é concentrada nas interfaces e consiste basicamente em deslizamentos e rotações relativas dos elementos discretos. A simulação dos blocos como elementos rígidos é adequada para situações em que o nível de deformação é desprezável em face da deformabilidade nas interfaces e em que é pouco importante avaliar o nível das tensões instaladas nos blocos discretos.

Nos casos em que a deformabilidade dos blocos é influente no comportamento global da estrutura, ou nos casos em que é importante aferir o nível das tensões instaladas nos blocos, deverão ser considerados blocos deformáveis.

A deformabilidade dos blocos é simulada no método dos elementos discretos através da sua discretização em elementos triangulares de diferenças finitas. A formulação destes elementos de diferenças finitas é semelhante à formulação tradicional de elementos finitos triangulares de deformação constante. Tratando-se de elementos de deformação constante, a simulação de estados de deformação complexos poderá exigir a utilização de um grande número de elementos, o que se apresenta como uma desvantagem desta formulação. No entanto, a utilização de elementos com funções de interpolação de ordem superior, embora preferível na análise de estados de deformação, provoca maiores dificuldades e exige um maior esforço de cálculo nas manipulações geométricas relativas aos contactos, pelo que é preferível prejudicar a simulação do estado de tensão em favor de uma maior eficácia numérica.

No programa de cálculo UDEC, estão disponíveis diferentes modelos constitutivos para o material que constitui os blocos discretos, sendo a sua escolha dependente do tipo de estrutura que se pretenda analisar. No caso de estruturas de alvenaria de blocos as hipóteses de blocos rígidos ou deformabilidade elástica linear são, em geral, suficientes, podendo também optar-se por leis de comportamento não linear com diferentes critérios de plasticidade associados.

4.5.2 - Interação entre Blocos

4.5.2.1 - Definição do Contacto - Contacto Pontual

No método dos elementos discretos, ao contrário dos modelos habituais de elementos finitos, as juntas entre blocos discretos não são simuladas através de elementos de interface. As juntas são definidas através de um conjunto de pontos de contacto localizados nos vértices dos blocos. Os pontos de contacto entre dois blocos rígidos são criados em cada interacção entre um vértice de um bloco e uma aresta ou um vértice de um outro bloco (Figura 4.32). No caso de blocos deformáveis, os nós dos elementos triangulares de diferenças finitas em que são discretizados, são olhados como novos vértices. Deste modo, com a simulação de blocos deformáveis, o número de pontos de contacto pode ser aumentado através de uma discretização mais apertada da malha de elementos de diferenças finitas.

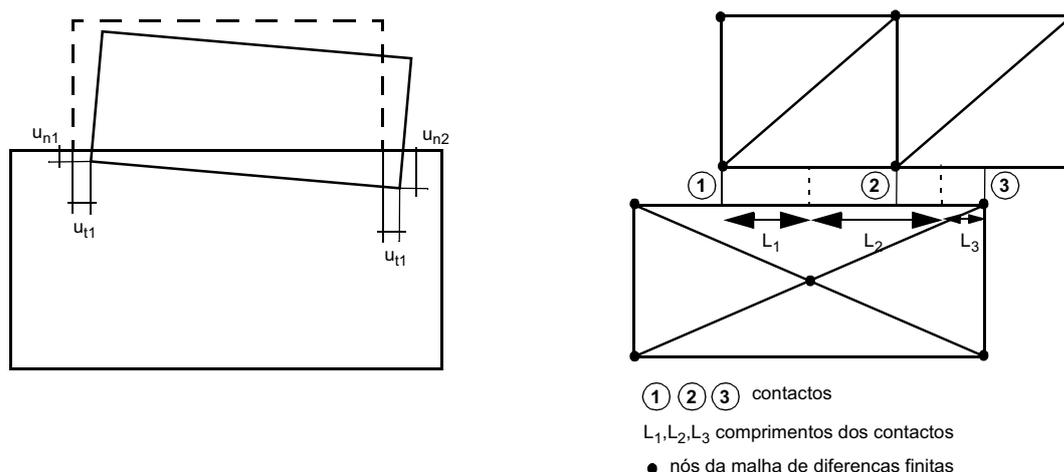


Figura 4.32 - Contactos e domínios associados a dois blocos (esq. - blocos rígidos; dta. - deformáveis).

A discretização das juntas num conjunto de contactos pontuais permite, sem perda de rigor, uma mais fácil detecção e eliminação de contactos em face de grandes deslocamentos e, consequentemente, uma maior eficácia computacional.

Como já referido, no método dos elementos discretos admite-se, através da definição de uma lei constitutiva, que os contactos são deformáveis. As forças de interacção na direcção normal ao contacto são proporcionais ao deslocamento relativo entre os blocos e as forças de compressão nos contactos só surgirão após uma pequena sobreposição destes. Embora esta sobreposição possa ser encarada como uma aproximação numérica da condição de não interpenetração, em muitos casos ela tem um significado físico real.

4.5.2.2 - Detecção de Contactos e suas Actualizações

Um modelo numérico que simule grandes deslocamentos e rotações de um conjunto de corpos discretos deverá estar associado a algoritmos que detectem e actualizem os contactos entre os corpos discretos sem a intervenção do utilizador. Estes algoritmos deverão ser capazes de identificar a configuração inicial dos contactos e a sua evolução ao longo do tempo, eliminando contactos obsoletos e criando novos contactos.

Nos modelos de elementos discretos adoptam-se, em geral, algoritmos dinâmicos de solução, procedendo à integração passo a passo das equações de movimento. Esta técnica é também adoptada para a resolução de problemas quase estáticos, neste caso com o recurso a um

amortecimento artificialmente alto, sendo a escala de tempo fictícia. As rotinas de detecção de contactos são, portanto, invocadas múltiplas vezes durante a análise, constituindo o tempo de cálculo utilizado nestas tarefas uma percentagem dominante do tempo total de cálculo.

Embora os testes geométricos de detecção de contactos sejam geralmente elementares, quando o número de blocos é grande e o movimento significativo, é necessário utilizar técnicas especiais para tornar o processo de detecção de contactos mais eficiente. Uma busca exaustiva de possíveis contactos em todos os pares de blocos é extremamente morosa (o tempo de cálculo é proporcional ao quadrado do número de blocos em causa), tanto mais que esta busca será executada diferentes vezes durante a análise da estrutura. Deste modo, o algoritmo deverá ser definido no sentido de minimizar o número de vezes em que a detecção é efectuada e o número de blocos que são analisados, sem o risco de se perder algum possível contacto. A metodologia implementada no programa de cálculo UDEC baseia-se em dois testes: um primeiro que elimina rapidamente os blocos que não têm qualquer possibilidade de contacto; e um segundo teste que verifica rigorosamente os contactos nos blocos que passaram o primeiro teste.

Dado o tempo de cálculo que um teste de contacto entre blocos pode exigir, não é conveniente que este se repita em cada passo de cálculo, mas apenas periodicamente. Assim, pode definir-se um indicador de movimento do bloco que permite o desencadear do processo de detecção apenas quando o bloco se deslocou uma determinada distância de referência. Esta técnica permite que os testes de contacto para cada bloco sejam efectuados com uma frequência dependente da amplitude do seu movimento.

Uma vez que os testes de contacto não são efectuados em todos os passos de integração, é indispensável definir antecipadamente os contactos que poderão vir a surgir entre dois testes consecutivos. Para este efeito, na formulação do método de elementos discretos recorre-se ao conceito de contacto virtual (ou lógico). Durante o processo de detecção de contactos, são criados contactos sempre que a separação entre blocos é inferior a uma dada distância de formação de contacto (d_{fc}), que corresponderá ao valor limite adoptado para o indicador de movimento do bloco. Os contactos virtuais não exercem forças, mas constituem apenas novas entradas na lista de contactos. Nos passos subsequentes é efectuado um teste rigoroso para detectar a interacção física[†]. De igual modo, quando os blocos se afastam, o contacto não é eliminado no momento em que a força de interacção se anula mas apenas quando a separação

ultrapassa d_{fc} .

As versões mais recentes dos programas de cálculo do método dos elementos discretos englobam um método geral de organização do processo de detecção, que consiste na decomposição do domínio numa malha regular de elementos (ou células) e que permite a análise de sistemas pouco compactos.

Neste método, que foi desenvolvido para as versões tridimensionais dos programas de cálculo do método dos elementos discretos^{Cundall,1988}, para cada célula é formada uma lista dos blocos cujas envolventes rectangulares contém, total ou parcialmente, sendo possível determinar exactamente em que célula um dado bloco deve ser incluído (Figura 4.33).

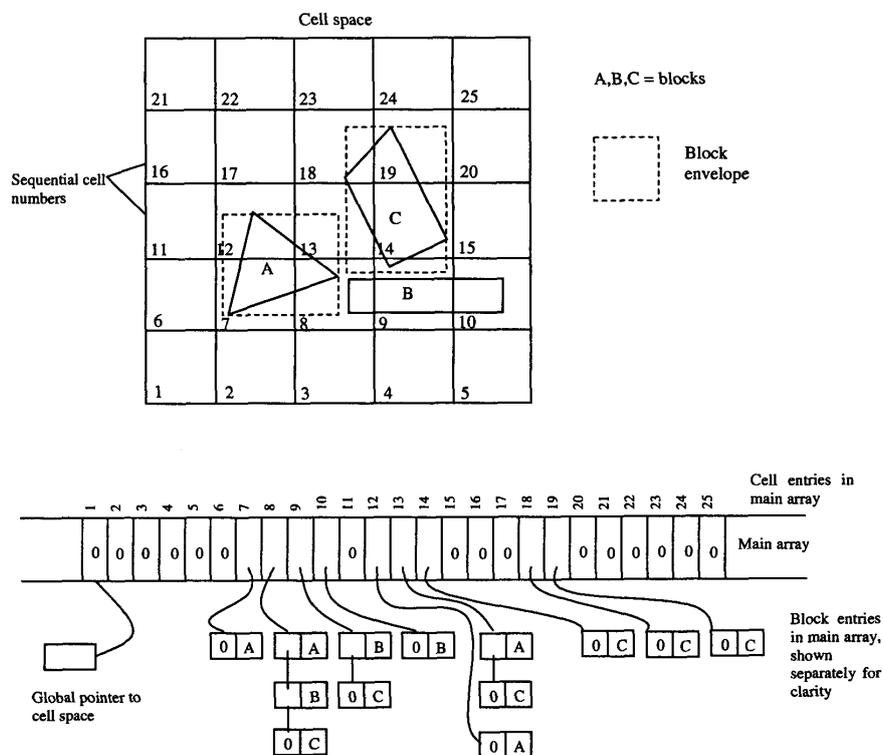


Figura 4.33 - Decomposição do domínio numa malha de células - caso bidimensional^{Cundall,1988}.

Uma vez listados todos os blocos dentro das respectivas células, é fácil identificar os blocos vizinhos a um dado bloco: as células que correspondem à sua envolvente rectangular contêm a lista de todos os blocos que lhe são próximos.

† Embora a metodologia descrita permita que os testes de detecção de contactos não sejam efectuados em todos os passos de cálculo, a determinação da interacção física, isto é, das forças de contacto, é efectuada em todos os passos de cálculo, em todos os contactos registados na lista de contactos.

Neste processo o tempo de cálculo necessário para realizar a detecção dos contactos para cada bloco depende da dimensão e forma dos blocos, mas não do número de blocos do sistema. A dimensão das células tem influência na eficiência do método, não devendo ser grande, para evitar que numa célula existam muitos blocos, mas também não deverá ser demasiadamente pequena pois, assim, aumenta-se o tempo de cálculo consumido em tarefas de classificação.

O processo assegura que potenciais contactos entre blocos são conhecidos antes do contacto físico ocorrer e que a busca de contactos apenas é efectuada para blocos em movimento; não será consumido tempo na busca de contactos em blocos inactivos.

4.5.2.3 - Representação Geométrica dos Vértices - Aproximação por Arcos Circulares

Uma das condições para a simulação correcta dos fenómenos físicos de contacto é uma definição unívoca e consistente dos parâmetros geométricos que definem o contacto. Na simulação de contactos do tipo vértice-aresta é possível encontrar uma definição unívoca da direcção normal ao contacto, por exemplo a direcção perpendicular à aresta em causa. No entanto, no caso de contactos do tipo vértice-vértice a definição dessa direcção não é unívoca, o que poderá causar problemas numéricos. Por outro lado, durante a simulação do comportamento mecânico da estrutura, os contactos pontuais poderão alterar a sua posição e as direcções normais aos contactos sofrerão alterações bruscas nas transições entre tipos de contacto (por exemplo, na transição de um contacto do tipo vértice-vértice para um contacto do tipo vértice-aresta). Para que o algoritmo numérico não produza interferências artificiais no comportamento do sistema mecânico é necessário que estas transições se efectuem de um modo contínuo e sem variações bruscas.

Estas dificuldades podem ser ultrapassadas considerando um arredondamento dos vértices dos blocos e dos pontos que definem a malha de elementos de diferenças finitas^{Cundall,1980}. O arredondamento é normalmente considerado apenas na detecção e definição dos contactos, sendo todas as outras características mecânicas dos blocos, tal como áreas, inércia, massas, etc..., determinadas com base na geometria original dos blocos.

O arredondamento dos vértices é efectuado através de um segmento de arco tangente às duas arestas que definem o vértice, sendo constante para todos os vértices uma mesma distância de arredondamento d (Figura 4.34(a)). Deste modo, o raio de curvatura não será constante em todos

os vértices, mas função do ângulo formado pelas arestas que os definem. Assim, evita-se uma truncagem excessiva dos vértices de ângulos agudos (Figura 4.34(b)).

Através do artifício de arredondamento dos vértices, a direcção normal do contacto, e que é a linha de acção da componente normal da força de contacto, ficará definida sem ambiguidades em todos os instantes: em contactos vértice-vértice é a direcção da linha que une os centros dos dois segmentos de arco; em contactos vértice-aresta é a direcção normal à aresta em causa (Figura 4.35). Também, com este artifício, fica eliminada a hipótese de ocorrência de variações bruscas na direcção normal ao contacto.

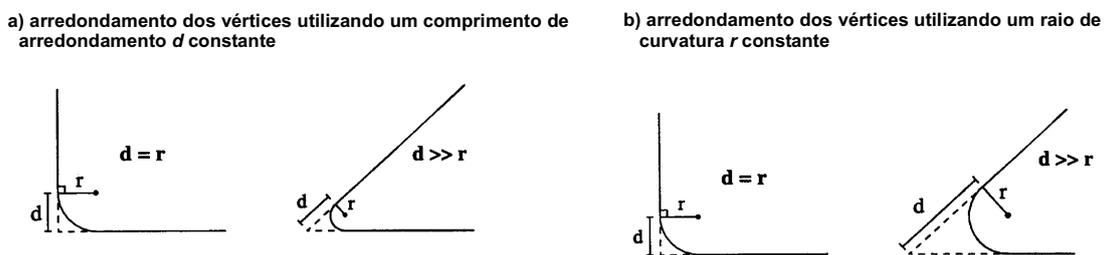


Figura 4.34 - Arredondamento dos vértices.

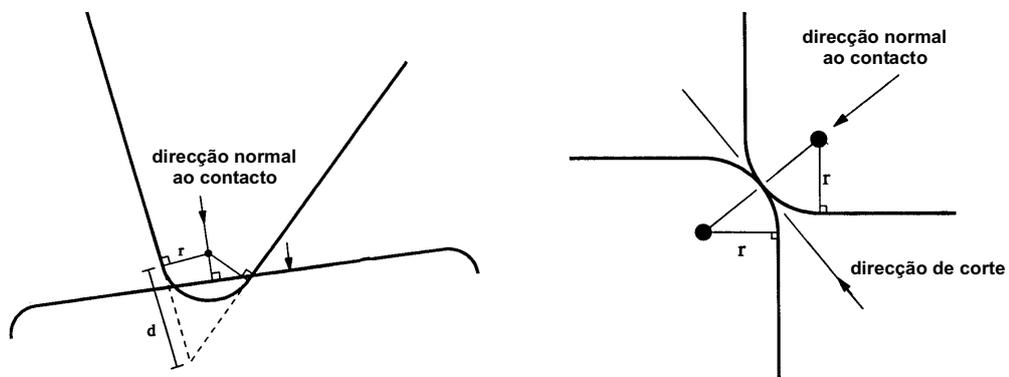


Figura 4.35 - Definição da direcção normal ao contacto (contacto vértice lado e contacto vértice-vértice).

Esta aproximação com arredondamento dos vértices apresenta ainda, além de uma simples e robusta formulação, que se traduz em vantagens computacionais, a vantagem de eliminar o problema de bloqueamento de blocos. O efeito de embricamento gerado por pequenos deslocamentos nas zonas de intersecção de duas discontinuidades (um pequeno deslocamento ao longo de uma discontinuidade impede o deslizamento ao longo da outra) poderá surgir na realidade quando os blocos são constituídos por materiais com elevadas tensões de esmagamento. No entanto, nos casos correntes, os vértices tendem a fracturar na presença das elevadas forças pontuais que se geram nessas situações, não sendo real o bloqueamento dos

blocos por imbricamento dos vértices. Verifica-se na prática, que em muitas situações existe uma gama de valores da distância de arredondamento, da ordem de 1 a 5% da dimensão média do lado do bloco, para os quais o comportamento não é muito sensível a este parâmetro^{Lemos,1997}. Diferenças significativas ocorrem quando o arredondamento é nulo ou muito pequeno em face dos deslocamentos do sistema.

4.5.2.4 - Contacto Vértice - Aresta

Dados dois blocos poligonais representados por vértices arredondados, qualquer tipo de contacto entre eles poderá ser representado através de dois tipos de contacto básicos: contacto do tipo vértice-vértice ou contacto do tipo vértice-aresta.

Na Figura 4.36 representa-se um contacto do tipo vértice-aresta entre dois blocos. A aresta é definida pelos pontos A e B e o vértice pelo ponto D , sendo A_c , B_c e D_c os respectivos centros de arredondamento e d_r , a distância de arredondamento. Os raios de curvatura correspondentes aos três vértices e à mesma distância de arredondamento d_r , são designados por R_A , R_B e R_D , respectivamente.

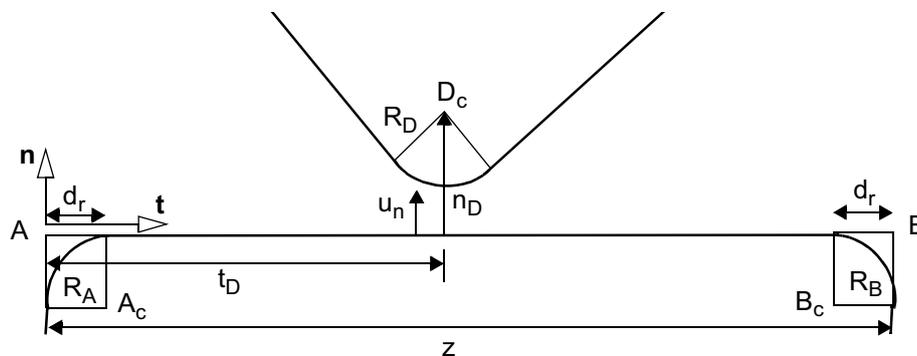


Figura 4.36 - Contacto do tipo vértice-aresta.

Considerando um referencial local de eixos (t, n) , com origem no ponto A , sendo o eixo t paralelo à aresta e o eixo n com a direcção da normal à aresta, a distância do centro do arco circular D_c à aresta é dado por:

$$u_n = n_D - R_D \quad (4.74)$$

em que u_n será positivo no caso de separação e negativo no caso de sobreposição.

Como referido, a formação de um contacto virtual deve ocorrer antes do instante de impacto físico, de modo a limitar a frequência do recurso às rotinas de detecção. Assim, um contacto virtual será definido quando:

$$u_n < d_{fc} \quad (4.75)$$

em que d_{fc} é a distância de formação de contacto, definida anteriormente, a qual poderá ser da ordem da distância de arredondamento d_r .

As forças de contacto só deixarão de ser nulas quando a distância u_n for nula. Por outro lado, a sobreposição deve ser limitada a um valor s_{max} , também da ordem de d_r :

$$u_n > s_{max} \quad (4.76)$$

Se a interpenetração entre blocos for superior ao valor máximo admissível, será necessário aumentar a rigidez normal, pois a sobreposição entre blocos torna-se fisicamente inaceitável e as relações geométricas entre os vértices arredondados perdem significado[†].

Para que o contacto seja do tipo vértice-aresta e não do tipo vértice-vértice, é necessário que a projecção do ponto D_C sobre a aresta se situe fora das zonas de arredondamento dos vértices A e B . Isto é, deverá ser:

$$t_d > d_r \quad \text{e} \quad t_d < z - d_r \quad (4.77)$$

em que z é o comprimento da aresta (Figura 4.36).

Caso sejam satisfeitas todas as condições anteriores, será criado um contacto virtual vértice-aresta, com a normal ao contacto definida pela direcção perpendicular à aresta AB . O ponto de contacto é definido como sendo o ponto a meio da distância mínima entre os blocos, isto é, dado por:

$$t_c = t_D \quad \text{e} \quad n_C = u_n / 2 \quad (4.78)$$

[†] Por exemplo, no caso de o ponto de contacto ser próximo de um dos extremos da aresta, poderá haver ambiguidade na idealização do lado com o qual se processa a interacção.

4.5.2.5 - Contacto Vértice -Vértice

Na Figura 4.37 representa-se um contacto do tipo vértice-vértice entre dois blocos. Os pontos A_C e B_C são os centros de arredondamento dos correspondentes vértices e R_A e R_B os respectivos raios de arredondamento (correspondentes a uma mesma distância de arredondamento d_r).

O referencial local (t, n) é definido pela linha que une os dois centros de arredondamento, a qual é tomada como a direcção da normal n ao contacto, sendo a direcção tangencial t definida pela sua perpendicular.

A distância entre os blocos é, então, definida por:

$$u_n = |\overline{A_C B_C}| - R_A - R_B \quad (4.79)$$

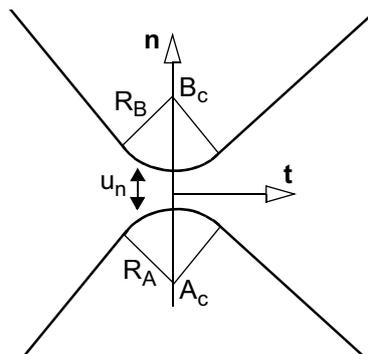


Figura 4.37 - Contacto do tipo vértice-vértice.

Tal como no caso anterior, o contacto virtual será criado apenas se a distância u_n se encontrar entre os limites definidos por d_{fc} e s_{max} :

$$u_n < d_{fc} \quad \text{e} \quad u_n > s_{max} \quad (4.80)$$

Neste caso, é óbvio que a sobreposição máxima s_{max} deverá ser limitada a um valor menor que a soma de dois raios, pois, caso contrário, a expressão que define a distância entre blocos não fará sentido.

Para que o contacto seja do tipo vértice-vértice é necessário ainda que a linha que define a normal intersecte ambos os arcos circulares, isto é, que não seja possível formar contactos vértice-aresta entre cada vértice e as arestas adjacentes ao outro vértice. Deste modo, será

necessário verificar que as seguintes condições *não sejam satisfeitas* para qualquer uma das 4 hipóteses de contacto vértice-aresta:

$$t_d > d_r \quad \text{e} \quad t_d < z - d_r \quad (4.81)$$

4.5.2.6 - Mudança de Tipo de Contacto

Em cada passo da simulação, a geometria do contacto deve ser recalculada com base nas novas posições dos vértices, actualizando-se a orientação e a localização do contacto, assim como o deslocamento relativo. Durante a mudança do tipo de contacto deve ser assegurada a continuidade das intensidades e direcções das forças de contacto, de modo a que a alteração do tipo de contacto não influencie o comportamento mecânico do sistema.

A detecção da mudança do tipo de contacto baseia-se nas condições:

$$t_d > d_r \quad \text{e} \quad t_d < z - d_r \quad (4.82)$$

Se uma destas condições é falsa para um contacto inicialmente do tipo vértice-aresta, então o contacto deslocou-se para uma zona de arredondamento circular, tornando-se num contacto do tipo vértice-vértice. Se uma dessas condições passa a ser verdadeira num contacto inicialmente do tipo vértice-vértice, então ocorreu um movimento inverso, transformando-se o contacto num contacto do tipo vértice-aresta.

4.5.3 - Comportamento Mecânico dos Contactos

A partir do momento em que é detectado uma interacção física efectiva num contacto virtual entre dois blocos, desenvolvem-se forças de interacção segundo as direcções normal e tangencial ao contacto. O modelo mecânico de interacção mais simples e que permite a representação da maioria das características mecânicas dos contactos reais, consiste em admitir que, no contacto pontual, os blocos estão ligados através de molas nas direcções normal e tangencial ao contacto. As componentes normal e tangencial da força de contacto são proporcionais aos respectivos deslocamentos relativos (u_n e u_t), de acordo com um dado modelo constitutivo.

Os incrementos das componentes da força de contacto são determinados através das seguintes expressões:

$$\Delta F_n = K_n \Delta u_n \quad (4.83)$$

$$\Delta F_t = K_t \Delta u_t \quad (4.84)$$

em que K_n e K_t são as constantes de rigidez normal e tangencial do contacto e Δu_n e Δu_t são os incrementos dos respectivos deslocamentos normal e tangencial.

Como referido, no método dos elementos discretos a interacção entre dois blocos é definida através de um conjunto de contactos pontuais, aos quais estão associados comprimentos de influência. Tendo em conta estes comprimentos, as relações anteriores podem ser formuladas em termos de tensões e deslocamentos relativos. Sendo l o comprimento do contacto e admitindo uma dimensão unitária na direcção perpendicular ao plano da estrutura[†], tem-se:

$$\sigma_n = F_n / l \quad (4.85)$$

$$\tau = F_t / l \quad (4.86)$$

donde:

$$\Delta \sigma_n = k_n \Delta u_n \quad (4.87)$$

$$\Delta \tau = k_t \Delta u_t \quad (4.88)$$

em que as constantes de rigidez k_n e k_t terão unidades tensão/comprimento.

Em cada passo de cálculo, os incrementos das tensões de contacto são determinadas de acordo com as expressões anteriores e adicionados às tensões existentes, verificando-se então se esses valores se encontram dentro dos limites admissíveis definidos pelas correspondentes superfícies de cedência.

Os critérios de rotura normalmente utilizados são o de Mohr-Coulomb para as tensões de corte, e o de Rankine para as tensões de tracção, sendo considerado um comportamento elástico

[†] Admitindo um problema plano.

perfeitamente plástico.

Nos modelos de contacto do método dos elementos discretos pode, também, definir-se uma resistência residual, representando uma perda parcial da capacidade resistente imediatamente após a fractura do contacto. No entanto, nestes modelos as resistências (ao corte e tracção) decrescem subitamente para os seus valores residuais (Figura 4.38), não sendo possível a implementação de leis de amolecimento.

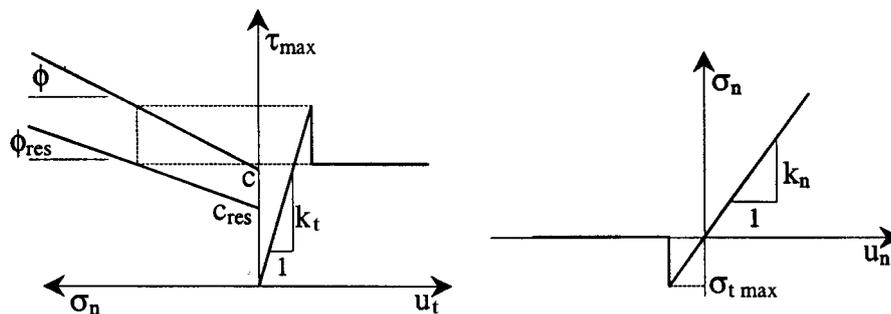


Figura 4.38 - Modelo de contacto com resistência residual - comportamentos na direcções tangencial (esq.) e normal (dta.).

Nas juntas que apresentam rugosidades pode ocorrer a variação do deslocamento normal na junta durante o seu deslizamento. Este fenómeno, denominado de dilatância, é definido no modelo de contacto do programa de cálculo UDEC através do ângulo de dilatância ϕ , o qual é limitado pela ocorrência de elevadas tensões normais ou por grandes deslocamentos de corte :

$$\text{se } |\tau| \leq \tau_{max} \text{ então } \phi = 0 \quad (4.89)$$

não há deslizamento

$$\text{se } |\tau| = \tau_{max} \text{ e } u_t \geq u_{ct} \text{ então } \phi = 0 \quad (4.90)$$

há deslizamento, mas é ultrapassado o deslocamento limite de corte (u_{ct}) a partir do qual se admite que as irregularidades da superfície de contacto foram eliminadas

Estas limitações no ângulo de dilatância correspondem à observação de que sob elevadas tensões normais ocorre o esmagamento das irregularidades da superfície de contacto e que com a ocorrência de grandes deslocamentos de corte essas as rugosidades são eliminadas^{Itasca,2000}.

Na Figura 4.39 representa-se esquematicamente o modelo de dilatância implementado no

programa de cálculo UDEC: com o aumento da tensão normal σ_n verifica-se (pela lei de Coulomb) um aumento da tensão tangencial máxima τ_{max} (gráfico superior) e simultaneamente uma diminuição da componente de deslocamento normal devido à dilatância (gráfico inferior). O ângulo de dilatância anula-se quando é atingido o deslocamento limite de corte (u_{ct}).

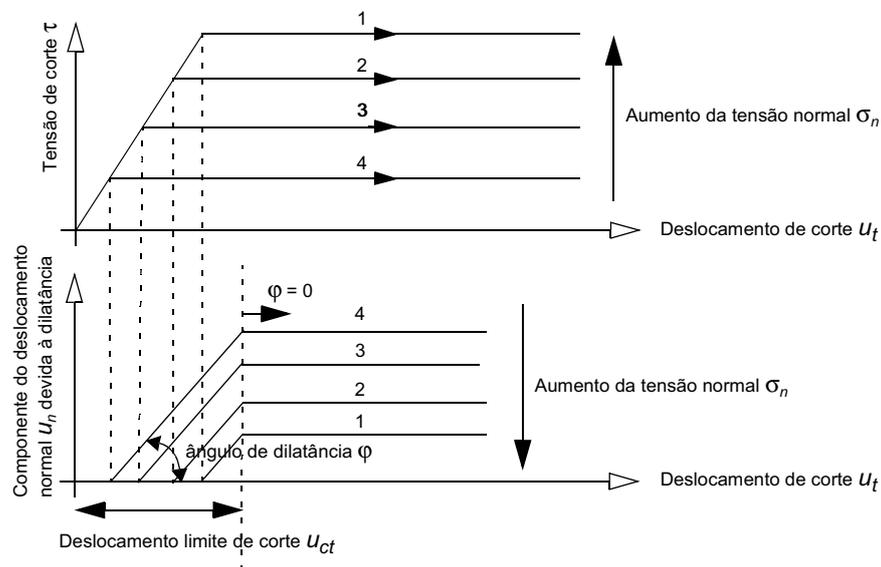


Figura 4.39 - Modelo de corte - influência da dilatância *Itasca, 2000*.

Nos modelos de elementos discretos podem ainda ser utilizados outros modelos constitutivos não lineares para a simulação dos contactos. No entanto, o modelo de contacto com plastificação por corte definido pelo critério de Coulomb associado ao critério de Rankine para a fractura por tracção, é o mais adequado para a maioria das análises, em particular para o estudo de estruturas de alvenaria. Nos exemplos apresentados neste capítulo foi este o modelo de contacto utilizado.

4.5.4 - Cálculo Estrutural

4.5.4.1 - Algoritmo de Cálculo

O algoritmo de cálculo a utilizar na análise estrutural pelo método dos elementos discretos deve ter em conta que a geometria do sistema, assim como o número e tipo de contactos entre corpos discretos, pode ser alterada durante a análise.

Deste modo, os métodos de resolução matricial baseados no método iterativo de Newton-Raphson modificado, utilizados nas formulações de elementos finitos, não são adequados para

este tipo de análise em virtude de ser necessária a construção das matrizes do sistema sempre que a geometria e os contactos do sistema variam.

No método dos elementos discretos, o algoritmo de cálculo utilizado, tanto para análises estáticas como para dinâmicas, baseia-se em algoritmos explícitos de diferenças finitas. A dimensão do intervalo de integração é limitada pela hipótese de, nesse intervalo de tempo, a interacção entre blocos se resumir apenas ao contacto entre um bloco e os seus vizinhos. Isto é, durante esse intervalo de tempo as perturbações não se propagarão mais longe do que à vizinhança imediata dos blocos. Esta hipótese permite que o processo de análise não linear das interacções entre blocos se efectue sem um excessivo consumo de memória computacional.

Na formulação de elementos discretos é efectuada uma integração passo a passo das equações de movimento[†] através do método explícito de integração das diferenças finitas centrais. Neste algoritmo de integração ao longo do tempo a dimensão do intervalo de integração é limitada pela hipótese de as velocidades e as acelerações serem constantes durante esse intervalo de tempo.

O método explícito de integração das diferenças finitas centrais apresenta, no entanto, a desvantagem de ser apenas condicionalmente estável, pelo que será necessário em certas situações intervalos de tempo muito pequenos.

A resolução de problemas estáticos através da resolução de equações de movimento é conseguida com a introdução de um amortecimento viscoso artificialmente alto nas equações de movimento. Deste modo, a energia cinética é dissipada, convergindo o sistema para a solução estática. Esta técnica é análoga à utilizada no método da relaxação dinâmica^{Otter et al., 1966; Underwood, 1983}.

4.5.4.2 - Ciclo de Cálculo

Os cálculos efectuados no método dos elementos discretos alternam entre a aplicação da segunda lei de Newton a todos os blocos e das leis constitutivas força-deslocamento a todos os contactos. As leis constitutivas fornecem as forças de contacto a partir dos deslocamentos

[†] Equações de movimento dos blocos, no caso de blocos rígidos, ou, no caso de blocos deformáveis, equações de movimento dos nós da discretização em elementos de diferenças finitas.

conhecidos e a segunda lei de Newton descreve o movimento dos blocos em função das forças calculadas. No caso de blocos rígidos o cálculo dos deslocamentos é efectuado nos centróides dos blocos e no caso dos blocos deformáveis nos nós da malha de elementos triangulares de diferenças finitas. Neste último caso, a aplicação das relações constitutivas do material dos blocos fornece as tensões no interior dos elementos.

O algoritmo é então baseado num conjunto de cálculos em que as quantidades cinemáticas são calculadas dando origem, através dos modelos constitutivos, a forças e tensões internas, que, por sua vez, permitem o cálculo das novas quantidades cinemáticas. Resumidamente, os passos percorridos em cada ciclo de cálculo são os seguintes (Figura 4.40):

- i) as equações de movimento fornecem, a partir das forças desequilibradas nos centróides dos blocos ou nos nós da malha de elementos de diferenças finitas, os novos valores das velocidades nodais[†]. A partir destas velocidades, são calculados os incrementos dos deslocamentos dos centróides (ou dos nós) e, a partir destes, os respectivos deslocamentos totais^{††};
- ii) a localização da fronteira dos elementos é actualizada, tendo em conta os deslocamentos calculados no passo anterior, e determinam-se os incrementos de deslocamento nos pontos de contacto;
- iii) conhecidos os incrementos dos deslocamentos nos pontos de contacto, a aplicação das relações constitutivas dos contactos fornece as forças e tensões nos contactos;
- iv) os incrementos das extensões nos nós dos elementos triangulares de diferenças finitas são determinados a partir de:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \Delta t \quad (4.91)$$

- v) aplicando as leis constitutivas do material obtêm-se, a partir dos incrementos das extensões, os incrementos das tensões instaladas nos elementos de diferenças finitas;

[†] Equações (4.96) e (4.97) do parágrafo 4.5.4.3.

^{††} Equações (4.98) e (4.99) do parágrafo 4.5.4.3.

vi) as forças resultantes dos contactos, das tensões internas e das acções exteriores são actualizadas, dando origem ao novo vector das forças necessário para o novo passo de cálculo.

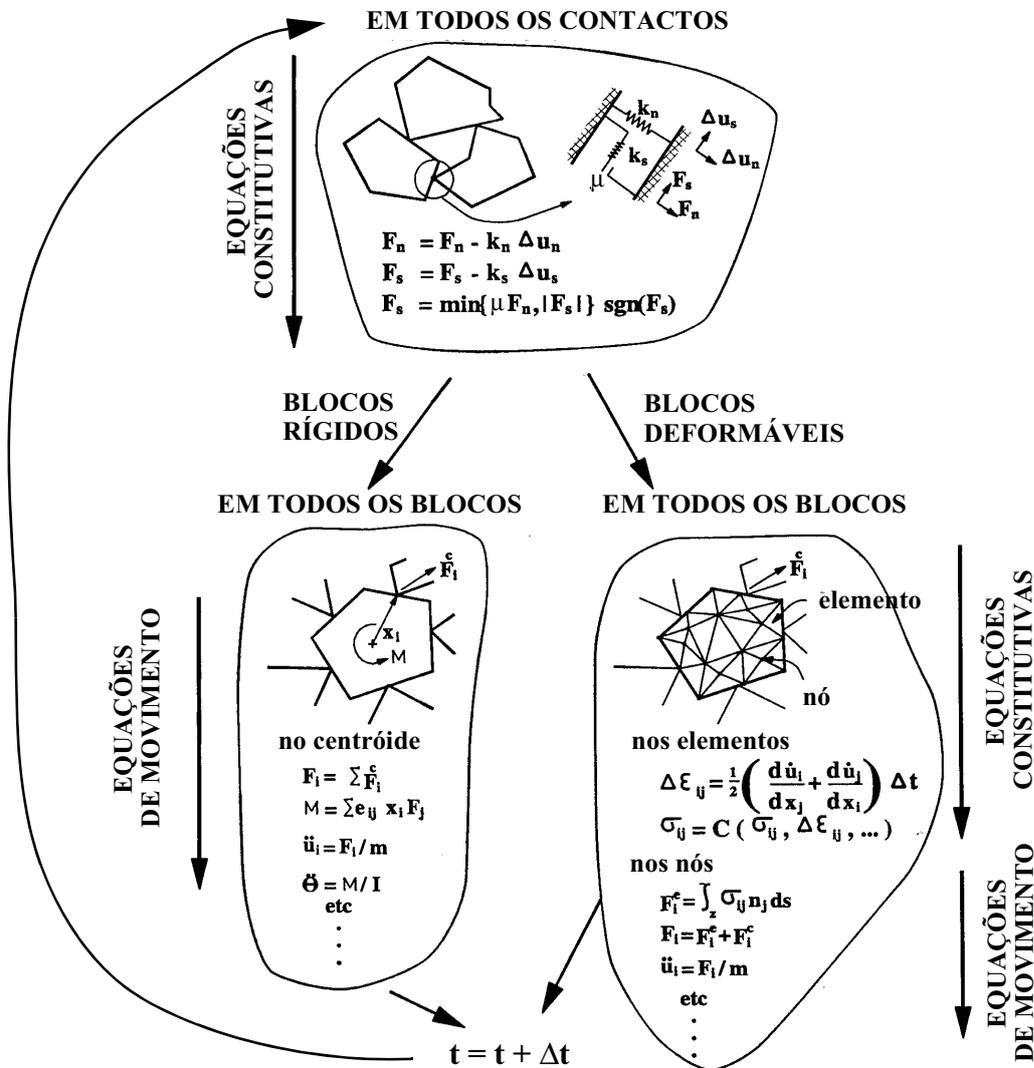


Figura 4.40 - Ciclo de cálculo no método dos elementos discretos ^{Itasca, 2000}.

4.5.4.3 - Equações de Movimento

O movimento de um bloco rígido individual é determinado pelas intensidades e direcções do momento e da força resultante aplicados no bloco. Considerando-se o movimento unidimensional de uma massa pontual, solicitada por uma força $F(t)$, a segunda lei de Newton estabelece que:

$$\ddot{u} = \frac{F}{m} \tag{4.92}$$

em que \ddot{u} é a aceleração da partícula e m a sua massa.

Aplicando o método das diferenças finitas centrais ao termo esquerdo da equação anterior, tem-se:

$$\ddot{u} = \frac{\dot{u}(t + \Delta t/2) - \dot{u}(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \quad (4.93)$$

Substituindo esta expressão na equação da segunda lei de Newton, tem-se:

$$\dot{u}(t + \Delta t/2) = \dot{u}(t - \Delta t/2) + \frac{F(t)}{m} \Delta t \quad (4.94)$$

Conhecida a velocidade no instante $(t + \Delta t/2)$, é possível determinar o deslocamento no final do intervalo de integração:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t + \Delta t/2) \Delta t \quad (4.95)$$

Uma vez que a força depende do deslocamento, o cálculo força-deslocamento é efectuado no final de cada intervalo de integração. Na Figura 4.41 representa-se um esquema com a ordem de cálculo do método das diferenças finitas centrais.

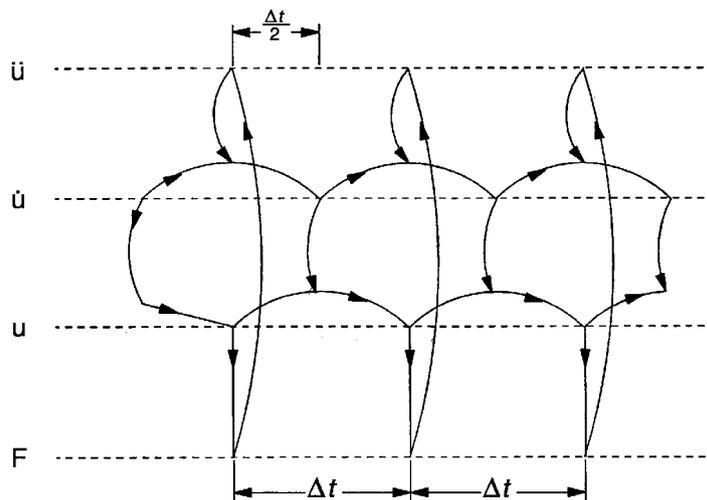


Figura 4.41 - Ordem de cálculo no método das diferenças finitas centrais.

No caso de blocos bidimensionais rígidos submetidos à acção de várias forças e momentos e à acção da gravidade, a equação da velocidade toma a forma:

$$\dot{u}_{i(t + \Delta t / 2)} = \dot{u}_{i(t - \Delta t / 2)} + \left(\frac{\sum F_i(t)}{m} + g_i \right) \Delta t \quad i = 1, 2 \quad (4.96)$$

$$\dot{\theta}_{(t + \Delta t / 2)} = \dot{\theta}_{(t - \Delta t / 2)} + \left(\frac{\sum M(t)}{I_G} \right) \Delta t \quad (4.97)$$

em que o índice i se refere às componentes dos vectores num sistema coordenado cartesiano, \dot{u}_i é a componente i da velocidade do centróide do bloco, $\dot{\theta}$ a velocidade angular do bloco, m e I_G a sua massa e momento polar central de inércia, $\sum F_i$ e $\sum M$ a componente i da força resultante e o momento resultante, aplicados no centróide do bloco e g_i representa as componentes da aceleração da gravidade segundo os eixos coordenados.

As velocidades obtidas nas equações anteriores permitem calcular a nova localização do bloco através das expressões:

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \dot{u}_{i(t + \Delta t / 2)} \Delta t \quad i = 1, 2 \quad (4.98)$$

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \dot{\theta}_{(t + \Delta t / 2)} \Delta t \quad (4.99)$$

em que $x_i(t)$ é a coordenada i do centróide do bloco e $\theta(t)$ a rotação em torno do seu centróide.

Assim, cada passo de cálculo produz novas posições dos blocos, que geram novas forças de contacto. As forças e os momentos resultantes são utilizados para calcular as acelerações linear e angular do bloco, cujas integrações conduzirão a novas velocidades, deslocamentos e rotações. Nas análises dinâmicas este processo é conduzido até ao instante pretendido e nas análises estáticas é repetido até que seja obtido um estado de equilíbrio satisfatório. O intervalo de tempo deste ciclo de cálculo deverá ser suficientemente pequeno de modo a que seja aceitável a hipótese de velocidades e acelerações permanecerem constantes nesse intervalo e a hipótese, referida anteriormente, da não propagação das perturbações.

No caso de blocos deformáveis, as equações de movimento são estabelecidas em cada nó da discretização interna dos blocos, sendo concentrada em cada nó 1/3 da massa do elemento triangular. A equação de movimento é semelhante à anterior, havendo apenas que incluir no cálculo da força resultante aplicada no nó, além das forças externas que lhe são directamente aplicadas e das forças de contacto, a parcela F_i correspondente às tensões internas nos elementos

que contêm o nó:

$$F_i = \int_S \sigma_{ij} n_j ds \quad (4.100)$$

em que S é a superfície que limita a massa m associada ao nó, n_j o vector unitário normal à superfície S e σ_{ij} o tensor das tensões. Os índices i e j referem as componentes dos vectores num sistema coordenado cartesiano e a repetição de índices num mesmo termo subentende uma soma, de acordo com a convenção indicial de Einstein.

4.5.4.4 - Amortecimento

Embora, por simplicidade, nas deduções anteriores não tenha sido feita referência ao amortecimento, no método dos elementos discretos as equações de movimento contêm, em problemas estáticos e dinâmicos, a parcela correspondente ao amortecimento. Neste caso, as expressões (4.96) e (4.97) tomam a forma:

$$\dot{u}_{i(t + \Delta t / 2)} = \dot{u}_{i(t - \Delta t / 2)} \frac{1 - \frac{c}{2} \Delta t}{1 + \frac{c}{2} \Delta t} + \left(\frac{\sum F_i(t)}{m} + g_i \right) \frac{\Delta t}{1 + \frac{c}{2} \Delta t} \quad i = 1, 2 \quad (4.101)$$

$$\dot{\theta}_{(t + \Delta t / 2)} = \dot{\theta}_{(t - \Delta t / 2)} \frac{1 - \frac{c}{2} \Delta t}{1 + \frac{c}{2} \Delta t} + \left(\frac{\sum M(t)}{I_G} \right) \frac{\Delta t}{1 + \frac{c}{2} \Delta t} \quad i = 1, 2 \quad (4.102)$$

em que c é a constante de amortecimento.

O tipo de amortecimento considerado varia consoante o tipo de análise que é efectuada. Na resolução de problemas estáticos, o amortecimento é do tipo viscoso, sendo a intensidade das forças de amortecimento proporcional à velocidade dos blocos e definido com um valor artificialmente alto. Pretende-se, deste modo, dissipar a energia cinética e assim convergir para a situação de equilíbrio ou para um mecanismo de colapso quase-estático[†].

A utilização de amortecimento do tipo viscoso em análises estáticas com relaxação dinâmica

[†] Nas análises estáticas o amortecimento é fictício e simplesmente adequado à produção de convergência para um estado de repouso.

envolve as seguintes dificuldades:

- i) a constante de amortecimento óptima depende das frequências principais do sistema, as quais são desconhecidas se não for efectuada uma análise modal da estrutura. Em sistemas lineares é possível efectuar esta análise, embora o esforço de cálculo seja significativo. No caso de sistemas não lineares essas frequências são indefinidas, não sendo possível o seu cálculo;
- ii) Nos casos correntes, o amortecimento é definido através de uma mesma constante para toda a estrutura. No caso de estruturas constituídas por blocos discretos, pode ocorrer em simultâneo uma grande variedade de movimentos dos blocos, por exemplo, uma parte da estrutura poderá estar em equilíbrio enquanto uma outra parte poderá estar em colapso. Nestas situações será necessário a utilização de um amortecimento apropriado para cada uma das regiões.

De modo a ultrapassar estas dificuldades Cundall^{Cundall,1982} desenvolveu um método de controle e ajustamento da constante de amortecimento. Neste método, designado por método de *amortecimento automático*, a constante de amortecimento viscoso é continuamente ajustada de modo a que a energia absorvida pelo amortecimento seja proporcional à taxa de variação da energia cinética do sistema.

O método de *amortecimento automático* apresenta, no entanto, uma dificuldade: à medida que o sistema evolui para um estado de equilíbrio quase estático, a energia cinética aproxima-se de zero e, conseqüentemente, o amortecimento tenderá para zero. Para eliminar esta dificuldade foi implementado um método, designado por método de *amortecimento local*, em que o amortecimento é definido proporcionalmente às intensidades das forças desequilibradas. Os métodos anteriores de controle e ajustamento da constante de amortecimento convergem para a mesma solução em problemas quasi-estáticos e ambos estão disponíveis no programa de cálculo UDEC. Em análises que envolvam súbitas alterações no carregamento ou colapsos, para os quais são necessárias diferentes intensidades de amortecimento em diversas regiões parece ser preferível o método de *amortecimento local*^{Cundall,1987}.

No caso de análises dinâmicas com o método dos elementos discretos utiliza-se o

amortecimento de Rayleigh, proporcional à massa M e à rigidez K da estrutura ($C = \alpha M + \beta K$). Como se pode observar na Figura 4.42, o amortecimento correspondente à parcela proporcional à massa é inversamente proporcional à frequência e assim frequências altas serão pouco amortecidas, o que poderá produzir alguma perturbação na resposta global da estrutura. A introdução de uma parcela de amortecimento proporcional à rigidez da estrutura corrige este problema^{Clough e Penzien,1993}, obtendo-se, também, um amortecimento aproximadamente independente da frequência na gama central de frequências.

O maior inconveniente da componente do amortecimento de Rayleigh proporcional à rigidez da estrutura é a exigência de intervalos de tempo muito pequenos para obtenção de convergência e estabilidade da solução. Por essa razão, em análises dinâmicas de estruturas complexas, e para diminuir o consumo de tempo de cálculo, pode utilizar-se apenas a componente de amortecimento proporcional à massa^{Sincraian,2001}. Nesta situação, o coeficiente de proporcionalidade deverá ser definido de modo a que não resultem amortecimentos excessivos ou diminutos no intervalo das frequências dominantes da estrutura.

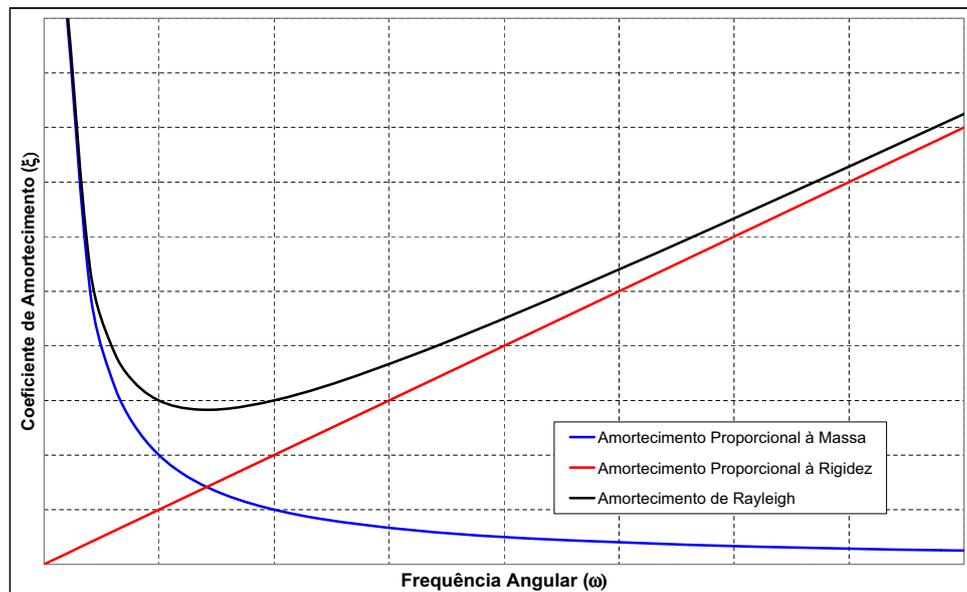


Figura 4.42 - Amortecimento de Rayleigh - variação da taxa de amortecimento com a frequência angular.

4.5.4.5 - Estabilidade Numérica

O método explícito das diferenças finitas centrais é apenas condicionalmente estável, o que implica que a estabilidade numérica só é conseguida através de passos de integração Δt inferiores a um dado valor crítico. Para um sistema elástico linear, o intervalo de tempo crítico é:

$$\Delta t_{crit} = 2/\omega_{max} \quad (4.103)$$

em que ω_{max} é a frequência própria de vibração mais alta do sistema. No caso de sistemas discretos que alteram consideravelmente a sua geometria durante a análise, não é possível a determinação dessa frequência. Uma estimativa para o intervalo de tempo pode ser obtida recorrendo à analogia com um sistema de um grau de liberdade. Assim, tem-se:

$$\Delta t_{crit} = 2 \cdot frac \cdot \sqrt{\frac{M}{K}} \quad (4.104)$$

representando $\sqrt{M/K}$ o período mínimo no conjunto de todos os blocos. No caso de blocos rígidos, M será a massa do bloco e K a máxima rigidez normal ou tangencial dos contactos. No caso de blocos deformáveis, a expressão anterior é aplicada em cada nó e o valor mínimo será o utilizado. Neste caso, M será a massa associada ao nó e K a rigidez máxima entre o elemento e a junta associada ao nó. O parâmetro $frac$ representa um factor de segurança que reduz o intervalo de tempo crítico, sendo o valor 0.50 em geral suficiente para a estabilidade do método.

4.6 - COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

Para a simulação de estruturas com juntas, como são algumas alvenarias, deverão ser utilizadas formulações de elementos finitos que incluam elementos de junta. Esta abordagem, dentro das alternativas existentes, é aquela que é mais próxima do método dos elementos discretos. No entanto, a formulação de elementos finitos está à partida limitada por não permitir a alteração da topologia dos contactos entre elementos durante a análise estrutural. Assim, ao contrário do método dos elementos discretos, através do método dos elementos finitos não é possível a simulação do desenvolvimento de mecanismos com grandes deslocamentos que alterem a geometria inicial da estrutura e donde resultem novos contactos e a eliminação de contactos existentes inicialmente.

Na análise estrutural pelo método dos elementos finitos é necessário recorrer a um processo iterativo em cada incremento de carga, ou de deslocamento, para se obter uma solução equilibrada. Durante esse processo iterativo são construídas e invertidas diferentes vezes matrizes de rigidez tangente do sistema, o que resulta num elevado consumo de tempo de

cálculo. No caso do método dos elementos discretos não é necessário construir matrizes de rigidez do sistema; trata-se de um método explícito[†], com incrementos de tempo, no qual os elementos são tratados sequencialmente em vez de simultaneamente como no método dos elementos finitos^{††}. No entanto, este procedimento de cálculo explícito conduz também a um elevado consumo de recursos computacionais, pelo que, em relação ao tempo consumido no cálculo, os dois métodos não apresentam grandes diferenças.

Quanto aos resultados, e em situações correntes onde a topologia dos contactos entre elementos permanece constante, ambos os métodos são capazes de simular o comportamento de painéis de alvenaria regular em regime material e geometricamente não linear. A curva carga-deslocamento que se obtém automaticamente numa análise por elementos finitos, terá de ser obtida de forma indirecta pelo método dos elementos discretos.

De uma forma geral, pode dizer-se que com a formulação implícita do método dos elementos finitos tradicional é mais difícil a obtenção de resultados, embora sejam mais fiáveis do que os obtidos pelo método (explícito) dos elementos discretos. De facto, em análises onde a identificação do estado de equilíbrio da estrutura é relevante, os resultados obtidos através do método dos elementos discretos devem ser cuidadosamente analisados.

Outra vantagem do método dos elementos finitos relativamente às actuais implementações do método dos elementos discretos, é permitir a utilização de modelos materiais mais sofisticados, nomeadamente a inclusão do amolecimento nas leis de comportamento do material fracturado, o que é mais realista e permite a modelação de comportamentos do tipo “snap-back”.

No entanto, na análise de mecanismos de colapso locais ou parciais, onde ocorrem modificações do tipo e localizações dos contactos, o método tradicional dos elementos finitos é ineficaz, sendo apenas aplicável a modelação pelo método dos elementos discretos. Assim, uma das

† Nos métodos explícitos obtêm-se valores para as quantidades dinâmicas no instante $t+\Delta t$ com base apenas nos valores disponíveis no instante t , sem que seja necessário resolver em cada incremento um sistema de equações. Tipicamente, os métodos explícitos são condicionalmente estáveis, exigindo para a sua estabilidade dimensões do intervalo de tempo inversamente proporcionais à maior frequência do sistema.

†† Na sua forma tradicional, o método dos elementos finitos é um método implícito. Nos métodos implícitos o cálculo das quantidades no instante $t+\Delta t$ baseia-se não só nas quantidades no instante t , como nas próprias quantidades no instante $t+\Delta t$. Estes algoritmos requerem, portanto, a repetida resolução de um sistema de equações (e a construção das correspondentes matrizes) durante o processo iterativo.

vantagens do método dos elementos discretos é possibilitar a simulação de todo o processo de colapso da estrutura (Figura 4.52).

A escolha do método numérico depende do problema em estudo, sendo de salientar que a eficácia numérica da formulação de elementos finitos decresce grandemente se forem utilizadas demasiadas interfaces no modelo. Por outro lado, o programa de cálculo do método dos elementos discretos utilizado no presente trabalho (UDEEC) apenas permite análises bidimensionais[†], ao passo que nos programas de cálculo do método dos elementos finitos utilizados são também possíveis análises tridimensionais.

A formulação básica do programa de cálculo UDEEC é a de estados planos de deformação, isto é, com deformação nula na direcção perpendicular ao plano da estrutura. Esta formulação possibilita a simulação de estruturas tridimensionais longas, com secção transversal constante e submetidas à acção de cargas complanares com as secções transversais. Em alternativa, o programa de cálculo UDEEC permite a simulação de estados planos de tensão, nos quais as tensões perpendiculares ao plano da estrutura são nulas. Esta formulação, que possibilita a simulação de estruturas planas submetidas à acção de cargas complanares com a própria estrutura, é a indicada para a análise de estruturas de alvenaria planas, como os arcos e paredes.

4.7 - ESTUDOS NUMÉRICOS

Para ilustrar as principais potencialidades dos métodos dos elementos finitos e dos elementos discretos na modelação de estruturas em alvenaria, identificar os parâmetros mais importantes dos modelos materiais e compreender o comportamento estrutural deste tipo de construções, apresentam-se neste parágrafo vários exemplos de modelação de arcos.

4.7.1 - Arco Circular - Modelos Descontínuos de Elementos Finitos

Considere-se um arco circular de raio interior de 5.18 m, submetido à acção do seu peso próprio ($\gamma = 26.6 \text{ kN/m}^3$), do peso próprio do material de enchimento no extradorso (que se admitiu ter uma altura no fecho do arco de 1.76 m e um peso específico de $\gamma = 20.0 \text{ kN/m}^3$) e de uma

[†] Não foi possível a utilização da versão tridimensional do programa de cálculo UDEEC na execução do presente trabalho.

sobrecarga concentrada aplicada a 1/3 do vão do arco.

A geometria deste caso de estudo, assim como as características mecânicas admitidas para o modelo numérico (representadas na tabela seguinte), resultam do levantamento e caracterização da estrutura da ponte de Bargower, que será analisada no parágrafo 4.9.3. No entanto, de modo a obter-se uma relação t/R superior ao valor mínimo admissível definido no parágrafo 3.8.2, considerou-se para o modelo do arco isolado uma espessura $t = 0.65\text{m}$, ligeiramente maior que a espessura real (0.558 m).

Blocos		Juntas	
E	14.1 GPa	k_n	$2.4 \times 10^9 \text{ kN/m}^3$
ν	0.20	k_t	$1.0 \times 10^9 \text{ kN/m}^3$
		f_t	0

Tabela 4.1 - Propriedades mecânicas dos blocos e juntas do arco.

O arco foi simulado pelo método dos elementos finitos através de uma simulação bidimensional (Figura 4.43), em que cada bloco foi modelado com 15 elementos contínuos de 9 nós, de comportamento elástico linear, e cada junta entre blocos com 5 elementos de interface de 6 nós de comportamento não linear. Em virtude de o colapso deste tipo de estruturas estar associado à fractura por tracção das juntas, sem escorregamento, o modelo material considerado para as interfaces foi o de fenda discreta com resistência à tracção nula e comportamento ao corte elástico linear, até ao momento da fractura, e rigidez de corte nula após fractura por tracção. De modo a prevenir a interpenetração e deslizamento dos blocos, consideraram-se valores elevados para a rigidez normal e para a rigidez tangencial dos elementos de interface (Tabela 4.1).

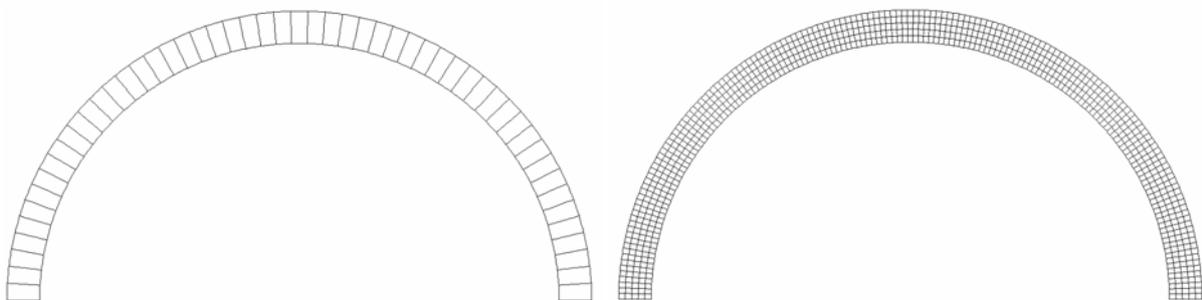


Figura 4.43 - Modelo bidimensional de elementos finitos do arco (espessura - 0.65 m; raio interior - 5.18 m).

Admitiu-se para a estrutura bidimensional uma largura unitária na direcção perpendicular ao seu

plano e considerou-se a resposta em estado plano de tensão. Na simulação do comportamento não linear (material e geométrico) recorreu-se ao método de Newton-Raphson associado com o método do comprimento do arco.

A sequência de carregamento do modelo numérico consistiu na aplicação do peso próprio do arco em primeiro lugar, seguindo-se a aplicação da acção correspondente ao peso próprio do material de enchimento e, no final, a aplicação da carga concentrada localizada a 1/3 do vão do arco.

4.7.1.1 - Análises Geometricamente Lineares

Em primeiro lugar estudou-se o comportamento do modelo de elementos finitos em regime geometricamente linear. Consideraram-se duas situações de carga: uma em que no arco apenas actuam o seu peso próprio e a carga concentrada (modelo MOD3), e outra em que se considerou também o peso próprio do material de enchimento (modelo MOD1).

Pode constatar-se na Figura 4.44 o efeito favorável da acção vertical correspondente ao peso próprio do material de enchimento, verificando-se um aumento significativo do valor da carga de colapso no modelo que considera essa acção suplementar (5.5 vezes superior).

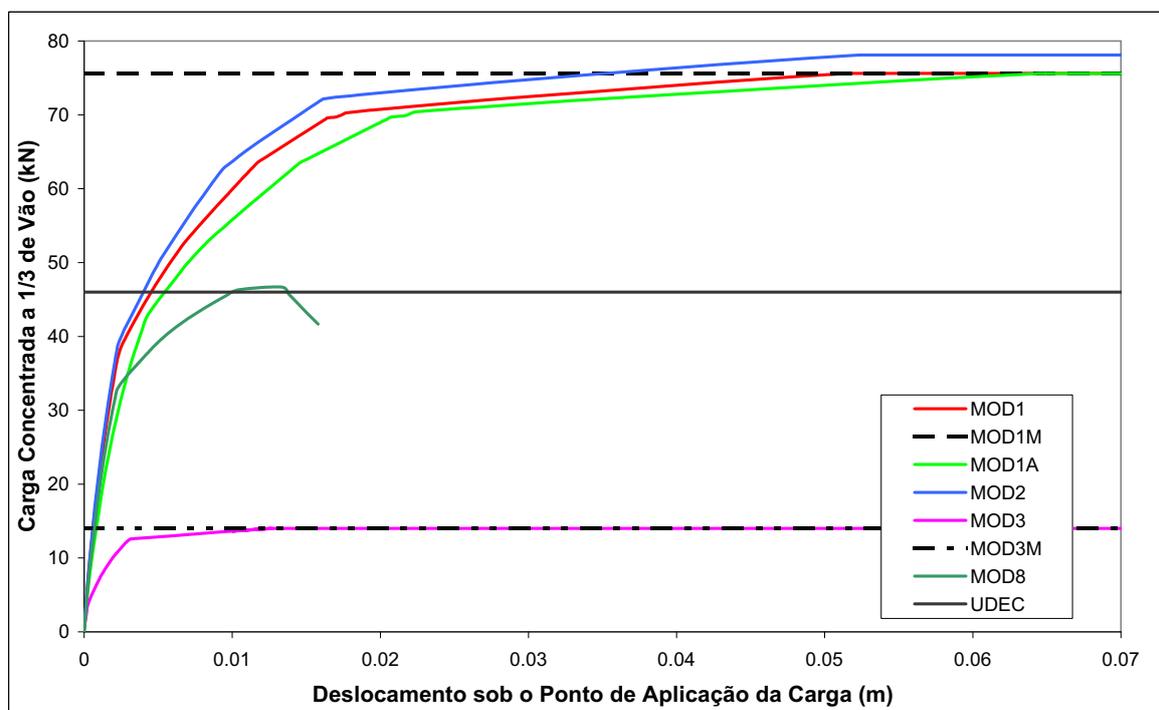


Figura 4.44 - Curvas carga-deslocamento das análises numéricas do arco isolado.

No gráfico da Figura 4.44 representam-se também os correspondentes valores da carga de colapso calculados através das análises cinemáticas descritas no parágrafo 3.8.3 (MOD1M e MOD3M), verificando-se que os diagramas carga-deslocamento das análises geometricamente lineares (MOD1 e MOD3) convergem para esses resultados da análise limite.

O modelo correspondente ao carregamento com o peso próprio do material de enchimento (MOD1), foi também analisado considerando uma diminuição de 10 vezes da constante de rigidez normal das interfaces que modelam as juntas. Como se pode verificar na Figura 4.44, numa análise geometricamente linear, o modelo correspondente a essa diminuição da rigidez normal da junta (MOD1A) apresenta uma resposta menos rígida sem que, no entanto, haja alteração do valor da carga de colapso. Pode concluir-se que, em regime geometricamente linear, a carga de colapso não depende das características de deformabilidade mas apenas da geometria inicial da estrutura.

O mesmo modelo (MOD1) foi analisado considerando uma degradação da carga concentrada através do material de enchimento no extradorso do arco (de acordo com o proposto na parte superior da Figura 3.91), verificando-se, como já tinha sido justificado analiticamente, um ligeiro aumento da carga de colapso (MOD2 na Figura 4.44).

4.7.1.2 - Análises Geometricamente Não Lineares

O modelo anterior (MOD1) foi analisado considerando os efeitos geométricos de 2ª ordem (MOD8). Verifica-se, como se pode observar na Figura 4.44, uma diminuição substancial da carga máxima e uma menor ductilidade da resposta quando os efeitos geométricos de 2ª ordem são tidos em conta. Consta-se, assim, que a consideração dos efeitos geometricamente não lineares é fundamental para a avaliação da carga de colapso em modelos numéricos de arcos isolados. A simulação através de modelos geometricamente lineares ou de modelos cinemáticos, conduz a resultados contra a segurança, que, dependendo do vão e da esbelteza do arco, poderão ser da ordem do dobro dos valores correspondentes aos efeitos geométricos de 2ª ordem[†].

Na Figura 4.45 representa-se o mecanismo de colapso correspondente à análise do modelo

[†] Como se verá no parágrafo 4.9.3, em arcos de estruturas reais o material de enchimento no extradorso tem um papel estrutural activo de rigidificação lateral, resultando, assim, efeitos geométricos de 2ª ordem menos significativos do que em arcos isolados.

geometricamente não linear (MOD8), o qual é representativo dos mecanismos de colapso obtidos em todos os modelos anteriores

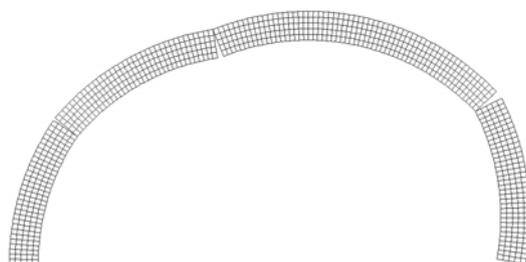


Figura 4.45 - Mecanismo de colapso correspondente à análise do modelo MOD8.

A partir do modelo original (MOD8), com $E = 14.1 \text{ GPa}$ e $k_n = 2.4 \times 10^9 \text{ kN/m}^3$, estudou-se a influência da rigidez normal das interfaces e da deformabilidade dos blocos na resposta geometricamente não linear do modelo do arco. Consideraram-se modelos numéricos em que o módulo de elasticidade foi aumentado 10 vezes (MOD8n1) e 100 vezes (MOD8n2), e modelos onde a constante de rigidez normal das interfaces foi multiplicada por 10 (MOD8n3), por 100 (MOD8n4) e por 0.1 (MOD8n5). Como se pode observar na Figura 4.46, quanto maior for a rigidez das juntas ou dos blocos, menores são os efeitos geométricos de 2ª ordem, o que se traduz em cargas de colapso superiores. De facto, modificações na deformabilidade dos blocos, ou das interfaces, resultam em alterações das posições dos centros (vértices) de rotação dos blocos e, conseqüentemente, modificação dos efeitos geométricos de 2ª ordem.

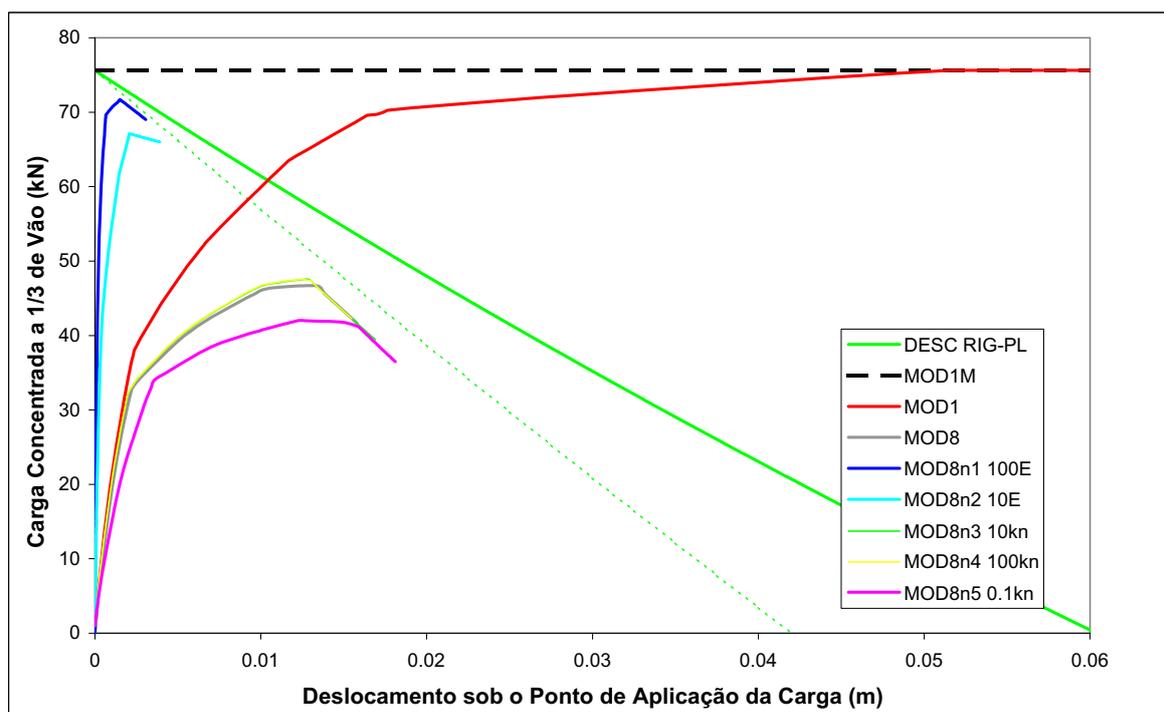


Figura 4.46 - Curvas carga-deslocamento das análises do arco isolado com variação da deformabilidade.

No modelo original (MOD8), a rigidez normal da interface já é suficientemente elevada para impedir uma interpenetração significativa dos vértices dos blocos, pelo que o aumento dessa constante de 10 (MOD8n3) ou 100 (MOD8n4) vezes não resulta em alterações significativas na resposta do modelo. Assim, na Figura 4.46 verifica-se uma coincidência das curvas de resposta correspondentes a esses modelos.

Na Figura 4.46 apresentam-se também os resultados da análise rígido-plástica de 2ª ordem, verificando-se uma tendência de aproximação à trajectória de descarga rígido-plástica das curvas das análises numéricas geometricamente não lineares. No entanto, constata-se que as curvas obtidas numericamente convergem para uma linha (representada a traço interrompido na Figura 4.46) distinta da trajectória de descarga rígido-plástica (representada a traço contínuo). A não convergência dessas curvas para a trajectória de descarga rígido-plástica explica-se pelo facto de a deformabilidade normal dos contactos nos modelos numéricos ser diferente da deformabilidade admitida no modelo rígido-plástico, que respeita a condição de “não-interpenetração”. De facto, nas análises numéricas os elementos de interface apresentam uma rigidez finita, o que resulta em interpenetração dos vértices dos blocos e, conseqüentemente, na alteração das posições dos centros de rotação dos blocos relativamente às do modelo de análise rígido-plástico. Assim, é de admitir que os resultados numéricos geometricamente não lineares convirjam para uma linha intermédia, distinta da trajectória de descarga rígido-plástica.

4.7.1.3 - Efeitos da Modelação da Resistência à Tracção das Juntas

Considerando o modelo de arco original, sujeito à acção do seu peso próprio, do peso do material de enchimento no extradorso e da carga concentrada aplicada a 1/3 de vão, e admitindo as características mecânicas indicadas na Tabela 4.1, estudou-se o efeito da resistência à tracção das juntas e da correspondente curva de amolecimento. Foram analisados 6 modelos:

- i) modelo original com resistência das juntas à tracção nula (MOD1 e MOD8);
- ii) modelo com resistência das juntas à tracção de 0.20 MPa e comportamento pós fractura frágil (MOD5);
- iii) modelo com resistência das juntas à tracção de 2.00 MPa e comportamento pós fractura frágil (MOD5a);

- iv) modelo com resistência das juntas à tracção de 0.20 MPa e comportamento pós fractura descrito por uma curva de amolecimento exponencial com energia de fractura $G_f = 0.01 \text{ kNm/m}^2$ (MOD6a);
- v) modelo com resistência das juntas à tracção de 0.20 MPa e comportamento pós fractura descrito por uma curva de amolecimento exponencial com energia de fractura $G_f = 0.10 \text{ kNm/m}^2$ (MOD6);
- vi) modelo com resistência das juntas à tracção de 0.20 MPa e comportamento pós pico descrito por uma curva de amolecimento exponencial com energia de fractura $G_f = 0.5 \text{ kNm/m}^2$ (MOD7).

Na Figura 4.47 apresentam-se as curvas carga-deslocamento que resultaram da análise dos 6 modelos anteriores, com e sem consideração dos efeitos geometricamente não lineares.

Como se pode observar nos gráficos da Figura 4.47, os dois primeiros modelos têm respostas muito próximas, tanto em regime geometricamente linear (MOD1 e MOD5), como em regime geometricamente não linear (MOD8 e MOD5). Esta proximidade deve-se ao facto de se ter adoptado no segundo modelo (MOD5) uma pequena resistência de tracção e comportamento pós fractura frágil, isto é, com energia de fractura nula.

O quarto modelo (MOD6a), embora com comportamento pós fractura caracterizado por um amolecimento exponencial, apresenta também um comportamento próximo dos dois primeiros modelos, em virtude da energia de fractura e da resistência à tracção adoptadas nesse modelo serem muito baixas. Como se pode observar nos gráficos anteriores, apenas se identifica uma pequena diferença, que corresponde ao facto de no quarto modelo as juntas necessárias para a formação do mecanismo abrirem completamente para níveis de carga ligeiramente superiores.

Ao se considerar uma resistência à tracção superior, ou uma energia de fractura mais elevada, as respostas apresentam maior rigidez na fase inicial e cargas máximas superiores à da resposta sem resistência à tracção. Nesses modelos a abertura total das juntas críticas que originam o mecanismo de colapso dá-se para níveis de carga aplicada mais elevados. É interessante observar (Figura 4.47) que nas análises geometricamente lineares a resposta da estrutura

converge, após a degradação da resistência à tracção das juntas críticas, para a solução sem resistência à tracção (MOD1), ou seja, para a solução da teoria da análise limite (MOD1M). Nas análises com efeitos geométricos de 2ª ordem não se identifica uma tendência de convergência para a solução sem resistência à tracção (MOD8), embora se perceba uma ligeira tendência de aproximação à curva de descarga rígido-plástica (análise rígido-plástica de 2ª ordem).

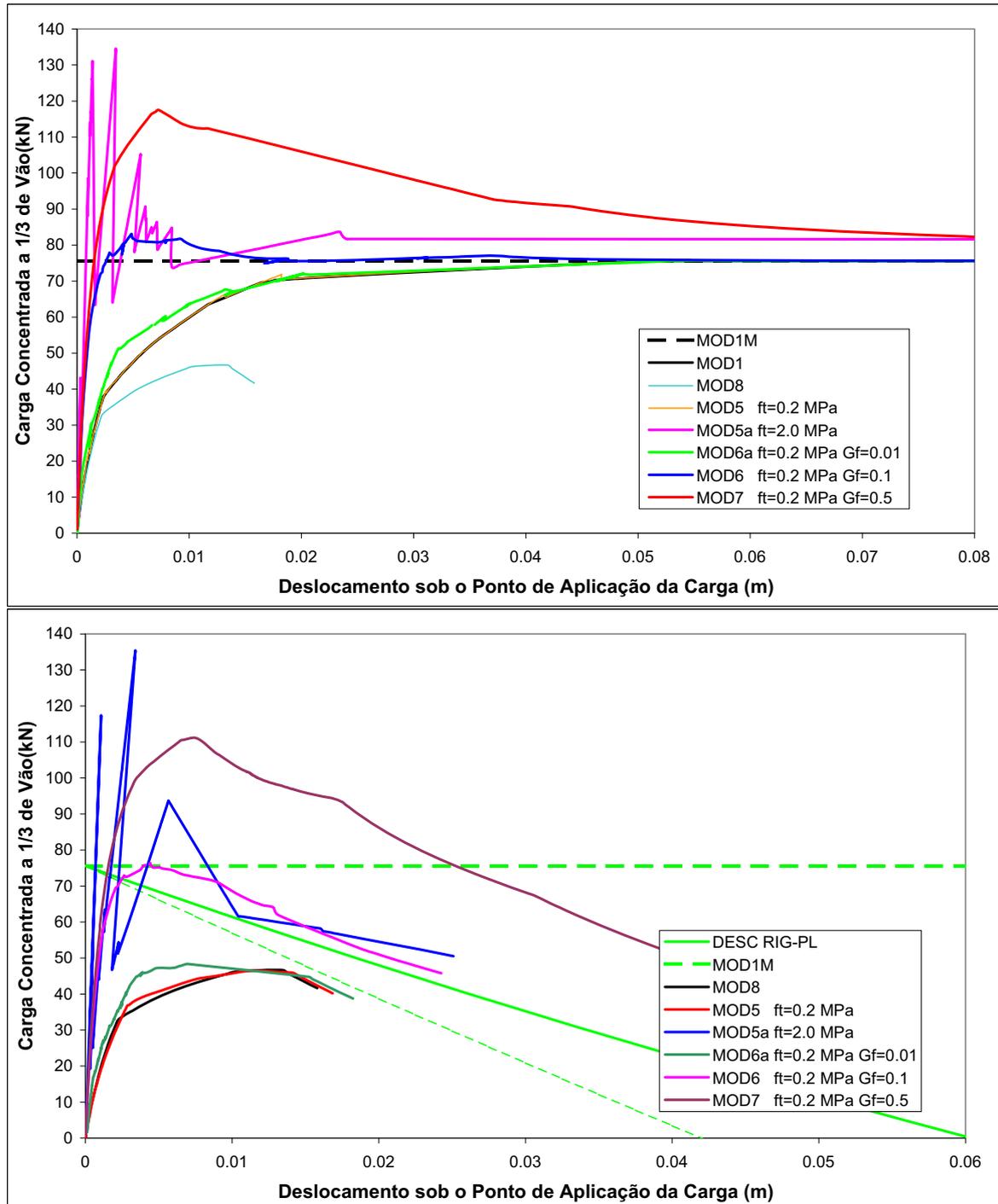


Figura 4.47 - Curvas carga-deslocamento das análises realizadas sem (cima) e com (baixo) consideração dos efeitos geométricamente não lineares nos modelos do arco com resistência à tracção nas juntas.

Como se pode constatar nos gráficos, o efeito do aumento da resistência à tracção das juntas é equivalente ao efeito da consideração da energia de fractura, resultando num aumento da rigidez inicial e da carga máxima que a estrutura pode suportar. No entanto, a consideração duma resistência à tracção não nula sem energia de fractura, isto é, com comportamento pós fractura frágil, conduz a picos e descontinuidades no declive da curva carga-deslocamento, o que se reflete ao nível numérico em dificuldades de convergência. Nos modelos com resistência à tracção e energia de fractura não nula a curva carga-deslocamento é mais adoçada e sem picos, resultando em análises numéricas mais estáveis e de mais rápida convergência, sendo recomendável a consideração de curvas de amolecimento da resistência à tracção na modelação da fractura por tracção.

4.7.1.4 - Efeitos da Modelação da Resistência à Compressão dos Blocos

O efeito da resistência à compressão dos blocos na resposta global do arco foi analisado através da modelação do esmagamento por duas vias: ao nível dos elementos finitos contínuos que simulam os blocos, para os quais se admitiu um modelo de Mohr-Coulomb (Figura 4.48); e ao nível das interfaces, através do modelo proposto por Lourenço^{Lourenço, 1996} (Figura 4.48), onde se concentraram todos os efeitos não lineares de fractura por tracção e esmagamento por compressão. Na primeira abordagem consideraram-se interfaces sem resistência à tracção e comportamento elástico linear à compressão e no última admitiu-se para os elementos finitos contínuos que simulam os blocos um comportamento elástico linear.

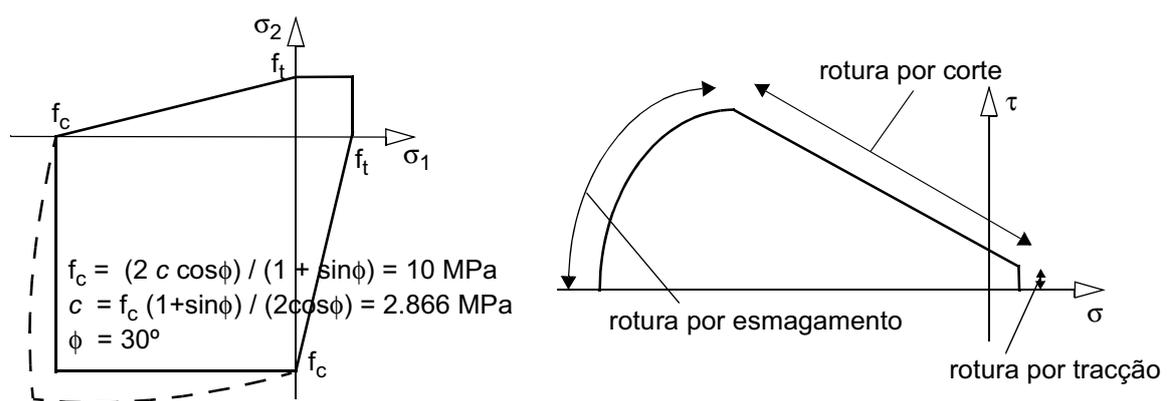


Figura 4.48 - Modelo de Mohr-Coulomb (esq.) e de Lourenço (dta.) para modelação dos efeitos de esmagamento por compressão.

Na Figura 4.49 apresentam-se os resultados numéricos obtidos através de análises geometricamente não lineares do modelo com elementos finitos contínuos de comportamento

não linear à compressão, definido de acordo com o critério de plasticidade de Mohr-Coulomb (MOD12), e do modelo com elementos finitos contínuos elásticos lineares e com concentração dos danos por tração e compressão nas interfaces (MOD12a). No primeiro modelo (MOD12) a resistência à compressão uniaxial considerada na definição do critério de Mohr-Coulomb foi de $f_c = 10$ MPa e no segundo (MOD12a) de $f_c = 13.5$ MPa.

Apesar das diferenças nos valores do parâmetro f_c considerados nos dois modelos anteriores, constata-se (Figura 4.49) que as suas respostas são praticamente coincidentes. Verifica-se, assim, que no modelo com simulação do esmagamento no contínuo, devido ao comportamento biaxial do critério de plastificação, se deverá adotar limites de resistência à compressão uniaxial ligeiramente inferiores aos do modelo com simulação do dano nas interfaces.

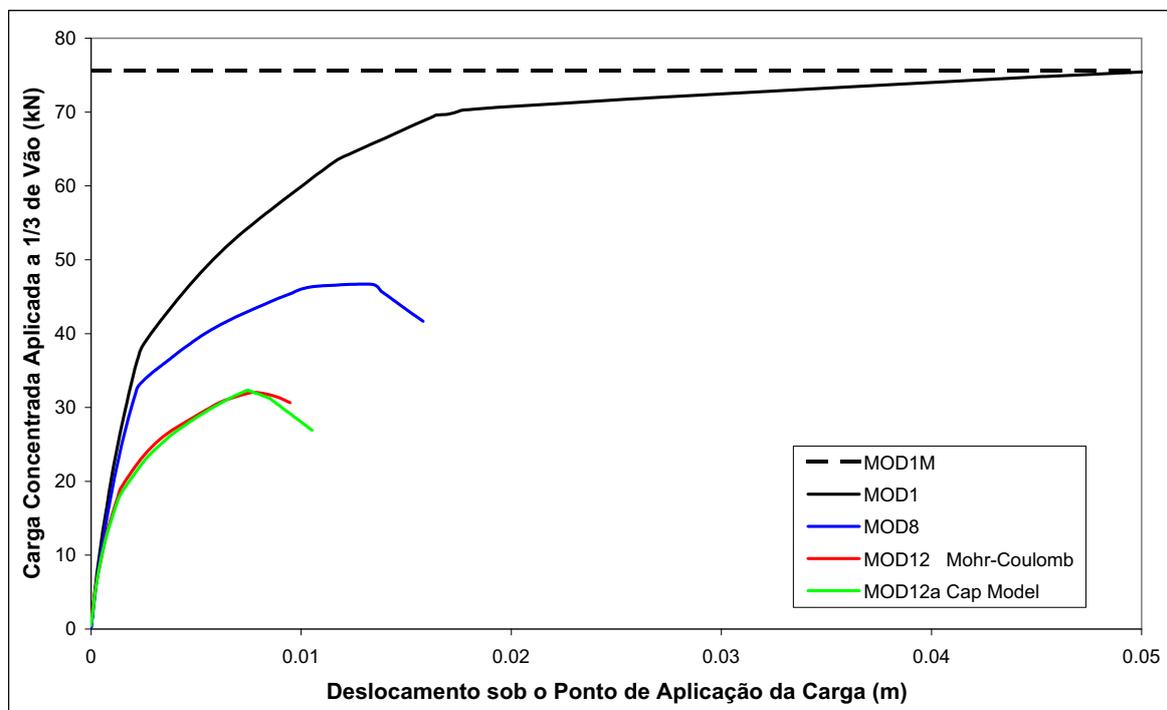


Figura 4.49 - Curvas carga-deslocamento das análises realizadas com consideração dos efeitos geometricamente não lineares nos modelos do arco com limitação da resistência à compressão.

Na Figura 4.50 representam-se os danos por compressão nos dois modelos de elementos finitos, verificando-se que são fundamentalmente de esmagamento dos vértices dos blocos na proximidade das articulações do mecanismo de colapso. Assim, tendo em conta essa localização dos esmagamentos, conclui-se que a concentração de danos de compressão nas interfaces é uma boa alternativa de simulação, uma vez que corresponde a análises mais rápidas e de maior estabilidade numérica.

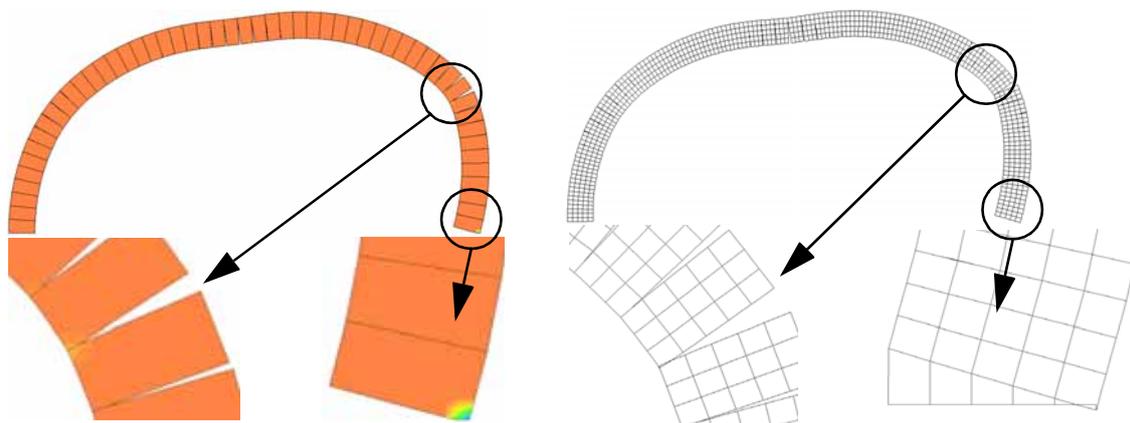


Figura 4.50 - Danos por compressão nos modelos de elementos finitos (esq. - MOD12; dta. - MOD12a).

4.7.2 - Arco Circular - Modelos de Elementos Discretos

O mesmo arco circular, submetido à acção do seu peso próprio e do material de enchimento e de uma carga concentrada, foi também analisado pelo método dos elementos discretos, considerando a deformabilidade dos blocos através da sua discretização em elementos de diferenças finitas e admitindo as propriedades materiais consideradas nos modelos de elementos finitos (Tabela 4.1). Nos contactos entre corpos discretos modelou-se resistência à tracção nula através de um modelo de Mohr-Coulomb sem coesão e ângulo de atrito de 35° , valor que é corrente em estruturas deste tipo e que se verificou ser suficiente para impedir a plastificação por corte.

Uma vez que os elementos de diferenças finitas do programa de cálculo UDEC são triangulares de deformação constante, para se simular uma deformabilidade idêntica à considerada nos modelos de elementos finitos (com elementos quadráticos) é necessária uma discretização da malha de elementos de diferenças finitas muito mais refinada (Figura 4.51). Como se pode verificar na Figura 4.44, simulando deformabilidades equivalentes, idênticos modelos de contacto e considerando efeitos geometricamente não lineares no modelo de elementos finitos (MOD8), obtém-se nos dois tipos de modelação valores semelhantes para a carga de colapso.

Como referido, uma vantagem do método dos elementos finitos é permitir a consideração de modelos materiais mais refinados para as interfaces e fornecer directamente a curva carga-deslocamento da resposta estrutural, o que permite a identificação do valor da carga de colapso da estrutura. No entanto, no caso em estudo utilizaram-se em ambas as modelações idênticos

modelos materiais para as juntas (com resistência à tracção nula e comportamento elástico linear ao corte) e obteve-se indirectamente a curva carga-deslocamento na análise pelo método dos elementos discretos, não se identificando neste exemplo uma clara vantagem de uma metodologia em relação à outra. De facto, se por um lado a identificação da carga de colapso é mais imediata no método dos elementos finitos, por outro, no método dos elementos discretos é possível simular todo o processo de colapso da estrutura. Na Figura 4.52 representa-se a sequência de colapso do arco obtida através da sua modelação por elementos discretos.

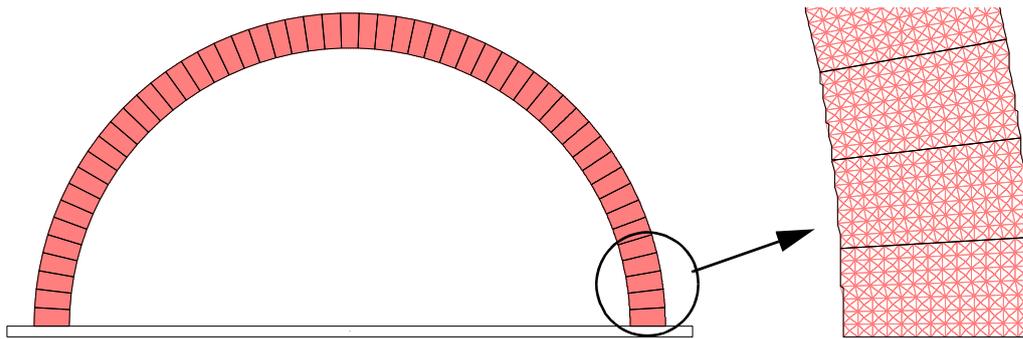


Figura 4.51 - Malha de elementos de diferenças finitas no modelo de elementos discretos do arco.

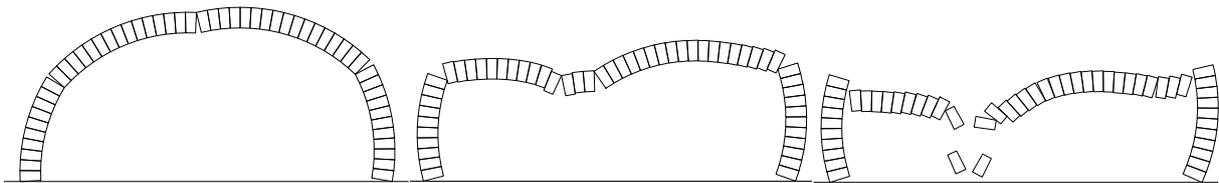


Figura 4.52 - Sequência do colapso do modelo de elementos discretos do arco.

O mesmo modelo de elementos discretos do arco circular foi utilizado para estudar a variação da intensidade da carga de colapso em função da localização do seu ponto de aplicação. Assim, na Figura 4.53 representam-se os diagramas das intensidades das cargas de colapso obtidos considerando blocos deformáveis (com módulo de elasticidade $E = 14.1$ GPa) ou rígidos e juntas deformáveis (com constante de rigidez $k_n = 2.4 \times 10^9$ kN/m³ e $k_t = 1.0 \times 10^9$ kN/m³).

As curvas indicadas na figura anterior apresentam andamento semelhante ao do correspondente gráfico da Figura 3.87, obtido através da metodologia de análise limite. No entanto, devido à consideração dos efeitos geometricamente não lineares na modelação pelo método dos elementos discretos, os resultados aqui apresentados representam valores das cargas de colapso inferiores às obtidas pela análise limite, a qual não considera efeitos geométricos de 2ª ordem. As curvas correspondentes à análises com blocos deformáveis e com blocos rígidos apresentam andamentos próximos, verificando-se que a consideração da deformabilidade dos blocos

resulta, devido aos efeitos geométricos de 2ª ordem, em valores inferiores da carga de colapso.

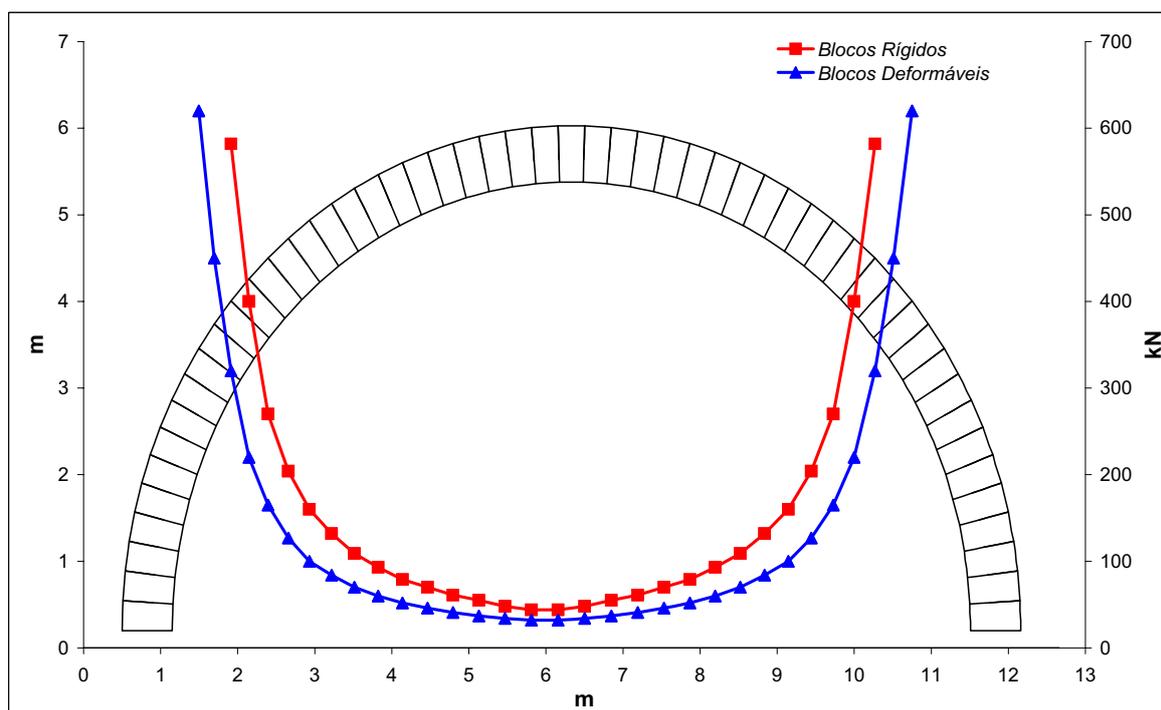


Figura 4.53 - Intensidades da carga de colapso num arco circular para diferentes localizações da carga concentrada (modelação pelo método dos elementos discretos).

4.7.3 - Arco Circular - Modelos Contínuos de Elementos Finitos

Embora em arcos de alvenaria com um número discreto de aduelas a estratégia mais indicada para a modelação estrutural seja a utilização de modelos descontínuos com inclusão de elementos de interface nas juntas, é possível modelar o comportamento não linear dos arcos através de modelos contínuos de fenda distribuída. Assim, adoptando a formulação de fenda fixa tradicional, considerou-se para a modelação do arco atrás descrito dois modelos de elementos finitos de fenda distribuída com diferentes níveis de discretização: um modelo com elementos finitos quadrangulares de 9 nós (quadráticos) e outro, com elementos finitos triangulares de 3 nós (lineares). Pretendeu-se com este estudo verificar a adequabilidade dos modelos contínuos na modelação de comportamentos descontínuos e identificar o tipo de elemento finito mais apropriado para este tipo de análise.

Admitiu-se para os modelos contínuos de elementos finitos resistências à tracção não nulas, com energias de fractura nulas, permitindo-se assim a concentração dos danos (à semelhança do que ocorre na estrutura real, onde os danos se localizam nas juntas)[†]. Para obviar problemas de

instabilidade numérica que resultavam da consideração de um factor de retenção ao corte (β) nulo, admitiu-se para esse coeficiente um valor reduzido (0.02), embora não nulo.

Na Figura 4.54 representam-se os danos obtidos nos modelos de elementos finitos contínuos, lineares e quadráticos, e na Figura 4.55 os resultados das análises geometricamente lineares do modelo com elementos finitos quadrangulares de 9 nós e com resistências à tracção de 0.45 MPa e 0.55 MPa. Relativamente à localização dos danos por tracção verifica-se ser possível modelar, aproximadamente, através de modelos contínuos de fenda distribuída a fractura das juntas do arco. Quanto à curva carga-deslocamento, o gráfico da Figura 4.55 mostra que com valores adequados de resistência à tracção é possível reproduzir com modelos contínuos a resposta estrutural do arco descontínuo.

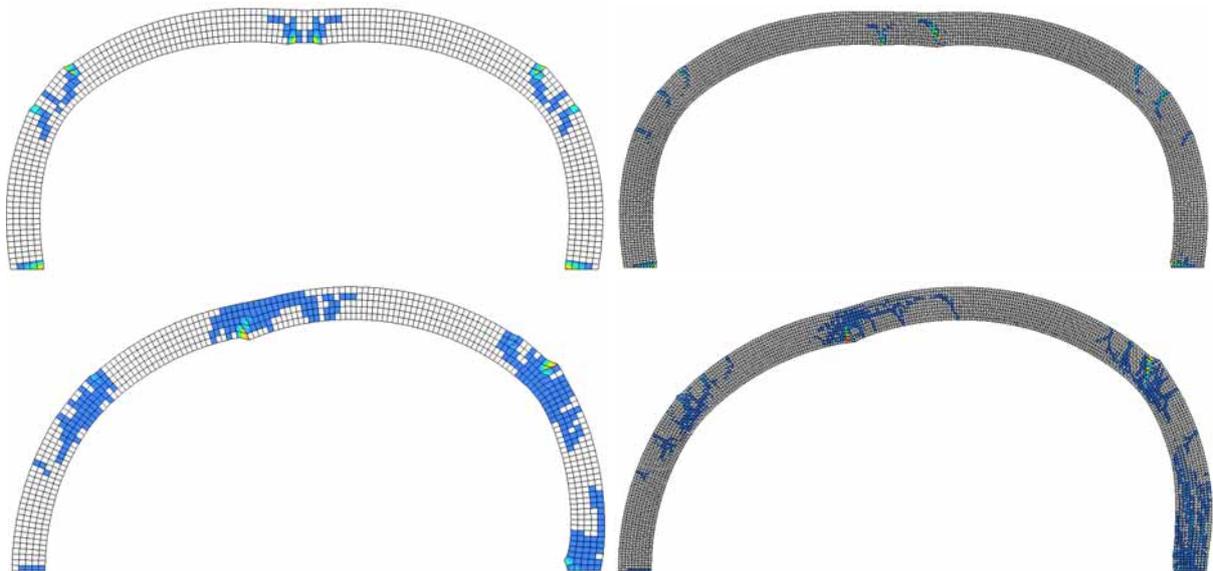


Figura 4.54 - Modelos com elementos finitos de fenda distribuída - Danos por tracção (esq. - modelo de elementos quadrangulares; dta. - modelo de elementos triangulares; cima - acção do peso próprio do arco; baixo - acção do peso próprio do arco, do enchimento no extradorso e da carga concentrada a 1/3 de vão).

Quanto ao tipo de elemento finito a utilizar em modelos contínuos para simulação de danos discretos, verifica-se que ambos, triangulares ou quadrangulares, são capazes de simular a fractura localizada e com custos computacionais idênticos. No entanto, no modelo com elementos finitos lineares (triangulares) obtém-se uma banda de localização da fractura de menor espessura. De facto, os elementos triangulares (com um único ponto de integração) permitem que a fractura transite de um elemento para outro contíguo sem propagação da

† A consideração de uma resistência à tracção nula nos elementos contínuos resulta numa grande dispersão dos danos por tracção na estrutura. Com uma resistência não nula, de valor moderado, consegue-se que os danos ocorram concentradamente nas secções mais solicitadas.

correspondente deformação a uma área adjacente. Os elementos quadráticos são, desse ponto de vista, menos atractivos. No caso em estudo, os modelos de fenda distribuída pretendem simular uma fenda discreta, que envolve uma deformação infinita numa largura nula. Pelo exposto, a aproximação será melhor se for adoptada uma deformação constante numa banda estreita (malhas finas com interpolação linear) em vez de uma deformação linear em bandas mais largas.

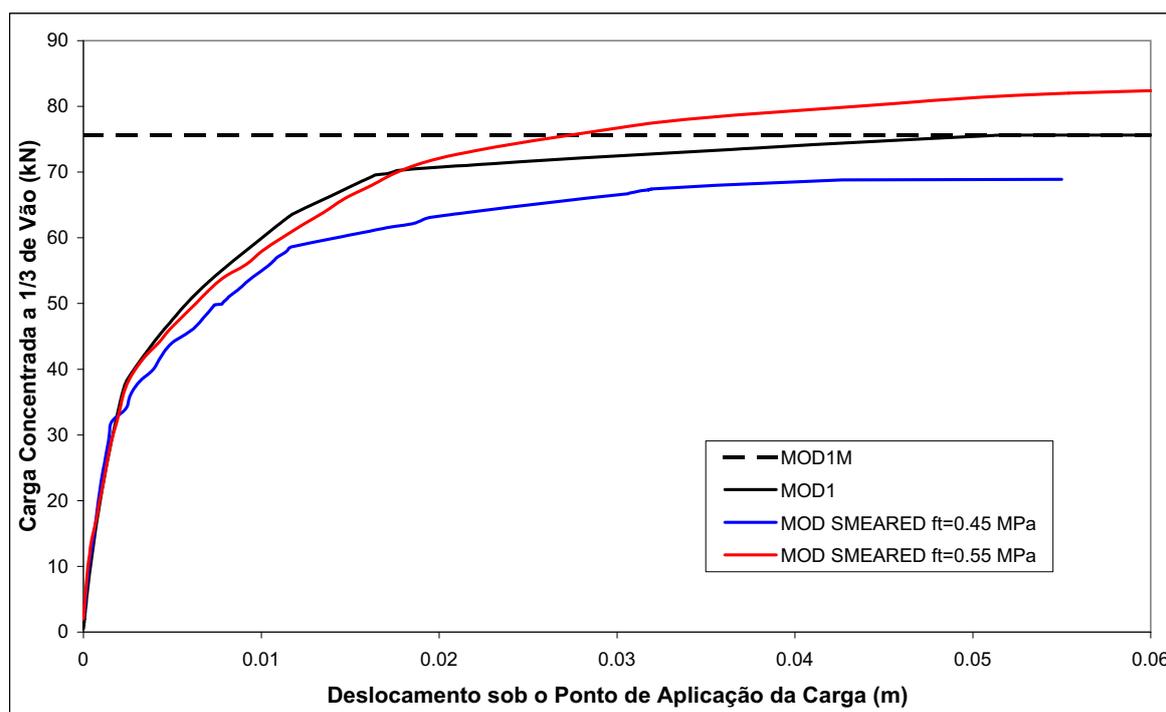


Figura 4.55 - Curvas carga-deslocamento das análises geometricamente lineares realizadas em modelos contínuos do arco (com elementos finitos quadrangulares).

Como é conhecido, verifica-se que a geometria das malhas de elementos finitos contínuos é determinante na orientação de propagação dos danos (Figura 4.54), sendo o modelo de elementos quadrangulares aquele que melhor aproxima neste caso a direcção de propagação da fractura.

4.7.4 - Arcos Ogivais - Modelos de Elementos Discretos

De modo a avaliar as diferenças entre os comportamentos estruturais de arcos de perfil circular e arcos de perfil ogival, analisaram-se pelo método dos elementos discretos dois arcos ogivais com dimensões correspondentes ao arco de perfil circular anteriormente analisado. Num dos arcos admitiu-se um vão igual ao do arco circular (10.36 m - Figura 4.56) e no outro uma altura

igual à do arco circular (5.18 m - Figura 4.56).

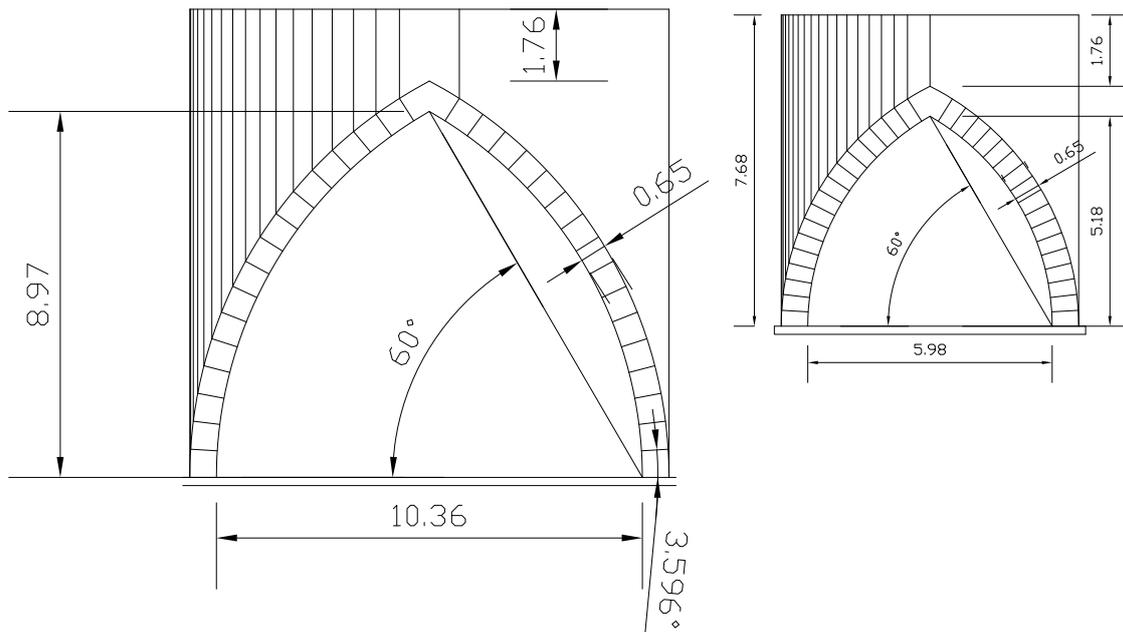


Figura 4.56 - Geometria dos modelos dos arcos ogivais.

Considerou-se para os blocos e juntas dos modelos dos arcos ogivais características de deformabilidade e de resistência idênticas às dos modelos de elementos discretos do arco circular e admitiu-se uma espessura do arco no seu plano de 0.65 m. Os resultados numéricos obtidos para os modelos de arcos ogivais atrás descritos são apresentados na Figura 4.57 e na Figura 4.58, que representam a variação da intensidade da carga de colapso em função da localização do seu ponto de aplicação. Como indicado nessas figuras, consideraram-se duas hipóteses de carregamento dos arcos ogivais: com e sem o efeito do peso próprio do enchimento no extradorso. Na Figura 4.59 representam-se os modos de colapso obtidos com esses modelos de elementos discretos.

Como se pode observar no gráfico da Figura 4.57, também nos arcos ogivais se verifica um efeito estabilizador da acção vertical correspondente ao peso próprio do material de enchimento, embora este efeito seja menos pronunciado do que aquele que se identifica nos arcos de perfil circular. Na Figura 4.57 e na Figura 4.58 pode constatar-se que a intensidade da carga de colapso aumenta significativamente quando o seu ponto de aplicação se aproxima do meio do vão do arco ogival, sendo esta intensidade superior à correspondente carga de colapso num arco circular com a mesma espessura e o mesmo vão (conforme se verifica pela comparação dos gráficos da Figura 4.53 e da Figura 4.58). Estas constatações explicam-se

facilmente pelo conceito de linha de pressões: por um lado a linha de pressões bi-linear correspondente à carga concentrada ajusta-se melhor à geometria do arco ogival quando o ponto de aplicação da carga se localiza a meio vão e, por outro, a geometria do arco ogival acomoda melhor essa linha de pressões bi-linear do que um arco de perfil circular, mais adequado para suportar cargas uniformes (Figura 4.60).

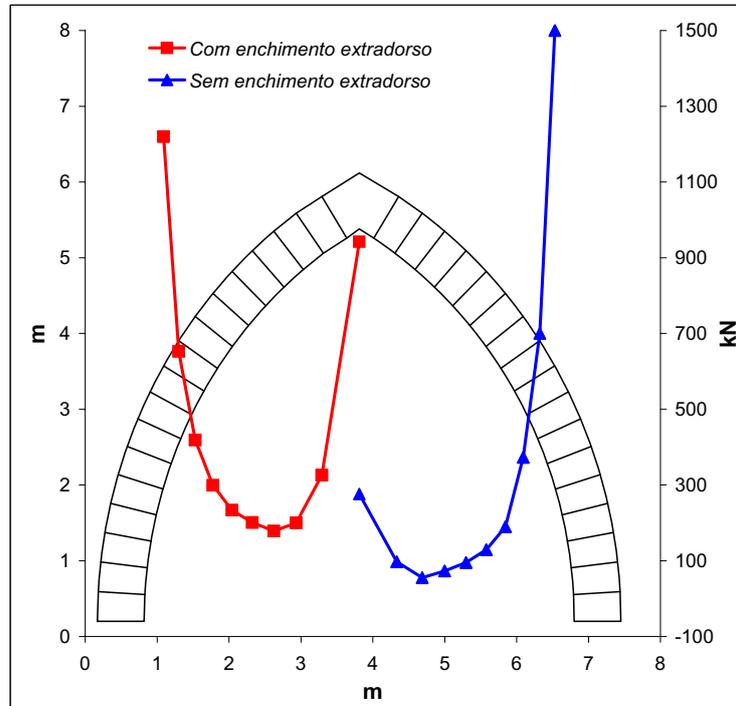


Figura 4.57 - Intensidades da carga de colapso num arco ogival com 5.18 m de altura, com e sem consideração do carregamento do enchimento do extradorsal do arco.

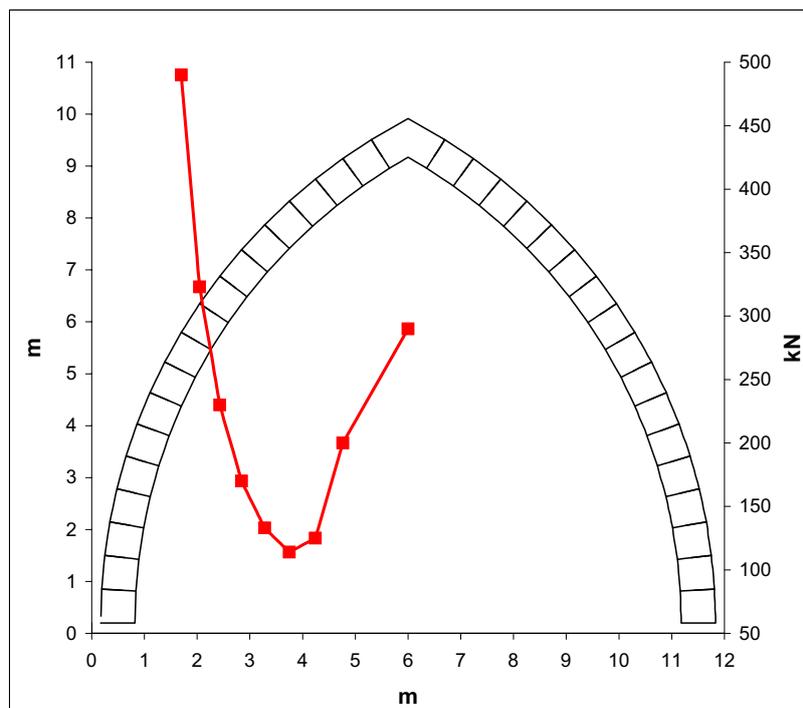


Figura 4.58 - Intensidades da carga de colapso num arco ogival com 10.36 m de vão com consideração do carregamento do enchimento do extradorsal do arco.

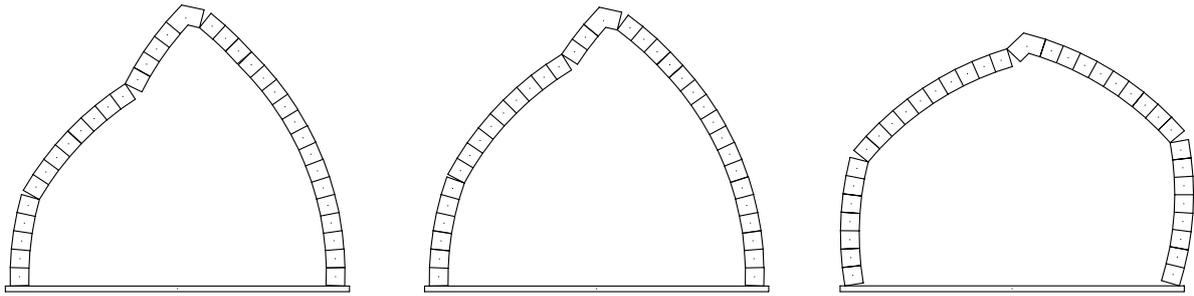


Figura 4.59 - Modos de colapso do modelo de elementos discretos de um arco ogival - modelo com 10.36 m de vão (esquerda - carga a 1/4 do vão; centro - carga a 1/3 do vão; direita - carga a 1/2 do vão).

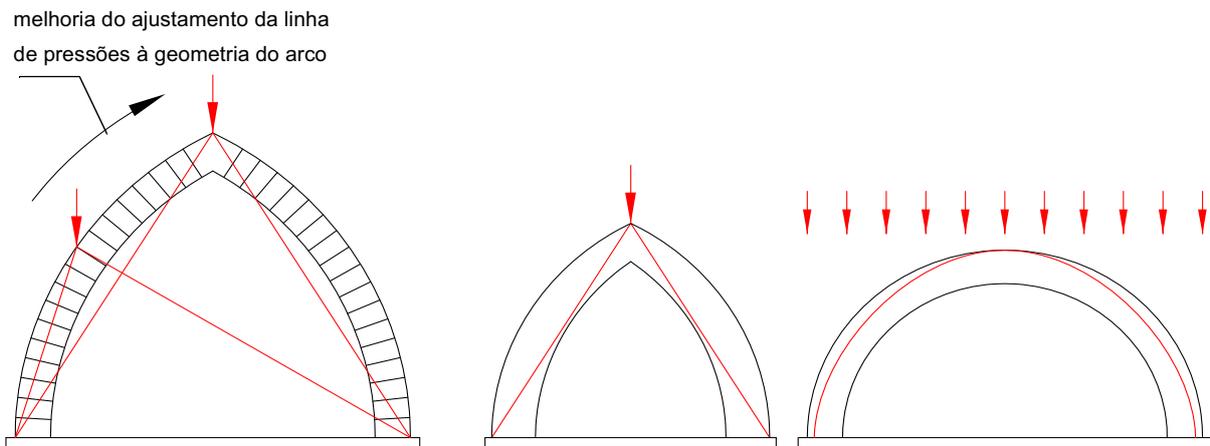


Figura 4.60 - Arcos ogival e circular - geometria das linhas de pressões.

4.8 - ESTUDO DE PONTES EM ARCO COM VIÉS

Embora seja de esperar diferenças no comportamento estrutural de pontes em arco com e sem viés, o estudo de abóbadas enviesadas tem merecido pouca investigação. Basicamente identificam-se três classes de problemas (Figura 4.61): abóbadas longas, onde o funcionamento estrutural ocorre predominantemente segundo a direcção do vão recto, perpendicular aos encontros; abóbadas estreitas onde o funcionamento se dá segundo o vão enviesado; e abóbadas intermédias onde o modelo estrutural é misto. Nesta última classe incluem-se a maioria das pontes em arco de perfil enviesado e, em particular, a ponte de Bargower que será estudada no parágrafo 4.9.3. Esta é a classe que será objecto de análise no presente parágrafo.

Dentro da classe referida, a prática corrente na análise de pontes de viés pouco pronunciado consiste na sua modelação através de modelos planos com a consideração de vãos equivalentes;

por exemplo, a regulamentação britânica^{BA/93;BA/97} recomenda a utilização de modelos de arcos (planos) com consideração de um vão de dimensão igual à do vão enviesado (L' na Figura 4.62).

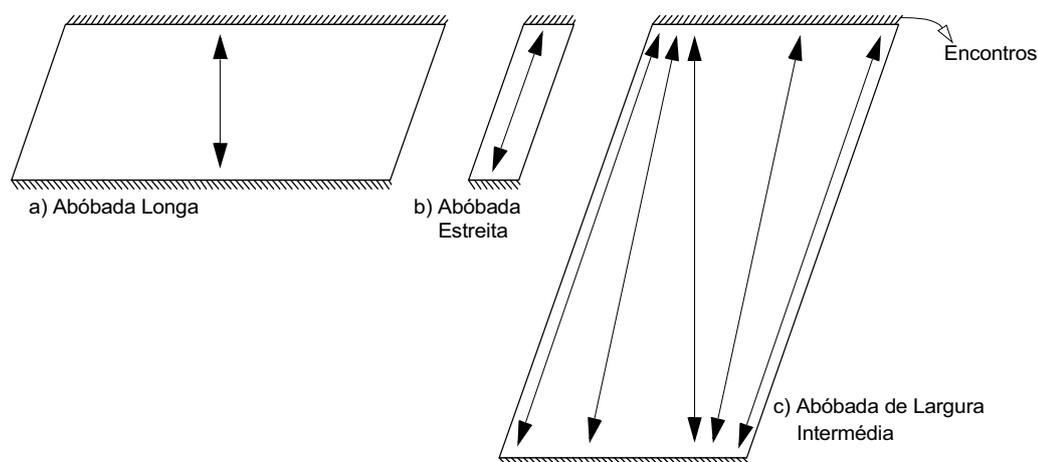


Figura 4.61 - Esquemas de funcionamento estrutural de abóbadas com viés.

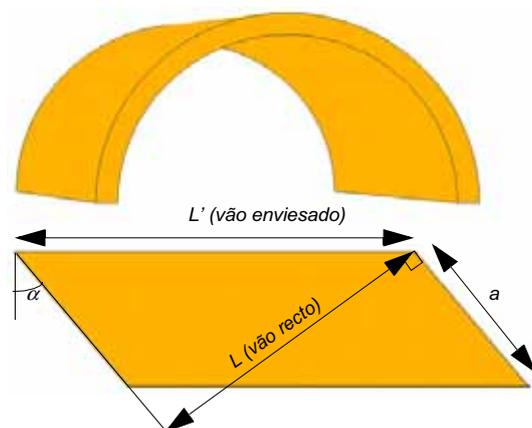


Figura 4.62 - Ponte em arco com viés- Geometria.

No entanto, ensaios experimentais sobre modelos de escala reduzida, recentemente divulgados^{Augarde e Davey,2001}, indiciam que para ângulos de viés elevados, os erros cometidos através dessas aproximações poderão ser significativos. Nesses estudos verificou-se também que os resultados do método empírico *MEXE*, descrito no parágrafo 3.5, com consideração da dimensão do vão enviesado constituem razoáveis aproximações conservativas dos resultados experimentais[†].

No entanto, como referido, o método *MEXE* é um método empírico, sendo desejável efectuar a

[†] Na formula proposta no método *MEXE* (ver Tabela 3.3) a consideração do vão enviesado ($L' = L/\cos\alpha$) em vez do vão recto (L) traduz-se numa majoração da carga de colapso do modelo plano de $(1/\cos\alpha)^3$, em que α é o ângulo de viés. O método *MEXE* conduz a valores conservativos da carga última para arcos rectos, pelo que, com a majoração da expressão que resulta de se ter em conta o vão enviesado é de esperar que os resultados permaneçam conservativos em arcos de viés reduzido.

previsão das intensidades das cargas de colapso através de modelos onde os parâmetros sejam controlados de forma transparente. Os modelos numéricos de elementos finitos com comportamento não linear constituem boas alternativas para a modelação do comportamento real das estruturas em arco, sendo utilizados neste parágrafo para avaliar o comportamento das abóbadas com viés.

Partindo da geometria da ponte de Bargower[†], simulou-se através de modelos numéricos tridimensionais o comportamento estrutural até ao colapso de abóbadas com viés variável entre 0° e 40°. As análises foram realizadas com e sem a consideração de efeitos geometricamente não lineares e com e sem modelação da acção vertical correspondente ao material de enchimento. Nos diferentes modelos manteve-se constante a dimensão do vão enviesado (10 m), sendo, conseqüentemente, variável o vão recto. De modo a identificar os erros cometidos na aproximação através de modelos planos, foram modelados, também, modelos de arcos rectos de vão equivalente aos vãos rectos dos modelos anteriores. Na Figura 4.63 representam-se os diferentes modelos analisados e respectivos modos de colapso e na Tabela 4.2 os valores das cargas últimas obtidos numericamente.

Arcos com Viés- Modelos Tridimensionais de Elementos Finitos - Cargas Últimas						
Ângulo de Viés	Vão (m)		Análise Geometricamente Linear		Análise Geometricamente não Linear	
	recto	enviesado	sem enchimento	com enchimento	sem enchimento	com enchimento
0°	10	10	77.6 kN	358.1 kN	70.4 kN	341.1 kN
10°	9.85	10	76.6 kN	352.4 kN	69.3 kN	337.2 kN
20°	9.40	10	72.9 kN	336.4 kN	65.7 kN	315.6 kN
30°	8.66	10	66.8 kN	309.7 kN	63.5 kN	292.9 kN
40°	7.66	10	59.4 kN	274.1 kN	57.7 kN	292.0 kN
0°	10		77.6 kN	358.1 kN	70.4 kN	341.1 kN
	9.85		84.6 kN	360.0 kN	76.0 kN	344.4 kN
	9.40		100.0 kN	367.0 kN	95.0 kN	350.0 kN
	8.66		132.4 kN	377.1 kN	127.2 kN	360.3 kN
	7.66		172.5 kN	398.1 kN	165.0 kN	380.0 kN

Nota: o efeito do enchimento foi tido em conta apenas através da correspondente carga vertical

Tabela 4.2 - Modelos tridimensionais dos arcos enviesados - Cargas últimas.

[†] Tal como anteriormente, considerou-se uma espessura de 0.65 m, ligeiramente superior à espessura real da abóbada da ponte, em virtude da relação espessura/vão real ser inferior ao valor mínimo admissível para arcos isolados calculado no parágrafo 3.8.2.

Como representado na Figura 4.63, na simulação do comportamento da abóbada em alvenaria considerou-se uma discretização das aduelas com elementos isoparamétricos de 8 nós com comportamento elástico linear e das juntas entre aduelas com elementos planos de interface de 8 nós, reproduzindo tridimensionalmente a formulação de fenda discreta adoptada nos modelos de elementos finitos planos dos parágrafos anteriores. Nos modelos planos dos arcos considerou-se os mesmos modelos materiais admitidos anteriormente (parágrafo 4.7.1).

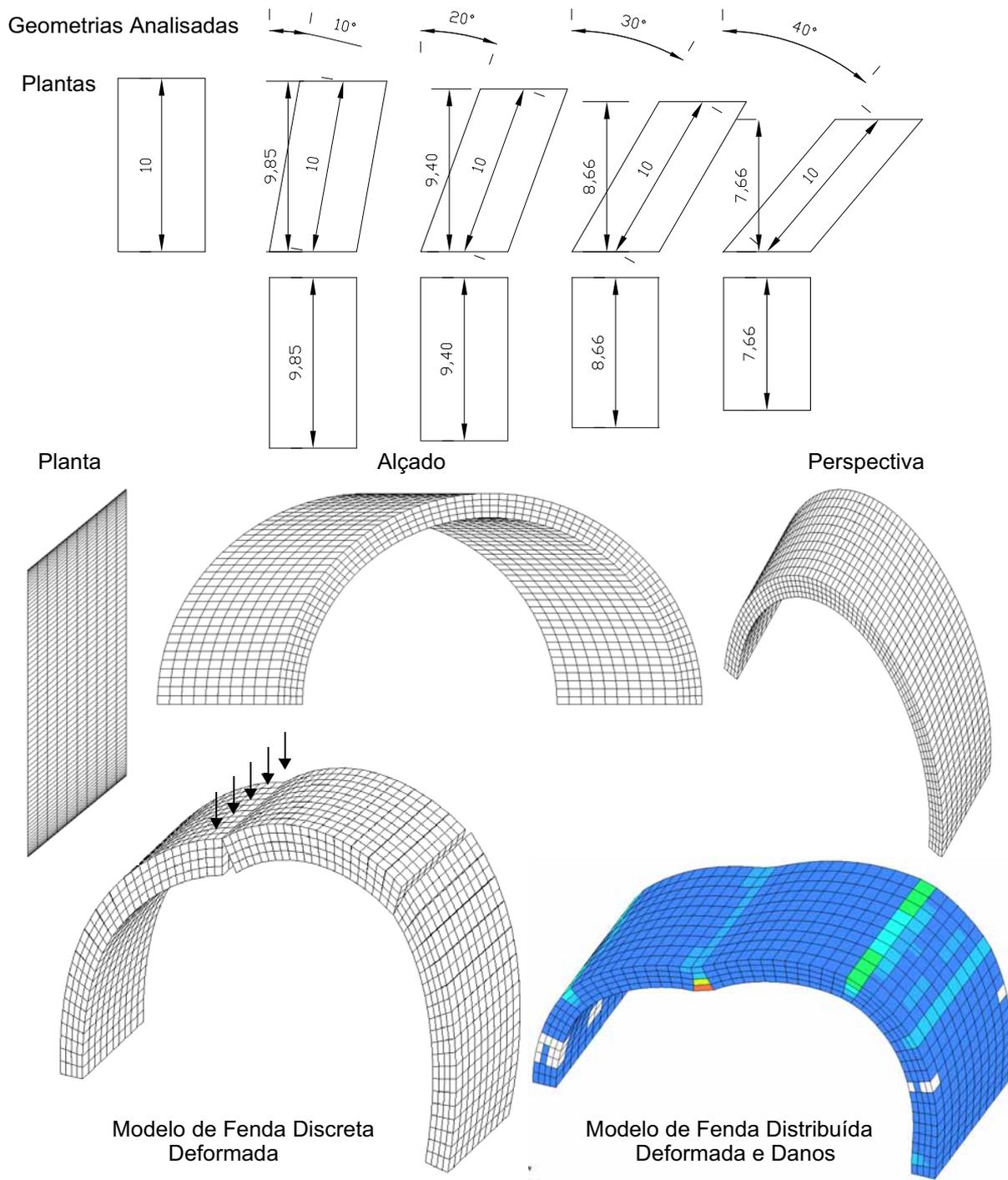


Figura 4.63 - Modelos numéricos tridimensionais do arco enviesado - Geometria e resultados.

A acção considerada foi a de uma carga “de faca”, uniformemente distribuída na largura da ponte e paralela à direcção dos encontros, a qual foi aplicada a um terço do comprimento do vão enviesado.

Analisando as configurações deformadas dos modelos para níveis de carga próximos do colapso (Figura 4.63), verifica-se que as articulações que geram o mecanismo ocorrem junto dos apoios, sob a carga e no rim, do lado oposto ao da aplicação da carga. Se bem que a geometria da malha de elementos finitos, isto é, a direcção das interfaces entre elementos que resulta da discretização adoptada, condicione a orientação das articulações, constata-se que as configurações deformadas obtidas numericamente são próximas das obtidas experimentalmente (Figura 4.64).

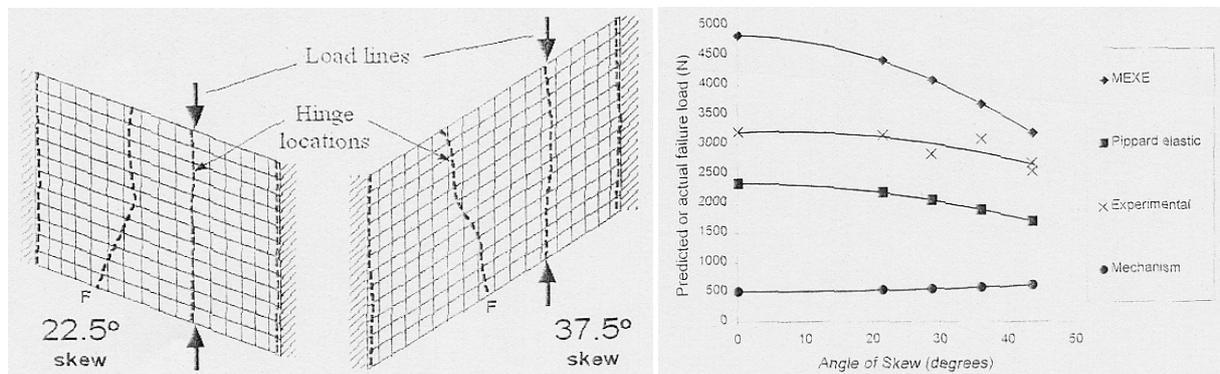


Figura 4.64 - Ensaio experimentais *Augarde e Davey, 2001* - Localização das articulações e representação gráfica das cargas últimas.

Observe-se que nos ensaios experimentais de Augarde os protótipos foram executados de forma contínua com argamassa, sem juntas, e não com blocos e juntas discretas, como considerado nos modelos numéricos e como acontece em construções reais. Assim, os modelos experimentais não apresentam os mesmos condicionalismos de orientação e localização das articulações que as estruturas reais e os modelos numéricos considerados apresentam. É também de referir que a relação entre o vão enviesado L' e a largura a dos encontros admitida nos modelos numéricos estudados difere da considerada nos protótipos experimentais. Deste modo, não é de esperar um perfeito ajustamento na localização das articulações dos modelos numéricos e dos experimentais.

Efectuou-se, também, uma análise numérica através do conceito de fenda distribuída, com vista a verificar a adequabilidade da formulação neste tipo de análise. Como representado na Figura

4.63, esses modelos tridimensionais apresentam danos em localizações próximas das articulações identificadas experimentalmente. Assim, pelo menos do ponto de vista qualitativo, a modelação através do conceito de fenda distribuída apresenta resultados aceitáveis.

No gráfico da Figura 4.65 representam-se os valores das cargas últimas correspondentes aos diferentes modelos numéricos analisados. Comparando-se este gráfico com o gráfico da Figura 4.64, correspondente aos valores das cargas últimas obtidas experimentalmente, verifica-se que apresentam andamentos (qualitativamente) semelhantes. Como se pode verificar em ambos os gráficos, a capacidade resistente dos modelos numéricos e dos protótipos experimentais é decrescente com o aumento do ângulo de viés, sendo mais significativa a redução de resistência para ângulos de viés superiores a 20° - 30°.

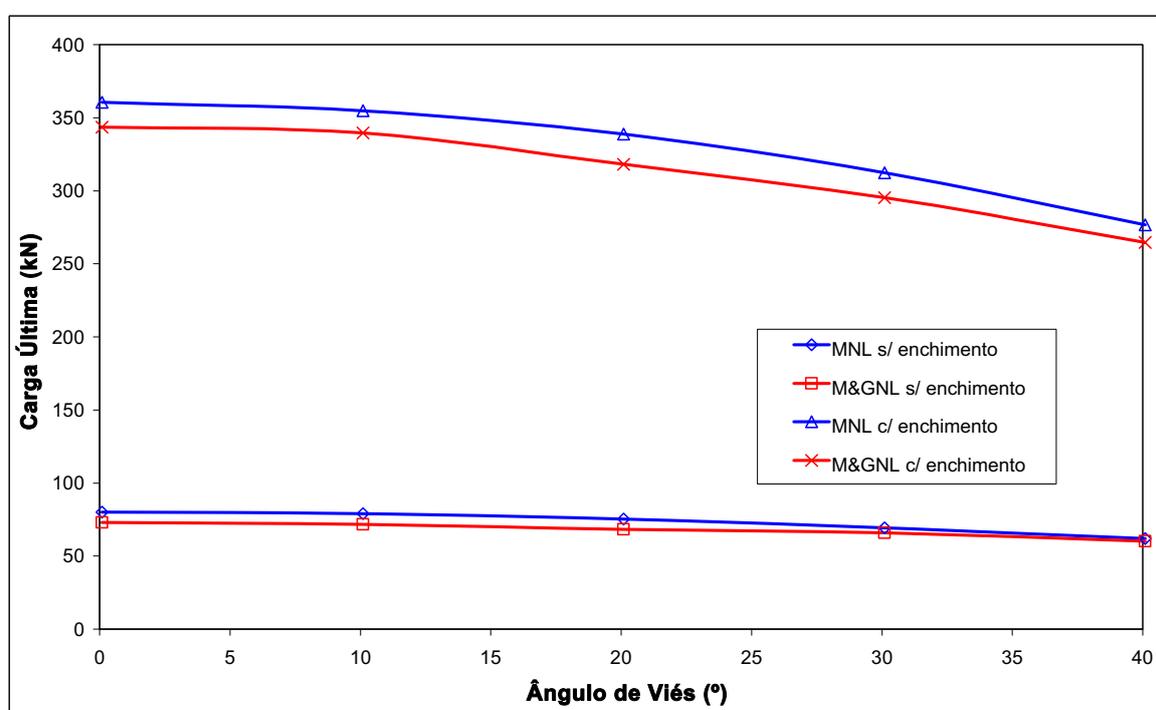


Figura 4.65 - Cargas últimas dos modelos tridimensionais.

Nos gráficos da Figura 4.66 representa-se a variação da carga última dos modelos tridimensionais com viés, dos modelos planos com vão equivalente ao vão enviesado e dos modelos planos com vão equivalente ao vão recto. Na Figura 4.67 representa-se a taxa de variação das cargas últimas obtidas com os modelos planos relativamente aos resultados obtidos com os modelos tridimensionais com viés. Os resultados representados nos gráficos correspondem a análises geometricamente não lineares e sem consideração da acção vertical correspondente ao enchimento; para as outras análises, nomeadamente sem consideração da

acção do enchimento ou geometricamente lineares, os correspondentes gráficos apresentam andamentos semelhantes aos dos representados.

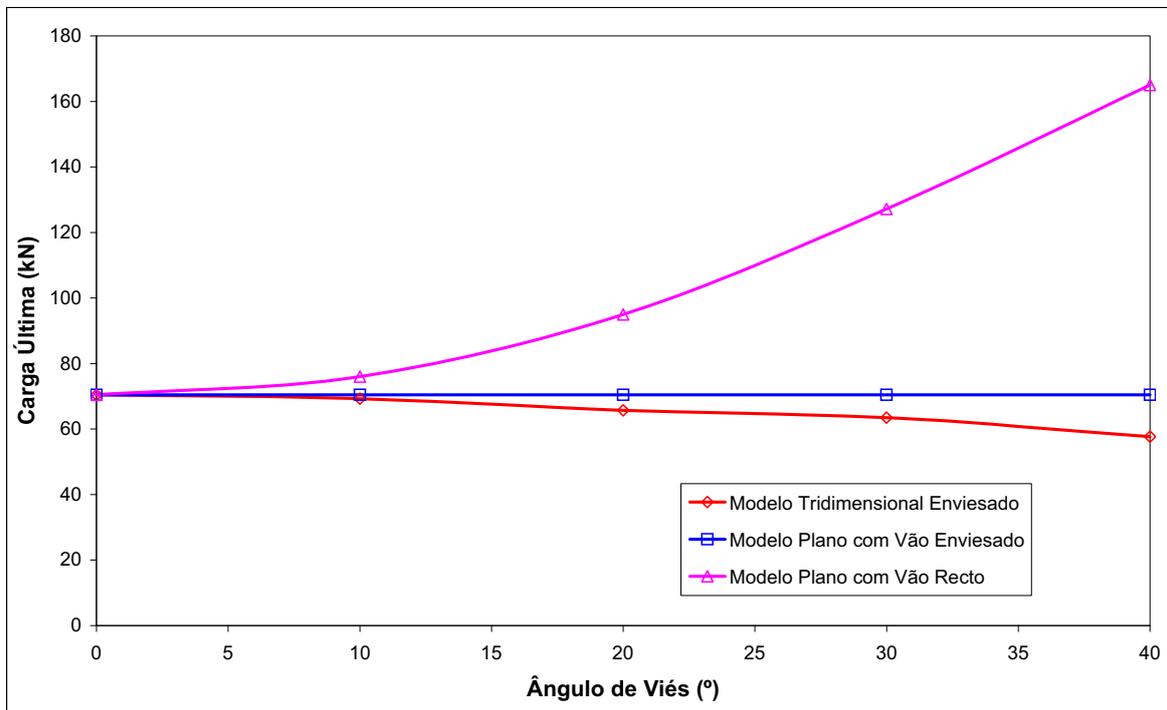


Figura 4.66 - Cargas últimas dos modelos tridimensionais e planos.

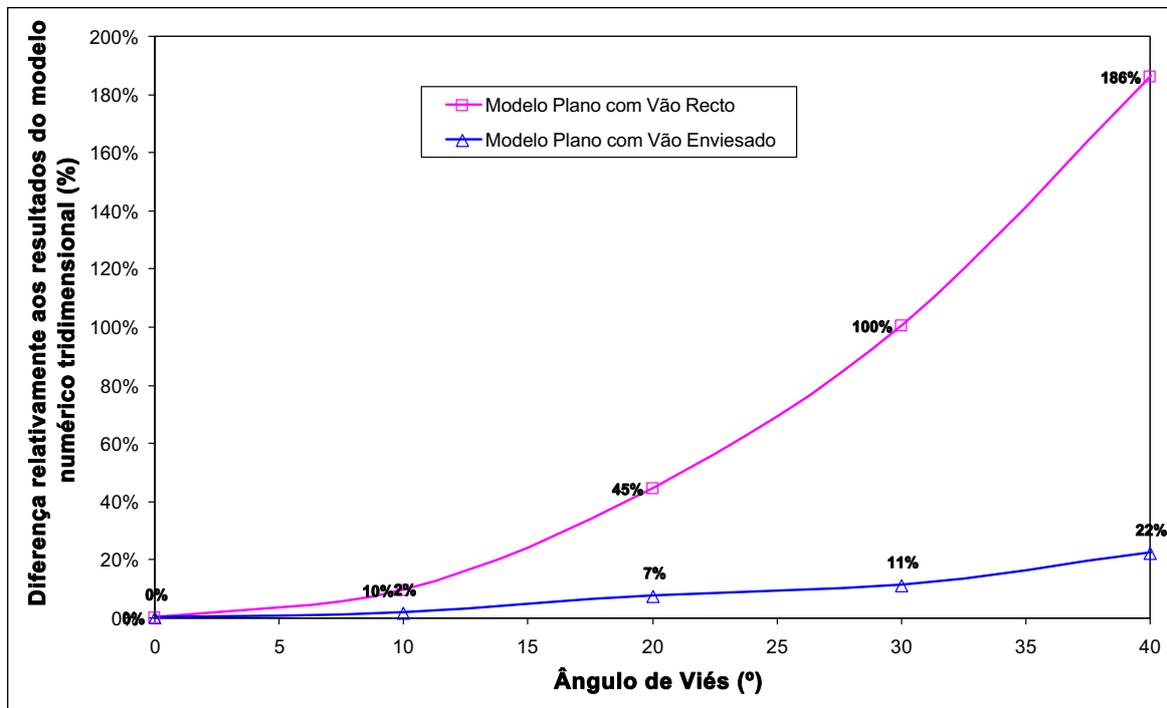


Figura 4.67 - Variação percentual das cargas últimas.

Como se pode observar nessas figuras a consideração de um modelo plano de vão igual ao vão recto da abóbada enviesada constitui uma má aproximação (com erros de 45% a 186% para

ângulos de viés de 20° a 40°, respectivamente), sendo preferível a modelação com um modelos planos de vão igual ao vão enviesado (com erros da ordem de 20% para ângulos de viés próximos de 40°). É também de assinalar que a modelação bidimensional conduz, em qualquer das hipóteses admitidas para o vão do modelo, a estimativas contra a segurança da carga de colapso.

Tendo em conta os resultados obtidos pode afirmar-se que é aceitável a simulação de abóbadas enviesadas através de modelos planos com vão igual ao vão enviesado, quando a relação a/L' (sendo a a largura do encontro e L' o vão enviesado) for próxima da admitida nos modelos numéricos ($a = 5$ m e $L' = 10$ m) e para os ângulos de viés inferiores a 30°.

É de esperar que a variação da relação a/L' tenha influência no grau de aproximação dos modelos planos. De facto, com o aumento dessa relação o comportamento da abóbada aproxima-se do comportamento do arco correspondente à sua secção transversal, tornando-se a aproximação plana com o vão recto mais próxima do comportamento real tridimensional. No entanto, no presente parágrafo não se pretendeu efectuar um estudo exaustivo da influência desta relação geométrica, mas sim identificar o grau de aproximação da hipótese proposta pela regulamentação britânica para valores correntes da relação a/L' em pontes reais (normalmente não superiores a 1). Em particular, considerando-se dimensões geométricas admitidas nos modelos numéricos, justificou-se os modelos planos que serão utilizados na modelação da ponte de Bargower.

Por último refira-se que o estudo do efeito do viés deverá ser complementado com análises que incluam explicitamente a modelação da rigidez e da resistência do material de enchimento no extradorso da abóbada, tarefa que fará parte dos desenvolvimentos futuros do presente trabalho.

4.9 - SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ENSAIOS EXPERIMENTAIS EM PONTES REAIS

4.9.1 - Considerações sobre Efeitos de Escala em Modelos de Estruturas Arqueadas

A execução de ensaios experimentais sobre modelos à escala levanta algumas dificuldades na

extrapolação para a estrutura real dos resultados dos modelos. De facto, a obtenção de similitude entre os resultados medidos nos modelos de escala reduzida e os correspondentes resultados nos protótipos exige a verificação de um conjunto de condições de semelhança, o que nem sempre é possível em ensaios reais. De uma forma geral pode afirmar-se que a geometria, as relações tensão-deformação dos materiais, a massa e as forças gravíticas e as condições iniciais e de fronteira devem respeitar condições de semelhança dimensionalmente coerentes, para que os resultados nos modelos e nos protótipos possam ser correlacionados.

Nos fenómenos mecânicos onde as forças de natureza gravítica desempenham um papel relevante, como seja no comportamento dinâmico de estruturas ou no equilíbrio de estruturas arqueadas, a definição do modelo experimental e de factores de escala revela-se particularmente complexa. Esta dificuldade exige uma cuidada análise de resultados e, por vezes, inviabiliza a utilização modelos experimentais. Hughes^{Hughes,1997} refere que devido à importância das forças gravíticas na resistência dos arcos, os resultados dos ensaios em modelos de escala reduzida apenas devem ser interpretados como aproximações qualitativas dos correspondentes resultados na estrutura real. Por outras palavras, Huges considera que um ensaio sobre um modelo de escala reduzida numa ponte em arco não é mais do que um ensaio à escala natural de uma pequena ponte.

De acordo com a análise dimensional[†], em problemas mecânicos estáticos existe um duo de grandezas independentes que determinam todas as restantes. Habitualmente, em análises estruturais considera-se para “dimensões fundamentais” o duo F (força) - L (comprimento). Na Tabela 4.3 representam-se as relações de semelhança entre as grandezas envolvidas em fenómenos mecânicos estáticos, que resultam dos conceitos básicos da análise dimensional.

Pretendendo-se simular o comportamento não linear dos materiais que constituem o protótipo é necessário que as relações constitutivas e os critérios de rotura do modelo sejam idênticos aos do protótipo. Teoricamente é possível encontrar materiais cujas relações constitutivas transformadas pelas relações de semelhança sejam similares às dos materiais do protótipo. No entanto, na prática não é fácil encontrar esses materiais, pelo que é corrente na modelação de arcos optar pela construção do modelo com materiais idênticos aos do protótipo. Como se pode

[†] Para maiores detalhes sobre Análise Dimensional e Teoria da Semelhança poderá consultar-se a literatura especializada^{White,1970;Wood e Martin,1974}.

identificar na Tabela 4.3, quando os materiais do protótipo e do modelo são idênticos o factor de escala do módulo de elasticidade é unitário ($S_E = 1$) e o factor de escala das densidades igual ao inverso do factor de escala geométrico (S_L^{-1}), ou seja, a densidade a adoptar no modelo deverá ser S_L vezes superior à densidade do material do protótipo ($\gamma_m = \gamma_p(S_L/S_E) = \gamma_p S_L$).

Deste modo, para que as relações constitutivas e os critérios de rotura sejam idênticos no modelo e no protótipo, verifica-se a necessidade de utilizar nos modelos das estruturas arqueadas o mesmo material da estrutura real, o que exige uma amplificação das forças gravíticas, para que as condições de semelhança permaneçam válidas. Esta dificuldade, identificada por alguns autores que realizaram campanhas de ensaios em modelos de arcos^{Harvey,1991;Hogg e Choo,2000;Augarde e Davey,2001}, pode ser parcialmente ultrapassada através da aplicação de cargas verticais suplementares^{Royles e Hendry,1991} ou através do recurso a centrífugas^{Huges et al.,1998}. No entanto, tendo em conta a dificuldade em modelar todos os parâmetros e factores que condicionam o comportamento das estruturas arqueadas é preferível, sempre que possível, estudar a estrutura real em vez de modelos reduzidos. Nos parágrafos seguintes apresentam-se exemplos de ensaios à escala natural em pontes arqueadas, os quais foram efectuados pelo Transport and Road Research Laboratory^{Hendry et al.,1985 e 1986} no âmbito de um programa de ensaio de pontes reais desactivadas.

	Parâmetro	Dimensões	Factor de Escala ^a
Geométricos	dimensão linear	L	S_L
	área	L^2	S_L^2
	momento de inércia	L^4	S_L^4
	deslocamento linear	L	S_L
	rotação	-	1
Materiais	módulo de elasticidade	FL^{-2}	S_E
	tensão	FL^{-2}	S_E
	coeficiente de Poisson	-	1
	densidade	FL^{-3}	S_E / S_L
	extensão	-	1
Cargas	carga concentrada	F	$S_E S_L^2$
	carga distribuída	FL^{-2}	$S_E S_L$
	momento	FL	$S_E S_L^3$

a. O factor de escala S_k de um dado parâmetro k é definido pelo quociente entre as respectivas medidas no protótipo (k_p) e no modelo (k_m), isto é, $S_k = k_p / k_m$.

Tabela 4.3 - Relações de semelhança para modelos estáticos.

Com o objectivo de avaliar as diferenças entre as cargas de colapso de arcos de dimensões diferentes e identificar possíveis relações de escala, modelaram-se arcos com diferentes vãos, nos quais se manteve constantes a relação espessura-raio. Considerou-se apenas a acção do peso próprio dos arcos e duma carga concentrada aplicada a 1/3 de vão e as características materiais foram escaladas de acordo com os factores definidos na Tabela 4.3.

Na Tabela 4.4 e na Tabela 4.5 apresentam-se os resultados numéricos das análises realizadas com o modelo original do arco (MOD3) e com os modelos que dele resultaram através da aplicação de factores de escala geométricos, assim como os respectivos parâmetros de escala que resultam da análise dimensional[†].

modelo original		modelo escala 1/2.2		modelo escala 1/4	
análise geométrica linear MOD3	análise geométrica não linear MOD3a	análise geométrica linear MOD3b	análise geométrica não linear MOD3c	análise geométrica linear MOD3d	análise geométrica não linear MOD3e
14.02	10.39	6.38	4.72	3.52	2.598

Tabela 4.4 - Cargas de colapso dos modelos do arco isolado.

	modelo original		modelo escala 1/2.2		modelo escala 1/4	
	análise geométrica linear MOD3	análise geométrica não linear MOD3a	análise geométrica linear MOD3b	análise geométrica não linear MOD3c	análise geométrica linear MOD3d	análise geométrica não linear MOD3e
S_L	1		2.2		4	
$S_E = 1$	1		1		1	
$S_{kn} = S_L^{-1}$	1		0.4545		0.25	
$S_{ks} = S_L^{-1}$	1		0.4545		0.25	
$S_\gamma = S_L^{-1}$	1		0.4545		0.25	
$S_F = S_L$	1		2.2		4	
δ_v^m ($\times 10^{-3}$ m)	0.955	3.153	0.434	1.317	0.239	0.957
$\delta_v^m \times S_L$ ($\times 10^{-3}$ m)			0.955	2.897	0.956	3.828
F_{colapso}^m (kN)	14.02	10.39 kN	6.38	4.72	3.52	2.598
$F_{\text{colapso}}^m \times S_F$ (kN)			14.04	10.38	14.08	10.39

Tabela 4.5 - Cargas de colapso dos modelos do arco isolado - relações de semelhança.

[†] De notar que os factores de escala apresentados na Tabela 4.5 são diferentes dos correspondentes factores indicados na Tabela 4.3, em virtude de o modelo numérico utilizado ser um modelo plano, cujos dados e resultados são por unidade de largura do arco.

Dos resultados representados nas tabelas anteriores verifica-se que as relações de semelhança permanecem válidas tanto nas análises geometricamente lineares, como nas análises com consideração de efeitos geométricos de 2ª ordem. Constatando-se, assim, que os efeitos geométricos de 2ª ordem não inviabilizam os princípios da teoria da semelhança.

4.9.2 - Modelação Numérica do Ensaio da Ponte de Bridgemill

Os resultados da campanha de ensaios experimentais à escala natural realizada sobre a ponte de Bridgemill^{Hendry et. al.,1985} serviram como referência para aferir a capacidade dos modelos de elementos discretos para reproduzir o comportamento global de um arco de alvenaria de pedra com perfil parabólico. O arco da ponte é recto, isto é, sem viés, com 18.29 m de vão, 8.30 m de largura e formado por blocos de calcário com 0.711 m de espessura. As paredes dos tímpanos são em alvenaria de pedra e os muros acima da ponte têm, aproximadamente, 1 m de altura. O enchimento do extradorso do arco é constituído por cascalho, brita e areias e altura desse enchimento sobre o coroamento do arco é de 0.208 m. As dimensões da ponte estão indicadas na Figura 4.68 e na Tabela 4.6.

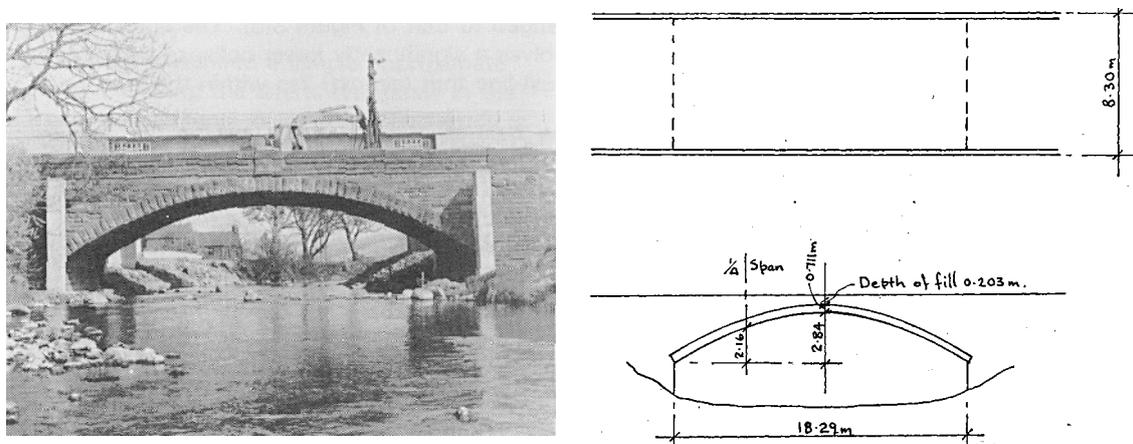


Figura 4.68 - Arco da ponte de Bridgemill^{Hendry et al,1985}.

Com base em ensaios efectuados sobre provetes de calcário extraídos da estrutura, determinou-se uma tensão de rotura à compressão da pedra calcária de 43.8 MPa e um módulo de elasticidade de 15.0 GPa. Para o peso próprio da pedra calcária e do enchimento determinaram-se, respectivamente, os valores de 21.0 kN/m³ e 22.0 kN/m³.

O carregamento do ensaio foi aplicado incrementalmente a um quarto do vão, localização que se admitiu ser a mais desfavorável para a geometria parabólica, através de 4 macacos

hidráulicos de 200 toneladas de capacidade, que actuavam sobre a superfície do pavimento da ponte e exerciam reacção em vigas metálicas ancoradas no solo de fundação (Figura 4.69).

Antes do início do ensaio de carga a ponte foi cuidadosamente inspeccionada, verificando-se que a ponte não apresentava sinais de deterioração, não sendo visível fendilhação significativa no arco nem nas paredes dos tímpanos.

Ponte de Bridgemill - Dimensões	
Vão (m)	18.29
Altura a meio vão (m)	2.840
Espessura do arco (m)	0.711
Largura total (m)	8.30
Espessura do enchimento no coroamento (m)	0.203

Tabela 4.6 - Dimensões da ponte de Bridgemill.

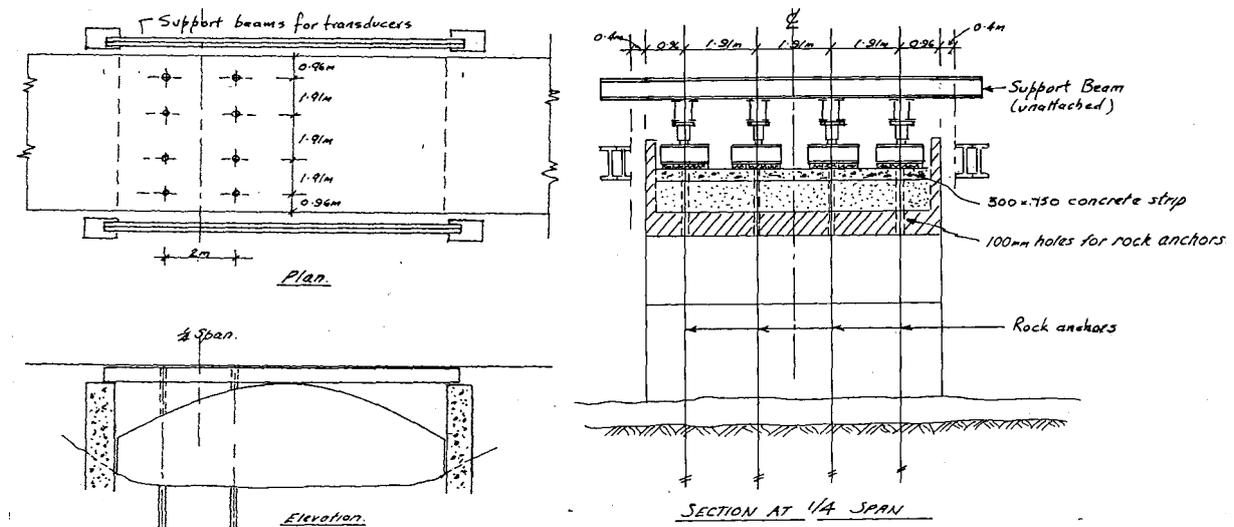


Figura 4.69 - Esquema de aplicação da carga na ponte de Bridgemill ^{Hendry et al, 1985}.

A carga máxima aplicada na estrutura foi de 3100 kN, não se tendo atingido para essa intensidade o colapso da estrutura. O nível máximo de carregamento foi condicionado por limitação do curso dos macacos hidráulicos e por razões de segurança, verificando-se para essa intensidade da carga que os deslocamentos cresciam continuamente sem o aumento do carregamento e que estavam activas as articulações necessárias para o desenvolvimento do mecanismo de colapso. Durante o ensaio de carga os deslocamentos medidos nos apoios do arco foram pouco significativos, sendo aceitável a hipótese de apoios fixos, normalmente admitida

nas análises numéricas e analíticas.

Os primeiros danos ocorreram para níveis de carga da ordem dos 1600 kN, verificando-se a fendilhação das juntas verticais e horizontais das paredes dos tímpanos, o que indiciava a separação das paredes dos tímpanos da restante estrutura do arco. A fendilhação das juntas entre aduelas apenas se tornou evidente para cargas da ordem dos 2000 kN.

Para modelar o ensaio de carga sobre o arco da ponte de Bridgemill optou-se por um modelo de elementos discretos, simulando simultâneamente as aduelas e o material de enchimento no extradorso do arco através de blocos deformáveis independentes, com comportamento elástico linear e ligados entre si por contactos pontuais de comportamento não linear (Figura 4.70). Considerou-se nos contactos entre aduelas resistência à tracção nula e um ângulo de atrito suficientemente elevado (35°) de modo a impedir o deslizamento relativo das aduelas. Nos restantes contactos, isto é, entre aduelas e material de enchimento e entre elementos que modelam o material de enchimento, admitiu-se também resistência à tracção nula e um ângulo de atrito reduzido (10°) que permitiu simular a fractura por corte do enchimento.

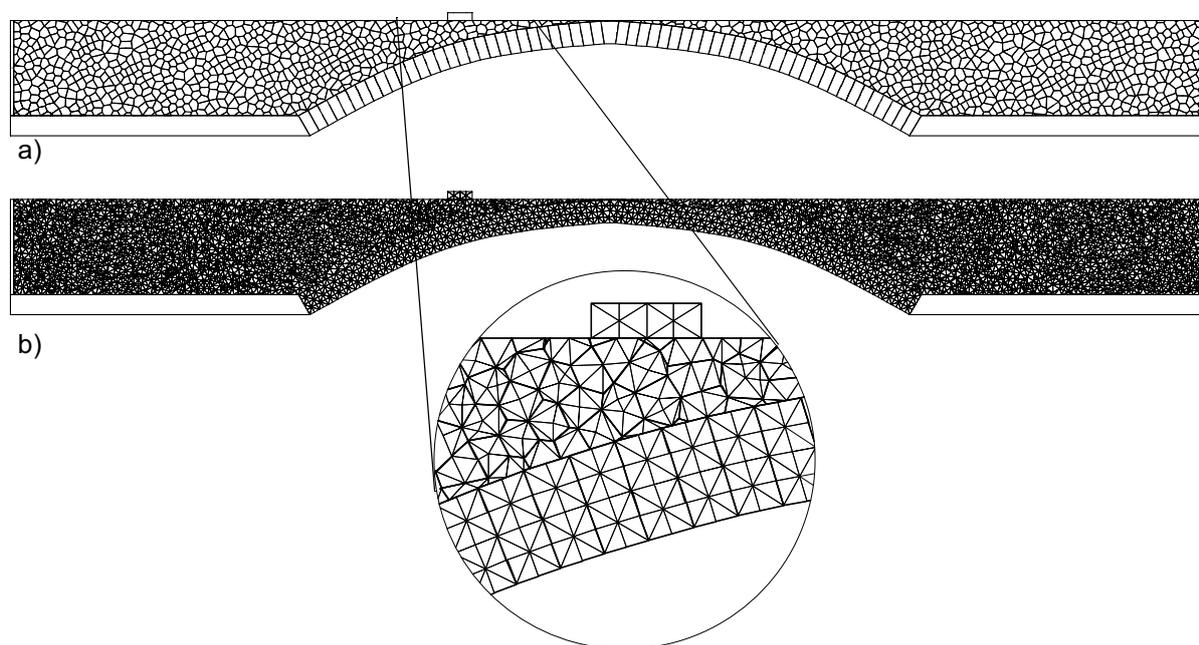


Figura 4.70 - Modelo plano de elementos discretos da ponte de Bridgemill; (a) discretização em elementos discretos; (b) discretização em elementos de diferenças finitas.

Em virtude de se ter detectado durante o ensaio indícios de separação das paredes dos tímpanos da restante estrutura do arco, não se considerou no modelo de elementos discretos a simulação explícita das paredes dos tímpanos.

Como verificou no Capítulo 3, o comportamento do material de enchimento no extradorso do arco tem um papel fundamental na resposta estrutural do arco. Assim, qualquer modelo que pretenda reproduzir o comportamento estrutural de uma ponte em arco sujeita a um dado carregamento deverá simular o comportamento não linear do material de enchimento. Num modelo de elementos discretos a simulação do material de enchimento e do respectivo comportamento não linear poderá ser realizada através da sua modelação com elementos contínuos de diferenças finitas com comportamento não linear, regido por uma lei de plastificação do tipo Mohr-Coulomb. Esta estratégia de modelação não difere muito da modelação por elementos finitos que será utilizada na simulação da ponte de Bargower, sendo previsível que se consiga, com maior ou menor dificuldade, um razoável ajustamento entre os resultados numéricos e os experimentais. Outra estratégia de simulação do comportamento não linear do material de enchimento consiste na sua modelação através de blocos discretos de forma irregular e com comportamento elástico linear, ligados entre si através de contactos pontuais de comportamento não linear. Esta metodologia permite, ao concentrar todas as não linearidades nos contactos pontuais, reduzir grandemente o tempo de cálculo.

Dada a forte dependência entre a orientação e distribuição das juntas entre elementos discretos e o modo de geração do mecanismo de rotura do material de enchimento, é necessário gerar no modelo elementos discretos de dimensões reduzidas e com orientações dos contactos que não restrinjam a formação dos mecanismos de rotura do material de enchimento. Com este objectivo, adoptou-se na discretização dos elementos que constituem o material de enchimento um método de geração aleatória baseado no algoritmo de Voronoi^{Itasca, 2000}. Como se pode observar na Figura 4.70 obteve-se uma distribuição e orientação de contactos que possibilita a formação das superfícies de fractura que se geram no material de enchimento com a evolução do carregamento.

Na Tabela 4.7 apresentam-se as propriedades materiais consideradas para os elementos de diferenças finitas e para os contactos pontuais entre os elementos discretos, que conduziram ao melhor ajustamento entre a curva carga-deslocamento experimental e a numérica (modelo 5).

Na Figura 4.71 representam-se as respostas “carga aplicada-deslocamento do seu ponto de aplicação” dos ensaios experimental e numéricos da ponte, onde se pode identificar diferentes tentativas de ajustamento dos ensaios numéricos ao experimental. Na melhor tentativa (modelo

5) obteve-se um razoável ajustamento e a deformada correspondente (Figura 4.73 e Figura 4.72) está em conformidade com os danos descritos no relatório dos ensaios experimentais.

O ajuste da resposta numérica com os resultados experimentais foi conseguido através da adaptação dos valores do módulo de elasticidade dos elementos que modelam o material de enchimento e das características mecânicas dos contactos entre esses elementos. Assim, verifica-se que os parâmetros de resistência e de deformabilidade do material de enchimento condicionam grandemente a resposta não linear da estrutura, constantando-se que a perda de rigidez da resposta global está associada à plastificação do material de enchimento.

Modelo da Ponte de Bridgemill - Propriedades Materiais (Modelo 5)		
Aduelas do Arco (Elástico Linear)	Módulo de Elasticidade	6 GPa
	Coefficiente de Poisson	0.20
Contactos entre Aduelas (Mohr-Coulomb)	Rigidez normal da junta	2.4×10^9 kN/m ³
	Rigidez tangencial da junta	1.0×10^9 kN/m ³
	Ângulo de Atrito	35°
	Coesão	0
Material de Enchimento (Elástico Linear)	Módulo de Elasticidade	40 MPa
	Coefficiente de Poisson	0.20
Contactos entre Aduelas e Enchimento (Mohr-Coulomb)	Rigidez normal da junta	1.0×10^9 kN/m ³
	Rigidez tangencial da junta	1.0×10^3 kN/m ³
	Ângulo de Atrito	10°
	Coesão	0
Contactos entre Material de Enchimento (Mohr-Coulomb)	Rigidez normal da junta	1.0×10^9 kN/m ³
	Rigidez tangencial da junta	1.0×10^3 kN/m ³
	Ângulo de Atrito	10°
	Coesão	0

Tabela 4.7 - Propriedades dos elementos de diferenças finitas e dos contactos pontuais.

Como se pode observar na Tabela 4.7, os valores que corresponderam ao melhor ajustamento são aceitáveis em face da natureza do material de enchimento.

Ao se efectuar uma análise plana, não foi possível considerar explicitamente no modelo numérico a contribuição das paredes dos tímpanos para a resistência da estrutura. No entanto, para o carregamento em causa, o efeito dessas paredes, embora relevante na fase inicial, tem

pouca influência na carga última, uma vez que de acordo com a descrição do ensaio experimental, para níveis de carga ainda longe do valor último surgiram fendas na ligação das paredes dos tímpanos ao arco da ponte, indiciando a separação destes elementos estruturais. Esta constatação experimental, que também foi verificada no ensaio da ponte de Bargower (parágrafo 4.9.3), revela que quando a carga aumenta, as paredes do tímpano separam-se do enchimento e do arco, fazendo com que a carga última dependa principalmente da resistência do enchimento e do arco.

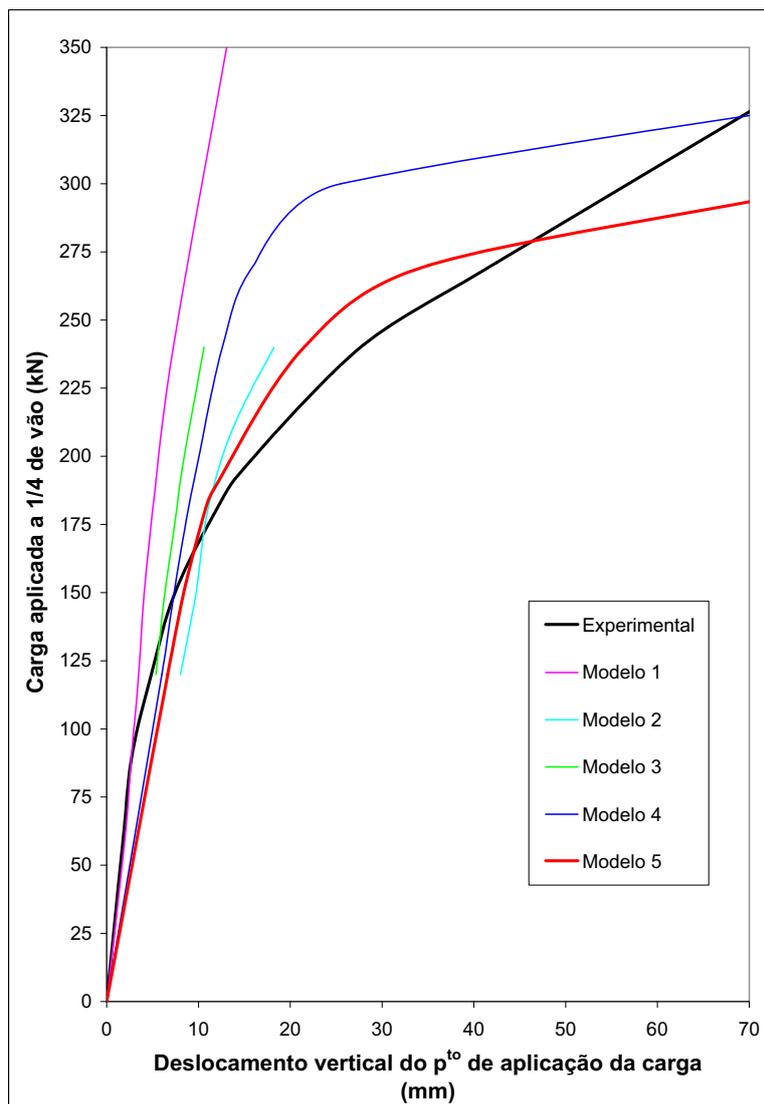


Figura 4.71 - Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.

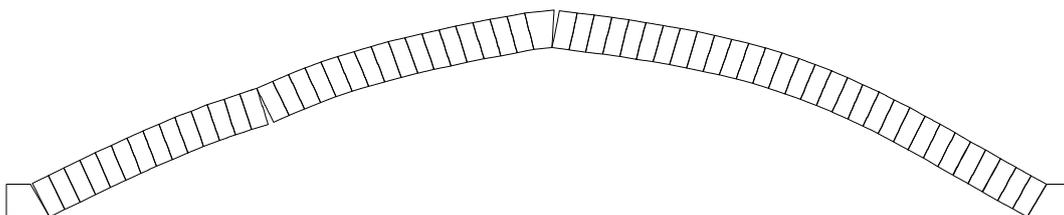


Figura 4.72 - Modelo de elementos discretos da ponte de Bridgemill - deformada do arco.

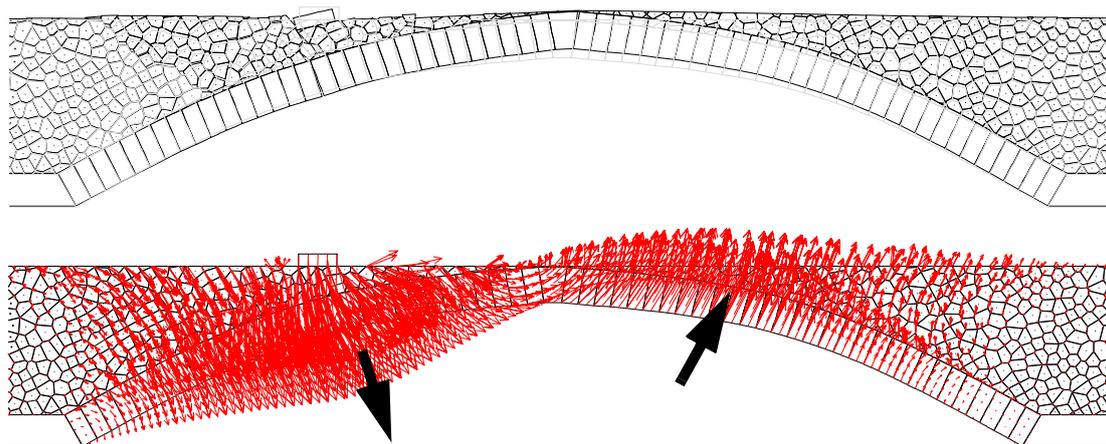


Figura 4.73 - Deformada do modelo de elementos discretos do arco da ponte de Bridgemill (em cima - deformada; em baixo - representação dos vectores dos deslocamentos).

4.9.3 - Modelação Numérica do Ensaio da Ponte de Bargower

A estrutura ensaiada foi a ponte de Bargower, uma ponte em arco com forma semi-circular e com aduelas constituídas por blocos de pedra, pretendendo-se destacar na modelação do ensaio dois aspectos essenciais do comportamento de um arco de alvenaria:

- i) a fendilhação nas juntas entre blocos;
- ii) a contribuição do material de enchimento do extradorso do arco, que desempenha um papel fundamental na resposta estrutural da ponte.

O primeiro aspecto foi simulado no modelo de elementos finitos através de uma formulação de fenda discreta, incorporando elementos de interface com resistência à tracção nula. Relativamente à contribuição do enchimento, consideraram-se dois níveis de discretização: inicialmente, de um modo simplificado, colocaram-se molas não-lineares na direcção horizontal; em seguida adoptou-se um modelo mais refinado, onde o material de enchimento e a respectiva interface com o arco foram também incorporados na malha de elementos finitos. Para descrever o comportamento não-linear do material de enchimento e das interfaces, utilizou-se o critério de rotura de Mohr-Coulomb.

4.9.3.1 - Descrição da Ponte e do Ensaio Experimental

A ponte de Bargower apresenta um perfil semi-circular formado por blocos em calcário, com

um ângulo de viés de 16° (Figura 4.74). Interiormente às paredes dos tímpanos existem paredes com 1 m de espessura constituídas por alvenaria irregular. A demolição da ponte (realizada durante o ensaio) revelou que o enchimento do extradorso do arco era constituído por brita calcária, com inclusões de argila, assente sobre uma camada de areia. As dimensões da ponte estão indicadas na Tabela 4.8.

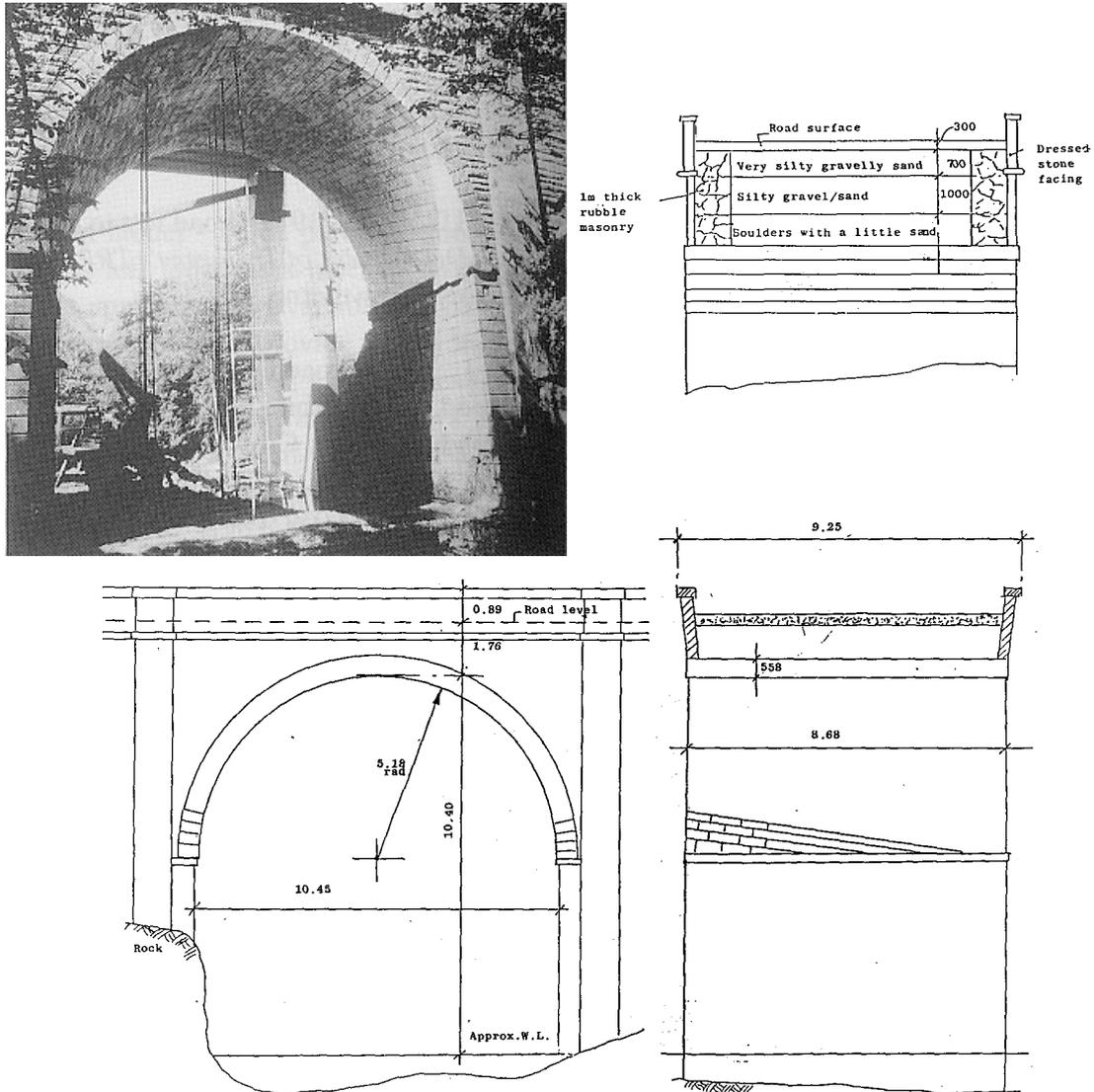


Figura 4.74 - Arco da ponte de Bargower ^{Hendry et al, 1986}.

Para se ter em conta o efeito do viés da ponte no modelo plano de elementos finitos, e de acordo com o sugerido pela regulamentação britânica ^{BA16/97}, adoptou-se para o modelo numérico uma geometria semi circular com vão equivalente ao vão enviesado da ponte. Como se viu no parágrafo 4.8, um ângulo de viés de 16° é relativamente reduzido, conduzindo esta estratégia de modelação a erros pouco significativos.

À data do ensaio experimental, a ponte apresentava alguns sinais de deterioração, sendo visíveis fendas longitudinais partindo dos encontros e prolongando-se pela superfície da abóbada, os muros de guarda apresentavam-se inclinados para o exterior e observava-se o descasque de alguns blocos de pedra. Com base em ensaios efectuados sobre provetes de calcário extraídos da estrutura, determinou-se uma tensão de rotura à compressão de 33.3 MPa e um módulo de elasticidade de 14.1 GPa. Para o peso próprio da pedra calcária e do enchimento determinaram-se, respectivamente, os valores de 26.8 kN/m³ e 20.0 kN/m³. A carga foi aplicada incrementalmente a um terço do vão, localização que se admitiu ser a mais desfavorável para o carregamento. Utilizaram-se macacos hidráulicos que actuavam sobre a superfície do pavimento da ponte e exerciam reacção em vigas metálicas ancoradas no solo de fundação (Figura 4.75).

Ponte de Bargower - Dimensões	
Vão (recto) (m)	10.00
Vão (enviesado) (m)	10.45
Altura a meio vão (m)	5.18
Espessura do arco (m)	0.558
Largura total (m)	8.68
Espessura do enchimento no coroamento (m)	1.20

Tabela 4.8 - Dimensões da ponte de Bargower.

No primeiro ensaio de carga observou-se que a capacidade dos macacos (100 toneladas) era insuficiente para conduzir ao colapso da estrutura. Assim, realizou-se um segundo ensaio onde se utilizaram macacos de 200 toneladas. Neste ensaio, o primeiro sinal visível de degradação foi observado aos 3400 kN. A carga máxima foi de 5200 kN, tendo a rotura ocorrido por esmagamento do arco sob a linha de aplicação da carga. Antes do colapso, surgiram fendas longitudinais no arco, junto das faces internas das paredes dos tímpanos. Tal facto indica que a zona exterior do arco, rigidificada pelas paredes dos tímpanos, se destacou da zona média, rigidificada apenas pelo material de enchimento.

4.9.3.2 - Modelo Numérico Simplificado

Para modelar o arco em alvenaria, optou-se por uma abordagem de fenda discreta, sendo as juntas idealizadas por elementos de interface com espessura nula e os blocos de pedra

modelados por elementos finitos contínuos de comportamento elástico linear. Admitiu-se que a fendilhação se desenvolve apenas nas interfaces, para as quais se adoptou uma resistência nula à tracção. Para evitar a interpenetração das faces das juntas quando estas fecham, introduziram-se funções de penalização nas relações constitutivas das interfaces. A análise computacional do arco de alvenaria foi efectuada com recurso a uma formulação de elementos finitos desenvolvida por Alfaiate *Gago et al., 2002*, na qual os blocos foram representados por elementos planos de tensão isoparamétricos de 4 nós e as juntas por elementos de interface de 4 nós. As propriedades materiais adoptadas para a interface são dadas na Tabela 4.9.

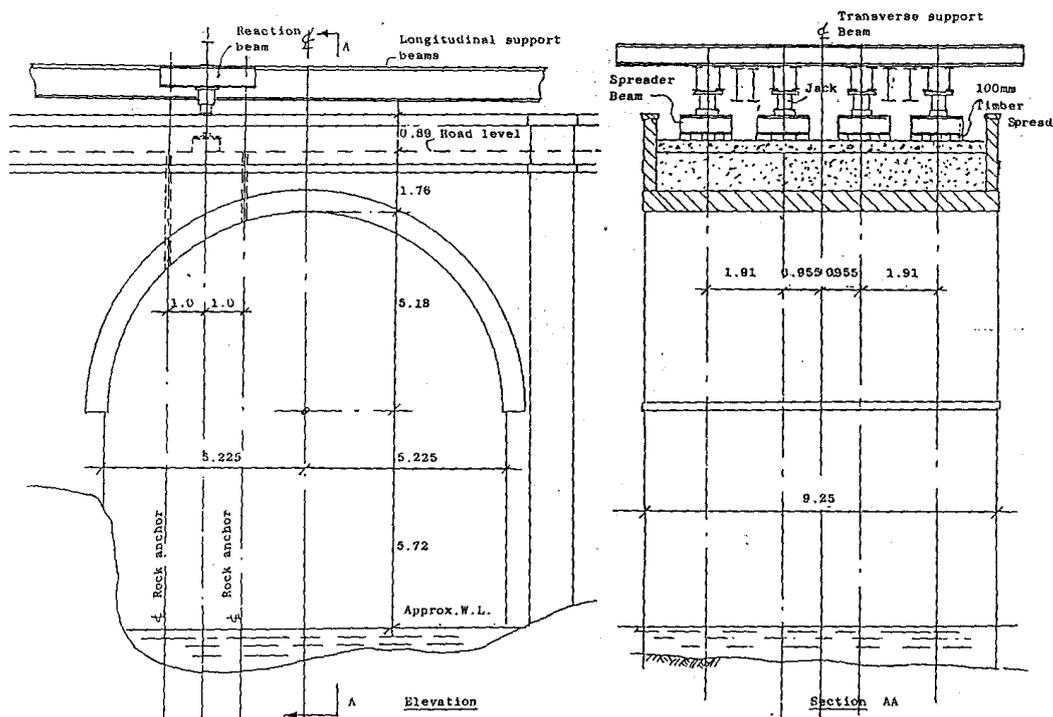


Figura 4.75 - Esquema de aplicação da carga na ponte de Bargower *Hendry et al., 1986*.

Ponte de Bargower - Modelo Simplificado	
Rigidez normal da junta à tracção	0
Rigidez normal da junta à compressão	10^{12} kN/m ³
Rigidez tangencial da junta	10^{12} kN/m ³

Tabela 4.9 - Propriedades dos elementos de interface.

Para os elementos contínuos, admitiu-se comportamento elástico linear, tendo-se utilizado o módulo de elasticidade determinado experimentalmente (14.1 GPa). A geometria do arco foi modelada considerando um perfil semi-circular constituído por 53 blocos de alvenaria, todos

iguais. As juntas entre blocos foram modeladas por três elementos de interface. A contribuição do enchimento do extradorso do arco foi simulada através da introdução de molas horizontais. Essas molas funcionam unicamente à compressão, de acordo com relações constitutivas lineares ou bilineares (Figura 4.76). Admitiu-se que o coeficiente de rigidez das molas varia linearmente em profundidade, tomando valores entre 0 and 3 MN/m^3 .

O estado de tensão inicial foi contabilizado através da aplicação de cargas nodais equivalentes aos pesos próprios dos blocos e do material de enchimento (cargas verticais) e ao impulso lateral do enchimento (cargas horizontais), o qual se assumiu corresponder a uma situação de repouso ($k_0 = 0.45$). O carregamento foi simulado por meio de forças nodais no extradorso do arco, admitindo que a carga aplicada à superfície do tabuleiro da ponte se propaga elasticamente em profundidade.

Desprezou-se a contribuição das paredes dos tímpanos e admitiu-se que os encontros eram infinitamente rígidos. Numa primeira fase, não foram considerados efeitos geometricamente não-lineares.

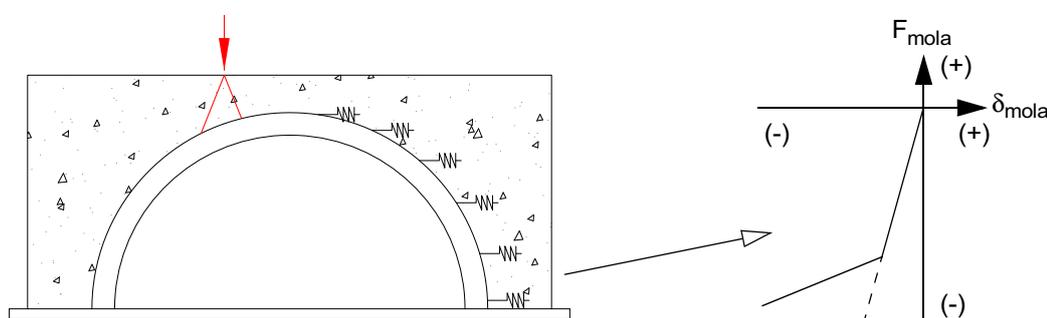


Figura 4.76 - Modelo de molas para simulação do efeito de rigidificação horizontal que resulta da existência de enchimento.

Na consideração da não-linearidade material, recorreu-se ao método de Newton-Raphson em conjugação com o método do comprimento do arco, o qual tem a vantagem de assegurar convergência em situações onde o método de Newton-Raphson convencional apresenta problemas, como no caso de fenómenos de "snap-back" que ocorrem frequentemente em estruturas de alvenaria. Em todas as análises apresentadas, impôs-se uma abertura monótonica das juntas.

Efectuaram-se cinco simulações com o modelo de elementos finitos simplificado. Na primeira, designada por Caso I, a contribuição do enchimento foi tida em conta apenas através do estado

de tensão inicial (cargas verticais e horizontais). A curva carga-deslocamento vertical do seu ponto de aplicação (localizado a um terço do vão), encontra-se representada na Figura 4.77. Esta relação traduz um comportamento global excessivamente flexível, já que a carga última é muito inferior ao valor obtido experimentalmente, cerca de 5600 kN. Observa-se ainda que quando a carga atinge o patamar, os deslocamentos crescem indefinidamente, ultrapassando os limites de validade de uma análise geometricamente linear.

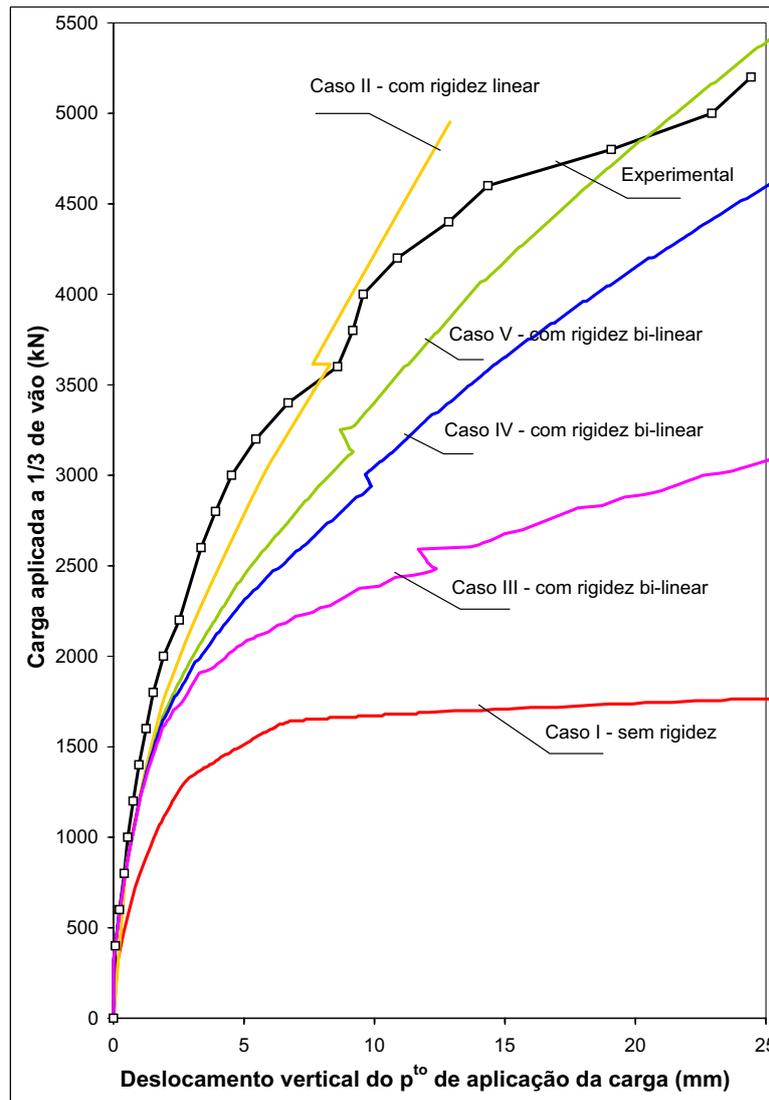


Figura 4.77 - Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga ^{Gago et al,2003}.

A grande diferença entre os resultados numéricos desta simulação e os experimentais indica que a contribuição mecânica do enchimento não pode ser ignorada na simulação do comportamento do arco, sendo manifestamente deficiente a modelação dessa contribuição apenas através das acções verticais e horizontais correspondentes, respectivamente, ao peso próprio e ao impulso em repouso.

Na segunda simulação, designada por Caso II, considerou-se a interacção entre o enchimento e o arco através da introdução de molas não resistentes à tracção e com comportamento elástico linear à compressão. Esta modificação permitiu melhorar substancialmente o ajustamento entre os valores numéricos e experimentais, comprovando a importância do comportamento mecânico do enchimento do arco na resposta da estrutura. Este resultado confirma a conhecida influência do efeito estabilizante dos impulsos do enchimento em arcos semi-circulares^{Crisfield e Page,1990}. Nesta segunda análise a rigidez global da estrutura permaneceu sensivelmente constante, pelo que a carga máxima obtida por via computacional foi bastante superior à carga de rotura experimental.

Nos restantes três casos analisados, considerou-se que as molas horizontais tinham uma resposta bilinear à compressão (conforme representado na Figura 4.76). Em todas as relações constitutivas adoptadas, considerou-se um mesmo troço linear inicial, sendo a rigidez elástica subsequente reduzida a um décimo (Caso III), a um terço (Caso IV) e a metade (Caso V) do valor inicial. Os respectivos resultados são também representados na Figura 4.77, observando-se que a melhor concordância com a curva experimental foi alcançada no Caso V. Observa-se ainda que nos diversos modelos o mecanismo de colapso está associado à formação de rótulas plásticas em quatro secções do arco (Figura 4.78).

É de referir ainda que, em todas as análises realizadas, a máxima reacção de compressão nas molas foi inferior ao valor limite do impulso lateral passivo do enchimento.

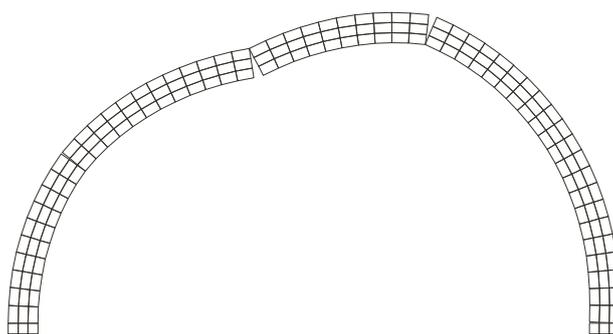


Figura 4.78 - Configuração deformada do modelo de elementos finitos - Caso III.

Da análise dos resultados anteriores conclui-se, em termos qualitativos, que o comportamento não-linear do enchimento influencia significativamente a resposta da estrutura, pelo que deve sempre ser tido em consideração. Justifica-se, deste modo, o refinamento da modelação do material de enchimento do extradorso do arco através da modelação explícita com elementos

finitos do material envolvente do arco.

Atendendo às limitações desta análise simplificada, não foram feitos outros esforços para melhorar a concordância com os resultados experimentais, deixando esta tarefa para o modelo mais sofisticado que se descreve em seguida.

4.9.3.3 - Modelo Numérico mais Sofisticado

Tal como anteriormente, adoptou-se para o arco alvenaria uma formulação de fenda discreta, na qual as juntas foram idealizadas por elementos de interface com espessura nula, enquanto que os blocos de pedra e o material de enchimento foram representados por elementos contínuos. Considerou-se que a fendilhação se desenvolve unicamente nas juntas de alvenaria e nas juntas entre o enchimento e os blocos.

As juntas entre blocos e entre arco e enchimento foram discretizadas através de elementos de interface, quadráticos, obedecendo ao critério de rotura de Rankine. Admitiu-se um comportamento de fractura à tracção frágil, correspondendo a uma energia de fractura nula, e considerou-se resistências nulas à tracção e ao corte após a abertura das fendas. Os blocos de alvenaria foram representados por elementos isoparamétricos de 8 nós com comportamento elástico linear.

O enchimento foi modelado como um material de baixa coesão de acordo com o critério de Mohr-Coulomb e admitida uma lei de plasticidade associada. Para a respectiva malha utilizaram-se elementos triangulares de 6 nós. Para o pavimento da estrada utilizaram-se, também, elementos triangulares de 6 nós e recorreu-se ao critério de plasticidade de Mohr-Coulomb para modelar o seu comportamento material.

Tal como no modelo simplificado, desprezou-se a contribuição das paredes do tímpano, tendo sido a análise não linear efectuada com o recurso ao método de Newton-Raphson em conjugação com o método do comprimento do arco.

Numa primeira análise geometricamente linear (NLMAT), o arco foi modelado isoladamente sendo a contribuição do material de enchimento do extradorso do arco considerada apenas através da acção vertical correspondente ao seu peso próprio. As características mecânicas

admitidas neste modelo são apresentadas na Tabela 4.10.

Adoptou-se um valor elevado para a rigidez normal das interfaces a fim de evitar interpenetração das faces das juntas quando estas fecham. Nas juntas entre blocos considerou-se também uma rigidez de corte elevada, visto saber-se que o colapso do arco ocorreu sem escorregamento relativo das juntas^{Heyman, 1982}.

Como se pode verificar na Figura 4.79, a carga última obtida com este modelo é muito inferior ao valor experimental e cerca de 6 vezes inferior ao valor obtido no primeiro modelo analisado no parágrafo anterior (Caso I). Verifica-se que a simulação do efeito do material de enchimento apenas através do seu peso próprio é insuficiente, sendo a simulação do efeito horizontal do enchimento através das cargas horizontais correspondentes ao seu impulso em repouso uma melhor alternativa, se bem que ainda deficiente.

Ponte de Bargower - Modelo Arco Isolado (NLMAT)	
Juntas entre Blocos	
Rigidez normal (kN/m ³)	0.233 x 10 ⁹
Rigidez de corte (kN/m ³)	0.104 x 10 ⁹
Resistência à tracção (MPa)	0
Elementos Finitos Contínuos	
Módulo de elasticidade (MPa)	40

Tabela 4.10 - Propriedades mecânicas do modelo de elementos finitos do arco isolado (NLMAT).

Na Figura 4.79 representa-se também o valor da carga última obtido através da análise limite do arco isolado submetido às acções verticais correspondentes ao seu peso próprio, ao peso próprio do material de enchimento e à carga vertical aplicada a um terço de vão, verificando-se a convergência para este valor da curva correspondente ao modelo numérico anterior.

Em seguida, utilizou-se um modelo de elementos finitos, onde o enchimento foi também incluído na malha (Figura 4.80). Foram realizadas nove simulações com este modelo de elementos finitos, cinco correspondendo a análises geometricamente lineares e as restantes com consideração dos efeitos geometricos de 2^a ordem.

Na Figura 4.79 e na Figura 4.81 representam-se os diagramas carga-deslocamento

correspondentes às análises descritas anteriormente e na Tabela 4.11 identificam-se as variações das propriedades materiais. Os valores dos parâmetros materiais utilizados nas análises computacionais foram os obtidos experimentalmente ou, na ausência de dados experimentais, estimados a partir de estudos paramétricos conduzidos pelo autor com o objectivo de melhorar o ajustamento com os resultados dos ensaios.

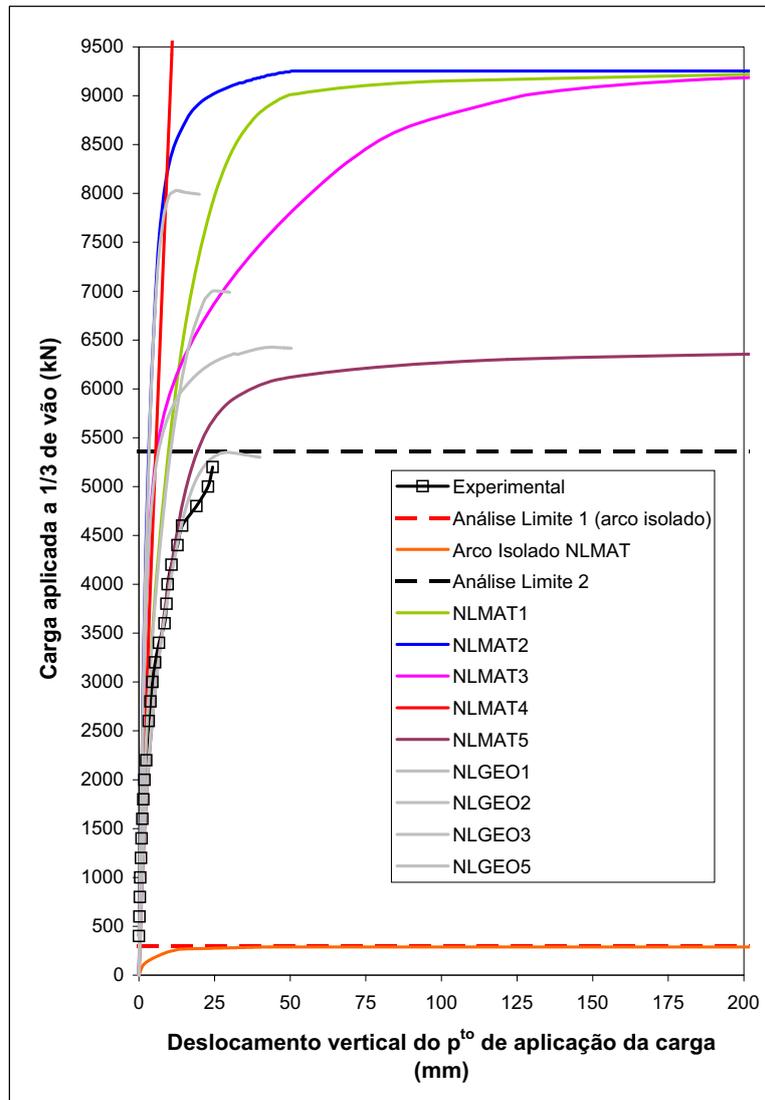


Figura 4.79 - Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga - análises geométricamente lineares.

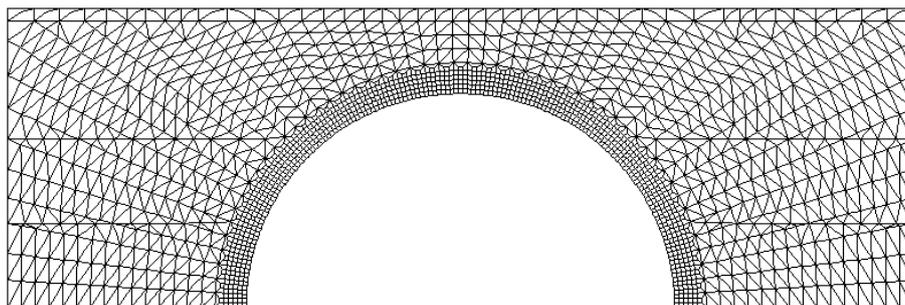


Figura 4.80 - Malha de elementos finitos - modelo mais sofisticado.

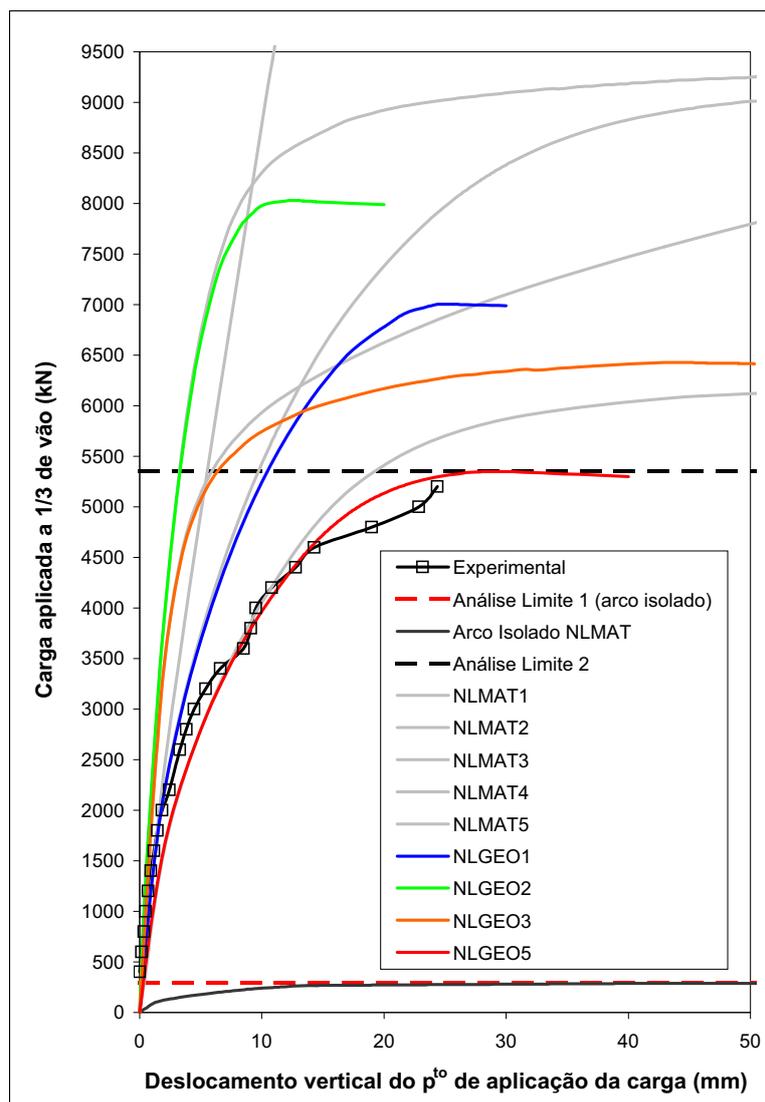


Figura 4.81 - Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga - análises geométricamente não lineares.

Considerou-se inicialmente uma análise geométrica linear em que se admitiu para o enchimento um comportamento elástico linear e adoptaram-se interfaces não-lineares para as juntas entre blocos e entre o arco e o enchimento (NLMAT4). Embora para cargas moderadas se tenha obtido uma boa aproximação dos valores experimentais, a diminuição de rigidez observada na fase final do ensaio não foi reproduzida com este modelo numérico (Figura 4.79). É pois evidente que, para aproximar correctamente a carga de colapso, se deve adoptar um modelo não-linear para o material de enchimento.

Considerou-se um terceiro modelo, na qual os elementos que modelam o enchimento obedecem ao critério de rotura de Mohr-Coulomb. Com este modelo, foram efectuadas análises

geometricamente lineares e não-lineares. Embora os resultados das análises não coincidam exactamente com a curva experimental, é possível atingir uma aproximação muito satisfatória, em particular quando se considera comportamento geometricamente não-linear.

Ponte de Bargower - Modelo de Elementos Finitos mais Sofisticado					
Análises	NLMAT1 NLGEO1	NLMAT2 NLGEO2	NLMAT3 NLGEO3	NLMAT4	NLMAT5 NLGEO5
Juntas entre blocos	Rigidez normal = $0.233e09 \text{ kN/m}^3$ Rigidez de corte = $0.104e06 \text{ kN/m}^3$ Resistência à tracção = 0				
Juntas entre blocos e enchimento	Rigidez normal = $0.233e09 \text{ kN/m}^3$ Resistência à tracção = 0				
	Rigidez de corte (kN/m^3) $0.104e06$		Rigidez de corte (kN/m^3) $0.104e06$	Rigidez de corte (kN/m^3) $0.104e06$	Rigidez de corte (kN/m^3) $0.104e02$
Pavimento	Módulo de elasticidade = 5 GPa $\nu = 0.2$ coesão = $1.44e03 \text{ kN/m}^2$ $\phi = \psi = 30^\circ$				
Enchimento	$\nu = 0.2$ $\gamma = 2.039 \text{ kN/m}^2$				
	Módulo de elasticidade 40 MPa	Módulo de elasticidade 400 MPa	Módulo de elasticidade 400 MPa	Módulo de elasticidade 40 MPa	Módulo de elasticidade 40 MPa
	coesão = $1.44e03 \text{ kN/m}^2$ $\phi = \psi = 30^\circ$			Elástico Linear	coesão (kN/m^2) $1.44e03$ $\phi = \psi = 30^\circ$
Nota: NLMAT - análise geometricamente linear; NLGEO - análise geometricamente não linear; ϕ = Ângulo de atrito interno; ψ = Ângulo de dilatação					

Tabela 4.11 - Propriedades mecânicas do modelo de elementos finitos.

Inicialmente (análises NLMAT2 e NLGEO2) considerou-se uma rigidez do material de enchimento relativamente elevada ($E=400 \text{ MPa}$) e uma rigidez de corte da junta entre blocos e enchimento também elevada ($0.104 \times 10^6 \text{ kN/m}^3$), verificando-se que os resultados numéricos se encontram longe dos resultados experimentais, tanto na análise geometricamente linear, como na análise com consideração dos efeitos geométricos de 2ª ordem. De seguida, reduziu-se 10 vezes o módulo de elasticidade do material de enchimento (análises NLMAT1 e NLGEO1) e 100 vezes a constante de rigidez ao corte das juntas entre blocos e enchimento (análises NLMAT3 e NLGEO3), verificando-se uma diminuição da rigidez das respostas de ambas as situações.

Finalmente, procurando ajustar a resposta geometricamente não linear aos resultados

experimentais, diminuiu-se simultaneamente o módulo de elasticidade do material de enchimento e a constante de rigidez ao corte das juntas entre blocos e enchimento (análises NLMAT5 e NLGEO5). Não houve, no entanto, alteração dos parâmetros de resistência, pelo que a resposta geometricamente linear (NLMAT5) converge para o mesmo patamar das análises geometricamente lineares anteriores. A análise geometricamente não linear correspondente (NLGEO5) apresenta um razoável ajustamento aos resultados experimentais.

A análise geometricamente linear conduz a um valor mais elevado da carga de colapso, o que confirma que a não consideração dos efeitos geometricamente não-lineares pode conduzir a estimativas não conservativas da carga última. Para as dimensões da ponte de Bargower e para as propriedades materiais admitidas, o modelo geometricamente linear conduziu a uma carga última 17% superior ao valor experimental .

Na Figura 4.81 representa-se também a carga de colapso obtida através da análise limite, em que a contribuição do enchimento foi tida em conta através do impulso passivo do solo entre as duas rótulas que se formam no lado direito do arco (conforme descrito no parágrafo 3.8.3 - Figura 4.82). Para um ângulo de atrito interno de 20° obteve-se uma carga última de 5356 kN, valor próximo do obtido experimentalmente. Este método analítico, embora sem considerar efeitos geométricos de 2ª ordem, permite estimar a carga de colapso de um modo simples e rápido, constituindo uma ferramenta de grande utilidade para validação e calibração de análises mais elaboradas.

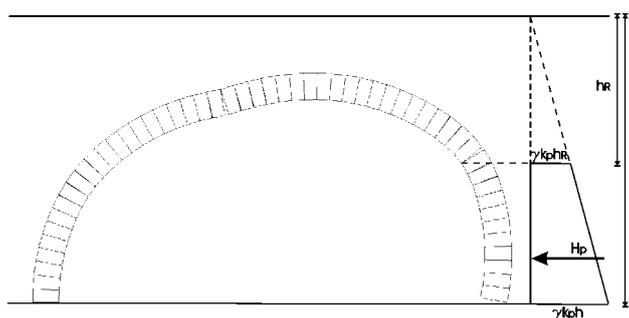


Figura 4.82 - análise limite do arco: contribuição do impulso passivo.

Na Figura 4.83 representa-se a configuração da malha de elementos finitos quando sobre o modelo numérico actuava uma carga de intensidade próxima da carga última, a qual permite visualizar o mecanismo de colapso do arco.

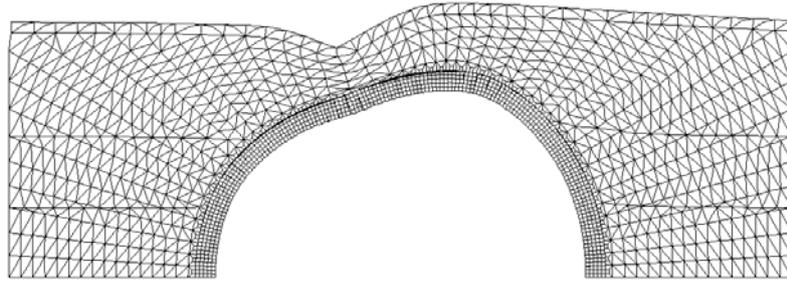


Figura 4.83 - Malha deformada.

Nas figuras seguintes representam-se alguns dos resultados numéricos obtidos considerando efeitos geometricamente não-lineares (NLGEO5). Tendo-se admitido comportamento elástico linear para os blocos, há que verificar se a sua resistência à compressão é ultrapassada. Na Figura 4.84 estão representadas as tensões principais no arco, confirmando-se que a tensão máxima de compressão nos blocos se encontra sempre abaixo do seu limite de resistência (33.3 MPa). Na Figura 4.85 apresentam-se as deformações plásticas, correspondendo ao padrão de plastificação esperado para o enchimento.

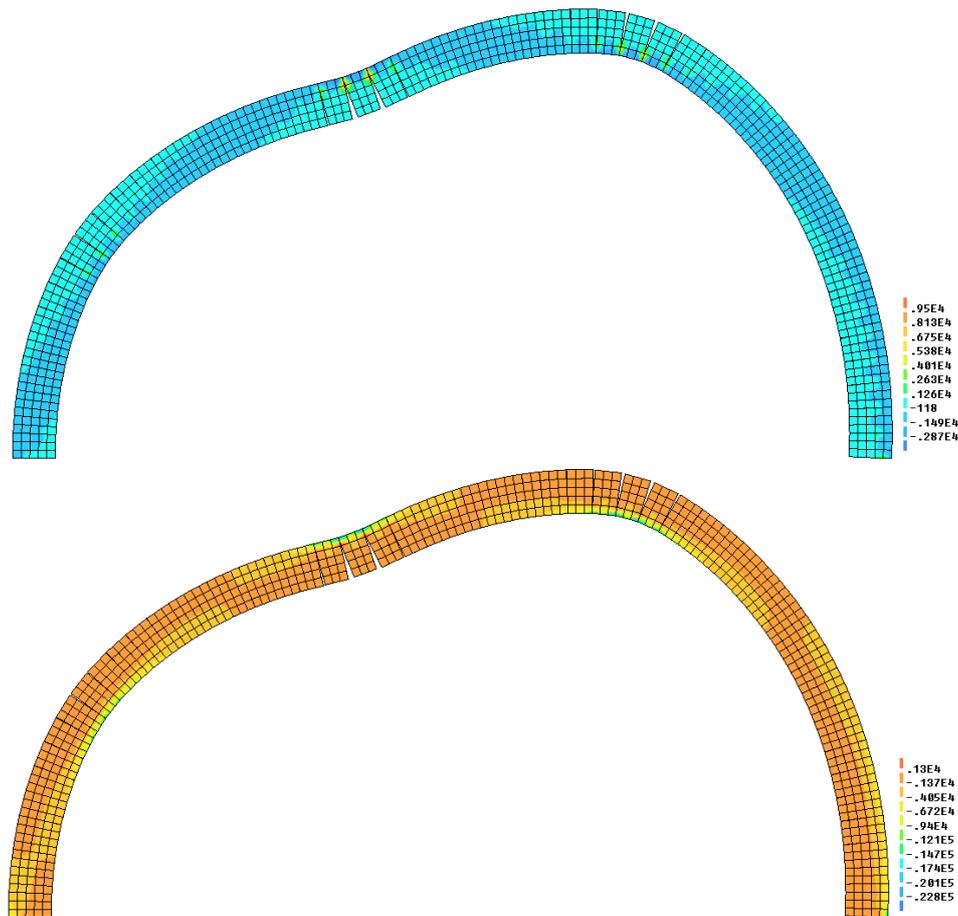


Figura 4.84 - Tensões principais σ_I (cima) σ_{II} (baixo) (unidades kN/m^2).

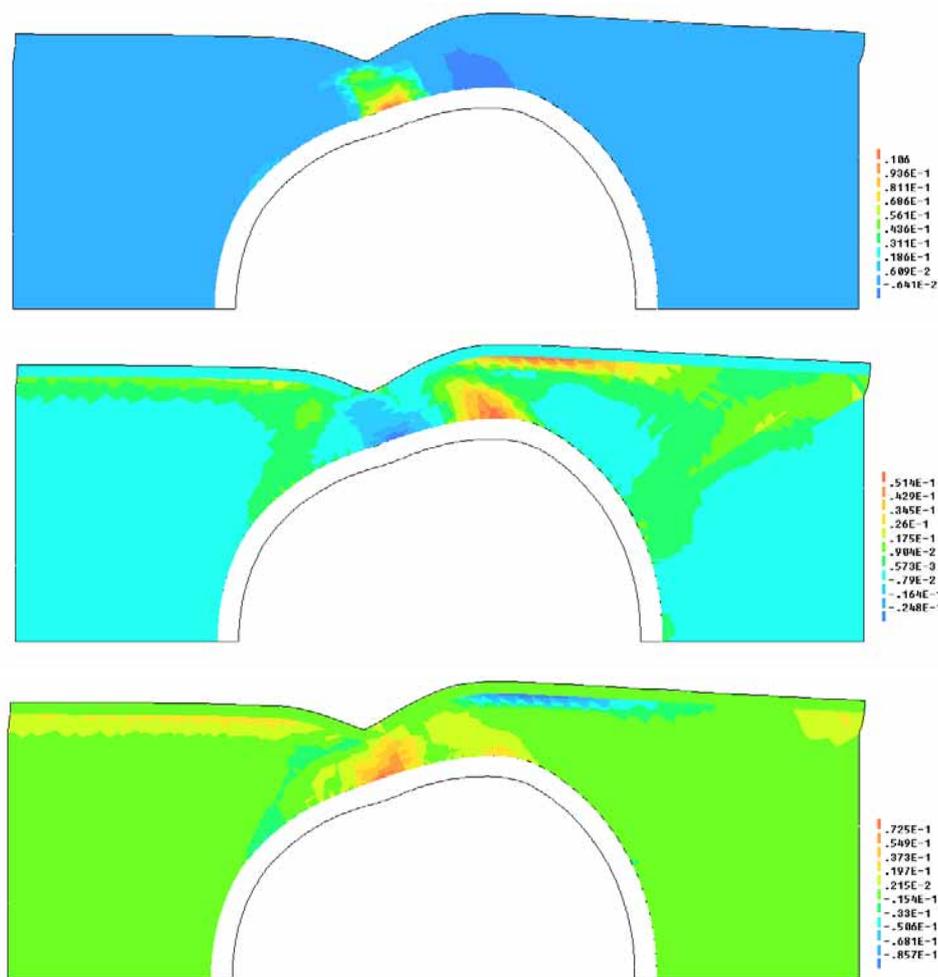


Figura 4.85 - Deformações plásticas (ϵ_{xx} - cima; ϵ_{yy} - centro; ϵ_{xy} - baixo).

Como referido, a contribuição das paredes dos tímpanos para a resistência da estrutura não foi considerada explicitamente. De facto, observou-se nos ensaios experimentais o aparecimento de fendas longitudinais no arco, junto às faces internas das paredes, indiciando que a zona exterior do arco, rigidificada pelas paredes dos tímpanos, tende a separar-se da zona central, rigidificada apenas pelo material de enchimento. Assim, o efeito dessas paredes, embora relevante na fase inicial do carregamento (nomeadamente por induzir um estado plano de deformação no solo), tem pouca influência na carga última. De facto, quando a carga aumenta, as paredes do tímpano separam-se do enchimento e do arco, fazendo com que a carga última dependa principalmente da resistência do enchimento. Nos modelos de elementos finitos admitiu-se um estado plano de deformação durante toda a simulação e desprezou-se a rigidez das paredes dos tímpanos.

Como seria de esperar num arco semi-circular, o enchimento do extradorso do arco influencia significativamente a resposta da estrutura. Nos modelos onde esse efeito foi simulado apenas

por meio de cargas verticais e horizontais devidas ao peso próprio obtiveram-se cargas de colapso muito baixas. Ao contrário, quando se admitiu uma rigidez elástica linear do enchimento, a rigidez global da estrutura e a correspondente carga última situaram-se acima dos valores experimentais. A melhor solução foi alcançada quando se utilizou um modelo não-linear para o enchimento, concluindo-se assim que se deve ter em conta a degradação de rigidez desse material com o aumento de carga.

4.10 - CONCLUSÕES

O comportamento das estruturas de alvenaria é, em virtude da fraca resistência à tracção dos materiais que a constituem, altamente não linear. Assim, a simulação numérica dessas estruturas revela-se uma tarefa complexa, exigindo modelos que simulem as características mecânicas dos materiais construtivos. Neste capítulo estudaram-se as metodologias numéricas disponíveis para a modelação do comportamento das estruturas de alvenaria, descrevendo-se as estratégias de modelação mais simples e os modelos numéricos mais avançados.

A estratégia de modelação mais simples baseia-se em modelos de elementos finitos contínuos com comportamento elástico linear, nos quais poderão ser introduzidas descontinuidades ou alterações nas propriedades mecânicas na tentativa de modelar aproximadamente as características não lineares dos materiais. Este tipo de estratégia, se bem que aproximada, pode permitir uma razoável interpretação qualitativa da resposta real da estrutura e, quando associada a modelações locais mais detalhadas, conduzir a boas avaliações do comportamento global das estruturas.

A não linearidade do comportamento das estruturas de alvenaria resulta, fundamentalmente, da sua fraca resistência à tracção, sendo necessário dispor para correcta simulação das alvenarias de modelos numéricos que simulem a fractura por tracção. Dentro dos métodos mais avançados para a modelação numérica das estruturas em alvenaria destacam-se, por serem os mais utilizados, o dos elementos finitos com formulações descontínuas (com elementos de junta de comportamento não linear), o dos elementos finitos com formulações contínuas (com modelos de fractura distribuída) e o dos elementos discretos (onde as juntas entre elementos são substituídas por um conjunto discreto de contactos pontuais). Todos esses métodos permitem a simulação da fractura por tracção (e de danos por compressão ou corte, quando associados a

modelos de plasticidade), revelando-se serem opções adequadas para a simulação estrutural das alvenarias. Do ponto de vista computacional, todos eles consomem grandes recursos, pelo que a modelação de grandes estruturas nem sempre é possível através desses métodos.

A modelação através de elementos finitos de fenda distribuída mostra-se mais adequada em problemas onde seja previsível uma fractura difusa de um meio contínuo ou em estruturas de grande dimensão onde não seja possível discretizar na malha de elementos finitos todas as superfícies potenciais de fractura (juntas). Nas situações onde as potenciais superfícies de fractura são facilmente identificáveis é preferível a utilização de modelos descontínuos de elementos finitos ou de elementos discretos. Os modelos de elementos discretos, por permitirem a ocorrência de grandes deslocamentos e rotações com destacamentos e detecção de novos contactos, são mais adequados quando se pretende analisar o comportamento até ao completo colapso da estrutura. Os modelos de elementos finitos, contínuos ou descontínuos, que também possibilitam a consideração de efeitos geometricamente não lineares, estão, em geral, associados a modelos materiais mais sofisticados do que os disponíveis no método dos elementos discretos. No entanto, a caracterização experimental das alvenarias ainda é deficiente e nem sempre são disponíveis valores para todos os parâmetros necessários à definição desses modelos materiais. Do ponto de vista do consumo de recursos computacionais, e para o mesmo nível de refinamento, não se identificam grandes diferenças entre os métodos dos elementos finitos e dos elementos discretos.

De modo a verificar a aptidão destas metodologias na simulação das estruturas de alvenaria, foram analisados neste capítulo modelos numéricos de arcos de alvenaria de pedra. Estes elementos estruturais, por permitirem vencer vãos com a utilização de materiais não resistentes à tracção, são peças fundamentais nas construções antigas. Verificou-se que as modelações numéricas por elementos finitos, com formulações de fenda distribuída ou discreta, assim como a modelação por elementos discretos, conduzem a resultados coerentes com os modelos analíticos estudados no Capítulo 3. Constatou-se que os parâmetros relacionados com a resistência à tracção das juntas entre aduelas, tensão resistente e energia de fractura, condicionam o valor de pico da resposta, ocorrendo com a sucessiva degradação dessa resistência uma diminuição da carga máxima, que converge para o valor correspondente ao modelo sem resistência à tracção.

A simulação do esmagamento dos vértices dos blocos por compressão, ao alterar a posição dos centros de rotação dos blocos, tem repercussões no valor da carga última, em particular quando se efectuam análises geometricamente não lineares. No entanto, para materiais, geometrias e carregamentos correntes, esses efeitos são pouco significativos.

Nas análises realizadas confirmou-se que o arco de perfil circular apresenta melhor aptidão para suportar a acção de cargas distribuídas, enquanto que o perfil ogival é mais adequado para arcos submetidos à acção de cargas concentradas a meio vão.

O efeito do viés das pontes em arco foi estudado pela análise de modelos de elementos finitos tridimensionais. Constatou-se que para um mesmo vão enviesado, o aumento do ângulo de viés conduz a uma diminuição da carga última da estrutura, sendo esta diminuição de resistência mais pronunciada para ângulos superiores a 20°. Da análise de modelos de arcos rectos de vãos equivalentes aos dos arcos enviesados, verificou-se que para ângulos de viés inferiores a 30° é aceitável a aproximação de simulação do arco através de modelos planos com vãos iguais ao vão enviesado da estrutura real.

A simulação numérica de ensaios experimentais realizados sobre pontes reais permitiu avaliar a influencia do material de enchimento no extradorso do arco no comportamento global da estrutura. Verificou-se que a não simulação do efeito de rigidificação lateral produzido pelo material de enchimento conduz a cargas de colapso muito inferiores às reais, enquanto que a sua simulação com parâmetros elásticos lineares conduz a resistências muito superiores. É, assim, necessário simular o efeito do material de enchimento, através de metodologias simplificadas (i. e. através de molas) ou da sua discretização na malha de elementos finitos, utilizando modelos materiais não lineares que simulem correctamente a degradação da resistência. O efeito favorável de degradação da carga aplicada através do enchimento deve, também, ser considerado na modelação.

Os modelos planos utilizados na modelação dos ensaios experimentais não consideraram explicitamente o efeito das paredes dos tímpanos. No entanto, os ensaios experimentais revelaram para níveis de carregamento ainda longe da carga última, danos que indiciavam a separação relativa dessas paredes e do arco. Assim, se bem que influente para níveis de carregamento baixos, nomeadamente por induzir no arco e enchimento estados plano de

deformação e por rigidificar a resposta inicial, os resultados dos ensaios experimentais indicam que as paredes dos tímpanos não influenciam significativamente o valor da carga última.

CAPÍTULO 5 - PROJECTO *COSISMO*

5.1 - INTRODUÇÃO

Apesar dos avanços mais recentes da engenharia sísmica em diferentes campos da mecânica estrutural, o conhecimento do comportamento sísmico das estruturas antigas, nomeadamente monumentais, é ainda deficiente. Estas construções pertencem a uma classe de estruturas de difícil análise pela ainda imperfeita caracterização dos materiais constitutivos e pelo escasso número de resultados de ensaios experimentais dinâmicos disponíveis para a calibração de modelos numéricos.

Para não violar as condições de semelhança entre os resultados experimentais e a realidade, as construções antigas devem ser analisadas experimentalmente com modelos de escalas próximas das reais. De facto, os efeitos de escala, aliados à complexidade da composição das alvenarias antigas, podem inviabilizar a correlação entre ensaios experimentais realizados em modelos de escala reduzida e o comportamento real da estrutura.

A necessária experimentação dinâmica com modelos à escala natural é uma actividade pouco vulgar, pois são recentes as mesas sísmicas e paredes de reacção de porte suficiente para permitir ensaiar estruturas de escalas próximas das reais. Os trabalhos experimentais com modelos à escala natural de edifícios antigos são ainda mais recentes, sendo escassa a informação disponível para a calibração de modelos numéricos.

Para se realizar um estudo aprofundado destas matérias, foi promovido um projecto de investigação pela Direcção Geral de Edifícios e Monumentos Nacionais (*DGEMN*), conjuntamente com o Laboratório Nacional de Engenharia Civil (*LNEC*) e com o Centro

Comum de Investigação da Comissão Europeia - Joint Research Centre (*JRC*). Este projecto, designado de projecto *COSISMO*, teve como objectivo principal a caracterização dinâmica duma estrutura monumental, através de ensaios "in situ", de modelações numéricas e de ensaios laboratoriais realizados num modelo à escala real. O ensaio experimental à escala real, realizado em laboratório, teve como objectivo a obtenção de dados para calibração e desenvolvimento de modelos numéricos de comportamento não linear, para serem usados na previsão da resposta sísmica deste tipo de estruturas.

Para objecto de estudo seleccionou-se o mosteiro de São Vicente de Fora (Figura 5.1), o qual representa, pela sua importância histórica e pela sua tipologia arquitectónica, um monumento típico de Lisboa. À semelhança de outros edifícios monumentais do Sul de Portugal, a sua estrutura resistente é formada por colunas e arcos em blocos de pedra calcária, associados a paredes de alvenaria e abóbadas em tijolo cerâmico. O modelo analisado experimentalmente corresponde a um módulo dessa estrutura, o qual se pretendia que fosse representativo do comportamento estrutural do mosteiro de São Vicente de Fora e, também, de outros monumentos.



Figura 5.1 - Vista do Mosteiro de São Vicente de Fora e de um dos seus claustro.

As principais tarefas do projecto de investigação foram as seguintes:

- 1) Levantamento da geometria e das patologias construtivas do mosteiro de São Vicente de Fora;
- 2) Estudo numérico tridimensional da estrutura completa do mosteiro para identificação das suas características dinâmicas (frequências próprias e modos de vibração);

- 3) Caracterização dinâmica do mosteiro através de ensaios de vibração ambiente para obtenção de frequências próprias, modos de vibração e estimativas das funções de transferência;
- 4) Ensaios de caracterização dos materiais constituintes da estrutura do mosteiro através de técnicas não destrutivas;
- 5) Selecção de materiais que melhor representem a estrutura existente e das técnicas construtivas a aplicar na construção do modelo experimental;
- 6) Identificação e definição das condições de fronteira do modelo experimental e das condições de carga a considerar nos ensaios experimentais;
- 7) Definição do plano de instrumentação do modelo experimental a implementar durante o ensaio experimental;
- 8) Realização de ensaios experimentais pseudo-dinâmicos para níveis de excitação sísmica correspondentes a dois períodos de retorno;
- 9) Desenvolvimento e calibração de modelos numéricos não lineares com base nos resultados experimentais;
- 10) Identificação de técnicas de reforço apropriadas para a estrutura em causa e verificação do seu comportamento em serviço através de ensaios experimentais.

A *DGEMN*, como principal impulsionadora deste projecto e responsável pela manutenção e conservação o edifício encarregou-se da descrição da estrutura e levantamento das suas principais patologias. O *LNEC*, pelo conhecimento da matéria em causa, teve parte activa nos estudos de modelação numérica elástica linear do edifício no seu conjunto, nos ensaios de caracterização dinâmica realizados "in situ" e nos ensaios não destrutivos de caracterização mecânica dos materiais. O *LNEC* procedeu igualmente à instalação de um acelerómetro na base do mosteiro para registo de eventuais vibrações sísmicas. O *JRC*, por dispor no seu laboratório *ELSA* (European Laboratory for Structural Assessment), em Ispra, de meios de cálculo e de uma

parede de reacção de grandes dimensões, adequados para ensaios pseudo-dinâmicos, realizou a modelação não linear da estrutura e efectuou todos os ensaios sobre um modelo, à escala real, de parte da estrutura do claustro do mosteiro.

Tratando-se de um projecto de escala multinacional debruçando-se num edifício representativo da arquitectura monumental portuguesa e sendo um dos primeiros ensaios dinâmicos em modelos à escala natural, a participação do autor no projecto *COSISMO* revelava-se da maior importância para a execução do presente trabalho. Assim, integrando a equipe do *JRC*, o autor participou activamente na preparação, execução e análise de resultados da campanha de ensaios realizada após reforço do modelo experimental.

Neste capítulo descrevem-se os passos e resultados obtidos nas diferentes fases do projecto *COSISMO*, dando especial ênfase à realização dos ensaios experimentais pseudo-dinâmicos.

5.2 - A ESTRUTURA ENSAIADA

5.2.1 - O Mosteiro de São Vicente de Fora

O mosteiro de São Vicente de Fora foi fundado em 1147 pelo rei D. Afonso Henriques, tendo sido totalmente reconstruído no final do século XVI. Não obstante os trabalhos realizados na primeira metade do século XVI, o edifício apresentava-se muito degradado no final desse século. Assim, Felipe II, rei de Espanha e de Portugal, decidiu dar início à reconstrução da igreja e do mosteiro de São Vicente de Fora pretendendo transformá-lo, num gesto político, no símbolo da nova dinastia reinante. A reconstrução teve início em 1583, com base num projecto do arquitecto italiano Filippo Terzi, o qual se baseou, muito provavelmente, em planos do arquitecto espanhol Juan de Herrera, arquitecto do rei e autor do Escorial em Espanha. Os trabalhos na igreja foram concluídos em 1629, embora continuassem no restante edifício do mosteiro até ao final do século XVIII.

Edificado e reedificado para os cónegos Regrantes de Santo Agostinho, o edifício serviu de sede da Patriarcal de 1773 a 1792 e de Patriarcado de 1834 a 1910, entidade a que voltou a ser entregue depois da concordata. Em 1910 a igreja foi classificada como monumento nacional, tendo a extensão dessa classificação ao restante mosteiro ocorrido apenas em 1944.

Localizado na parte antiga de Lisboa, a sua presença é marcante pelo seu volume, sendo um dos maiores conjuntos arquitectónicos da cidade, e pela sua implantação no tecido urbano, com a particularidade de ter sofrido relativamente poucos danos durante o terramoto de 1755. Alguns efeitos desse sismo são ainda visíveis: a parede exterior do lado Sul, com 2 metros de espessura, apresenta deformações da ordem dos 40 centímetros e na parede do lado Oeste também se detectam algumas deformações. Segundo registos, a parede do lado Este, onde se localiza actualmente o panteão, colapsou na sequência dos danos causado pelo sismo^{Pinto et al. 1998}.

O mosteiro contorna a igreja a Nascente e a Sul, desenvolvendo-se em quatro pisos e mantendo ainda uma "cerca" de, aproximadamente, 1 hectare. Tem dois claustros entre os quais se situa a sacristia, e um outro atrás da capela-mor da igreja. Os claustros são de planta quadrada, com cinco arcadas por lado e desenvolvem-se em três pisos, sendo o superior descoberto (Figura 5.1 e Figura 5.2). As arcadas são em cantaria de pedra calcária, material igualmente utilizado no pavimento e nervuras das abóbadas no primeiro piso. No segundo piso, por sua vez, o pavimento é em tijoleira e as abóbadas de aresta são em tijolo cerâmico rebocado.

As fundações do mosteiro são em pedra colocada directamente sobre o solo, sem que se detecte arranjos especiais na sua ligação aos elementos verticais (colunas e paredes). Do ponto de vista estrutural pode admitir-se que as colunas e as paredes estão simplesmente apoiadas.

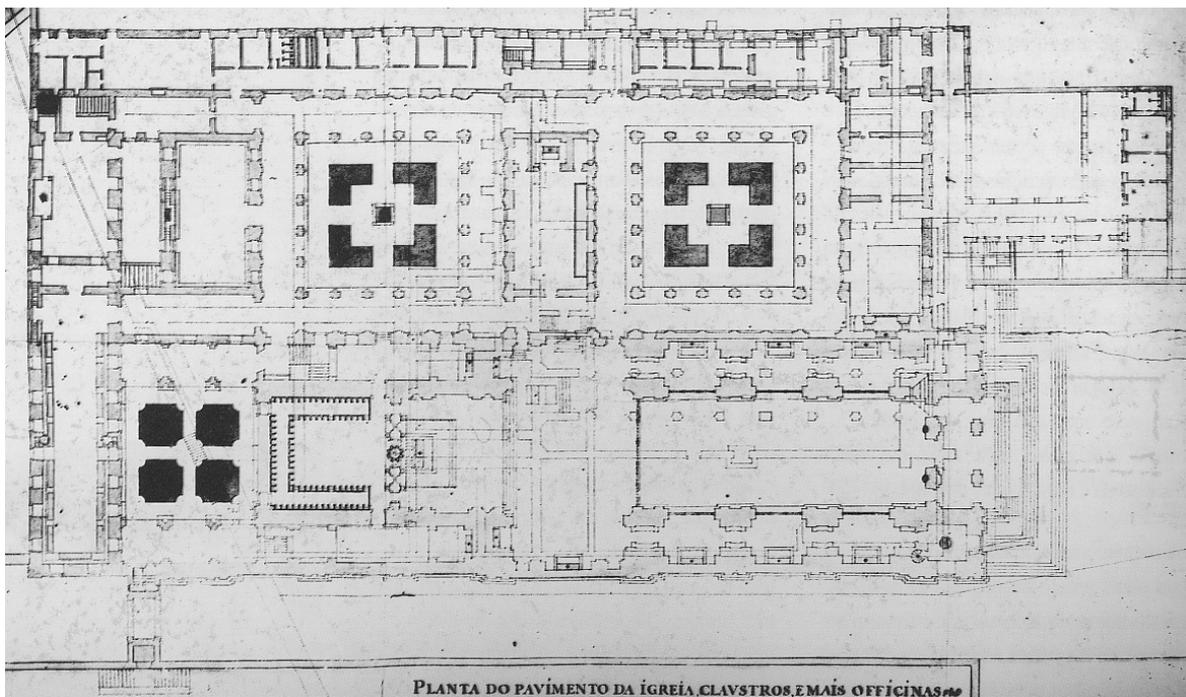


Figura 5.2 - Planta do mosteiro de São Vicente de Fora (Arquivo DGEMN).

5.2.2 - Estudos Preliminares

Seleccionado o monumento a estudar, o mosteiro de São Vicente de Fora, tornava-se necessário compreender o seu comportamento dinâmico global e identificar as partes da estrutura com maior influência na resposta sísmica do edifício. Este estudo preliminar permitiria definir as zonas a estudar com maior profundidade e identificar o módulo estrutural a ensaiar experimentalmente.

Os estudos realizados consistiram em:

- 1) Identificação das técnicas construtivas e das características mecânicas dos materiais construtivos;
- 2) Estudos numéricos com modelos de elementos finitos de comportamento elástico linear do monumento, com vista à identificação das suas características dinâmicas;
- 3) Caracterização dinâmica do mosteiro através de ensaios de vibração ambiente.

No seguimento destes trabalhos preliminares foi instalada no mosteiro de São Vicente de Fora uma estação digital para registo das acelerações de eventuais movimentos sísmicos^{Sousa e Martins, 1997}. Esta estação, que ficou integrada na rede portuguesa de acelerómetros digitais actualmente mantida pelo Instituto Superior Técnico (*IST*) e pelo *LNEC*, tem por objectivo adquirir registos sísmicos de boa qualidade do movimento do solo, em três direcções ortogonais.

As características mecânicas dos materiais que constituem a estrutura do mosteiro foram determinadas experimentalmente através de ensaios não destrutivo realizados "in situ", tendo-se obtido, através de ensaios de propagação de ultra sons, módulos de elasticidade dinâmicos da ordem de 2 a 4 GPa para as alvenarias e de 80 a 90 GPa para as cantarias de calcário^{Vaz, 1996}.

Os ensaios dinâmicos realizados "in situ" na zona dos claustros do mosteiro consistiram na medição das vibrações da estrutura devidas ao ruído ambiente, tendo-se identificado um modo dominante em ambos os claustros, de frequência próxima dos 4.35 Hz. Verificou-se que as

frequências 4.3-4.4 Hz, 4.69 Hz e 6.11 Hz, mantêm-se de forma sistemática de ponto para ponto da estrutura, pelo que poderão corresponder às frequências dos seus modos fundamentais de vibração^{Costa et al.,1996}. Salienta-se que as medições "in situ" podem ter sido influenciadas pela natureza das vibrações ambiente e que os resultados poderiam ter sido ligeiramente diferentes se a medição tivesse sido efectuada a partir de vibrações impostas por forças externas aplicadas à estrutura.

Os ensaios numéricos realizados no *LNEC*^{Cerqueira e Vaz,1997;Vaz,1997} e no *JRC*^{Dyngeland e Pinto,1997} consistiram na análise dinâmica de modelos tridimensionais de elementos finitos com comportamento elástico linear. Em ambas as instituições seguiu-se uma estratégia de modelação baseada em elementos estruturais (conforme descrito no parágrafo 4.2), utilizando elementos finitos de barra e de casca, no caso do modelos realizados no *LNEC*, e apenas de casca, no caso do modelo realizado no *JRC* (Figura 5.3).

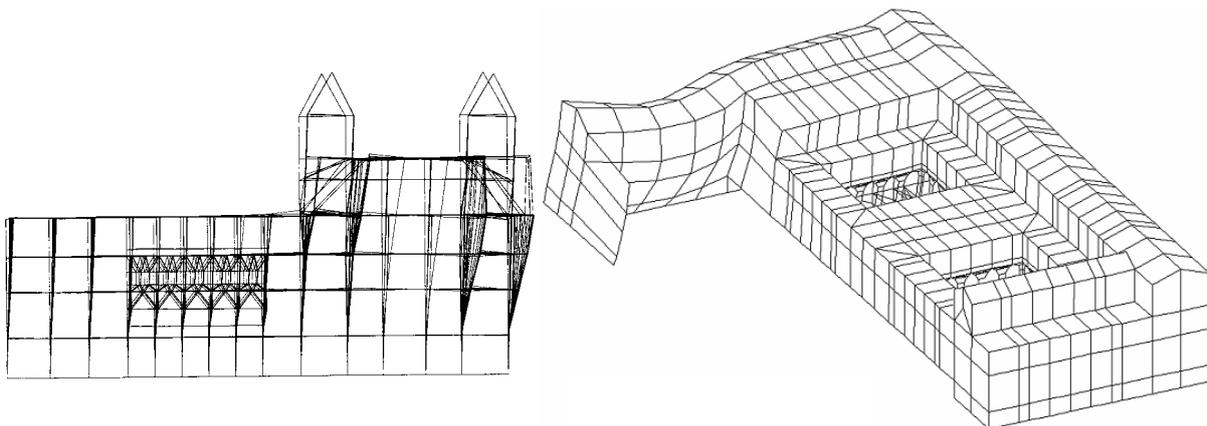


Figura 5.3 - Modelos tridimensionais de elementos finitos de comportamento elástico linear realizados no *LNEC* (esq.) e no *JRC* (dta.) - Configurações de modos de vibração.

Nestes modelos a complexidade arquitectónica do edifício foi simplificada, tendo-se usado elementos rectilíneos e de espessura constante. Os arcos e as abóbadas foram representados de forma muito aproximada por elementos de barra rectos e de casca.

Apesar das simplificações admitidas nas malhas de elementos finitos, quer ao nível da geometria, quer da caracterização mecânica dos materiais[†], os resultados obtidos para as frequências fundamentais e correspondentes configurações do modos de vibração, apresentam uma razoável aproximação aos medidos *in situ*.

[†] Que se consideraram elásticos e lineares e para os quais se admitiram módulos de elasticidade aproximados.

Em ambos os modelos numéricos estudou-se o efeito da acção sísmica. No estudo realizado no *LNEC* consideraram-se as acções sísmicas previstas na regulamentação portuguesa, com funções de densidade espectral de aceleração correspondentes a acções sísmicas do tipo 1 e do tipo 2, admitindo para o solo de fundação do edifício um solo do tipo II e um valor para o coeficiente de amortecimento de 5%, igual em todos os modos de vibração. No modelo desenvolvido no *JRC* a simulação dos efeitos da acção sísmica foi conseguida através da imposição e um registo de acelerações na base correspondente a um sismo relativamente severo, com acelerações de pico da ordem dos 3 a 4 ms⁻² e uma duração de 30 segundos. Em qualquer um dos modelos analisados identificaram-se níveis de tensão relativamente elevados na extremidade Este do edifício, isto é, na zona onde ocorreram os maiores danos durante o sismo de 1755, e nos elementos estruturais das arcadas do claustro. Verificou-se, também, que o comportamento dinâmico do mosteiro é muito condicionado pelo comportamento das estruturas arco-coluna que envolvem os claustros, tendo-se constatado que esse módulo estrutural é, dentro do conjunto de elementos estruturais que compõem o edifício, aquele que mais influência tem na resposta dinâmica global do monumento. Deste modo, querendo realizar ensaios experimentais sobre um modelo representativo do comportamento estrutural do edifício, esse modelo deveria reproduzir parte da arcada dos claustros.

5.2.3 - Estudos Numéricos para Definição do Modelo Experimental

Identificado o módulo estrutural representativo do comportamento dinâmico do mosteiro, tornava-se necessário definir a geometria do modelo à escala real a ensaiar no laboratório *ELSA*, assim como as respectivas condições de fronteira e de carregamento, de forma a otimizar as dimensões do modelo sem perder a representatividade da estrutura. Para esse efeito executaram-se no departamento computacional do laboratório *ELSA* modelos bidimensionais de elementos finitos^{Pegon e Pinto, 1996} que permitem a simulação do comportamento mecânico da estrutura real e de possíveis modelos experimentais.

Nos modelos numéricos bidimensionais da estrutura da arcada, constituída por arcos e colunas em blocos de calcário e paredes de alvenaria sobre os arcos, considerou-se todo o comportamento não linear concentrado nos elementos de interface que simulam as juntas entre blocos. Os blocos em cantaria de calcário e as paredes de alvenaria foram simuladas através de elementos finitos contínuos bidimensionais com comportamento elástico linear. Esta

simplificação na simulação numérica resulta de a intensidade das cargas que actuam na estrutura não fazer supor a ocorrência de colapso por esmagamento das alvenarias ou dos blocos, mas sim resultante da fractura, por abertura e deslizamento, das juntas entre blocos. Assim, no modelo numérico concentraram-se todos os danos nos elementos de interface que simulam as juntas, sendo a integridade dos elementos finitos contínuos, que simulam blocos e alvenaria, verificada à posteriori através do critério de rotura de Mohr-Coulomb:

$$\frac{\sigma_I}{\sigma_t} - \frac{\sigma_{III}}{\sigma_c} \leq 1 \quad (5.1)$$

em que $\sigma_I > \sigma_{III}$ são os valores principais do tensor das tensões e σ_c , σ_t as tensões limites, respectivamente à compressão e à tracção. Tendo em conta os resultados da caracterização experimental dos materiais, admitiu-se para os blocos de calcário $\sigma_c = 30$ MPa e $\sigma_t = 3$ MPa e para a alvenaria $\sigma_c = 10$ MPa e $\sigma_t = 0.1$ MPa.

De acordo com os estudos de caracterização dos materiais, admitiu-se para os elementos finitos bidimensionais de 8 nós, que simulam os blocos de calcário, um módulo de elasticidade $E = 23$ GPa, um coeficiente de Poisson $\nu = 0.20$ e uma massa específica $\rho = 2500$ kg/m³ e para os elementos finitos bidimensionais de 8 nós que simulam a parede de alvenaria um módulo de elasticidade $E = 2.3$ GPa, um coeficiente de Poisson $\nu = 0.20$ e uma massa específica $\rho = 1500$ kg/m³.

As juntas entre blocos foram simuladas através de elementos de interface de 6 nós com comportamento governado por uma lei de atrito de Coulomb elasto-plástica, com uma pequena dilatância. Como se pode observar na Figura 5.4 o modelo de comportamento adoptado para a interface associa as componentes do seu deslocamento relativo, abertura δ e escorregamento γ , com os esforços normal F_n e de corte F_t aplicados na junta.

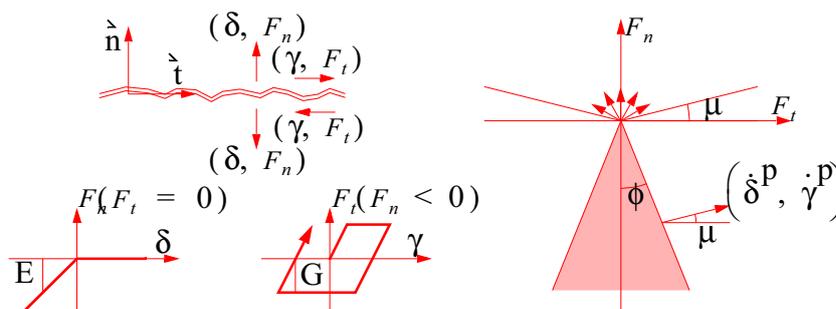


Figura 5.4 - Modelo de interface não linear implementado no laboratório ELSA^{Pegon e Pinto,1998}.

No domínio definido por:

$$|F_t| < F_n \cdot \tan\phi \quad (5.2)$$

a junta comporta-se elasticamente, sendo considerada uma lei de escoamento plástico não associada, definida pelo ângulo de dilatância ψ , quando o ponto representativo do tensor das tensões sai fora dos limites desse domínio.

O modelo de interface é caracterizado por quatro parâmetros: o módulo de elasticidade e o módulo de distorção, ângulo de atrito e ângulo de dilatância, para os quais se admitiu[†], respectivamente, $E_j = 115$ GPa/m e $G_j = 47.9$ GPa/m, $\phi = 30^\circ$ e $\psi = 5^\circ$. Considerou-se coesão nula em todos os elementos de interface, pelo que apenas transmitem esforços normais de compressão.

A estrutura de arcos e colunas que se pretendia analisar podia ser considerada como uma sucessão de células idênticas sujeitas às mesmas condições de carregamento vertical e horizontal. Assim, o comportamento da fachada completa foi modelado a partir de uma única célula, impondo condições de fronteira apropriadas nas suas extremidades. Assim, a definição do modelo experimental e dos seus carregamentos vertical e horizontal seguiu os seguintes passos (Figura 5.5):

- 1) Um primeiro passo onde foi analisada toda a estrutura periódica através de uma célula com condições de fronteira de continuidade, sendo a parede de alvenaria sobre os arcos explicitamente incluída no modelo de elementos finitos da fachada;
- 2) Um segundo passo onde a parte superior da parede de alvenaria, correspondente ao segundo piso do claustro, foi removida, sendo a sua acção substituída por cargas uniformemente distribuídas. A comparação dos resultados deste modelo com os resultados do modelo do passo anterior permitiu a definição de cargas equivalentes que conduziam ao mesmo estado de tensão na parte inferior da estrutura;

[†] Os valores do módulo de elasticidade E_j e de distorção G_j resultaram da análise da deformabilidade de uma junta com meio centímetro de espessura e $E = 115$ MPa e $\nu = 0.20$.

- 3) Uma vez que a aplicação de carga uniformes não é facilmente implementada em ensaios experimentais, foi necessário, num terceiro passo, definir um carregamento praticável que conduza a resultados equivalentes aos do modelo do passo anterior. Até este passo, inclusivé, a estrutura pôde ser considerada periódica e os cálculos efectuados numa única célula com condições de fronteira adequadas;
- 4) Finalmente, num 4º passo, a definição final do modelo experimental foi conseguida determinando o números de arcos necessários para representar a estrutura eficazmente e definindo as condições de fronteira que é necessário implementar no modelo.

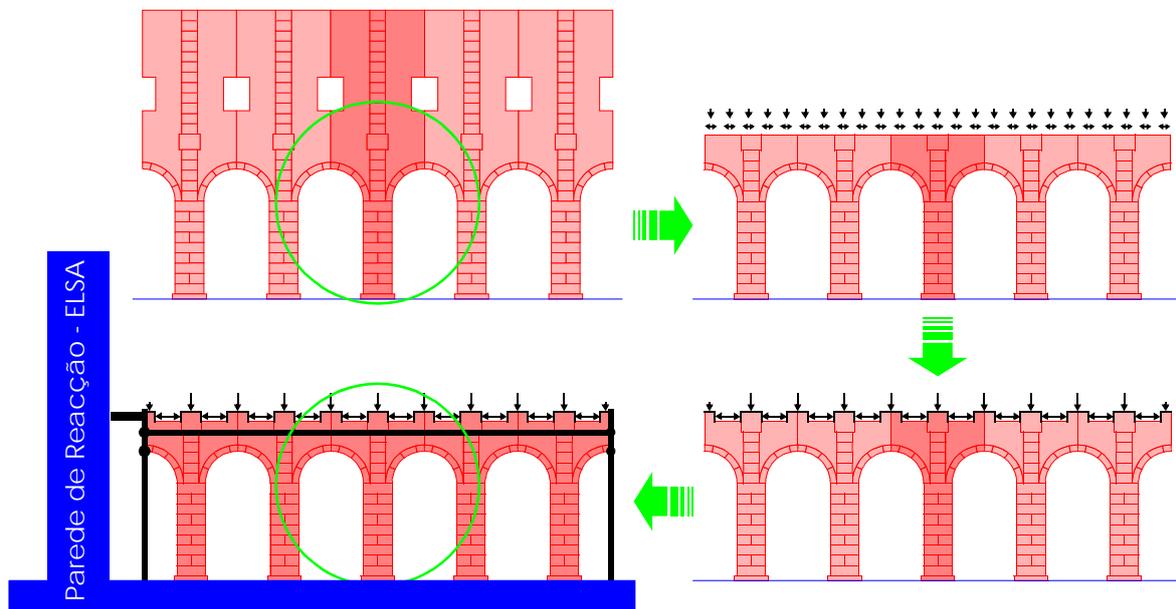


Figura 5.5 - Definição do modelo experimental: da fachada ao modelo^{Pegon,1998}.

Em relação à acção vertical correspondente ao peso próprio da parede de alvenaria sobre os arcos, que não foi construída no modelo experimental, representam-se na Figura 5.6 os resultados das análises não lineares relativas aos passos anteriormente descritos. O campo de tensões instalado na estrutura é representado nessa figura através da quantidade adimensional:

$$\sigma_{eq} = \sigma_I / \sigma_t - \sigma_{III} / \sigma_c \quad (5.3)$$

que representa a posição do tensor das tensões relativamente à superfície de Mohr-Coulomb[†] e

[†] Valores superiores a 1.0 correspondem à violação do critério de rotura de Mohr-Coulomb.

que neste trabalho se designará por tensão equivalente de Mohr-Coulomb.

Conforme se observa na Figura 5.6, no primeiro passo de análise a parede foi explicitamente discretizada na malha de elementos finitos, sendo eliminada da malha nos passos seguintes. No segundo passo a acção do peso próprio da parede de alvenaria foi simulada através de uma carga uniformemente distribuída e no terceiro, que corresponde ao modelo experimental, essa acção vertical foi simulada através de cargas concentradas. Como descrito no parágrafo 5.2.5, o esquema previsto para aplicação das cargas horizontais no modelo exige a existência de entalhes na sua parte superior e a aplicação das cargas verticais conforme indicado na Figura 5.7. No terceiro passo de análise consideraram-se duas metodologias para a aplicação das cargas verticais concentradas: uma que resulta naturalmente da simplificação de cargas uniformes para concentradas (Figura 5.6 c); e outra que simula o esquema de aplicação das cargas verticais no modelo (Figura 5.6 d).

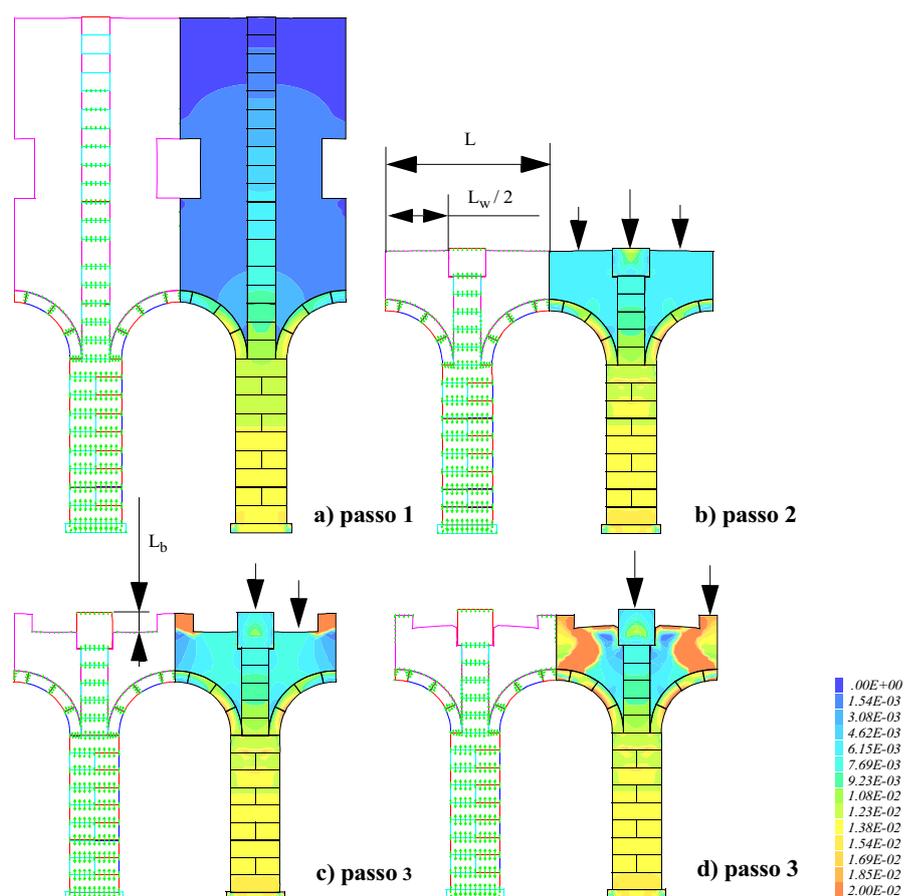


Figura 5.6 - Definição do modelo experimental: acção vertical correspondente ao peso próprio da parede de alvenaria (interacção entre blocos e distribuições de tensão) *Pegon e Pinto, 1996*.

Nas análises realizadas com os modelos sujeitos à acção das cargas equivalentes ao peso próprio

da parede de alvenaria identificam-se diferenças nas distribuições de tensão na alvenaria (Figura 5.6). No entanto, no que diz respeito aos elementos em cantaria (arcos e colunas), as forças de interação entre blocos e as distribuições de tensão são similares, concluindo-se, assim, que o esquema de carregamento vertical previsto para o modelo experimental (Figura 5.7) desenvolve nos arcos e colunas tensões idênticas às que ocorrem no modelo fachada completa.

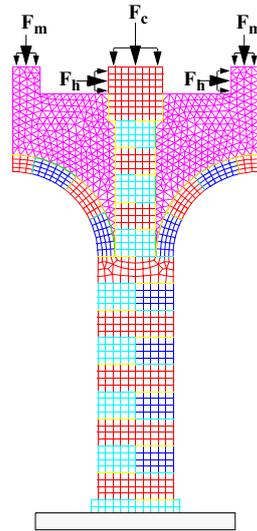


Figura 5.7 - Esquema de aplicação das acções verticais e horizontais no modelo experimental.

Usualmente em análises numéricas a acção vertical correspondente ao peso próprio dos materiais é aplicada num único passo e considerando a geometria original da estrutura. No entanto, em muitos casos este passo envolve cálculo não linear, o qual é dependente da história do carregamento. Deste modo, sendo o resultado da análise não linear dependente do procedimento de aplicação das cargas, é importante verificar a influência da estratégia de carregamento no resultado final do modelo numérico. Para este efeito consideraram-se duas metodologias de aplicação do peso próprio da parede de alvenaria *Pegon e Pinto, 1998*: uma, a usual, em que o peso próprio foi aplicado num só passo, e outra, tentando simular uma possível sequência construtiva, em que se consideraram 20 passos de carregamento (Figura 5.8).

Como se pode observar na Figura 5.9, as distribuições de tensões na alvenaria diferem nas duas estratégias de aplicação do peso próprio, verificando-se ocorrerem concentrações de tensões junto das aberturas das janelas quando se considera a aplicação faseada do peso próprio, facto que não ocorre quando se aplica o peso próprio de uma só vez. No entanto, as tensões nas colunas e nos arcos não apresentam diferenças significativas, pelo que as análises numéricas posteriores foram realizadas através da metodologia usual de aplicação do peso próprio num só

passo.

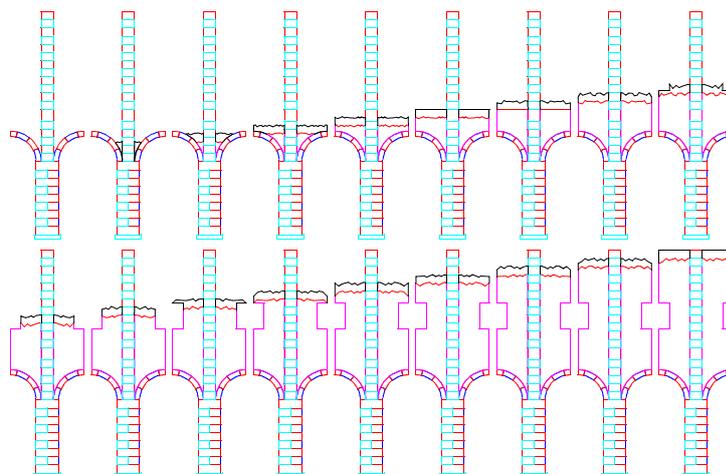


Figura 5.8 - Aplicação incremental do peso próprio.

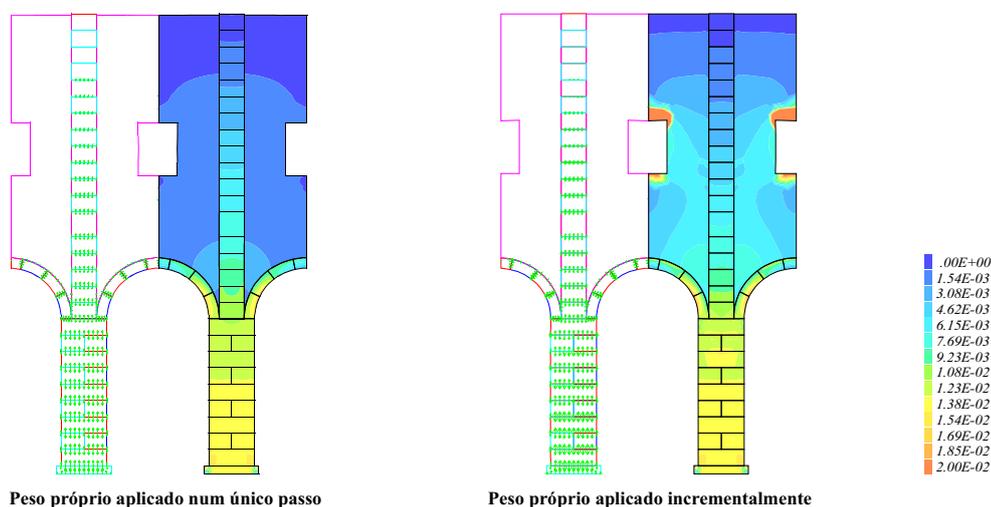


Figura 5.9 - Distribuições de tensão devidas ao peso próprio da parede de alvenaria *Pegon e Pinto, 1998*.

Este exemplo serve, também, para se perceber as dificuldades na análise numérica de estruturas de edifícios antigos. Por um lado, o campo de tensões realmente instalado no edifício é dependente do processo construtivo e das solicitações a que esteve sujeito na sua vida, sendo, naturalmente, diferente daquele que se obtém pela análise numérica. Por outro, é usual modelar numericamente estruturas existentes com base nos levantamentos geométricos. No entanto a geometria do modelo estrutural deveria resultar de um problema inverso, pois a geometria do levantamento já reflecte os efeitos da aplicação das cargas permanentes, da sequência construtiva e de outras solicitações. Embora estas dificuldades possam comprometer algumas análises, nas situações correntes obtém-se bons resultados com simulações conduzidas da forma usual.

Em virtude da natureza dos ensaios pseudo-dinâmicos[†], que foram executados sobre o modelo experimental, a simulação da acção sísmica foi realizada através da aplicação de acções estáticas equivalentes, que consistem em forças horizontais proporcionais ao peso próprio γg e à altura y do ponto de aplicação:

$$F = a \gamma g y \quad (5.4)$$

em que a é uma variável correspondente à intensidade da acção sísmica. Como é conhecido, a resposta da estrutura a esta acção equivalente é, aproximadamente, proporcional ao seu primeiro modo de vibração.

O modo de colapso da estrutura das arcadas quando submetida a uma acção horizontal está associado à rotação da coluna em torno da sua base, com formação de uma articulação no topo da coluna (próximo da base do arco), com a ocorrência simultânea de aberturas e deslizamentos das secções dos arcos (Figura 5.10). São esperados danos na alvenaria junto dos arcos e danos menos severos poderão ocorrer nos blocos nas bases dos arcos e das colunas.

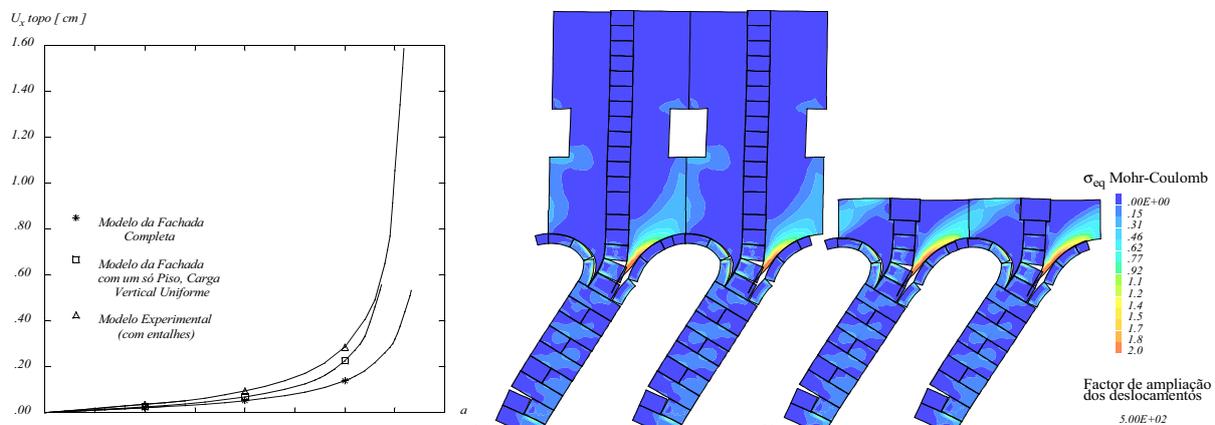


Figura 5.10 - Deslocamentos nos tops das colunas (esquerda) e distribuições de tensão (direita) das estruturas periódicas sujeitas às acções estáticas horizontais equivalentes^{Pegon e Pinto,1996}.

Com o objectivo de identificar o método de aplicação das acções horizontais ao modelo experimental, e seguindo a metodologia atrás descrita, as estruturas periódicas da fachada completa, da fachada de um só piso, sujeita a acção vertical uniforme, e da fachada de um só piso com entalhes e sujeita a cargas verticais concentradas, que corresponde ao modelo experimental, foram analisadas numericamente sob a acção de cargas horizontais^{Pinto e}

[†] Os ensaios pseudo-dinâmicos serão promenorizadamente descritos no parágrafo 5.3.

Pegon, 1996. Na Figura 5.10 representam-se os resultados correspondentes a estas análises, nomeadamente os diagramas do deslocamento horizontal no topo das colunas e as distribuições de tensão[†] correspondentes aos dois primeiros modelos.

Como se pode observar na Figura 5.10, os resultados correspondentes aos modelos das várias estruturas periódicas são semelhantes, pelo que, também para o efeito das acções horizontais, se pode considerar adequada a estratégia adoptada para definição do carregamento do modelo.

Como é natural, o modelo experimental tem um número finito de colunas, sendo necessário definir o seu número ideal e as condições de fronteira que conduzam a uma eficiente reprodução da periodicidade. Deste modo, as extremidades do modelo foram restringidas através de chapas de aço, ligadas entre si através de barras pós-tensionados, reproduzindo o confinamento conferido pelas células adjacentes, e de modo a se obter deslocamentos horizontais idênticos nas duas extremidades do modelo. A igualdade dos deslocamentos verticais, que resulta da existência da parede sobre as arcadas, foi imposta através de actuadores verticais.

Definido o processo de imposição das condições de fronteira e de periodicidade no modelo, era necessário modelar numericamente modelos com várias colunas, de forma a identificar o número mínimo de colunas correspondente a uma parte central representativa da estrutura periódica. Análises numéricas realizadas com modelos de duas, três, quatro e cinco colunas^{*Pegon e Pinto, 1996*} (Figura 5.11) mostraram que os resultados do modelo com três colunas se aproximam suficientemente dos resultados da estrutura periódica, sendo este o número de colunas mínimo necessário para a simulação do comportamento da estrutura real.

Concluiu-se, assim, o procedimento de projecto do modelo experimental, o qual resultou no modelo representado na Figura 5.12.

5.2.4 - A Execução do Modelo Experimental

O modelo experimental, que resultou dos estudos descritos no parágrafo 5.2.3, foi uma estrutura plana com três colunas, dois arcos completos e dois meios arcos nas extremidades. Os arcos e

[†] Na Figura 5.10 o campo de tensões é representado através da quantidade adimensional tensão equivalente de Mohr-Coulomb, anteriormente descrita.

colunas são em cantaria de calcário e a parte superior em alvenaria. O modelo construído em laboratório foi executado utilizando materiais e técnicas (arranjos dos blocos) semelhantes aos da estrutura original. Para esse efeito importaram-se de Portugal blocos de pedra calcária semelhante à existente no mosteiro de São Vicente de Fora e as argamassas foram executadas com composições de água, areia e cal próximas daquelas que podem ter sido utilizadas na construção do monumento. À semelhança do que se identificou na estrutura original, as juntas entre blocos de pedra foram executadas com 3 milímetros de espessura.

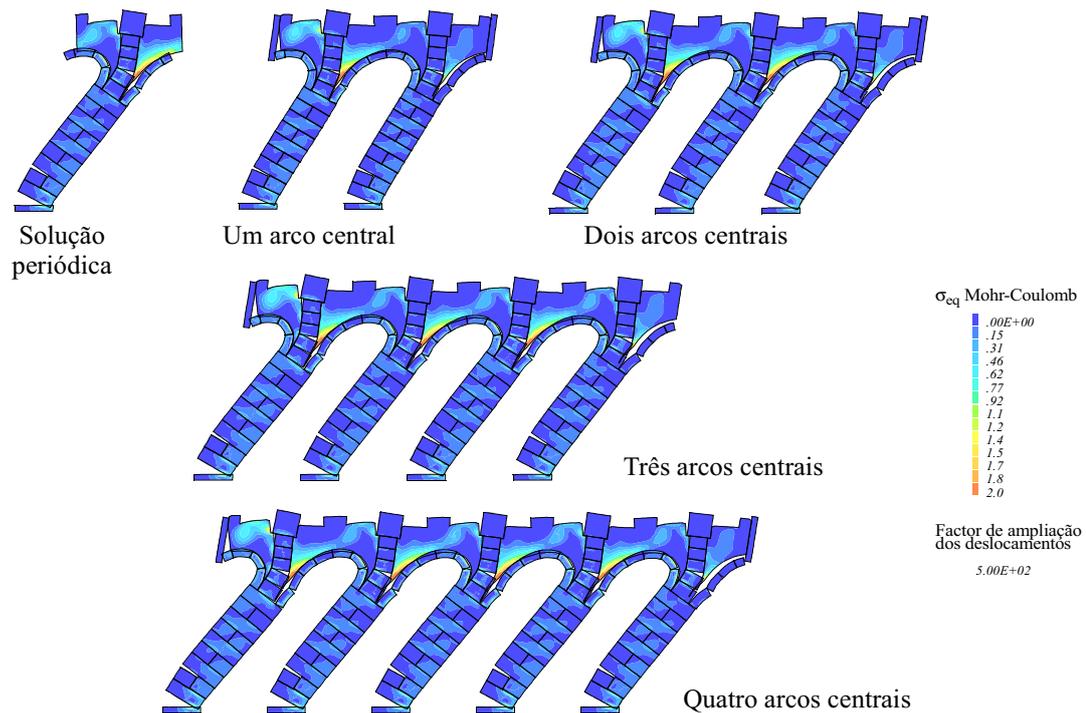


Figura 5.11 - Distribuições de tensão - variação do número de colunas nos modelos *Pegon e Pinto, 1998*.

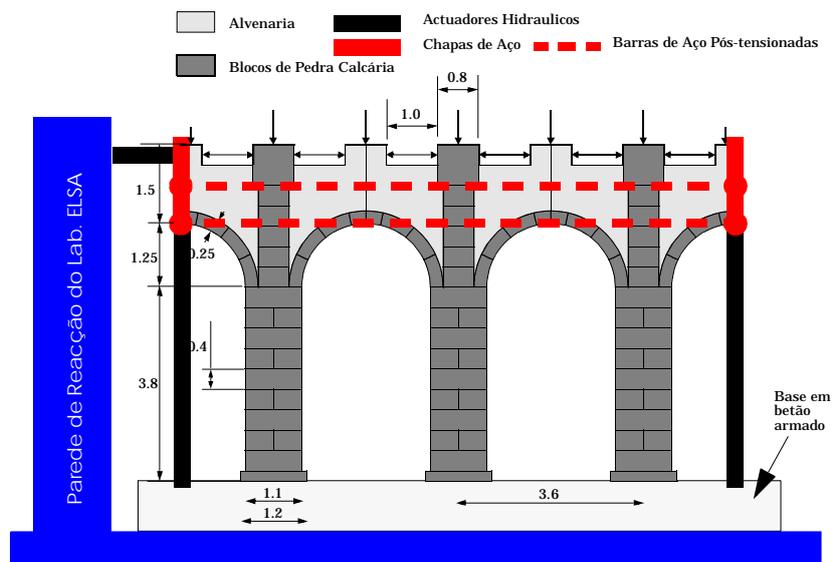


Figura 5.12 - Modelo final do modelo com três colunas *Pegon et al., 1999*.

Na Figura 5.13 representa-se o plano de execução do modelo, onde se pode identificar o arranjo das pedras que constituem as colunas e na Figura 5.14 representam-se imagens de várias fases da construção do modelo. Na Figura 5.15 representam-se imagens do aspecto final do modelo experimental, do respectivo aparato de instrumentação e sistema de aplicação de cargas.

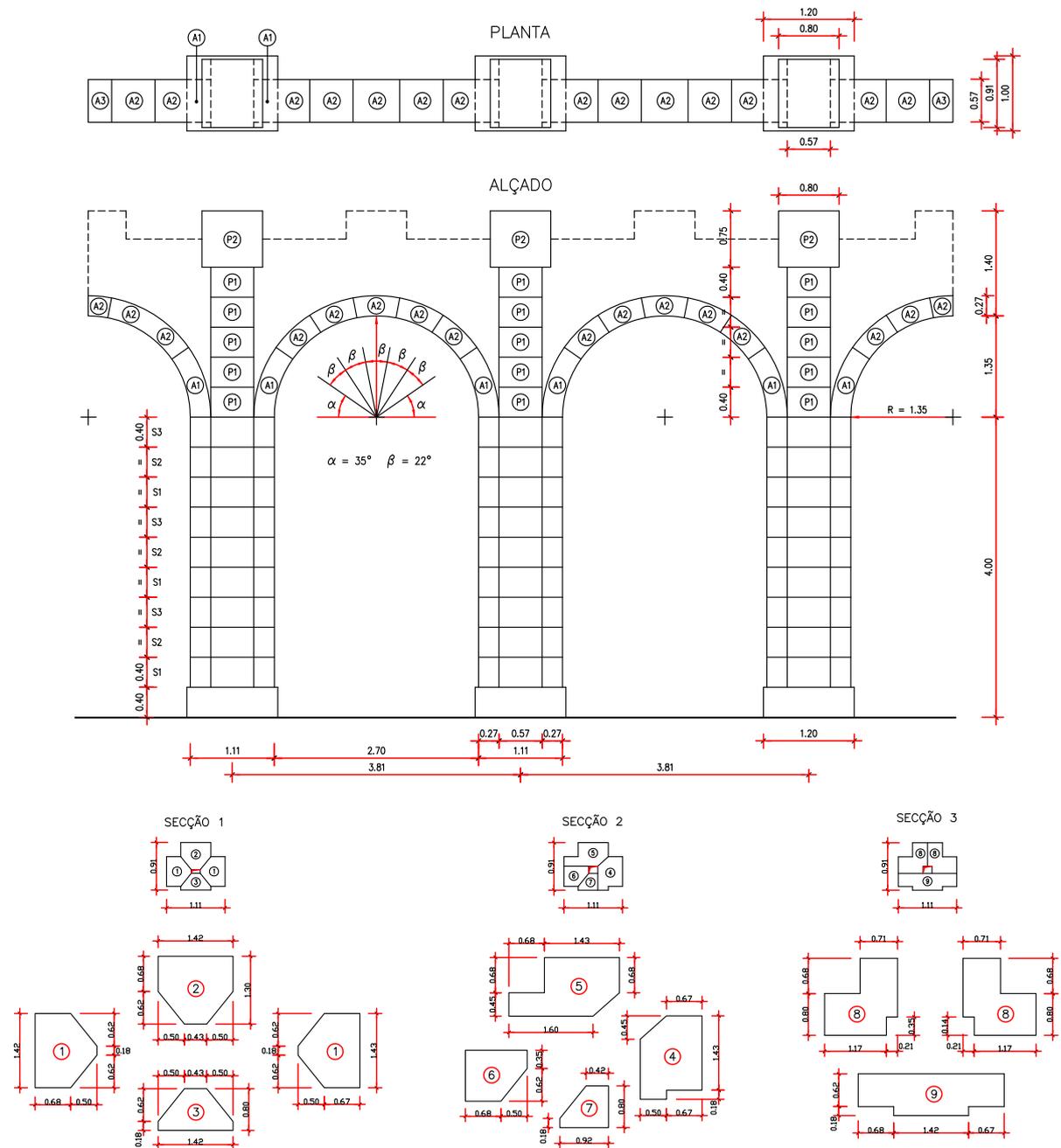


Figura 5.13 - Plano de execução do modelo experimental^{Vaz,1996}.

Após a realização de uma primeira campanha de ensaios (cujos resultados são apresentados no parágrafo 5.4.1) o modelo foi reforçado através da inclusão de duas barras de aço no seu interior, ao nível da alvenaria superior do modelo, com injeção de caldas de cimento. Adoptou-se a

solução comercial “*CINTEC-Cavity Lock Systems*”, que possibilita a execução de furos de grande comprimento com desvios pouco significativos.

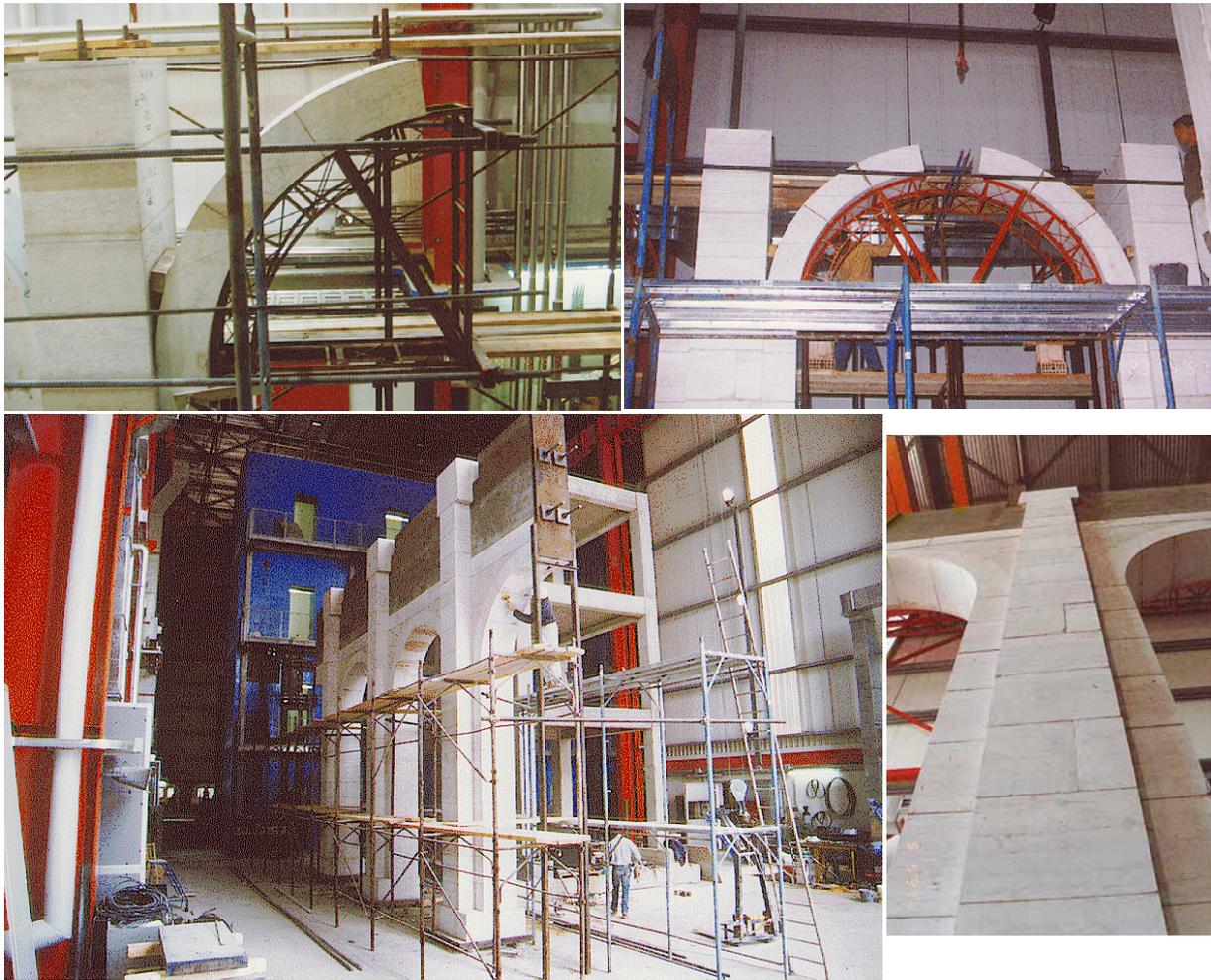


Figura 5.14 - Fases de construção do modelo experimental.



Figura 5.15 - Vistas do aspecto final do modelo experimental.

No sistema de reforço adoptado as furações são executadas na estrutura e, posteriormente, introduzidas barras de aço revestidas em mangas de tecido. Após a colocação das barras nos furos foi injectada uma calda de cimento sob alta pressão, por dentro da manga de tecido que reveste as barras, obtendo-se boas condições de aderência entre a alvenaria e os cabos de reforço. Na solução implementada no modelo, as barras de aço de reforço foram sujeitas a um pré-esforço de 20 kN antes da injeção das caldas de cimento.

Na Figura 5.16 representam-se imagens do procedimento de reforço do modelo e do sistema comercial CINTEC. Após o reforço do modelo realizaram-se novos ensaios cíclicos sobre o modelo, cujos resultados serão apresentados no parágrafo 5.4.2).



Figura 5.16 - Reforço do modelo com o sistema de ancoragem CINTEC.

5.2.5 - Sistemas de Aplicação das Cargas e Plano de Instrumentação

Relativamente à acção sísmica que se pretendia impor no modelo de forma quase estática, através de cargas horizontais equivalentes, existiam duas condições a garantir: uma distribuição de forças horizontais uniforme e uma deformação idêntica à que resultaria da imposição da acção horizontal na fachada real.

Para garantir uma deformação do modelo, quando submetido à acção das cargas horizontais,

semelhante à deformação da fachada completa, isto é, uma deformação de corte, o momento derrubante provocado pelas forças horizontais aplicadas no topo do modelo foi compensado através de forças verticais impostas por actuadores localizados junto das colunas do modelo (actuadores *D* e *E* - Figura 5.17). Deste modo, além das acções verticais correspondentes ao peso da parede superior, que não foi explicitamente modelada, os dois actuadores *D* e *E* impuseram acções verticais que geraram uma deformação semelhante à que ocorre com a fachada completa.

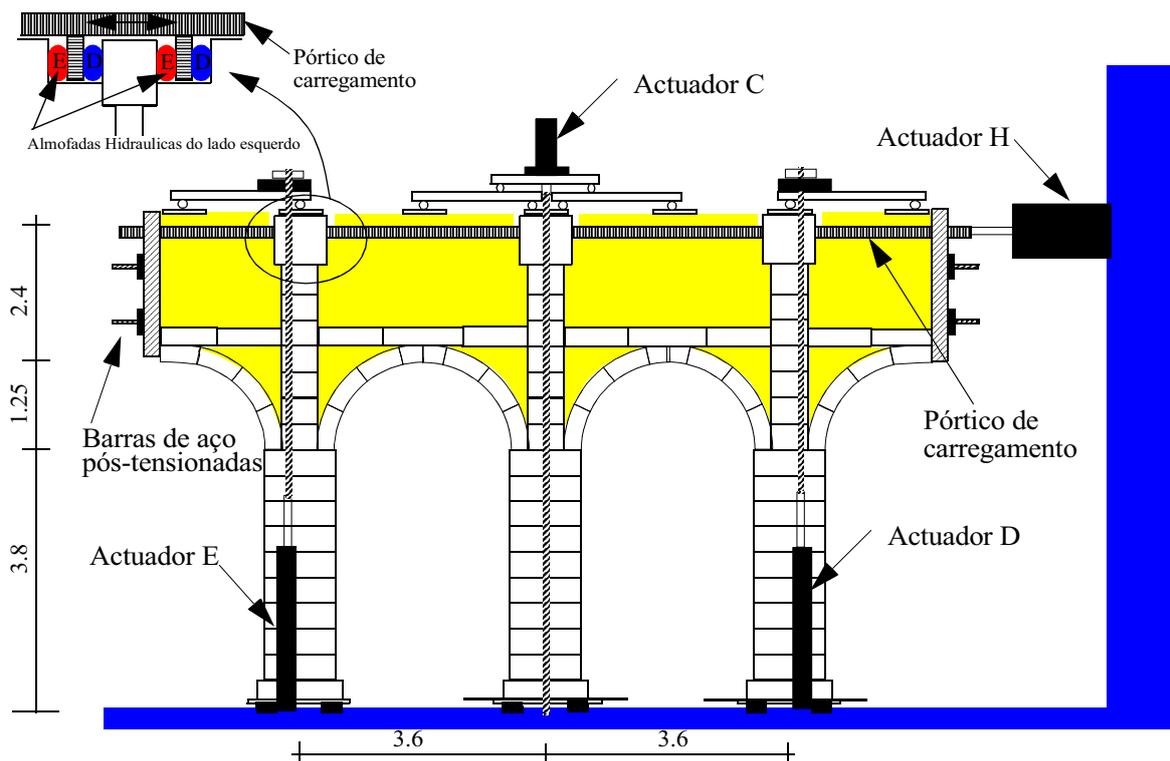


Figura 5.17 - Sistema de aplicação das cargas no modelo experimental^{Pinto e Gago,1999a)b}.

O controle dos dois actuadores verticais foi efectuado através da imposição das seguintes condições:

$$d_D = d_E \quad \text{e} \quad F_V = F_D + F_E \quad (5.5)$$

em que d representa o deslocamento vertical do topo das colunas direita (*D*) e esquerda (*E*), que deverão ser iguais, F_V é a força vertical total aplicada pelos dois actuadores[†] e F_D e F_E as forças verticais impostas pelos actuadores *D* e *E*, respectivamente. A força vertical F_V correspondente ao peso da parede superior foi estimada em 450 kN por coluna, a qual foi repartida pela coluna

[†] Que por simplicidade do aparato experimental se admitiu ser constante.

e pela alvenaria através de um sistema mecânico que garantia uma distribuição semelhante à obtida nos modelos numéricos (Figura 5.18).

O actuador situado sobre a coluna central (actuador *C* - Figura 5.17) impôs na estrutura uma força constante correspondente ao peso da parede superior, a qual se estimou em 600 kN, repartida pela coluna e alvenaria através de um sistema mecânico (Figura 5.18).

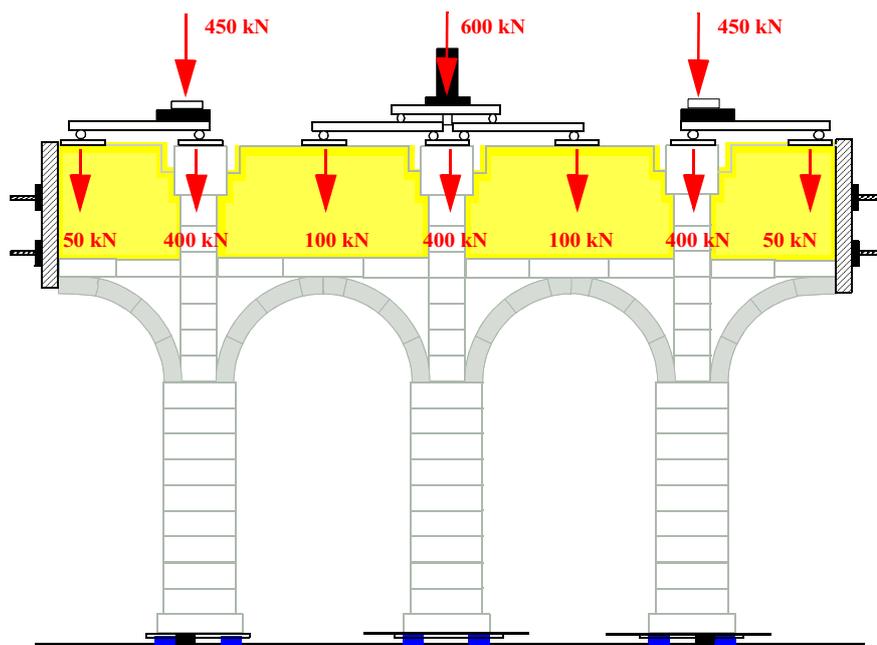


Figura 5.18 - Distribuição das acções verticais aplicadas ao modelo experimental.

A aplicação da acção horizontal correspondente à excitação sísmica foi realizada através de um sistema de aplicação de cargas especificamente desenvolvido para este ensaio, o qual garantia uma distribuição uniforme das forças horizontais ao longo de todo o comprimento do modelo. Como representado esquematicamente na Figura 5.17, a força horizontal foi transmitida do actuador *H* ao modelo a partir duma viga de carregamento (*pórtico de carregamento*) através de almofadas hidráulicas interligadas. Quando a força horizontal era imposta no sentido da direita para a esquerda, as almofadas do lado esquerdo (almofadas *E*) dos elementos transversais da viga de carregamento, que comunicavam entre si, desenvolviam iguais pressões e, conseqüentemente, forças semelhantes. Quando a força horizontal era imposta no sentido da esquerda para a direita, o mesmo acontecia com as almofadas do lado direito (almofadas *D*) que estavam interligadas. Este sistema hidráulico para aplicação das cargas horizontais possibilitava uma distribuição uniforme das cargas ao longo do comprimento do modelo e evitava deformações irrealistas nas zonas onde as cargas eram aplicadas.

Em relação ao sistema de instrumentação projectado para esta campanha de ensaios, foram medidos os seguintes tipos de resultados (Figura 5.19 e Figura 5.20):

- 1) na base das colunas foram colocadas células de carga com o objectivo de medir a evolução das forças verticais e dos momentos flectores actuantes nos apoios das colunas;
- 2) as rotações relativas dos blocos de pedra das colunas foram medidas em toda a altura das colunas;
- 3) a deformabilidade dos arcos foram obtidas a partir das medições realizadas em três transdutores de deslocamentos localizados nas zonas de contacto dos blocos dos arcos e de outros transdutores de deslocamentos que registavam o movimento global desses blocos;

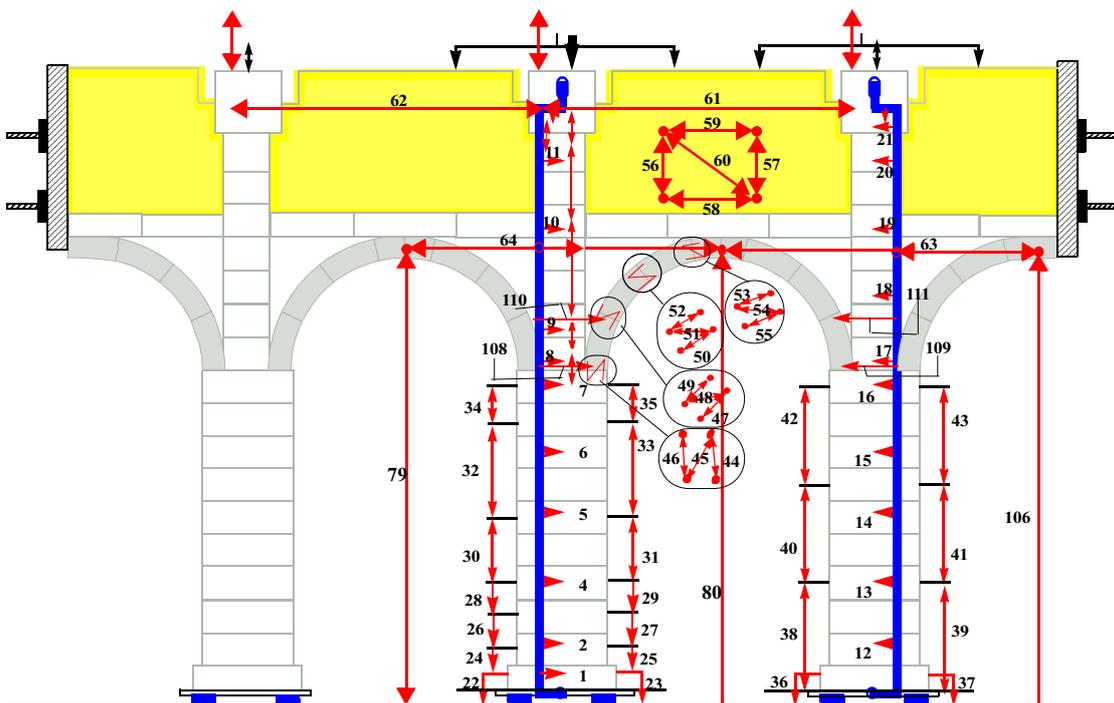


Figura 5.19 - Esquema de instrumentação do modelo experimental - transdutores de deslocamento.

- 4) os deslocamentos vertical e horizontal das pedras de fecho dos arcos foram também registados através de transdutores de deslocamentos;
- 5) a deformação da alvenaria na parte superior do modelo foi registada através de

transdutores de deslocamentos;

- 6) as forças actuantes em cada um dos cabos internos horizontais (pós-tensionados), que ligavam as chapas extremas do modelo, assim como as intensidades das forças aplicadas pelos actuadores verticais e horizontais foram registadas continuamente ao longo do ensaio.

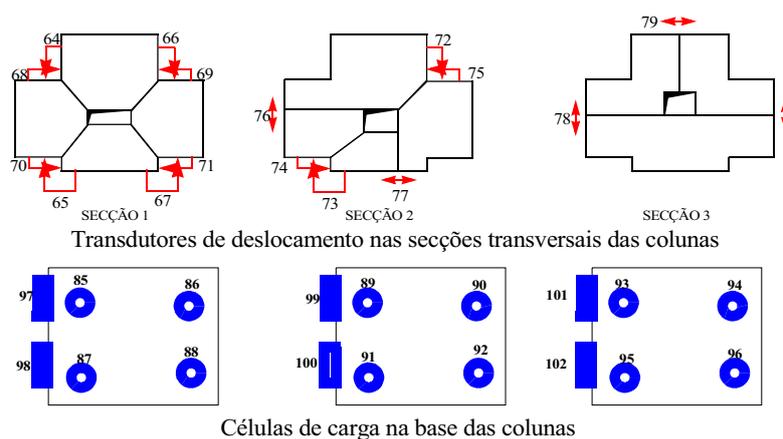


Figura 5.20 - Instrumentação das secções das colunas e das suas bases.

5.3 - ENSAIOS PSEUDO-DINÂMICOS

5.3.1 - Metodologia dos Ensaio Pseudo-Dinâmicos

O método pseudo-dinâmico (PSD) para ensaios experimentais é uma técnica de ensaio que combina as técnicas experimentais clássicas com o cálculo numérico. Neste método híbrido alia-se a integração numérica das equações de movimento com as medições experimentais das propriedades reais da estrutura ensaiada, conseguindo-se, deste modo, simular realisticamente a resposta dinâmica da estrutura através de um ensaio conduzido de forma quase estática. As equações de movimento da estrutura a ensaiar, discretizadas num número reduzido de graus de liberdade, são resolvidas incrementalmente ao longo do ensaio através de um procedimento adequado de integração numérica no tempo, sendo as forças de inércia e de amortecimento viscoso modeladas numericamente, enquanto que a parcela das forças de restituição é obtida directamente do ensaio experimental. Deste modo, não só se evita a necessidade de um conhecimento detalhado das propriedades mecânicas da estrutura, como também se consegue ter em conta com as alterações devidas à progressiva danificação dos materiais.

Para simular a resposta dinâmica de uma estrutura quando solicitada por um sismo é necessário conhecer o correspondente registo histórico das acelerações do solo, o qual será utilizado como dado para o algoritmo computacional do procedimento pseudo-dinâmico. Os deslocamentos horizontais dos graus de liberdade correspondentes à discretização das equações de movimento da estrutura são calculados numericamente para incrementos de tempo reduzidos, utilizando um procedimento de integração numérica, e aplicados à estrutura em teste através de actuadores hidráulicos fixados à parede de reacção do laboratório. Simultaneamente, são medidas através de células de carga nos actuadores, as forças necessárias para se conseguir esses deslocamentos. As intensidades dessas forças de restituição, medidas experimentalmente, são reenviadas para o algoritmo que controla o procedimento pseudo-dinâmico, para serem utilizadas no passo de cálculo seguinte.

As equações discretas que traduzem o equilíbrio dinâmico da estrutura podem ser escritas na forma:

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{r}(\mathbf{d}) = \mathbf{f} \quad (5.6)$$

em que \mathbf{a} , \mathbf{v} e \mathbf{d} são os vectores das acelerações, velocidades e deslocamentos, respectivamente, dos graus de liberdade de discretização da estrutura, \mathbf{M} a matriz de massa, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, \mathbf{f} o vector correspondente às forças externas aplicadas[†] e \mathbf{r} o vector das forças de restituição. No caso de comportamento elástico tem-se $\mathbf{r}(\mathbf{d}) = \mathbf{K}\mathbf{d}$, sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez elástica da estrutura. A equação de movimento (5.6) pode ser escrita incrementalmente no domínio do tempo, na forma:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{i+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{f}_{i+1} \quad (5.7)$$

em que \mathbf{a}_{i+1} e \mathbf{v}_{i+1} são, respectivamente, as aproximações dos vectores das acelerações e velocidades no instante t_{i+1} , \mathbf{f}_{i+1} o vector das forças externas no instante t_{i+1} e \mathbf{r}_{i+1} o vector das forças de restituição que correspondem à configuração de deslocamentos \mathbf{d}_{i+1} aplicados à estrutura.

[†] A acção sísmica é tida em conta nesta parcela através da contribuição das forças de inércia:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{M}\mathbf{L}\mathbf{a}_s$$

em que \mathbf{a}_s é o vector das acelerações da base, \mathbf{M} a matriz de massa e \mathbf{L} a matriz de transformação que traduz a contribuição da acção sísmica nos graus de liberdade discretos da equação de movimento.

Esta equação é utilizada conjuntamente com as expressões o processo de integração no algoritmo do ensaio pseudo-dinâmico, o qual se pode resumir nos seguintes passos:

- 1) cálculo dos deslocamentos d_{i+1} de acordo com as expressões do método de integração adoptado;
- 2) aplicação desses deslocamentos à estrutura e medição das forças de reacção nos actuadores hidráulicos, isto é, das forças de restituição r_{i+1} ;
- 3) cálculo de a_{i+1} e v_{i+1} utilizando a expressão (5.7), conjuntamente com as expressões do método de integração adoptado;
- 4) recomeço do passo (1) para o instante de tempo seguinte.

Na Figura 5.21 representa-se esquematicamente o procedimento do ensaio PSD implementado no laboratório *ELSA*.

Existem diferentes métodos de integração numérica que podem ser adoptados no algoritmo pseudo-dinâmico, sendo que em qualquer um deles é possível, conjuntamente com a equação de equilíbrio dinâmico, determinar os vectores das acelerações a_{i+1} e das velocidades v_{i+1} , uma vez conhecido o vector dos deslocamento no instante seguinte.

No sistema de ensaios pseudo-dinâmicos implementado no laboratório *ELSA*, o método de integração numérica resulta da combinação do método de integração " α -implícito", inicialmente desenvolvido por Hilber^{Hilber et al.,1977}, e do método de integração "*Operator-Splitting (OS)*", proposto por Nakashima^{Nakashima et al.,1990}. Este procedimento misto, desenvolvido no laboratório *ELSA*^{Combesure e Pegon,1994}, possibilita a utilização do método " α -implícito", que se trata de um método incondicionalmente estável, com precisão de 2ª ordem e com dissipação numérica, sem a a necessidade de se recorrer a processos iterativos para a sua resolução. Obtém-se, assim, um procedimento de integração numérica no tempo incondicionalmente estável (não sendo necessário que a dimensão do intervalo de tempo satisfaça qualquer requisito de estabilidade), com dissipação numérica selectiva de altas frequências (o que inibe o efeito de vibrações espúrias) e que não é iterativo (preservando a

simplicidade de implementação numérica do método explícito de diferenças centrais).

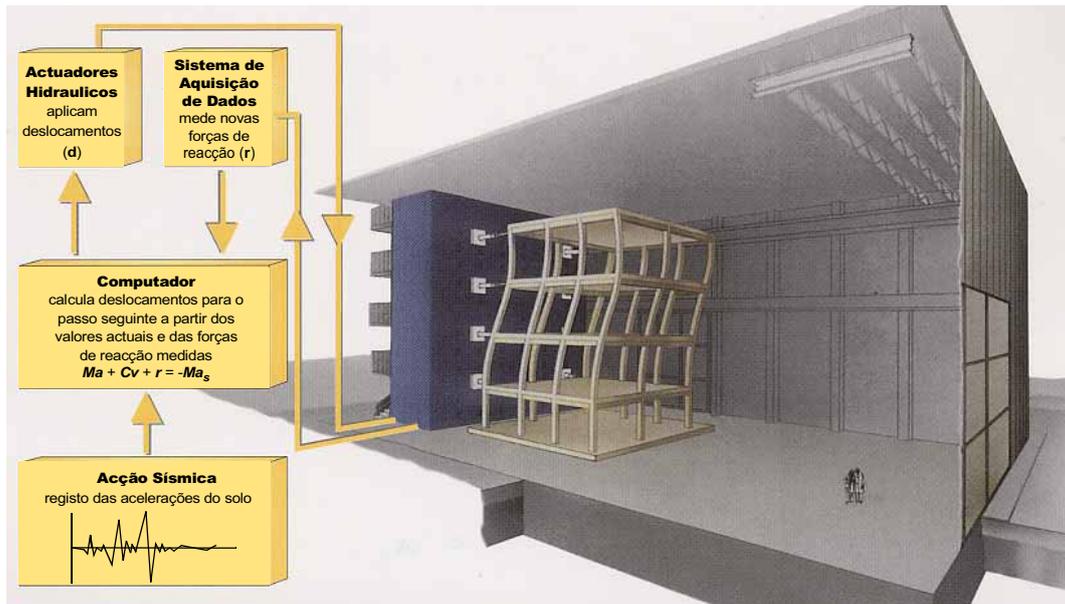


Figura 5.21 - Implementação dos ensaios pseudo-dinâmicos no laboratório ELSA.

Uma vez que as forças de inércia são modeladas numericamente, não é necessário realizar os ensaios pseudo-dinâmicos em tempo real, permitindo-se, assim, que grandes estruturas sejam ensaiadas com a utilização de actuadores hidráulicos relativamente pouco potentes. Neste sentido, os ensaios pseudo-dinâmicos são complementares dos ensaios mais convencionais de mesa sísmica, que se realizam em tempo real e com modelos a uma escala reduzida, em virtude das elevadas potências hidráulicas requeridas.

Deste modo, o método de ensaio pseudo-dinâmico apresenta-se como uma das técnicas viáveis para o ensaio sísmico de estruturas de grandes dimensões. Por um lado, a potência hidráulica requerida para os actuadores é relativamente moderada e, por outro, a natureza híbrida (numérico-experimental) dos ensaios pseudo-dinâmicos permite a implementação de esquemas de sub-estruturação.

As técnicas de sub-estruturação ^{Drmitzakis e Mahin, 1985} permitem que se ensaie apenas uma parcela da estrutura, sendo a restante parte modelada numericamente. As estruturas de pontes em betão armado são, provavelmente, aquelas em que é mais adequada a utilização de técnicas de sub-estruturação, embora seja possível aplicar este procedimento a uma qualquer estrutura, desde que o modelo numérico permita a simulação da resposta estrutural da parte não ensaiada. No caso de pontes modernas os danos devidos à acção sísmica ocorrem fundamentalmente nos

pilares, podendo admitir-se para o tabuleiro um comportamento linear, de fácil modelação numérica. Assim, os pilares são construídos e ensaiados em laboratório utilizando um procedimento de interacção entre os resultados experimentais dos testes dos pilares e o modelo numérico do tabuleiro (Figura 5.22).

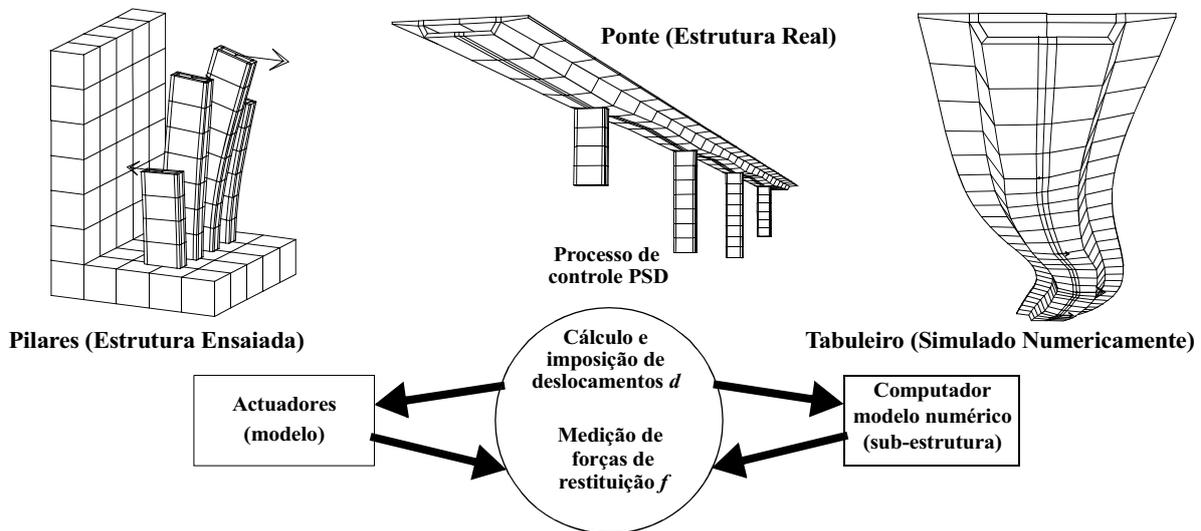


Figura 5.22 - Sub-estruturação de ensaios pseudo-dinâmicos.

5.3.2 - Características do Laboratório *ELSA*

As características da parede e plataforma de reacção do laboratório *ELSA*, representadas na Figura 5.23, permitem o ensaio de edifícios à escala real até a uma altura de cinco andares, os quais poderão ser testados quase estaticamente ou utilizando o método de ensaios pseudo-dinâmico. A estação hidráulica de bombagem tem um caudal máximo de 1500 litros por minuto a uma pressão de 210 bar e está equipada com bombas hidráulicas de "pistons". Existem, também, vários actuadores electro-hidráulicos que podem ser controlados quer em força, quer em deslocamento, com capacidades máximas em força de 1000 kN e com cursos que variam entre +/- 0.25 m e +/- 0.50 m.

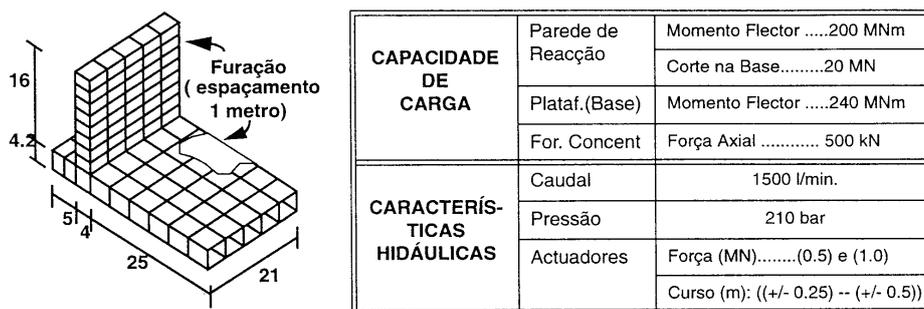


Figura 5.23 - Características da parede e plataforma de reacção do laboratório *ELSA* ^{Pinto et al., 1994}.

5.4 - RESULTADOS DOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Além dos ensaios iniciais de caracterização dinâmica do modelo, realizados com níveis de deslocamento muito reduzidos (da ordem de micrones) e com o objectivo de obter frequências, modos de vibração e valores do coeficiente de amortecimento, foram planeados vários ensaios experimentais.

Em primeiro lugar foram realizados três ensaios pseudo-dinâmicos de intensidades sísmicas correspondentes a diferentes períodos de retorno. Posteriormente, o modelo foi sujeito à imposição cíclica de duas histórias predefinidas de deslocamentos. Após a realização desses ensaios o modelo foi reforçado e foram executados novos ensaios cíclicos.

5.4.1 - A Primeira Campanha de Ensaios - Modelo Experimental Não Reforçado

Dos ensaios de caracterização dinâmica do modelo obtiveram-se os valores da rigidez inicial e da frequência fundamental do modelo. A partir desses valores e em conjugação com a frequência de 4 Hz pretendida para o modelo[†], determinou-se a massa a utilizar no procedimento numérico dos ensaios pseudo-dinâmicos. Assim, para o sistema equivalente de 1 grau de liberdade do algoritmo do ensaio foi considerada uma massa de 400 toneladas .

Planearam-se três ensaios pseudo-dinâmicos correspondentes a diversas intensidades sísmicas e com diferentes conteúdos de energia espectral: um com epicentro próximo e outros dois com epicentro longínquo. Na Figura 5.24, representam-se os espectros de resposta de deslocamentos (com um amortecimento de 5%) para os dois tipos de sismo (de epicentro próximo e longínquo) e para dois períodos de retorno (174 e 975 anos).

O espectro de resposta do acelerograma correspondente ao sismo com epicentro próximo amplifica a aceleração da estrutura para frequências superiores a 2 Hz, enquanto que o espectro de resposta do acelerograma correspondente ao sismo de epicentro longínquo amplifica as acelerações da estrutura para frequências inferiores a 2 Hz.

[†] Nos estudos numéricos e experimentais preliminares (ver parágrafo 5.2.2) obteve-se para o monumento uma frequência fundamental próxima de 4 Hz..

Baseado nas diferenças dos espectros e nos testes iniciais de caracterização dinâmica do modelo, adoptou-se a seguinte estratégia para os ensaios pseudo-dinâmicos: o sismo de baixa intensidade foi conduzido com um acelerograma correspondente a um epicentro próximo e com um período de retorno de 174 anos e os sismos de intensidade elevada foram realizado com um acelerograma correspondente a um epicentro longínquo e com um período de retorno de 975 anos.

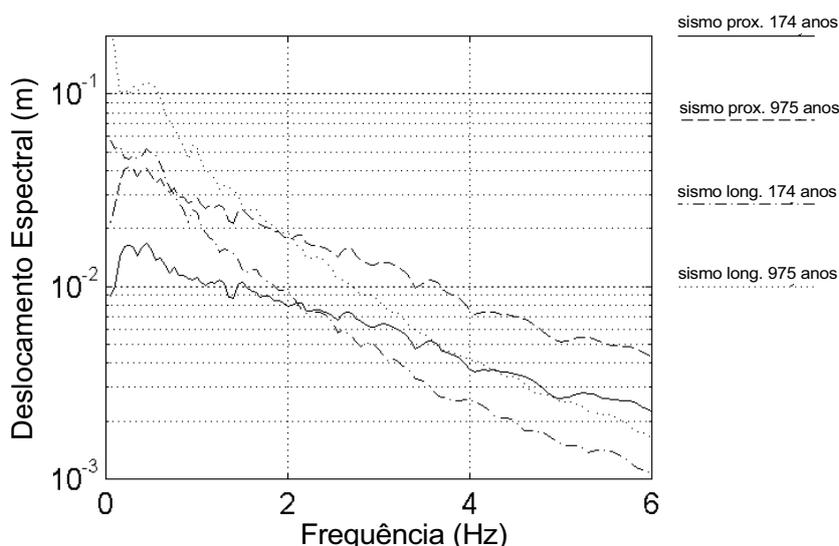


Figura 5.24 - Espectros de deslocamento para os sismos de epicentro próximo e longínquo.

Os acelerogramas utilizados nos ensaios foram gerados automaticamente e são representados na Figura 5.25. No lado esquerdo do gráfico representa-se o acelerograma correspondente ao sismo de baixa intensidade, com 10 segundos de duração, a meio o acelerograma correspondente ao sismo de alta intensidade, com 30 segundos de duração, e à direita o acelerograma que resulta da multiplicação do acelerograma do sismo de alta intensidade por 1.5.

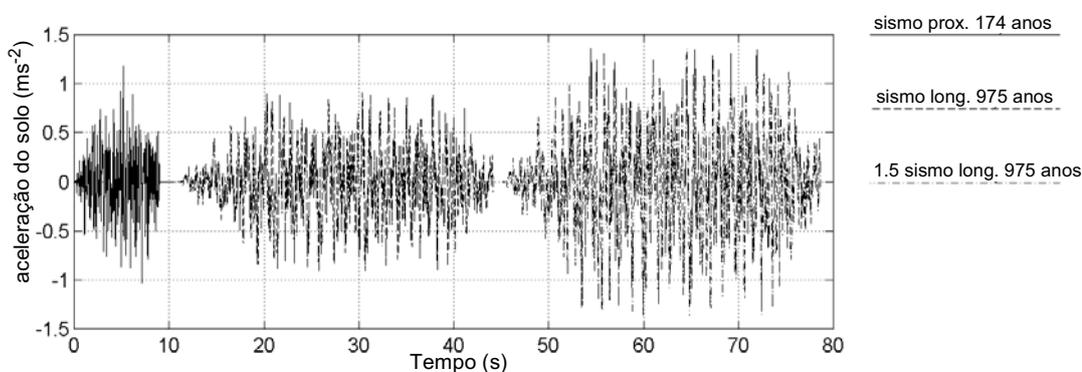


Figura 5.25 - Acelerogramas utilizados nos ensaios pseudo-dinâmicos.

Na sequência da imposição dos três registos sísmicos ao modelo, através do procedimento de

ensaio pseudo-dinâmico, foram monitorizados os movimentos da estrutura com os instrumentos de medição descritos na Figura 5.19. Os registos das forças aplicadas e dos deslocamentos medidos no topo do modelo são uma medida do seu comportamento global, permitindo uma primeira análise do comportamento sísmico do modelo experimental. Nas figuras seguintes (Figura 5.26 a Figura 5.28) representam-se os diagramas que relacionam a força aplicada com o deslocamento no topo do modelo, obtidos nos três ensaios pseudo-dinâmicos.

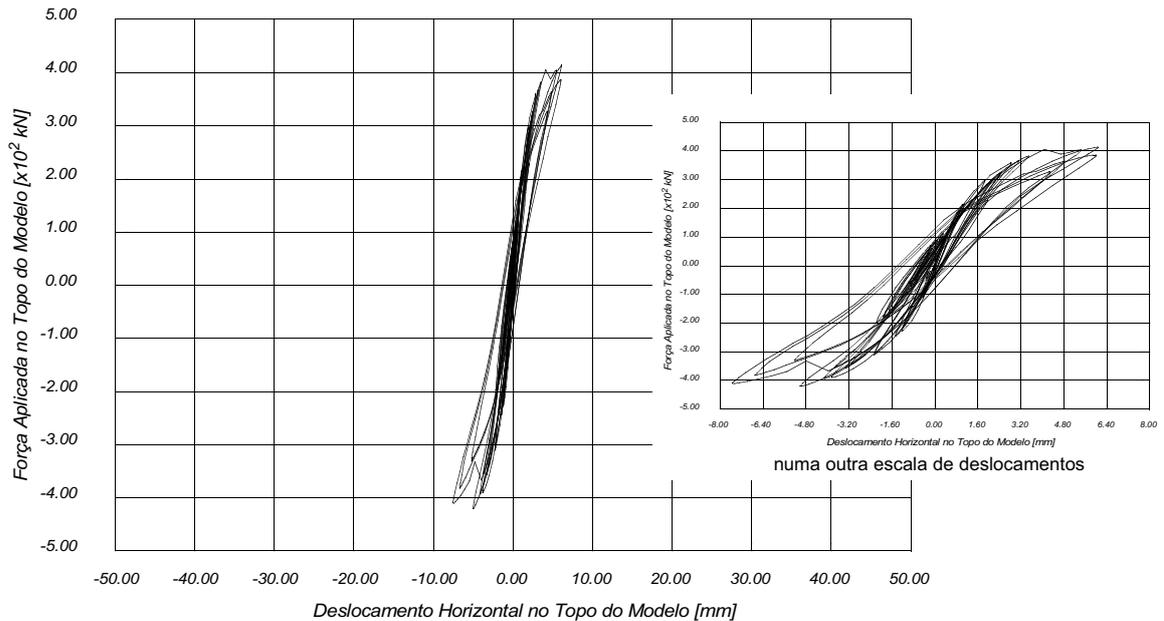


Figura 5.26 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de pequena intensidade (sismo próximo - período de retorno de 174 anos).

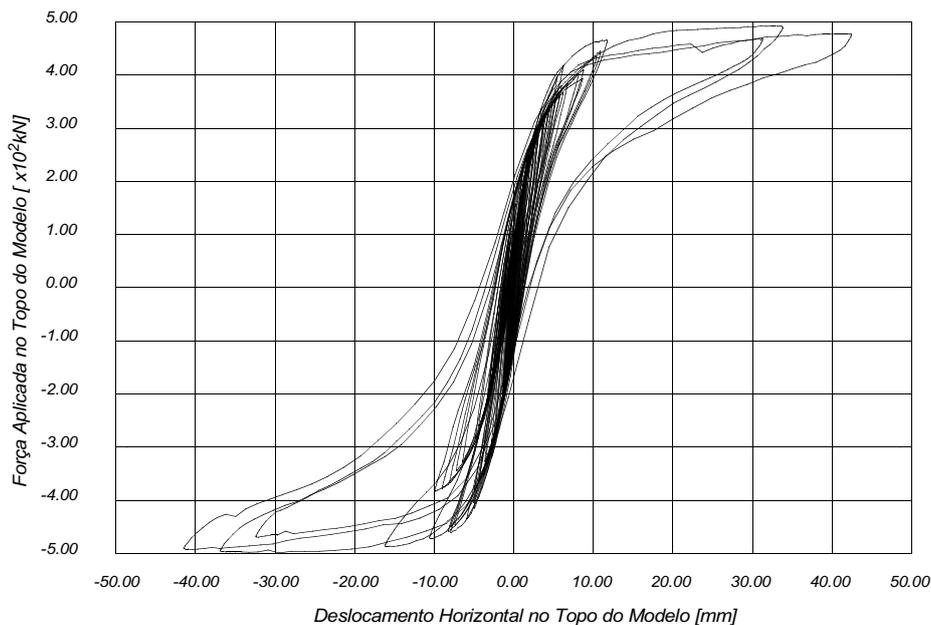


Figura 5.27 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de intensidade elevada (sismo longo - período de retorno de 975 anos).

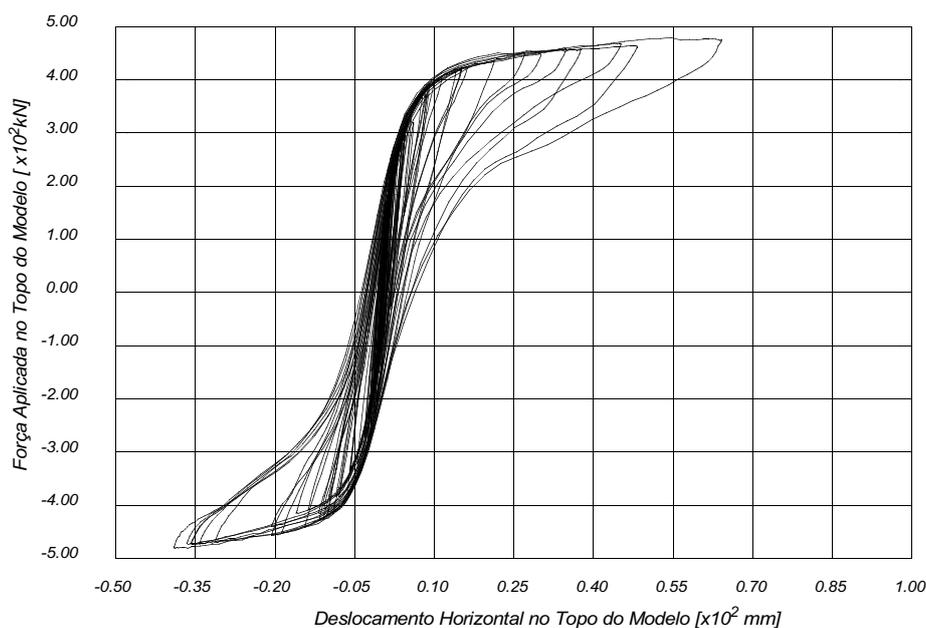


Figura 5.28 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de intensidade elevada multiplicado por 1.5 (1.5 x sismo longínquo - período de retorno de 975 anos).

Deve ser sublinhado que o teste pseudo-dinâmico de baixa intensidade foi realizado com uma força de pós-tensão nas barras que unem as chapas das extremidades do modelo de apenas 50 kN, enquanto que os ensaios de alta intensidade foram realizados com forças de tracção de magnitude superior (da ordem dos 350 kN). Durante o primeiro ensaio pseudo-dinâmico, correspondente ao sismo de baixa intensidade e com a força de pós-esforço de 50 kN, o valor reduzido dessa força resultou numa extensa fendilhação das zonas entre as colunas e a alvenaria (representada na parte superior da Figura 5.37 pelo índice *BI*). Com essa fendilhação, que ocorreu para valores de deslocamento no topo inferiores a 8 mm, o modelo experimental perdeu solidez na sua parte superior e deixou de funcionar como um pórtico, ocorrendo uma diminuição da sua resistência às acções horizontais (no gráfico mais pequeno da Figura 5.26 é visível uma súbita redução da capacidade resistente do modelo após os primeiros ciclos). Por esta razão, para evitar o colapso prematuro do modelo sem que se tenha explorado outros mecanismos de deformação do modelo, adoptou-se para os ensaios de maior intensidade sísmica forças de pós-tensão de intensidade superior. Este pós-esforço resulta numa maior solidez da parte superior do modelo, concentrando a deformação nas colunas. O ensaio realizado com as forças de pós-tensão pouco intensas pode ser considerado como representativo duma estrutura sem tirantes na parte superior e localizada numa extremidade do edifício.

Nos gráficos dos resultados dos ensaios pseudo-dinâmicos correspondentes aos sismos de

intensidade elevada (Figura 5.27 e Figura 5.28) verifica-se que o modelo atinge um máximo de resistência, mantendo-o mesmo para níveis de deformação elevados. Os diagramas obtidos, típicos deste tipo de estruturas, apresentam uma rigidez elevada para pequenos níveis de deformação e uma significativa redução de rigidez para maiores deformações. É também de salientar a capacidade de deformação da estrutura quando a sua parte superior funciona como um corpo coeso (ensaio pseudo-dinâmico correspondentes à pós-tensão de 350 kN).

Nos gráficos seguintes (Figura 5.29 e Figura 5.30) representam-se, para os ensaios correspondentes aos sismos de intensidade elevada, as relações entre o momento na base da coluna central do modelo e a rotação da correspondente secção e os diagramas de energia dissipada em função do deslocamento acumulado do topo do modelo.

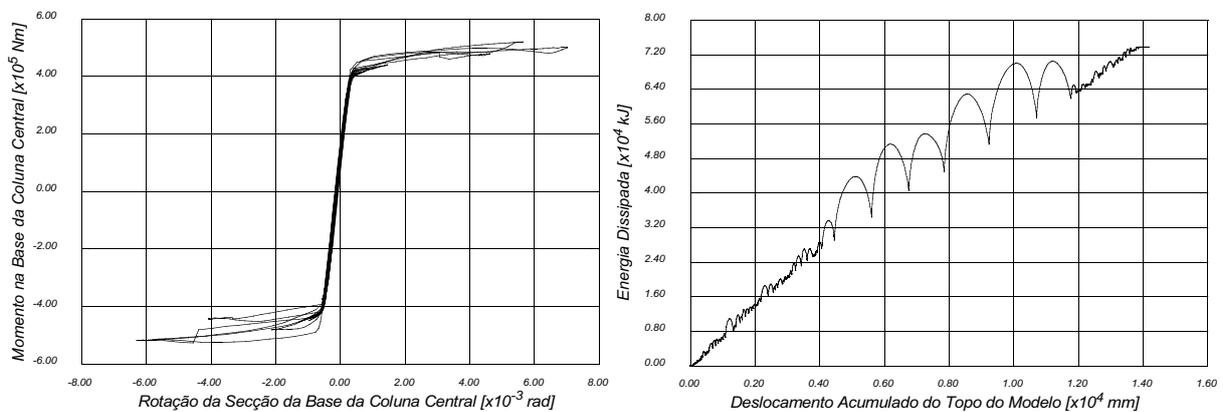


Figura 5.29 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de intensidade elevada (sismo longínquo - período de retorno de 975 anos).

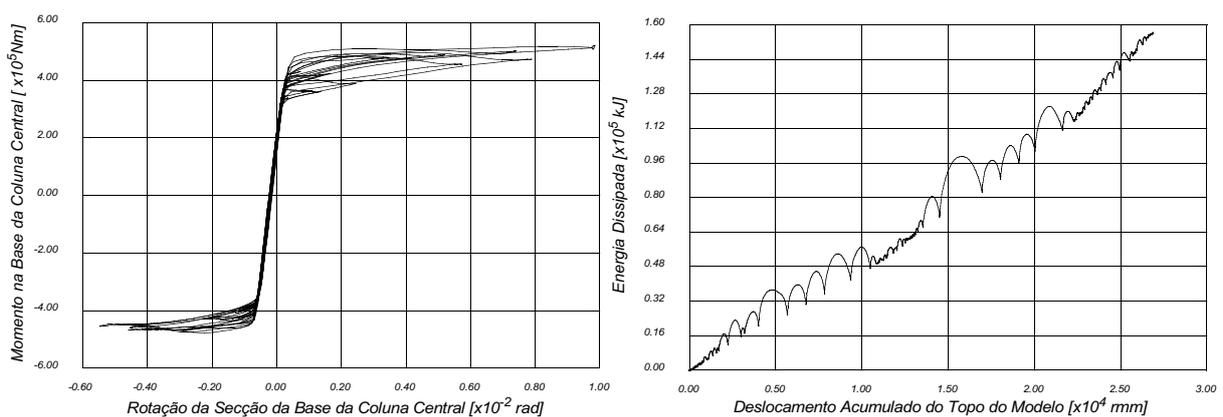


Figura 5.30 - Resultados do ensaio pseudo-dinâmico correspondente ao sismo de intensidade elevada multiplicado por 1.5 (1.5 x sismo longínquo - período de retorno de 975 anos).

Como se pode observar nos gráficos anteriores, existe uma relação aproximadamente linear entre a energia dissipada e o deslocamento acumulado do topo, o que parece indicar que a

dissipação de energia se deve fundamentalmente a processos que envolvam atrito. Por outro lado, os gráficos que representam a relação entre o momento na base da coluna central e a sua rotação reproduzem, aproximadamente, o comportamento rígido-plástico admitido nos parágrafos 3.2 e 3.6 para as secções de alvenaria de pedra. Numa fase inicial a rigidez da relação “momento - rotação da secção” é muito significativa, ocorrendo uma “plastificação” da secção para valores do momento equivalentes a uma excentricidade máxima admissível do esforço normal. A ductilidade destas de secções, admitida como hipótese no parágrafo 3.6, também pode ser reconhecida nesses gráficos, onde se identifica uma significativa capacidade de deformação da secção da base da coluna central. Confirmam-se, assim, as hipóteses do cálculo rígido-plástico e, conseqüentemente, a sua aplicabilidade a construções em alvenaria de pedra.

Após a realização dos três ensaios pseudo-dinâmicos, e com objectivo de obter registos para calibração de modelos numéricos, executaram-se ensaios cíclicos, conduzidos de forma quase estática. Foram efectuados dois ensaios com amplitudes de deslocamentos no topo do modelo variáveis de 5 a 100 mm, correspondendo a dois níveis de força de pós-esforço dos cabos que ligam as placas das extremidades do modelo. No primeiro ensaio manteve-se a força nos cabos que resultou do último ensaio pseudo-dinâmico (350 kN) e no segundo reduziu-se a intensidade dessa força para metade (175 kN). Para cada nível de amplitude de deslocamento imposto no topo do modelo (5, 30, 60 e 100 mm) foram realizados dois ciclos. Nas figuras seguintes (Figura 5.31 a Figura 5.34) apresentam-se gráficos com os resultados desses ensaios.

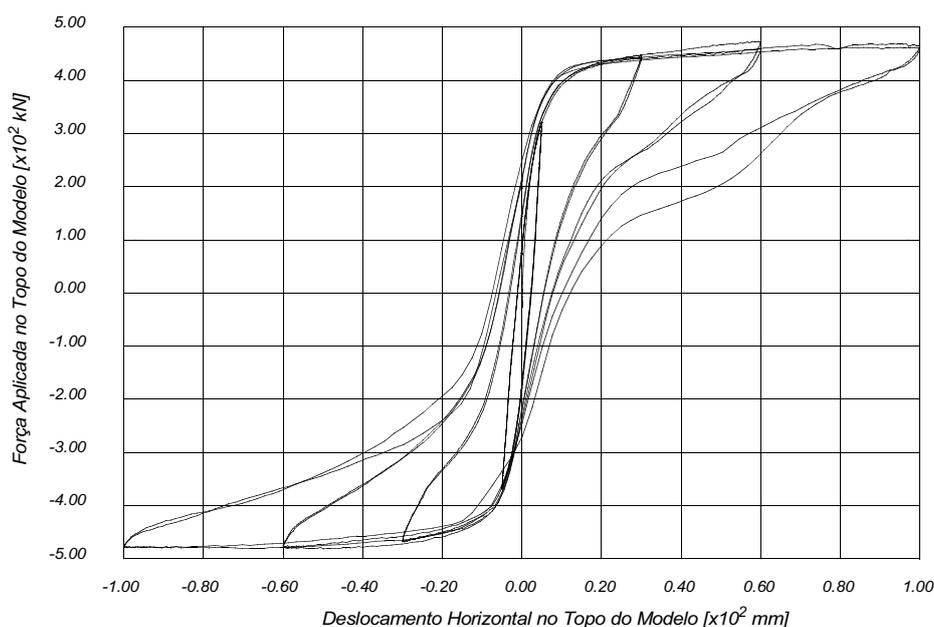


Figura 5.31 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 350 kN.

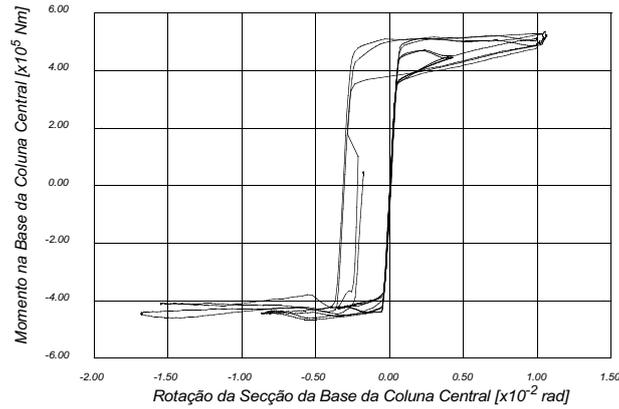


Figura 5.32 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 350 kN.

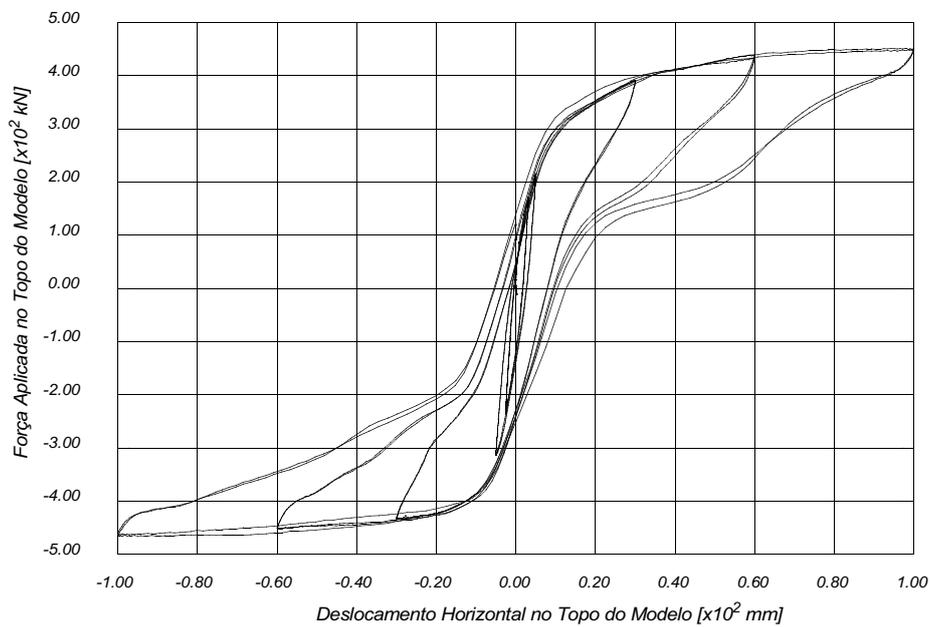


Figura 5.33 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 175 kN.

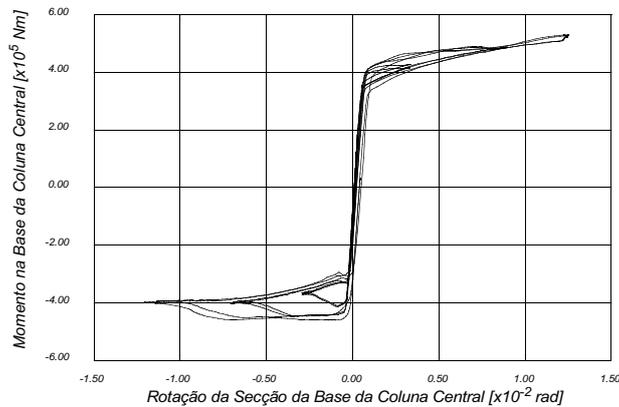


Figura 5.34 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 175 kN.

Observe-se, em primeiro lugar, que os diagramas “força - deslocamento” (Figura 5.31 e Figura 5.33) e “momento - rotação” (Figura 5.32 e Figura 5.34) obtidos nos dois ensaios cíclicos têm

andamentos semelhantes aos correspondentes diagramas obtidos nos ensaios pseudo-dinâmicos com sismos de grande intensidade. Também aqui se identifica, tanto nos gráficos de deslocamentos como nos de rotações, uma significativa rigidez para deformações reduzidas e uma rigidez desprezável para deformações elevadas.

Na Figura 5.35 representam-se, para o ensaio cíclico correspondente à força de pós-tensão de 350 kN, gráficos com as variações de rigidez dos diagramas “força - deslocamento” e “momento - rotação”, nos ciclos impostos de 5, 30, 60 e 100 mm, podendo confirmar-se o anulamento da rigidez para níveis de deformação elevados.

Na Figura 5.36 representam-se, para o ensaio cíclico correspondente à força de pós-tensão de 350 kN, gráficos que relacionam a rotação da secção da base da coluna central do modelo com o deslocamento horizontal imposto no seu topo e o perfil envolvente das rotações máximas das secções da coluna central. Para os outros ensaios (pseudo-dinâmicos e cíclico) obtiveram-se gráficos de andamento semelhante.

No gráfico superior da Figura 5.36 pode identificar-se uma relação aproximadamente linear entre a rotação da base da coluna central e o deslocamento horizontal no topo do modelo, o que confirma que a parte superior do modelo tem um movimento próximo de corpo rígido. No gráfico inferior da Figura 5.36 verifica-se haver uma distribuição em altura da rotação da base da coluna central, embora com concentração em algumas secções, nomeadamente na base e, aproximadamente, a 1/3 da altura da coluna. Este efeito de distribuição das rotações em altura está relacionado com o imbricamento dos blocos das colunas, que resulta da configuração tridimensional das suas secções (Figura 5.13). Como se pode verificar na Figura 5.31 e na Figura 5.33, apenas se identificam ligeiras diferenças nas respostas dos dois ensaios cíclicos. A maior diferença reside na variação da rigidez da estrutura ao longo do desenvolvimento do ensaio, verificando-se uma transição de rigidez mais adocada no ensaio cíclico realizado com a menor força de pós-tensão (175 kN).

A diminuição da força de pós-tensão resulta numa menor solidarização da parte superior do modelo, estando o adoçamento da transição de rigidez relacionado com a mobilização da deformação da parte superior do modelo. No entanto, em ambas as situações desenvolvem-se resistências equivalentes para os níveis máximos de deformação imposta (100 mm).

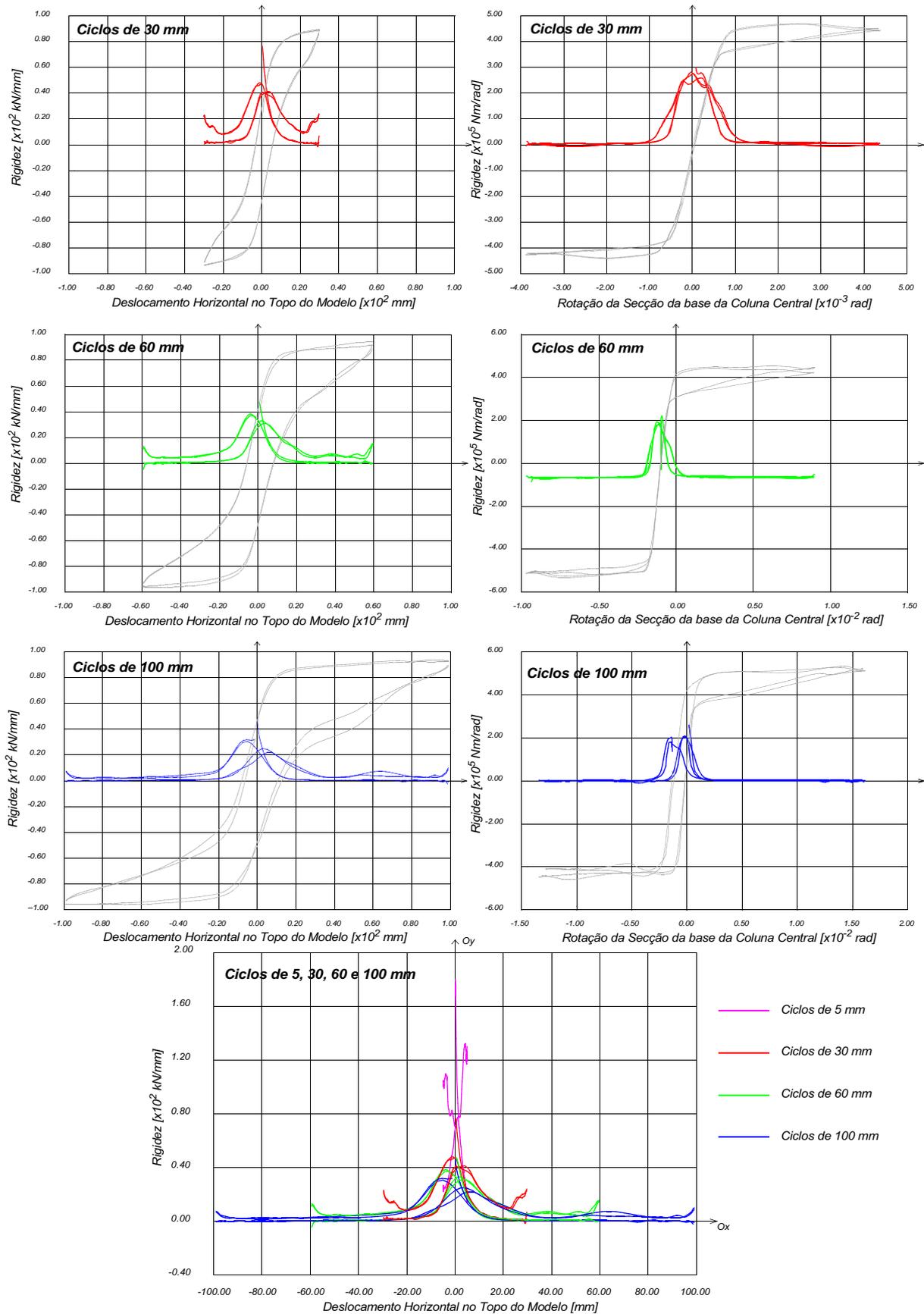


Figura 5.35 - Variação de rigidez da resposta do modelo nos ciclos do ensaio correspondente à pós-tensão dos cabos de 350 kN.

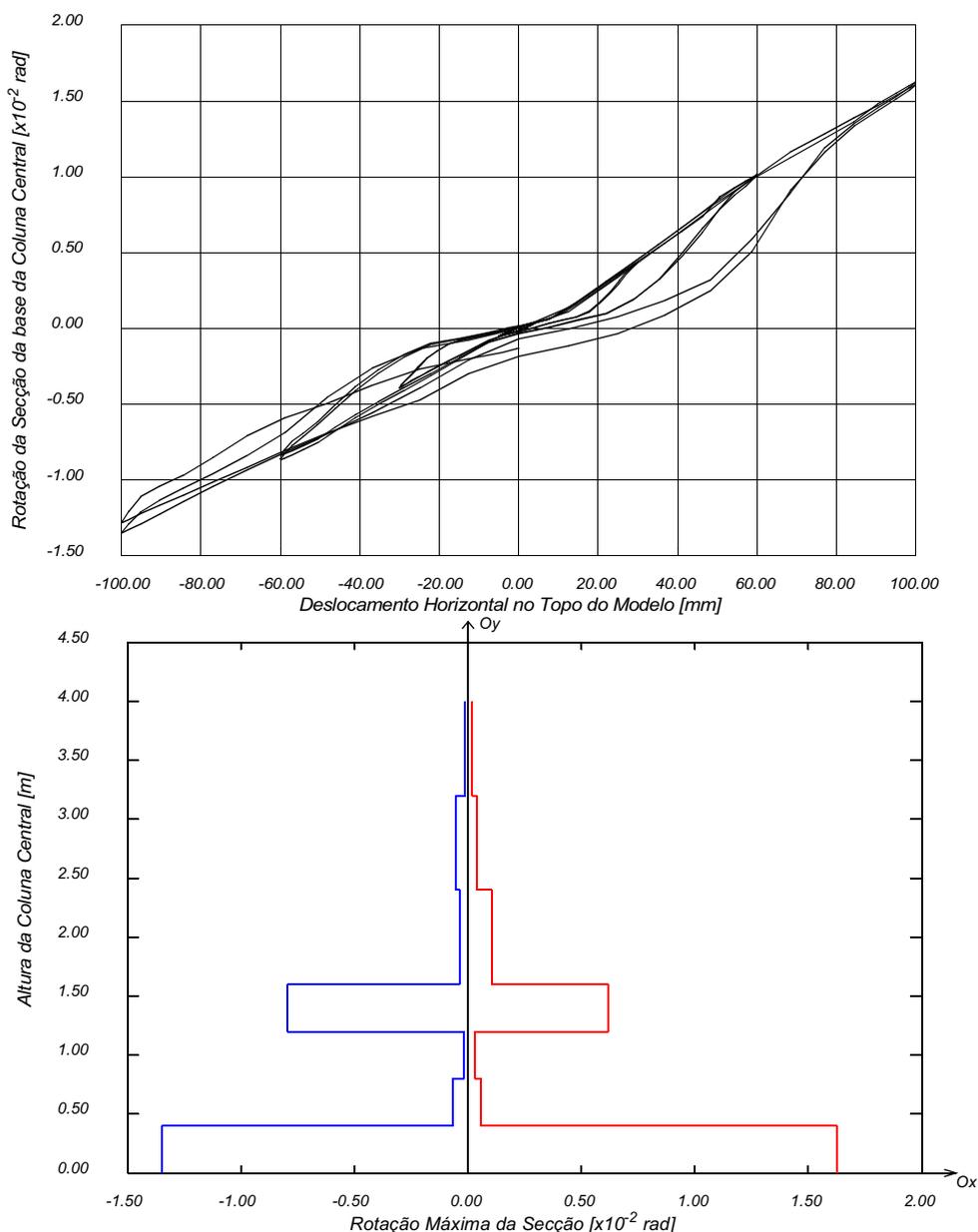


Figura 5.36 - Rotação da secção da base da coluna central e perfil das rotações máximas das secções da coluna central - ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 350 kN.

Recorde-se que a única diferença entre os dois ensaios cíclicos foi a variação da intensidade da força de pré-tensão nos cabos internos.

A força de pré-tensão resulta na estabilidade da parte superior do modelo, melhorando a ductilidade da estrutura ao transferir a deformação para as colunas que apresentam secções maior capacidade de deformação. As pequenas diferenças entre os resultados dos dois ensaios cíclicos realizados com diferentes níveis de força de pré-tensão leva a supor a existência de um valor óptimo da intensidade dessa força, função do nível de deslocamento esperado para a

estrutura. De facto, verifica-se que, para as amplitudes de deslocamento consideradas nos ensaios, forças de pré-tensão superiores a 175 kN não melhoram significativamente a performance da estrutura

Como é visível nos diagramas obtidos para os diferentes ensaios, o modelo apresenta importantes características de dissipação de energia, que resultam da fractura de alguns elementos e do atrito nas superfícies de deslizamento que se formam na deformação da estrutura. Nos diagramas “momento - rotação” apresentados pode constatar-se que o mecanismo de abertura e de fecho das secções das colunas ocorre, praticamente, sem dissipação de energia, dando-se esta, fundamentalmente, através dos mecanismos de deslizamento com atrito.

O razoável comportamento sísmico do modelo e, conseqüentemente, de estruturas reais deste tipo, resulta da sua ductilidade e capacidade de dissipação de energia, os quais são possíveis se a parte superior do modelo, ou estrutura, apresentar solidez suficiente para que se possa mobilizar a deformação das colunas e dos arcos. Deste modo, verifica-se ser importante para o comportamento global destas estruturas o confinamento das suas partes superiores através de cabos pré-esforçados. A intensidade da força de pré-tensão depende do nível de deslocamentos previsto e da capacidade resistente das alvenarias superiores.

Na Figura 5.37 representam-se os danos permanentes que resultaram da campanha experimental constituída pelos ensaios pseudo-dinâmicos e cíclicos. Após esses ensaios, apenas se identificaram no modelo danos locais, nomeadamente pequenos deslizamentos relativos dos blocos das colunas e dos arcos (com um máximo de 15 mm), esmagamentos e delaminações nas zonas mais comprimidas de alguns blocos, fractura de alguns elementos de revestimento, fissuras de alguma dimensão nas zonas de contacto da parte superior em alvenaria com os blocos dos arcos e ligeiras fissuras na alvenaria superior. A fissuração dos contactos entre a alvenaria superior e os blocos das colunas ocorreu, fundamentalmente, no primeiro ensaio pseudo-dinâmico.

Na Figura 5.38 representam-se danos actualmente visíveis nas estruturas dos claustros do mosteiro. Como se pode observar, há uma semelhança entre os danos reais e os registados nos ensaios experimentais, podendo admitir-se que alguns dos danos visíveis no monumento terão

resultado de acções sísmicas ocorridas ao longo da sua vida.

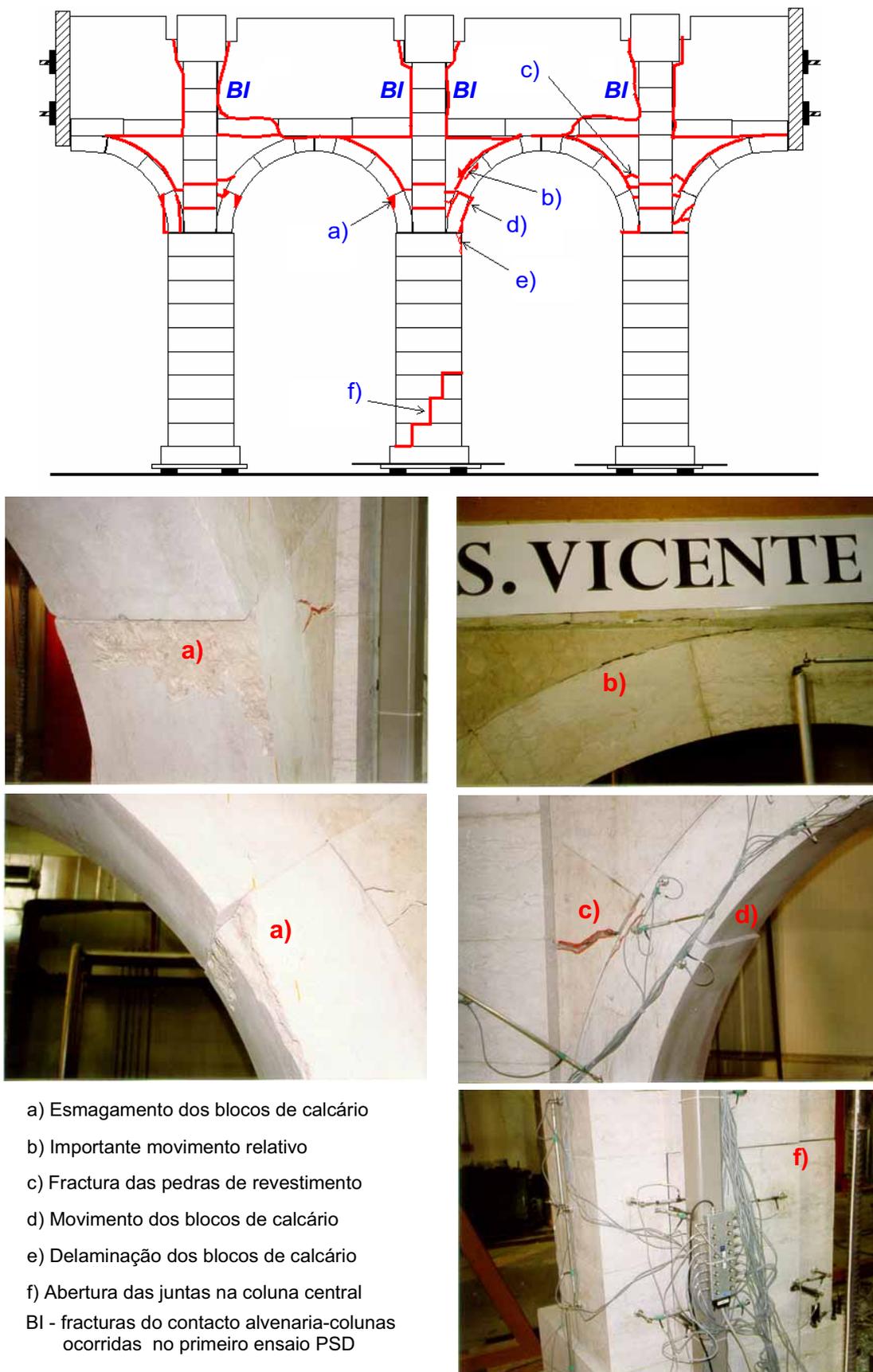


Figura 5.37 - Danos no modelo experimental após a primeira campanha de ensaios.



Figura 5.38 - Danos nos arcos das estruturas dos claustros do mosteiro de São Vicente de Fora.

5.4.2 - A Segunda Campanha de Ensaios - Modelo Experimental Reforçado

Da análise do comportamento dinâmico do modelo verificou-se que a sua capacidade resistente e ductilidade estão directamente relacionadas com a solidez da sua parte superior. Pretendendo manter as condições de ductilidade da estrutura, que são conferidas pela capacidade de rotação das secções das colunas, a solução de reforço a implementar deverá visar a manutenção do comportamento porticado da estrutura. O reforço através da inclusão de barras aderentes no interior da parte superior deste tipo de estruturas é uma alternativa de fácil implementação, cuja eficiência se pretende analisar neste parágrafo.

Como referido (parágrafo 5.2.4), após a realização da primeira campanha de ensaios o modelo foi reforçado através da inclusão, na sua parte superior, de barras de aço (Figura 5.39).

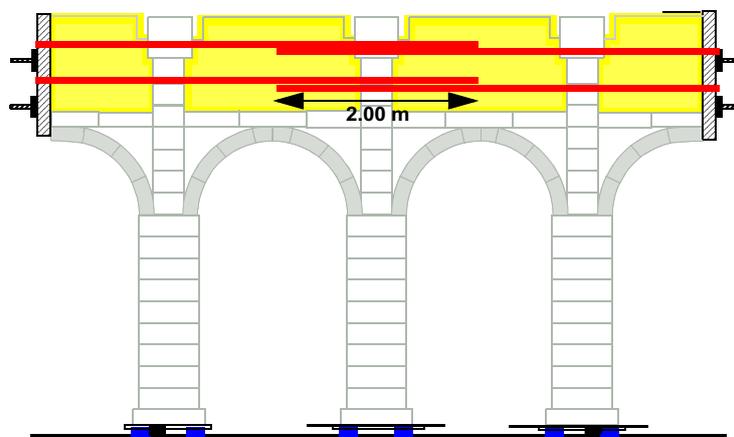


Figura 5.39 - Reforço do modelo com barras de aço de 20 mm de diâmetro, aderentes e pré-esforçadas.

Concluído o reforço do modelo realizaram-se três ensaios cíclicos, com histórias de

deslocamentos crescentes e com dois ciclos por cada amplitude de deslocamento imposta. Partindo da força de pós-tensão das barras de aço, não aderentes, que ligam as chapas metálicas das extremidades do modelo, do último ensaio com o modelo não reforçado (175 kN), foi realizado um primeiro ensaio cíclico através da imposição de deslocamentos com amplitudes variáveis entre 8 e 30 mm. O ensaio seguinte foi realizado com uma força de pós-tensão menor (45 kN), tendo sido impostos deslocamentos de amplitudes variáveis entre 30 e 100 mm. No último ensaio os cabos não aderentes foram libertados, correspondendo a uma pós-tensão nula, e foram impostos deslocamentos de amplitudes variáveis entre 8 e 60 mm.

Nas figuras seguintes (Figura 5.40 a Figura 5.43) apresentam-se os diagramas “força-deslocamento” e “momento-rotação” obtidos nos três ensaios cíclicos realizados com o modelo reforçado. Como se pode observar, esses diagramas têm andamento semelhante ao dos correspondentes diagramas obtidos na primeira campanha de ensaios.

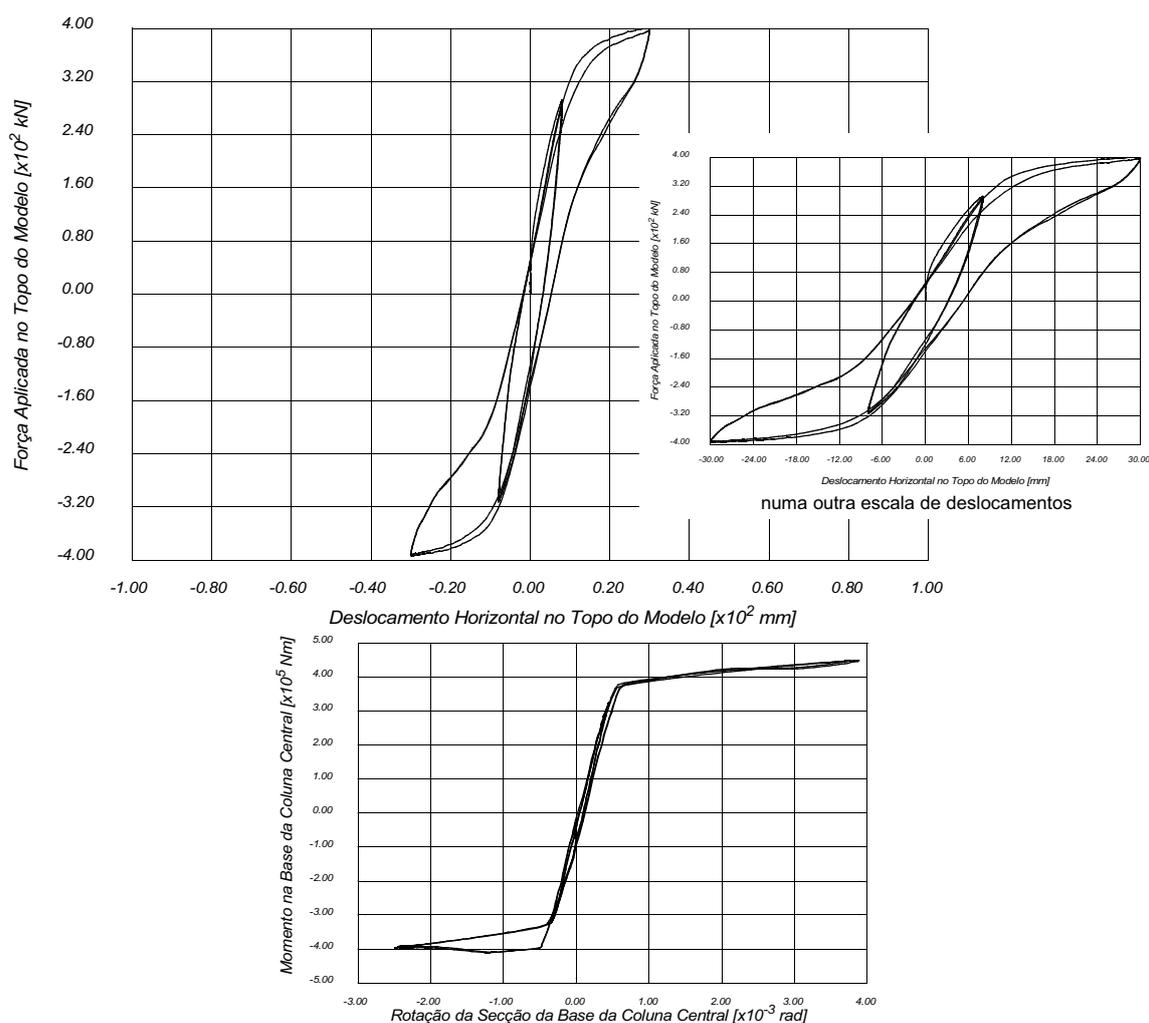


Figura 5.40 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 175 kN.

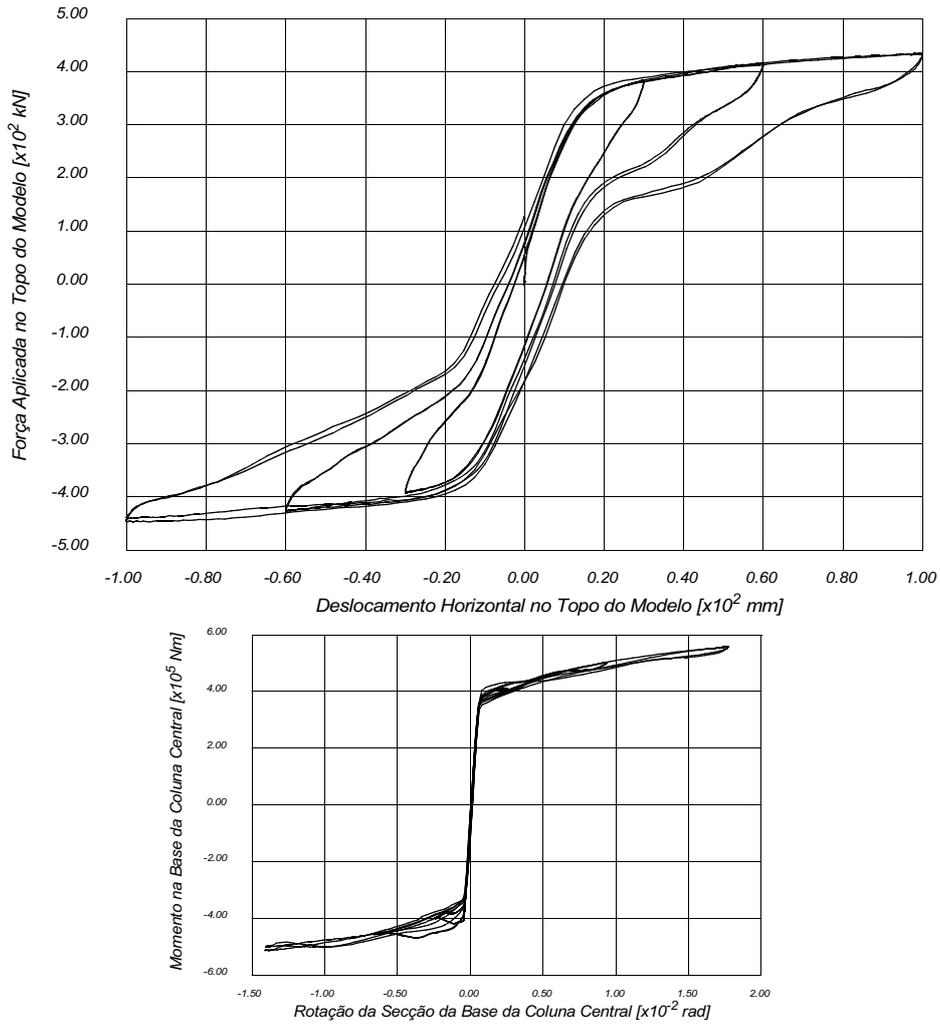


Figura 5.41 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos de 45 kN.

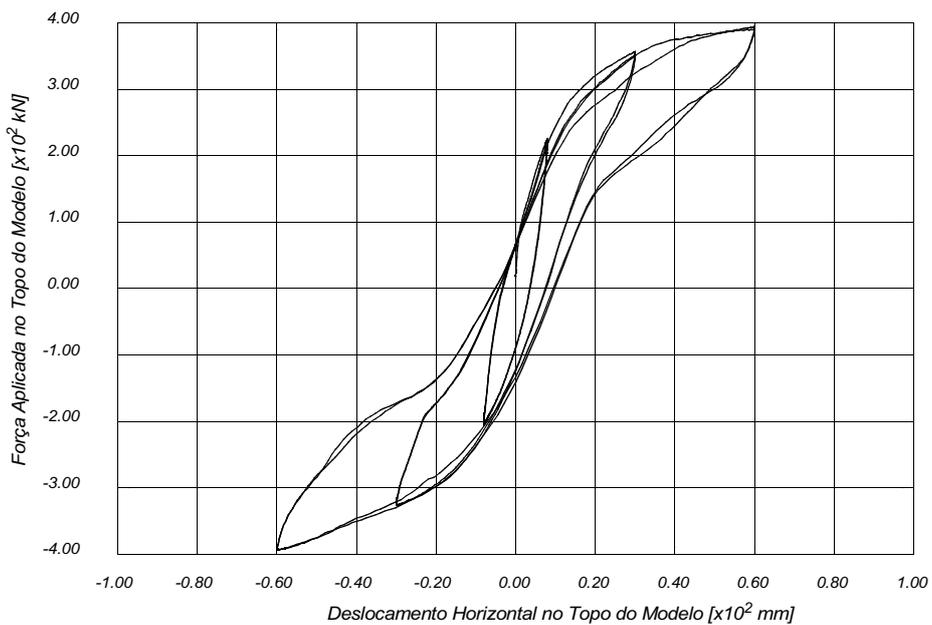


Figura 5.42 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos nula.

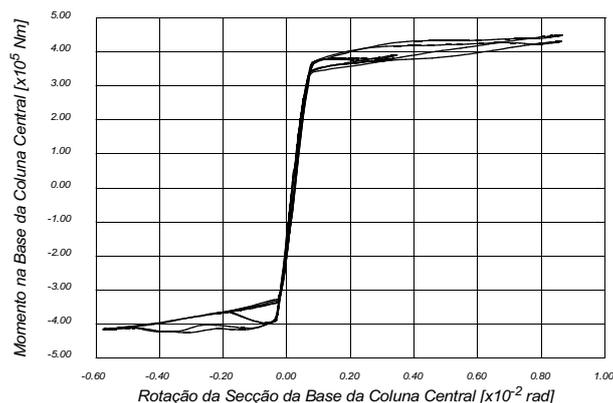


Figura 5.43 - Resultados do ensaio cíclico correspondente à pós-tensão dos cabos nula.

Na Figura 5.44 representam-se os perfis das rotações máximas das secções da coluna central (nos ciclos de 30 e 60 mm) para os ensaios com o modelo experimental original e reforçado e os gráficos das variações do comprimento da parte superior do modelo e da soma das aberturas das juntas coluna-alvenaria (juntas *BI* na Figura 5.37) ao longo dos ensaios. Na Figura 5.45 representam-se gráficos que relacionam a variação do comprimento da parte superior do modelo e a abertura das juntas coluna-alvenaria com a força aplicada e o deslocamentos impostos no topo do modelo.

Como se pode verificar nos gráficos superiores da Figura 5.44, que representam os perfis das rotações máximas ocorridas nas secções da coluna central durante os ciclos de 30 e 60 mm dos ensaios cíclicos sobre os modelos original e reforçado, para um mesmo nível de deslocamento imposto no topo do modelo, uma maior intensidade do pós-esforço dos cabos não aderentes corresponde a uma maior a rotação da secção da base. De facto, como já referido, uma força de pós-tensão nos cabos não aderentes superior resulta numa maior solidarização da parte superior do modelo, resultando numa maior transferência da deformação imposta para as secções da coluna.

Nos gráficos intermédios da Figura 5.44 representa-se a variação do comprimento da parte superior do modelo ao longo dos ensaios cíclicos e nos gráficos inferiores dessa figura compara-se a variação desse comprimento com a abertura total das juntas coluna-alvenaria (juntas *BI* na Figura 5.37). Como se pode verificar nestes últimos gráficos, a variação do comprimento da parte superior do modelo está directamente relacionada com a abertura dessas juntas, havendo uma coincidência das duas curvas[†]. Nestes gráficos, verifica-se que nos ensaios onde se aplicou

forças de pós-tensão nos cabos não aderentes, a deformação da parte superior do modelo é totalmente recuperada no final do ensaio. Isto é, as juntas coluna-alvenaria que abrem e fecham ao longo do ensaio recuperam a sua abertura inicial no final da imposição cíclica dos deslocamentos.

Nos gráficos da Figura 5.45, que relacionam a deformação da parte superior do modelo com o deslocamento imposto e a força aplicada no topo do modelo, é também visível o aumento da abertura das juntas coluna-alvenaria e, conseqüentemente, da deformação da parte superior do modelo, ao longo do desenvolvimento dos ensaios cíclicos, havendo recuperação dessa deformação quando existe pós-tensão aplicada nos cabos não aderentes.

Dos resultados dos ensaios realizados, com o modelo original e reforçado, verifica-se que a manutenção da solidez da parte superior do modelo é fundamental para a ductilidade da estrutura e capacidade de dissipação de energia. Deste modo, a aplicação de pós-tensões nos cabos interiores da estrutura, não aderentes, (inicialmente considerados para a imposição de condições de fronteira), por permitir a manutenção da integridade da parte superior, constitui uma boa solução de reforço destas estruturas. No entanto, esta solução de cabos não aderentes pós-esforçados e ligados à estrutura através de chapas metálicas nas suas extremidades, pode não ser viável em estruturas reais. Na realidade, a estrutura poderá apresentar dimensões que impossibilitem a ligação destes cabos apenas nas suas extremidades. Assim, a inclusão de cabos aderentes em todo o comprimento da estrutura pode ser uma alternativa para estruturas mais longas. No caso em estudo, verificou-se um razoável comportamento desta solução de reforço com cabos aderentes, mesmo com um nível de pré-esforço relativamente reduzido (20 kN). De facto, o ensaio realizado com o modelo não reforçado e com níveis baixos de pós-esforço dos cabos não aderentes foi interrompido para deslocamentos impostos da ordem dos 8 mm, em virtude dos elevados danos detectados. No modelo reforçado e na ausência de pós-esforço dos cabos não aderentes atingiu-se deslocamentos impostos da ordem dos 60 mm, sem que tivessem ocorrido danos permanentes significativos. Verifica-se, no entanto, que com esta solução de reforço as aberturas das juntas alvenaria-coluna não são totalmente recuperáveis.

† Para níveis de deslocamento imposto elevados verificou-se o saturamento de alguns deflectómetros, pelo que nos últimos ciclos dos gráficos inferiores da Figura 5.44 se identifica uma menor concordância entre as curvas que representam a variação do comprimento da parte superior do modelo e a abertura das juntas coluna-alvenaria.

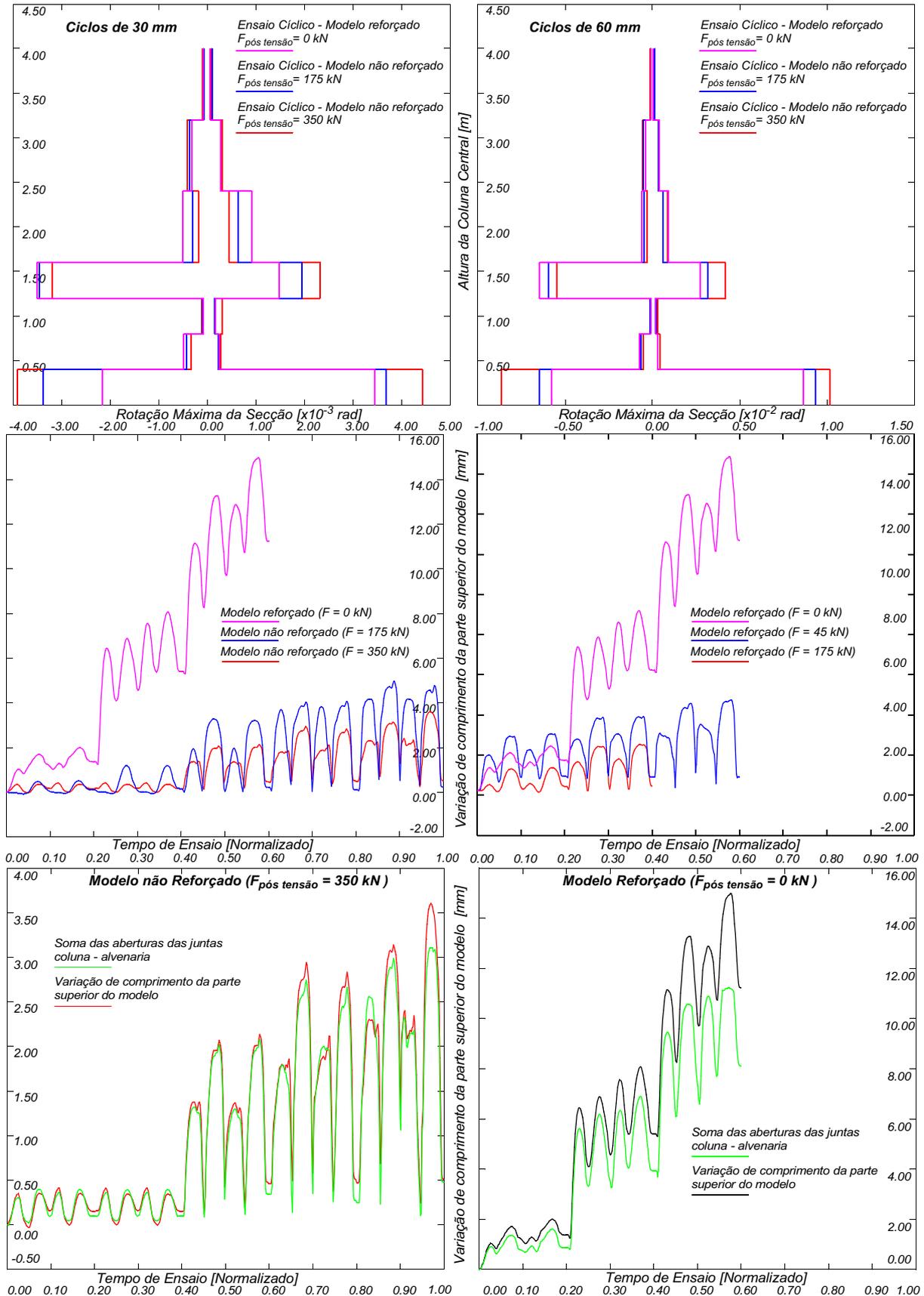


Figura 5.44 - Perfis das rotações máximas das secções da coluna central nos ciclos de 30 e 60 mm (em cima); variação de comprimento da parte superior do modelo nos ensaios cíclicos (no meio); variação de comprimento da parte superior do modelo e da abertura das juntas nos ensaios cíclicos (em baixo).

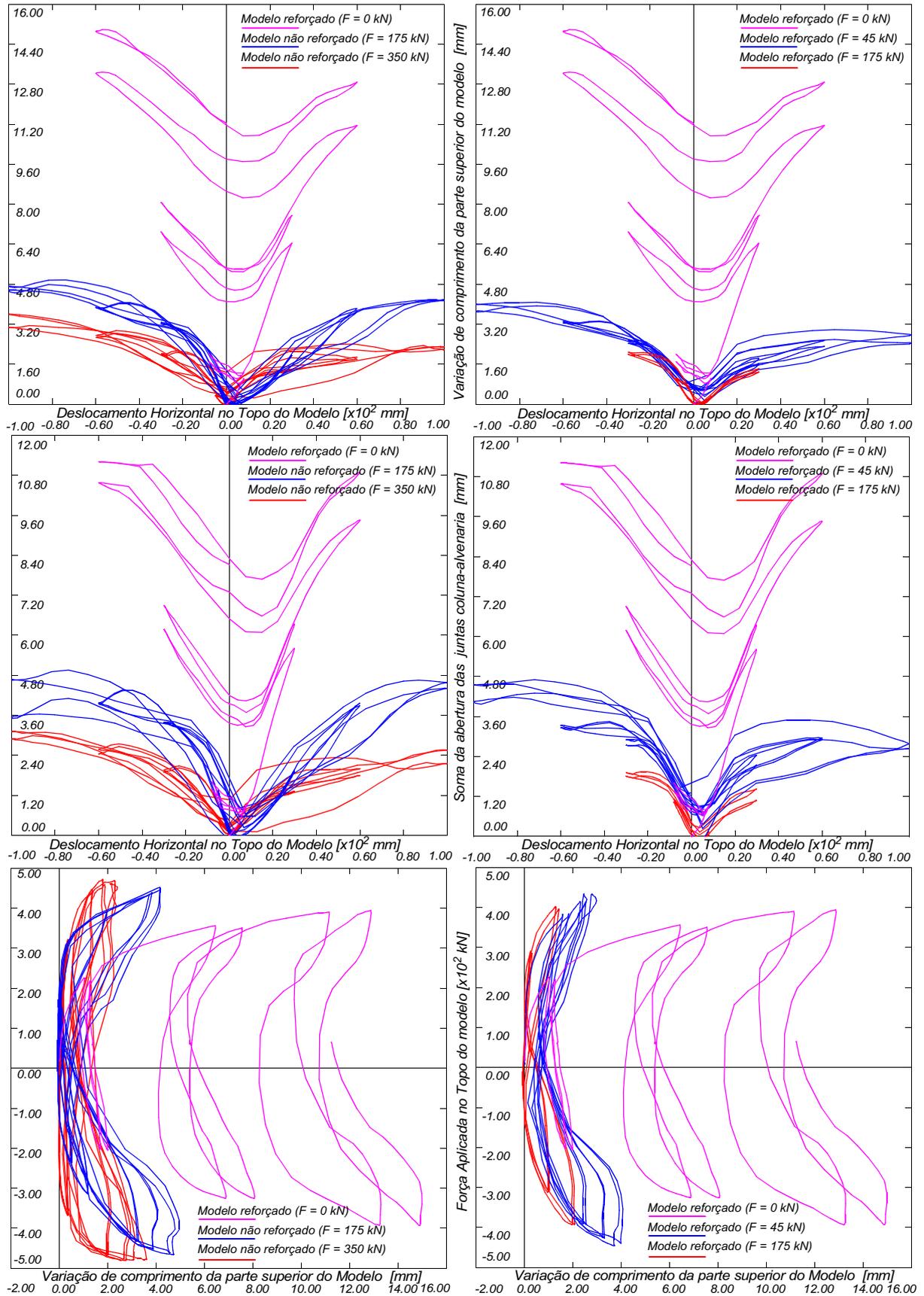


Figura 5.45 - Variação do comprimento da parte superior do modelo (em cima) e da abertura das juntas coluna-alvenaria (no meio) em função do deslocamento horizontal imposto no topo do modelo; variação da força aplicada no topo do modelo com o comprimento da parte superior do modelo (em baixo).

5.5 - MODELAÇÃO NUMÉRICA DOS ENSAIOS

Com o objectivo de verificar a adequabilidade dos modelos numéricos não lineares, de elementos finitos e discretos, na simulação do comportamento estrutural de construções antigas, a equipa envolvida no desenvolvimento do projecto de investigação COSISMO, procedeu à simulação numérica dos ensaios experimentais descritos nos parágrafos anteriores.

Como se pôde observar durante a execução dos ensaios experimentais, os modelos bidimensionais de elementos finitos analisados na fase de dimensionamento do modelo experimental representavam no essencial as características de deformação do modelo quando submetido a acções horizontais. No entanto, verificou-se nos ensaios experimentais que o efeito de imbricamento das secções das colunas, resultado do arranjo tridimensional das pedras que as compõem (Figura 5.46), teve influência na resposta estrutural do modelo, nomeadamente na localização das articulações das colunas. Deste modo, o modelo numérico desenvolvido com o objectivo de reproduzir a resposta estrutural do modelo deverá incluir a modelação das juntas horizontais e verticais das colunas. Os modelos mais sofisticados para modelação pormenorizada do comportamento estrutural do modelo foram realizados com elementos finitos tridimensionais.

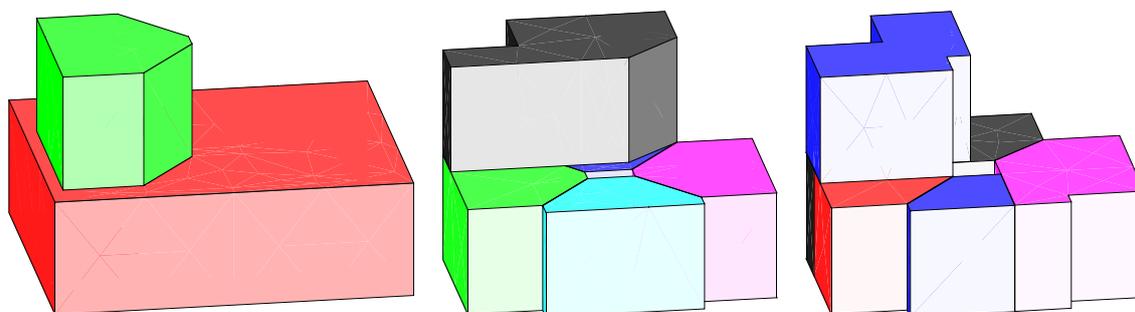


Figura 5.46 - Arranjo tridimensional dos blocos de calcário das colunas do modelo.

Os resultados dos modelos de elementos finitos preliminares e o comportamento do modelo nos ensaios sugerem a utilização de modelos descontínuos, onde as juntas entre blocos são modeladas através de interfaces de comportamento não linear, com reduzida resistência à tracção, e os blocos de pedra através de elementos contínuos com comportamento elástico linear. A concentração de toda a não linearidade do modelo nas interfaces entre blocos é, em virtude dos bons resultados já obtidos em estruturas análogas (parágrafo 4.7) e da natureza dos

danos ocorridos durante os ensaios, uma boa alternativa para a modelação numérica.

5.5.1 - Modelos de Elementos Finitos

A primeira, e talvez a maior, dificuldade da modelação do modelo com elementos finitos tridimensionais é a geração da malha de elementos. A compatibilização dos nós que definem as faces das juntas e dos nós que definem os limites dos blocos, assim com a definição das direcções normais às interfaces, constituem tarefas difíceis e morosas, as quais se tornarão facilmente impraticáveis em estruturas maiores e com arranjos geométricos mais complicados. Assim, justificava-se a criação de um algoritmo de geração de malhas tridimensionais para este tipo de estruturas. Pierre Pegon^{Pegon,1999} desenvolveu uma metodologia numérica que permite a geração automática da malha de elementos finitos contínuos e de interface, a qual foi utilizada na geração da malha do modelo tridimensional do modelo (Figura 5.47).

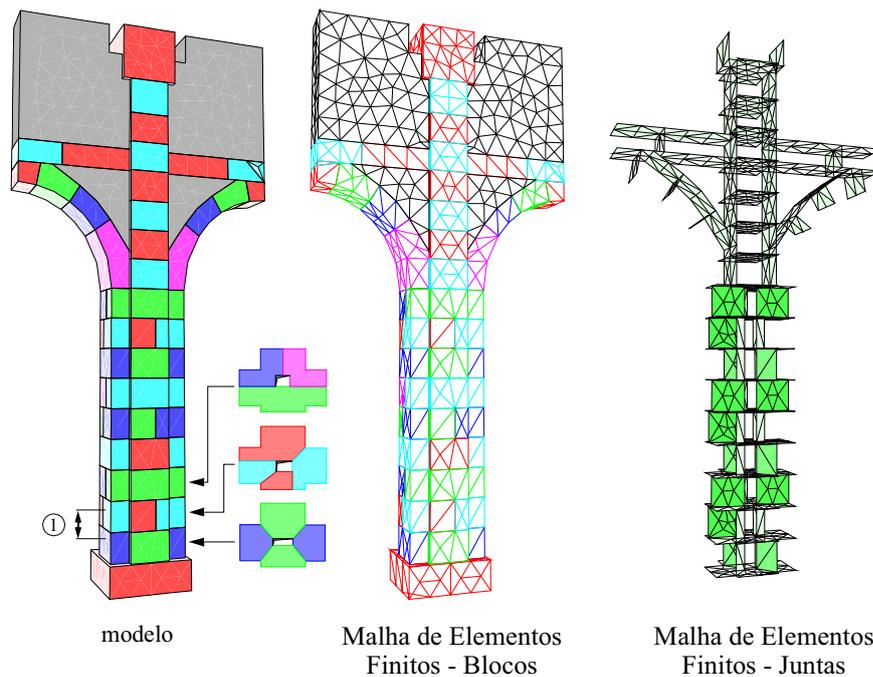


Figura 5.47 - Malha de elementos finitos do modelo tridimensional do modelo^{Pegon et al.,1999}.

Na geração da malha de elementos finitos contínuos que simulam os blocos de calcário das colunas e arcos e a alvenaria superior, utilizaram-se elementos finitos sólidos isoparamétricos de geometria piramidal, com 4 nós, e de geometria hexagonal, com 8 nós. Como referido, a lei de comportamento adoptada para estes elementos foi elástica linear e isotrópica, sendo a integridade confirmada à posteriori através do critério de rotura de Mohr-Coulomb, o qual foi

definido em função das características resistentes determinadas em ensaios experimentais sobre provetes (Tabela 5.1). As características mecânicas adoptadas para os elementos sólidos isoparamétricos tiveram também por base as características determinadas experimentalmente (Tabela 5.1).

Material	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)	σ_t (MPa)	σ_c (MPa)
blocos de pedra	110	0.2	2600	6.6 ^a	66.7
alvenaria	1	0.2	1500	2.98	13.515
juntas de argamassa	2.5	0.2	1800	2.65	23.10

a. este valor foi aproximado a partir da expressão $\sigma_t = \sigma_c / 10$

Tabela 5.1 - Características mecânicas e de resistência dos materiais construtivos do modelo, determinadas através de ensaios experimentais em provetes.

As juntas entre elementos foram simuladas através de elementos de interface planos de espessura nula e de geometria triangular, com 6 nós, ou quadrangular, com 8 nós (Figura 5.48). As características mecânicas das juntas foram determinadas experimentalmente (Tabela 5.1), tendo-se considerado uma espessura da junta $e = 5$ mm para a determinação das suas constantes de rigidez normal e de corte ($k_n = E / e$; $k_t = E / [2e(1 + \nu)]$). O modelo material adoptado para as juntas foi um modelo de corte de Coulomb (conforme descrito no parágrafo 4.4.3.1), com coesão nula e uma lei de amolecimento bilinear. Dos estudos paramétricos realizados com vista a ajustar a resposta numérica à experimental, concluiu-se que a lei de amolecimento bilinear representada na Figura 5.49 com a consideração de um ângulo de atrito inicial $\phi_0 = 20^\circ$ conduz a bons resultados^{Pegon et al.,1999}.

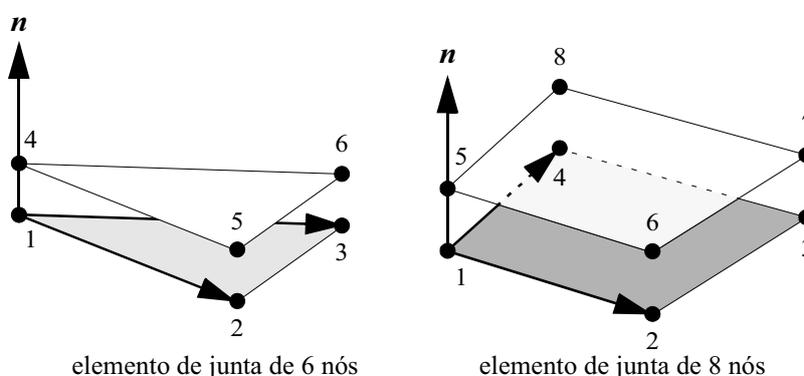


Figura 5.48 - Elementos de interface tridimensionais.

O modelo tridimensional de elementos finitos do modelo foi executado com o programa de

cálculo Castem 3M, tendo sido implementado neste algoritmo, por Pegon^{Ambrosetti e Pegon, 1998}, o modelo de junta tridimensional atrás descrito. Tal como no modelo bidimensional apresentado no parágrafo 5.2.3, admitiu-se condições de fronteira de continuidade, tendo-se modelada apenas uma coluna do modelo. Não se prevendo a imposição de grandes deslocamentos horizontais, realizou-se a análise numérica no domínio geometricamente linear.

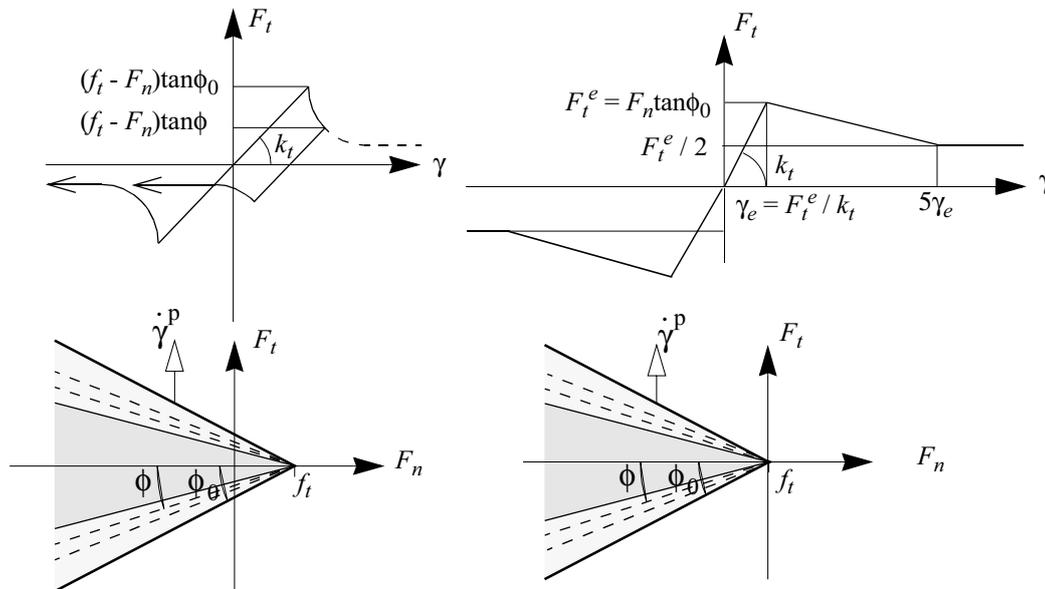


Figura 5.49 - Modelo de junta de Coulomb com amolecimento (esq.) e lei de amolecimento bilinear adoptada no modelo numérico tridimensional (dta.).

Aplicando ao modelo numérico tridimensional as cargas verticais actuantes na estrutura real e uma carga lateral de crescimento monotónico obteve-se uma deformabilidade do modelo concordante com a registada nos ensaios experimentais. Na Figura 5.50 representa-se, sob dois pontos de vista (anterior e posterior), essa configuração deformada do modelo. Como se pode observar, a abertura das juntas ocorre em 3 ou 4 níveis e não se regista a abertura de juntas na parte superior da coluna, junto da base do arco. Esta configuração, concordante com os resultados experimentais, contrasta com a configuração obtida com o modelo bidimensional utilizado na fase de dimensionamento do modelo (Figura 5.11), onde se identificava uma rotação da base da coluna concentrada na sua secção inferior e a ocorrência de uma articulação na parte superior da coluna. Verifica-se, assim, que a configuração tridimensional dos blocos tem como consequência uma maior distribuição das rotações nas secções da base da coluna. De referir que no modelo bidimensional inicial não foi reproduzido o elemento horizontal em cantaria, existente na parte superior da estrutura real e simulado no modelo tridimensional, o qual tem um efeito de confinamento, prevenindo a ocorrência da articulação na parte superior da coluna.

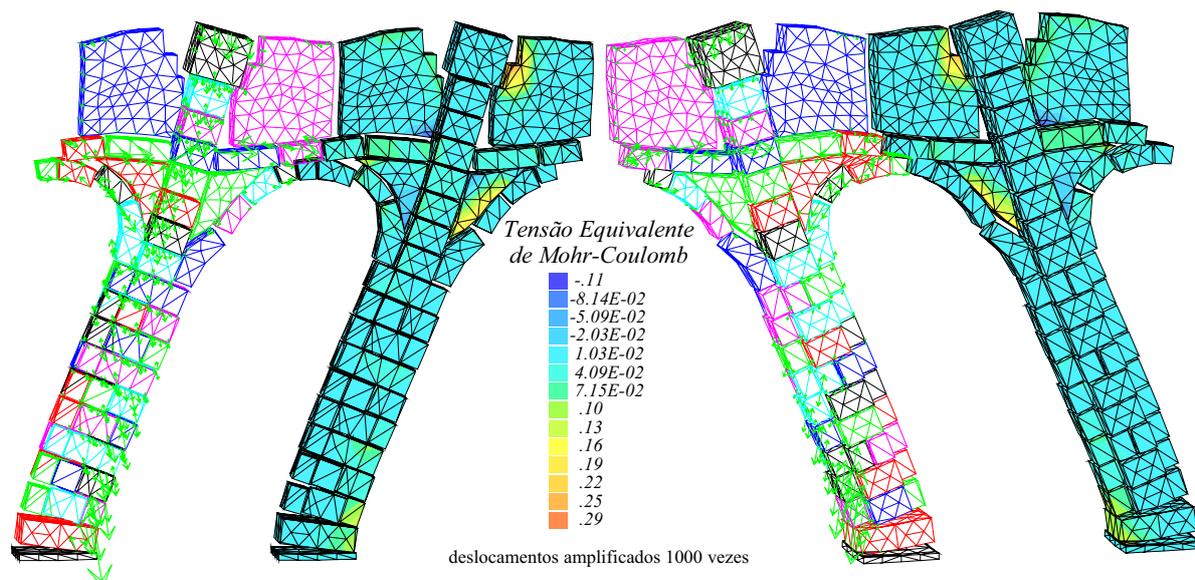


Figura 5.50 - Configuração deformada e distribuição de tensões equivalentes de Mohr-Coulomb correspondentes à análise do modelo numérico tridimensional - vista anterior e posterior^{Pegon et al.,1999}.

Na Figura 5.51 comparam-se os resultados obtidos através do modelo numérico submetido ao carregamento lateral com crescimento monotónico, com os resultados experimentais correspondentes ao ensaio pseudo-dinâmico de pequena intensidade (sismo próximo com período de retorno de 174 anos), verificando-se um razoável ajustamento das curvas. Em todos os gráficos representados o eixo horizontal representa o deslocamento horizontal do topo do modelo, medido através de um sensor óptico.

De notar que nos primeiros ciclos do ensaio pseudo dinâmico correspondente ao sismo de pequena intensidade não ocorreram danos significativos no modelo, tendo estes sucedido apenas na fase final do ensaio. Assim, os resultados dos primeiros ciclos deste ensaios constituem uma base aceitável para a calibração dos resultados numéricos.

Dos resultados do modelo numérico tridimensional verifica-se, em virtude da assimetria dos arranjos dos blocos, que a resposta da estrutura não é perfeitamente simétrica e que ocorre um ligeiro movimento da estrutura fora do seu plano, crescente com o aumento da intensidade da força lateral aplicada. Este deslocamento fora do plano é, no entanto, relativamente ligeiro e não inviabiliza a possibilidade de uma modelação bidimensional.

Numa tentativa de obter um modelo bidimensional adequado para a modelação desta estrutura,

que pelo seu reduzido número de graus de liberdade, permite análises mais céleres e de menor consumo computacional, construiu-se um modelo idêntico ao modelo bidimensional utilizado na fase de dimensionamento do modelo, ao qual se acrescentou o elemento horizontal em cantaria na parte superior do modelo e se considerou uma distribuição de blocos semelhante à real, embora agrupando 2 ou mais blocos por cada nível (Figura 5.52).

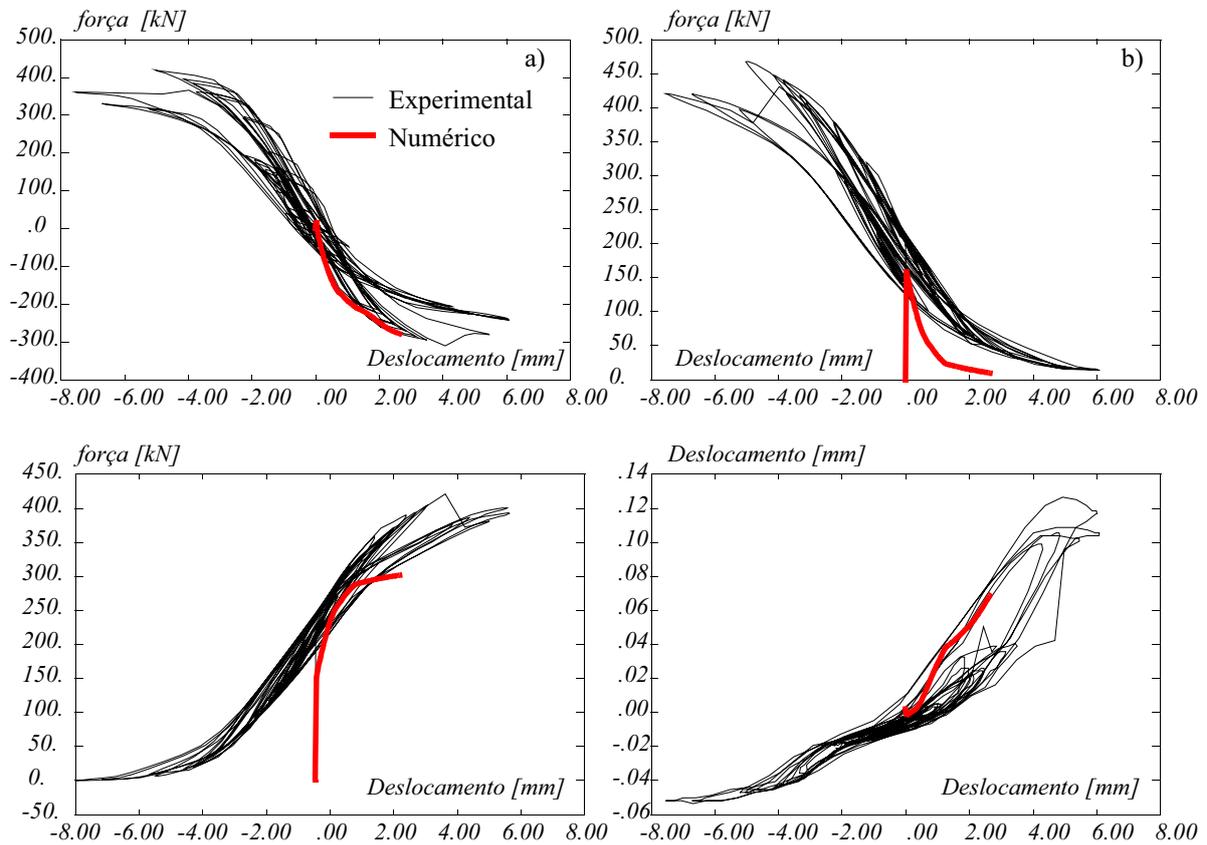


Figura 5.51 - Comparação dos resultados numéricos e experimentais: a) Força aplicada no topo do modelo; b) Força vertical medida nas células de carga do lado esquerdo da base da coluna central; c) Força vertical medida nas células de carga do lado direito da base da coluna central; d) Deslocamento medido no transdutor 1 (ver localização do transdutor 1 na Figura 5.47).

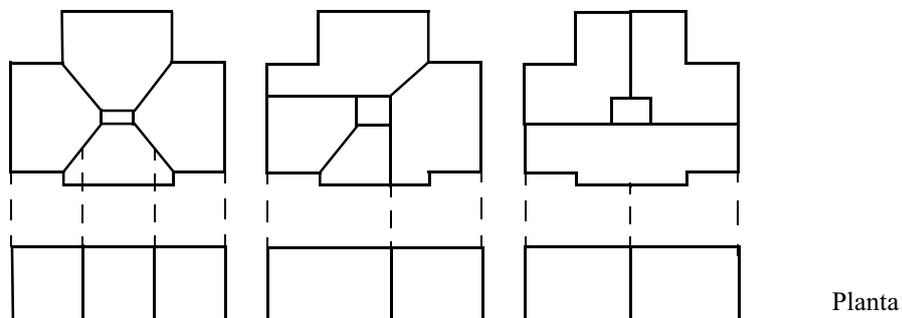


Figura 5.52 - Geração das juntas entre blocos do modelo bidimensional a partir da configuração tridimensional das secções.

A espessura das colunas do modelo bidimensional fora do seu plano foi calculada a partir da

espessura real do modelo (0.91 m), descontando a área da secção não preenchida, obtendo-se assim uma espessura de 0.71m. Na parte superior do modelo, correspondente ao troço em alvenaria, considerou-se a espessura real (0.57 m) e admitiram-se no modelo condições de estado plano de tensão.

Na Figura 5.53 representa-se a configuração deformada obtida através deste modelo numérico bidimensional, a qual se aproxima suficientemente dos resultados do modelo tridimensional e dos ensaios experimentais. Observe-se que a abertura das juntas na base da coluna central não se concentra numa única secção, havendo uma distribuição em altura e que não se detecta a ocorrência da articulação na parte superior da coluna, junto da base do arco. Deste modo, o modelo numérico bidimensional descrito pode considerar-se adequado para a modelação estrutural do modelo.

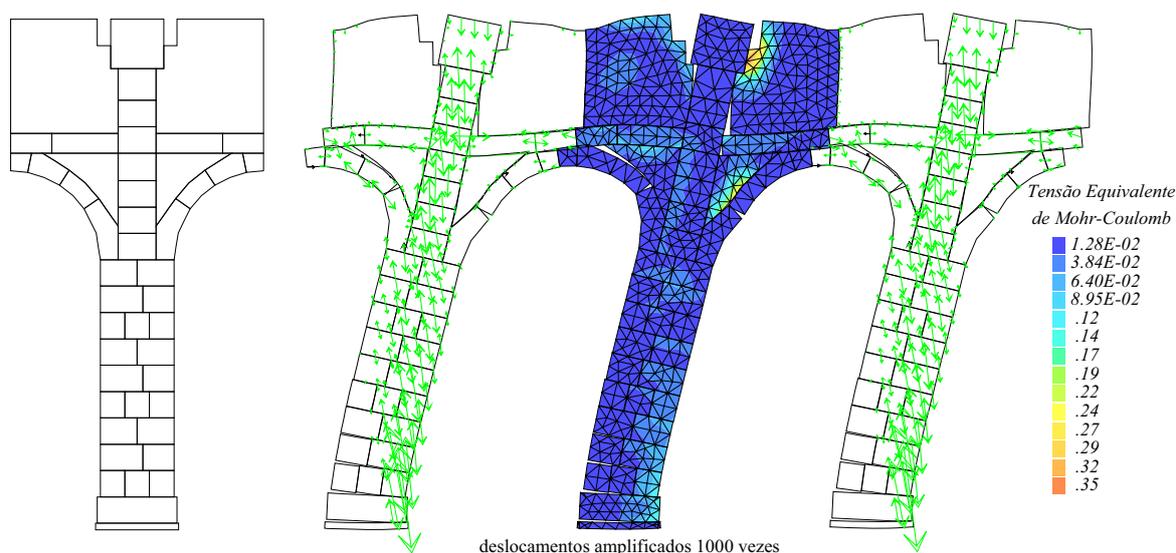


Figura 5.53 - Resultados da modelação bidimensional do modelo ^{Pegon et al. 1999}.

5.5.2 - Modelos de Elementos Discretos

No âmbito do projecto de investigação COSISMO, os ensaios experimentais cíclicos descritos no parágrafo 5.4 foram modelados por Vieira de Lemos ^{Lemos, 1998a} através de modelos de elementos discretos. As análises foram realizadas através do programa de cálculo UDEC e da sua versão tridimensional 3DEC ^{Hart et al., 1988}, considerando a deformabilidade dos blocos das colunas e arcos e da alvenaria pela sua discretização numa malha de elementos de diferenças finitas. Em análises dinâmicas, de modo a aumentar a celeridade do cálculo, é normalmente preferível a utilização de blocos discretos rígidos. No entanto, em análises estáticas ou quase

estáticas a consideração da deformabilidade não se reflecte num aumento significativo do tempo de cálculo. Assim, em virtude da simulação da deformabilidade permitir uma melhor modelação do comportamento dos blocos e respectivas juntas, optou-se por esta metodologia na reprodução numérica dos ensaios cíclicos.

A primeira diferença entre as metodologias de modelação numérica com elementos finitos e com elementos discretos em estruturas com contactos de geometria complexa, em particular nos modelos tridimensionais, prende-se com a geração da malha de elementos. Se por um lado na geração da malha de elementos finitos é necessário um cuidado especial na definição dos nós que definem os elementos de junta e os elementos contínuos, o que se pode tornar uma tarefa complexa na ausência de algoritmos de geração automática de malhas, nos modelos de elementos discretos essa tarefa não é necessária. Como se viu (parágrafo 4.5), na execução do algoritmo de cálculo do método dos elementos discretos os contactos entre blocos são calculados e actualizados automaticamente em cada passo, não sendo necessário duplicar os nós dos contactos nem compatibilizar os nós dos diferentes blocos discretos.

A análise numérica com elementos discretos foi conduzida com um modelo bidimensional que reproduziu o modelo experimental e respectivas condições de carga (Figura 5.54) e complementada por uma análise tridimensional de apenas uma das colunas, a qual possibilitou avaliar a influência do arranjo tridimensional das secções das colunas na resposta global da estrutura.

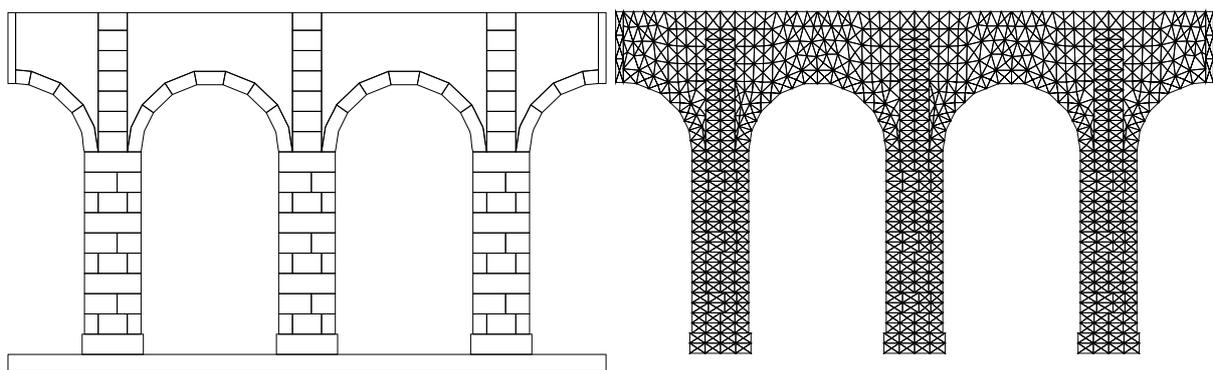


Figura 5.54 - Modelo de elementos discretos do modelo experimental (esq. - blocos discretos; dta. - malha de elementos de diferenças finitas triangulares de deformação constante).

Contrariamente à modelação por elementos finitos, onde se simulou o comportamento da estrutura contínua através de condições de fronteira de continuidade, na modelação por elementos discretos reproduziu-se exactamente o modelo experimental, quer ao nível da

geometria quer ao nível das condições de carga. As acções verticais impostas pelos actuadores e as barras de aço pós-tensionadas, que unem as duas extremidades do modelo e que permitiram a imposição das condições de fronteira de continuidade no ensaio, foram fielmente reproduzidas no modelo numérico. Como realizado no ensaio experimental, as acções horizontais foram aplicadas, com intensidades iguais, no topo das três colunas. As dimensões do modelo numérico foram estabelecidas a partir dos desenhos de projecto do modelo (Figura 5.13), tendo-se admitido para as espessuras fora do plano na parte superior do modelo e nas colunas as espessuras de 0.57m e 0.75 m, respectivamente[†].

Como referido, admitiu-se para os blocos discretos que simulam as pedras das colunas e dos arcos e para a alvenaria da parte superior do modelo um comportamento elástico linear. As características mecânicas consideradas para estes elementos contínuos resultaram dos ensaios de caracterização dos materiais, cujos valores que se apresentam na Tabela 5.1. Admitiram-se neste modelo bidimensional condições de estado plano de tensão.

Para os contactos considerou-se um modelo de comportamento não linear, elásto-plástico, governado pelo critério de Coulomb, com coesão e resistência à tracção nulas. Na Tabela 5.2 representam-se as características mecânicas admitidas para os contactos.

k_n (GPa/m)	k_t (GPa/m)	ângulo de atrito ϕ (°)	ângulo de dilatação ψ (°)	coesão c	resistência à tracção f_t
115	46	35	0	0	0

Tabela 5.2 - Características mecânicas admitidas para os contactos do modelo de elementos discretos.

As condições de fronteira do modelo de elementos discretos foram definidas de modo a simular o mais realisticamente possível as condições de realização dos ensaios sobre o modelo experimental. Assim, fixou-se o bloco horizontal da base, que suporta a estrutura, e aplicaram-se cargas verticais de 400 kN por pilar e de 100 kN em cada painel de alvenaria adjacente. Os deslocamentos verticais dos nós do topo dos pilares extremos (da direita e da esquerda) foram restringidos de modo a terem o mesmo valor e o deslocamento horizontal foi medido no topo

[†] À semelhança do realizado no modelo bidimensional de elementos finitos, para se ter em conta com a configuração em planta das secções das colunas, adoptou-se uma espessura fora do plano inferior à real (0.91 m).

do pilar central. As cargas horizontais foram aplicadas igualmente distribuídas pelos topos dos três pilares do modelo numérico.

Pretendendo simular o ensaio cíclico realizado sobre o modelo não reforçado submetido a uma força de pós-tensão das barras internas de 350 kN, aplicou-se essa força aos correspondentes elementos do modelo de elementos discretos. Como se pode observar na Figura 5.55, que representa os resultados obtidos na modelação numérica através da aplicação sucessiva de cargas horizontais quase estáticas, apenas se simularam os ciclos de amplitude de 30 e de 60 mm.

Comparando os resultados numéricos com os resultados experimentais (Figura 5.55), constata-se que as curvas “carga-deslocamento” têm andamentos semelhantes, embora se identifique uma sobre-estimativa numérica da carga máxima. Esta ligeira sobre-estimativa pode ser explicada pela simplificação na representação dos painéis de alvenaria por blocos únicos e de comportamento elástico linear, a qual é, aparentemente, ligeiramente mais rígida. Se estes blocos tivessem sido modelados através de modelos de comportamento material elasto-plástico, ou se fossem divididos em vários blocos (à semelhança do realizado no parágrafo 4.9.2, quando da modelação da ponte de Bridgemill), poderia-se ter obtido uma aproximação do comportamento real da estrutura um pouco melhor. No entanto, a analogia das curvas da Figura 5.55 indica que o modelo numérico de elementos discretos reproduz no essencial as características do comportamento mecânico real do modelo.

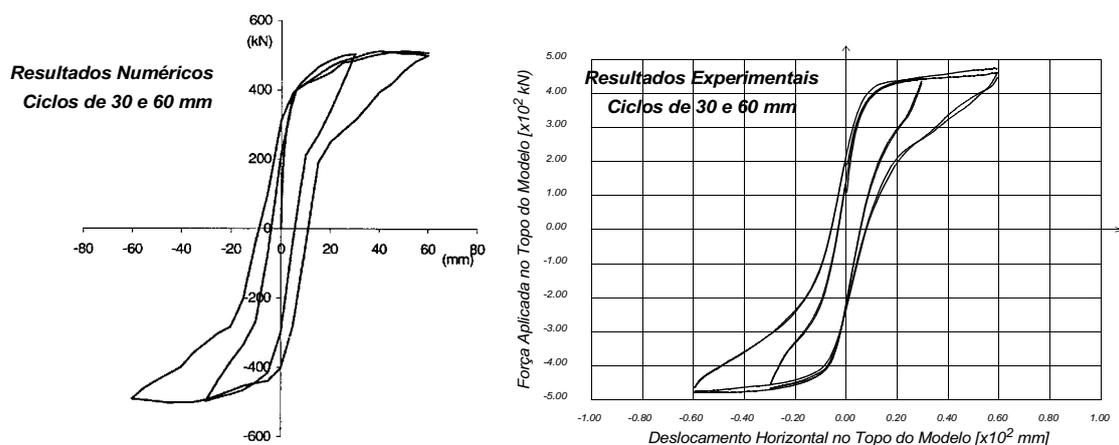


Figura 5.55 - Curvas “carga-deslocamento” obtidas numericamente ^{Lemos, 1998a} e experimentalmente.

Os arcos e a parte superior do modelo, em alvenaria, são bem representados num modelo bidimensional. No entanto, as colunas apresentam uma estrutura tridimensional que resulta do

arranjo dos blocos que as constituem, a qual não é representável num modelo plano. Assim, de modo a investigar o possível efeito dessa composição tridimensional na resposta global da estrutura, simulou-se com modelos de elementos discretos tridimensionais o comportamento duma coluna quando sujeita à acção de uma carga horizontal (Figura 5.56). Como referido, considerou-se para os blocos discretos que constituem a coluna um comportamento elástico-linear, sendo a sua deformabilidade simulada através duma discretização em elementos de diferenças finitas tetraedricos. Tal como nos modelos anteriores, considerou-se o comportamento não linear da estrutura totalmente concentrado nas juntas entre blocos e aplicou-se ao modelo da coluna uma acção vertical equivalente ao esforço normal médio das colunas nas análises bidimensionais anteriores.

Para comparação com os resultados do modelos tridimensional, executaram-se dois modelos da coluna com elementos discretos planos. Um primeiro modelo reproduz a coluna do modelo bidimensional da Figura 5.54 e um segundo não apresenta juntas verticais nos blocos da coluna (Figura 5.56).

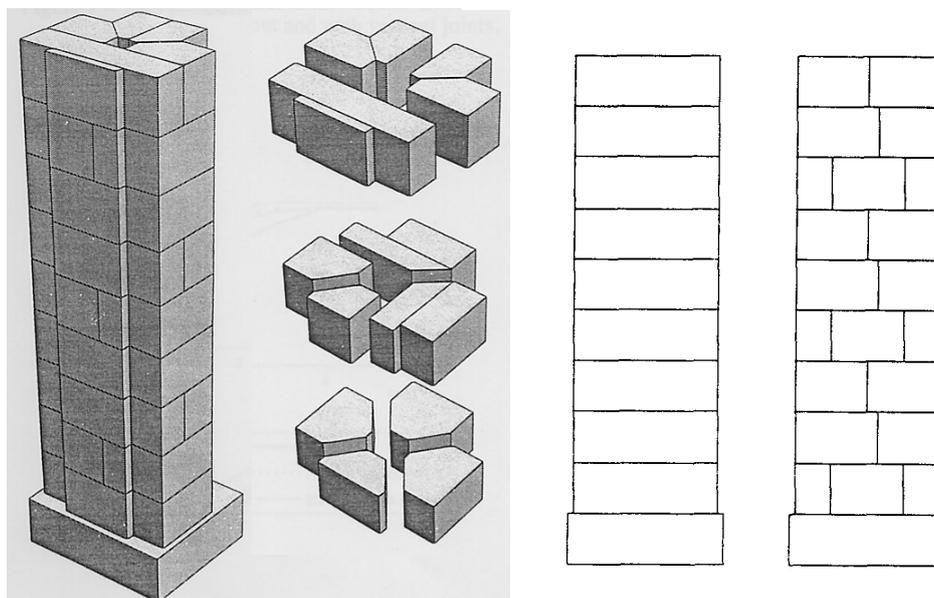


Figura 5.56 - Modelo da coluna com elementos discretos tridimensionais (esq.) e modelos planos comparativos (dta.) *Lemos, 1998a*.

Na Figura 5.57 representam-se as curvas “carga-deslocamento” obtidas nas análises dos três modelos de elementos discretos, nas quais apenas se considerou um ciclo de 5 mm de amplitude. De observar que para essa amplitude se atinge a capacidade resistente máxima, enquanto que no modelo da Figura 5.54 essa resistência é atingida para ciclos de 60 mm de amplitude. Este

resultado deve-se ao facto de nos modelos agora apresentados se simular apenas uma coluna e não a estrutura porticada completa, com três colunas.

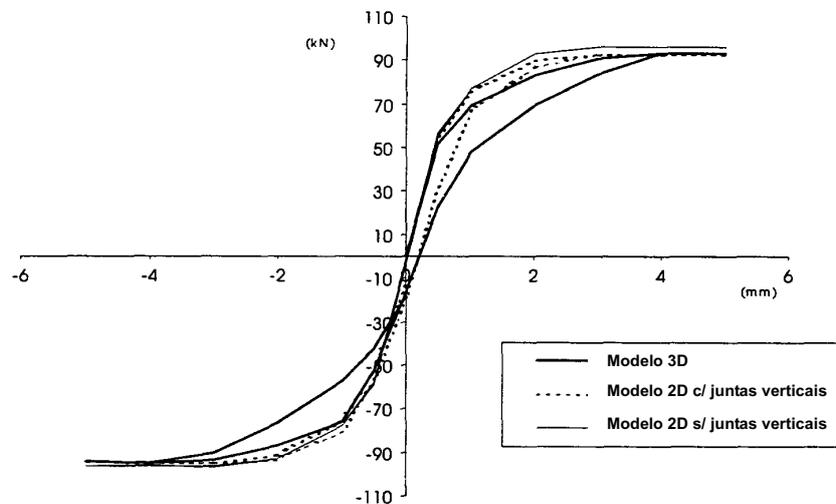


Figura 5.57 - Resultados dos modelos de elementos discretos duma coluna do modelo experimental *Lemos, 1998a*.

No gráfico da Figura 5.57 pode verificar-se que o ciclo histerético da análise tridimensional é mais pronunciado do que nos modelos bidimensionais, sendo que o modelo da coluna sem juntas verticais não apresenta, praticamente, comportamento histerético. Estes resultados indicam que o atrito nas juntas verticais da coluna contribui para a dissipação da energia sísmica, e confirmam a conclusão de que o processo de dissipação energética resulta, fundamentalmente, de fenómenos que envolvem o atrito nas juntas entre os elementos.

As reduzidas diferenças entre os resultados do modelo tridimensional e os do modelo plano com juntas verticais validam as análises bidimensionais, com elementos discretos e finitos, realizadas anteriormente.

5.6 - CONCLUSÕES

Descreveu-se neste capítulo o trabalho de investigação realizado no âmbito do projecto de investigação *COSISMO*, dando especial ênfase aos aspectos relacionados com a execução dos ensaios experimentais e com a respectiva modelação numérica.

Numa primeira fase foi desenvolvido um modelo numérico simplificado da arcada dos claustros

do mosteiro de São Vicente de Fora o qual, ao reproduzir os aspectos fundamentais do comportamento mecânico dessa estrutura, permitiu dimensionar o modelo a ensaiar. O número de arcos a construir, assim com as condições de fronteira e de carregamento do modelo, foram definidos em função dos resultados dessa análise numérica.

Na análise numérica preliminar, baseada em modelos de comportamento mecânico não linear, estudou-se também o efeito da história da aplicação das cargas permanentes. Nestes modelos, onde se concentrou todo o comportamento não linear do material nas juntas entre elementos, verificou-se que a aplicação faseada do peso próprio da fachada dos claustros conduz a distribuições de tensão diferentes das obtidas quando se aplica a carga permanente num só passo. No entanto, no caso em estudo constatou-se que a aplicação da carga permanente num só passo conduzia nas análises posteriores a resultados equivalentes aos obtidos com a aplicação faseada do peso próprio. Embora não se tenha verificado relevante para o estudo dos ensaios experimentais, esta análise serviu para perceber as dificuldades da análise numérica de edifícios antigos. De facto, o campo de tensões realmente instalado no edifício, assim como a sua geometria real, são dependentes da sequência construtiva e da história das solicitações a que o edifício esteve sujeito.

Os ensaios experimentais sobre o modelo à escala real foram divididos em duas campanhas. A primeira campanha de ensaios, realizada sobre o modelo original, consistiu na realização de três ensaios pseudo-dinâmicos, correspondentes a sismos de pequena e elevada intensidade, e de dois ensaios cíclicos com amplitudes de deslocamentos horizontais, no topo do modelo, variáveis de 5 a 100 mm. Dos resultados destes ensaios constatou-se que o modelo e, conseqüentemente, as estruturas que ele representa, apresentam importantes características de dissipação de energia sísmica, a quais resultam, fundamentalmente, de processos que envolvem atrito nas juntas. O fenómeno de abertura e fecho das juntas entre elementos, embora sem contributo na dissipação energética, é responsável pela significativa capacidade de deformação da estrutura. A ductilidade destas secções, admitida como hipótese na análise limite das estruturas em alvenaria de pedra, foi também confirmada pelos resultados experimentais.

Dos ensaios pseudo-dinâmicos e cíclicos, realizados com diferentes intensidades das forças de pós-tensão dos cabos internos na parte superior do modelo, constatou-se que a estabilidade da parte superior do modelo está directamente relacionada com a ductilidade da estrutura. A

transferência da deformação para as secções das colunas, que apresentam maior ductilidade, resulta numa maior capacidade de deformação do modelo.

Constatou-se, então, que o razoável comportamento sísmico do modelo e, conseqüentemente, deste tipo de estruturas, resulta da sua ductilidade e capacidade de dissipação de energia, as quais são possíveis se a parte superior do modelo, ou estrutura, apresentar solidez suficiente para que se possa mobilizar a deformação das secções das colunas. Assim, pretendendo manter as características de ductilidade da estrutura, a solução de reforço a implementar deverá actuar ao nível da sua parte superior, visando a manutenção do seu comportamento porticado.

Após a realização da primeira campanha de ensaios, e tendo em conta a avaliação do comportamento estrutural do modelo, o modelo experimental foi reforçado através da inclusão de barras de aço aderentes, localizadas no interior da sua parte superior. Realizaram-se posteriormente três ensaios cíclicos com histórias de deslocamentos crescentes e com diferentes intensidades da força de pós-tensão das barras de aço internas não aderentes. Dos resultados dos ensaios sobre o modelo reforçado constatou-se que a solução de reforço implementada é eficaz, verificando-se a manutenção do comportamento porticado, mesmo para amplitudes de deslocamento imposto da ordem dos 60 mm. No entanto, com a solução de reforço com cabos aderentes e com intensidades reduzidas da força de pós-tensão dos cabos não aderentes, verifica-se a ocorrência de deformações permanentes no modelo, que resultam da não recuperação da abertura dos contactos entre a alvenaria superior e as colunas em pedra.

Os resultados experimentais serviram também de base para a calibração de modelos numéricos, pretendendo verificar-se a adequabilidade dos modelos de elementos finitos e dos modelos de elementos discretos na modelação deste tipo de estruturas. Consideraram-se modelos bidimensionais e tridimensionais, tendo em todos eles concentrado a não linearidade do comportamento estrutural nas juntas entre os blocos das colunas e dos arcos. Foi possível modelar adequadamente o comportamento estrutural do modelo através dos dois tipos de elementos, tendo-se verificado um razoável ajustamento entre as curvas numéricas e experimentais em ambas as situações.

CAPÍTULO 6 - CASO DE ESTUDO, IGREJA DE SÃO FRANCISCO

6.1 - INTRODUÇÃO

A especificidade das estruturas das construções antigas, com a sua história complexa, requer a organização do seu estudo em fases semelhantes às que são utilizadas em medicina. Anamnese, diagnóstico, terapia e controlo correspondem respectivamente à recolha de informação, identificação das causas dos danos, selecção das acções de consolidação e controlo da eficácia das intervenções. De forma a assegurar a eficiência da utilização dos meios disponíveis e o impacto mínimo no património construído, é muitas vezes necessário repetir estas fases num processo iterativo.

De acordo com as recomendações da comunidade científica internacional^{ICOMOS,2004}, qualquer decisão sobre conservação, restauro ou reforço de uma estrutura de um edifício antigo, particularmente se se trata de património cultural, deverá ser tomada após um rigoroso e cuidadoso diagnóstico dos danos e duma avaliação da sua segurança actual.

Tal como nos métodos de cálculo e nas práticas de dimensionamento, as metodologias utilizadas na análise estrutural de construções existentes recentes não poderão ser directamente empregues no diagnóstico estrutural de construções antigas. O diagnóstico dos danos em edifícios antigos exige, além das habituais análises do comportamento estrutural, uma apurada investigação histórica, que permita conhecer as técnicas e materiais construtivos utilizados, bem como as possíveis alterações arquitectónicas e estruturais ocorridas ao longo da vida da construção. Também neste domínio, o conhecimento do que aconteceu no passado é muito

importante para prever o comportamento futuro.

A análise quantitativa do comportamento estrutural de construções antigas fundamenta-se em hipóteses e modelos que reflectem incertezas na representação das características dos materiais e do comportamento estrutural e que, juntamente com as simplificações adoptadas, podem conduzir a resultados nem sempre fiáveis. Por outro lado, a exigência de níveis de segurança semelhantes aos requeridos para as construções novas poderão conduzir a níveis de intervenção indesejáveis em construções antigas, nomeadamente quando se trata de património histórico.

Neste capítulo pretende-se, com o estudo de um caso real, exemplificar a metodologia de análise e diagnóstico de problemas estruturais em edifícios antigos, considerada adequada à luz dos conceitos actuais. Esta metodologia pode resumir-se nos seguintes passos[†]:

1) Aquisição de dados

- 1.1) Investigação histórica e arquitectónica do edifício
- 1.3) Levantamento geométrico e mecânico da estrutura
- 1.2) Levantamento dos danos e verificação da sua estacionaridade
- 1.4) Identificação de acções
- 1.5) Monitorização

2) Diagnóstico e avaliação de segurança

- 2.1) Identificação de causas dos danos através de abordagem qualitativa
- 2.2) Abordagem quantitativa, através de modelação numérica ou analítica
- 2.3) Abordagem experimental, através de ensaios que permitam avaliar as características de funcionamento da estrutura
- 2.4) Avaliação da segurança

O caso de estudo que se apresenta exemplifica, também, a aplicação prática dos conceitos teóricos descritos nos capítulos anteriores, constituindo o primeiro passo de aplicação do trabalho de investigação realizado no âmbito desta dissertação.

[†] Que poderão ser executados numa ordem diferente da indicada.

6.2 - DESCRIÇÃO DO EDIFÍCIO E ANOMALIAS ESTRUTURAIS

6.2.1 - Introdução

A Igreja de São Francisco (Figura 6.1), classificada como Monumento Nacional em 1910, apresenta algumas patologias construtivas, sendo as relacionadas com a abóbada da nave e com a fachada principal aquelas que motivaram o estudo cujos passos se descrevem neste capítulo.

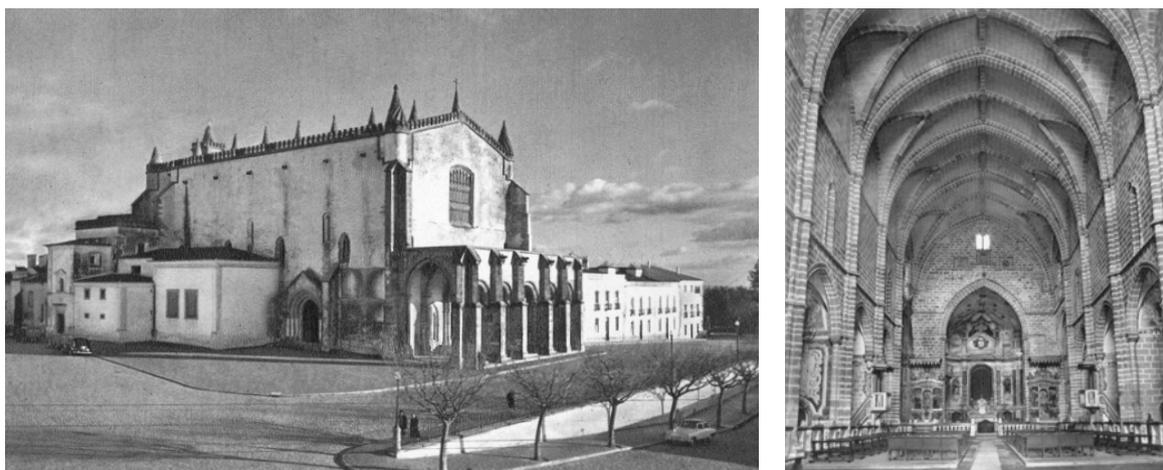


Figura 6.1 - Vista exterior e do interior da nave da Igreja de São Francisco ^{Espanca, 1966}.

Na face inferior da abóbada da nave são visíveis fendas junto das paredes laterais, que se estendem quase simetricamente ao longo do eixo e se prolongam na fachada principal, tanto no interior como no exterior (Figura 6.2). A antiguidade e persistência destas fendas, e as suas características, permitem pensar que estão associadas ao comportamento estrutural do edifício ou fundações e não a uma qualquer acção pontual ou acidental. De facto, relatos de inspecções do século XIX já as descrevem, procurando causas e interrogando-se sobre se correspondem a movimentos estabilizados ou em progressão e sobre quais as reparações e reforços mais adequados. As questões que hoje se colocam são as mesmas e os estudos em curso visam aplicar ao problema os actuais métodos de análise.

De facto, segundo informações recolhidas junto dos encarregados pela manutenção do monumento e de acordo com as referidas descrições do século XIX, o fenómeno de fendilhação é antigo e parece ter evolução lenta. No entanto, o conhecimento de que estruturas monumentais em alvenaria podem ter colapso súbito sob a acção das cargas permanentes após séculos de funcionamento (como foram os recentes casos da torre de Pavia e da catedral de Notto) e a

constatação de que no último século houve evolução das fendas exigem, atenção, esclarecimento de causas e propostas que acautelem o futuro da Igreja de São Francisco.

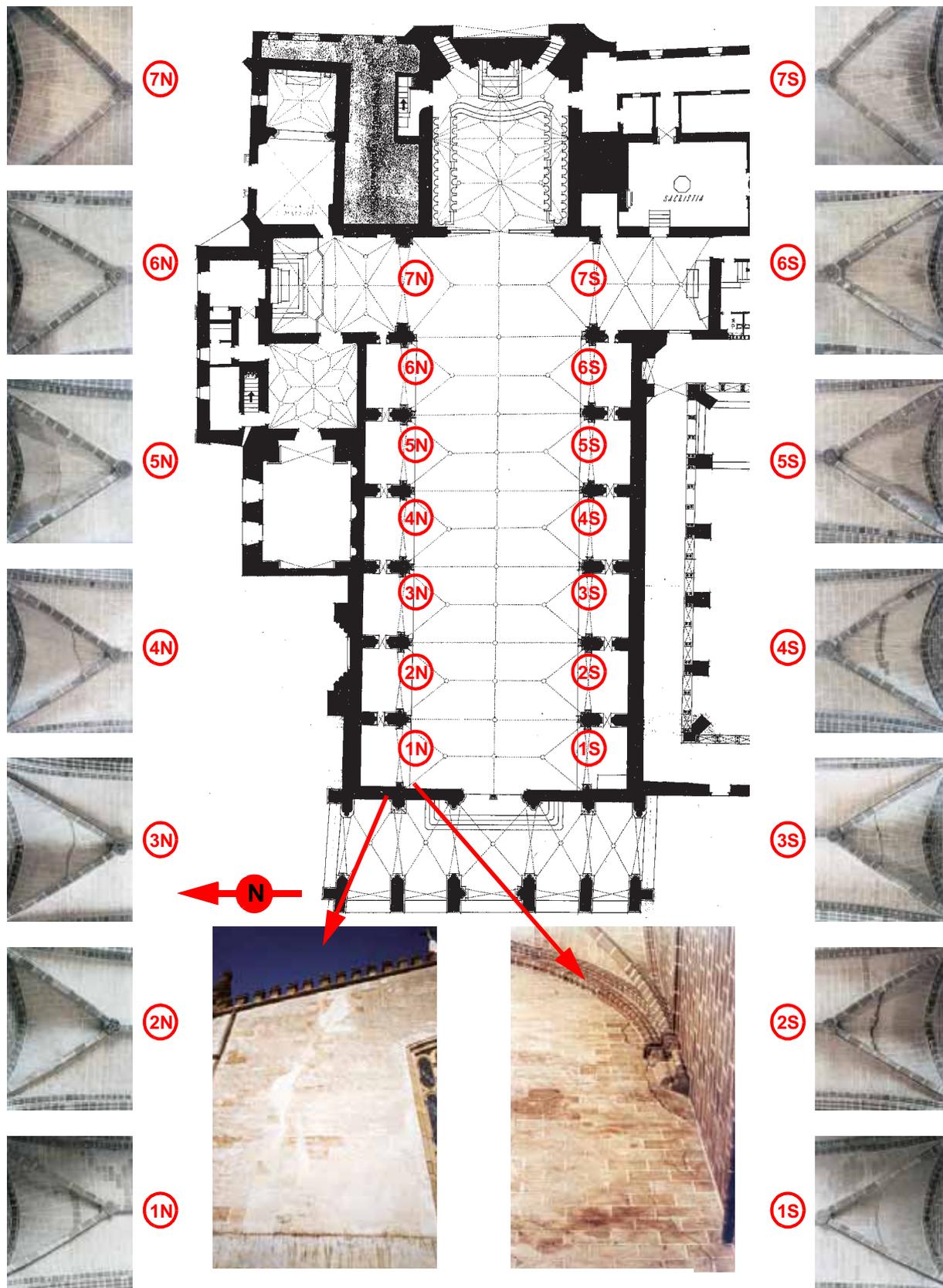


Figura 6.2 - Danos na Igreja de São Francisco - fendas na abóbada da nave e na fachada principal.

No âmbito dos trabalhos em curso foi efectuado um levantamento geométrico rigoroso, com recurso a meios topográficos de alta precisão, cuja análise está em curso, e proceder-se-á à caracterização mecânica dos materiais e à instalação de um sistema de monitorização que permita registar a evolução da abertura das fendas. Estes dados permitirão realizar novos modelos estruturais e análises computacionais progressivamente mais aperfeiçoados e obter informações sobre a segurança estrutural do edifício, sobre a eventual necessidade de reforço e sobre a eficácia de possíveis intervenções.

6.2.2 - Descrição Geral do Edifício

A Igreja de São Francisco em Évora é um notável edifício gótico de planta em cruz latina, de braços estreitos, com uma só nave, a que se segue cruzeiro e abside aberta na parede de topo. O interior da nave tem 24 m de altura e 12.8 m de largura. É coberto por uma abóbada ogival dividida em seis tramos de 6 m por grandes arcos ogivais e colunas de cantaria. O cruzeiro tem 7.5 m de largura. Entre arcos, a abóbada é interceptada de cada lado do eixo por lunetas nervuradas (Figura 6.3).

Os encontros da abóbada da nave são formados por um sistema constituído por duas paredes longitudinais, paralelas, com 0.8 m de espessura e afastadas de 2.40 m, e por seis paredes-contraforte transversais, de 0.9 m de espessura e 4.5 m de largura, dispostas no plano dos arcos principais e integrando as respectivas colunas de suporte. As paredes longitudinais interiores abrem ao nível térreo e até quase meia altura para formar, entre arcos e paredes-contraforte, seis capelas laterais. Por cima das capelas e entre as paredes longitudinais corre uma galeria ou tribuna. Os tectos das galerias são formados por abóbadas "botantes" que, partindo das paredes exteriores, apoiam, a um nível superior, as paredes longitudinais interiores (Figura 6.3).

O sistema estrutural foi concebido, através das lunetas que encostam às paredes longitudinais interiores, de modo a transmitir a acção do peso próprio da abóbada às nervuras e arcos principais e, conseqüentemente, às paredes-contraforte, diminuindo impulsos nas paredes longitudinais. Esta intenção reflecte-se na escolha dos materiais construtivos: cantaria de granito nos elementos responsáveis por este encaminhamento de cargas, nomeadamente nos arcos principais, nervuras e colunas; abóbadas em alvenaria de tijolo; e alvenaria corrente nos restantes elementos estruturais.

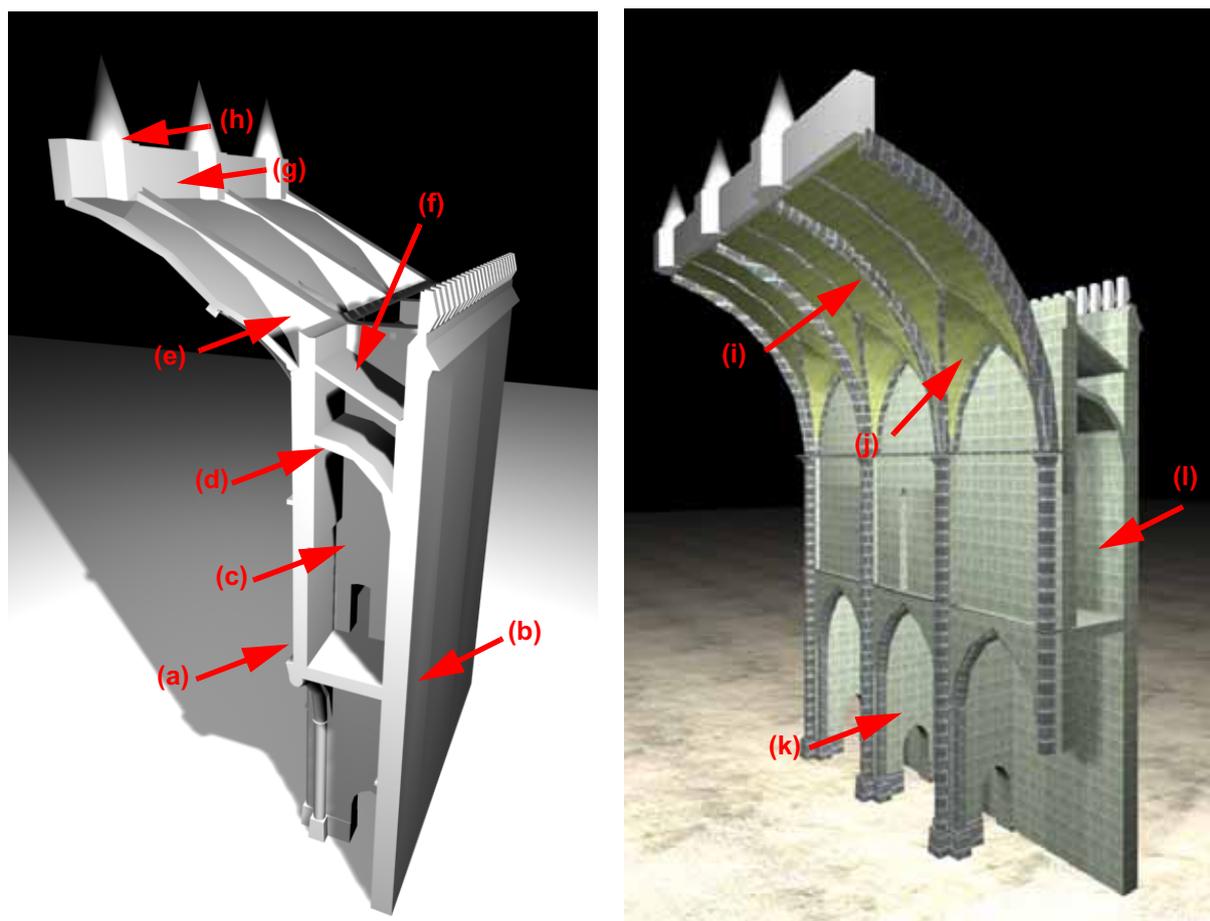


Figura 6.3 - Esquema dos encontros da abóbada da nave: a) parede longitudinal interior; b) parede longitudinal exterior; c) contraforte/parede transversal; d) abóbada botante; e) muro de carga dos arcos principais; f) terraço lateral; g) muro de remate da cumeeira; h) coruchéu; i) arco principal ou mestre; j) luneta; k) capela lateral; l) galeria sobre capelas laterais.

A cobertura de duas águas, originalmente dividida por paredes de alvenaria sobre os arcos principais, evacua as águas para terraços laterais sobre as tribunas (isto é, entre as paredes longitudinais de suporte), de onde saem através de altas gárgulas. A cumeeira é rematada por um muro de alvenaria e, sobre este, nos alinhamentos dos arcos principais, foram construídos coruchéus. Na fachada principal existe um pórtico manuelino composto por cinco arcos contrafortados, encimado por um terraço ao nível das galerias situadas sobre as capelas laterais. A parede da fachada é ladeada por contrafortes mais salientes rematados por coruchéus especiais.

6.2.3 - História das Intervenções na Construção

Segundo rezam as crónicas, o convento de São Francisco, então situado extra-muros, terá sido fundado em 1224^{Lamas e Gago,2002}. Graças a sucessivas doações ganhou rapidamente riqueza e

dimensão, chegando o "Convento de Ouro", como começou a ser denominado, a estender-se por uma boa parte da actual cidade de Évora.

Embora os monarcas portugueses sempre tenham demonstrado generosidade para com os frades franciscanos, as grandes temporadas que passavam na cidade de Évora e a qualidade do edifício conventual conduziram a uma progressiva apropriação dos seus espaços. Terá sido iniciada de uma forma discreta por D. João I e prolongou-se no século XV, durante o reinado de D. Afonso V, quando a Corte se instalou em parte do edifício e cerca do convento. Nesta época o estado de conservação do convento era ruinoso, tendo o monarca levado a cabo algumas obras de reconstrução, que D. João II prosseguiu, aumentando ainda mais a área do palácio real em prejuízo do espaço conventual. No final do século XV, as zonas ocupadas pelos frades limitavam-se à Igreja, ao claustro a Sul e a algumas edificações próximas.

Nos primeiros anos do reinado de D. Manuel tiveram início obras de reedificação da Igreja que hoje conhecemos. Os historiadores têm procurado esclarecer, sem resultados conclusivos, o nome do projectista do monumento e datas. Sabe-se, de qualquer modo, que não foi levantado de raiz, tendo conservado da velha traça o volume correspondente às três naves góticas originais e parte dos alçados laterais. Na fachada, foi aberta a actual porta da Igreja, rasgado o grande janelão envidraçado e construído o adro coberto de entrada.

Em 1616, Felipe II visitou a cidade de Évora e, ao contrário do costume dos reis portugueses, não permaneceu nos paços reais de São Francisco. Aproveitando esta circunstância, os frades solicitaram ao monarca, e obtiveram, a restituição de alguns espaços e, em 1619, durante outra visita régia à cidade, conseguiram os restantes.

Nos dois séculos seguintes não há registo de alterações na propriedade do convento nem de danos significativos nos edifícios que o constituíam. Tratando-se de uma instituição de grande riqueza, é de admitir que terão sido realizadas no edifício, pelo menos, as obras fundamentais de manutenção e conservação.

Em 1808, o convento de São Francisco não escapou à pilhagem e ao saque quando a cidade foi assaltada pelas tropas francesas. Embora não tenham ocorrido danos nos edifícios, a instituição foi gravemente prejudicada o que, naturalmente, terá tido consequências na qualidade e

frequência das obras de manutenção que neles efectuava.

Em 1834, dá-se a expropriação dos bens pertencentes às ordens religiosas, ficando o convento e a Igreja de São Francisco abandonados e entregues ao vandalismo até 1837, altura em que a Ordem Terceira pediu, e obteve, as chaves da Igreja. Em princípios de 1838, o edifício do extinto convento foi posto à venda, com exclusão da Igreja e suas dependências. Não tendo surgido comprador, o Estado cedeu parte do imóvel à Câmara Municipal, que instalou no refeitório manuelino o Tribunal da Comarca. Em 1839, devido ao mau estado de conservação dessas instalações, o Município realizou obras de reparação.

Por Portaria de 4 de Maio de 1840, foi autorizada a transferência da sede da freguesia de São Pedro para a Igreja de São Francisco, então fechada ao culto. Os danos na Igreja, que tinham tido uma evolução significativa desde 1834, levaram ao encerramento do templo e a outra transferência da paróquia, desta vez para a Igreja do Carmo. Face ao seu estado de ruína e abandono, o prior promoveu um peditório público com vista à realização de obras^{Arquivo Pittoresco, 1868}. O resultado e a comparticipação por parte do Estado permitiram realizar uma extensa intervenção, que decorreu entre 1860 e 1862.

Estes trabalhos, dirigidos pelo arquitecto/construtor inglês John Bouvie Júnior, consistiram, de acordo com o contrato de empreitada^{Moniz, 1959}, na construção de uma nova torre sineira, na picagem e reboco da abóbada da nave, na reparação das capelas laterais, na colocação de vidros e vitrais, na demolição da tribuna na zona da epístola, na repavimentação das coberturas em terraço e da nave da Igreja, na colocação de passadeiras nas coberturas em telha, na alteração dos algerozes existentes e na substituição de cantarias em mau estado. Pensa-se que a pintura das abóbadas e paredes com juntas a branco, a fingir cantaria, datem desta empreitada.

Por decreto de 1865, foram concedidos ao Município os restos da cerca do Convento para, entre outros fins de utilidade pública, se abrir uma praça que desafrentasse a Igreja. As obras de construção do largo decorrerem entre 1865 e 1870 e, em 1873, foi demolida a caixa de água do aqueduto que aí existia (Figura 6.4). De acordo com alguns autores^{Fernandes, 1998} estas obras e a instalação do novo mercado de São Francisco poderão ter tido influência na estabilidade do edifício.

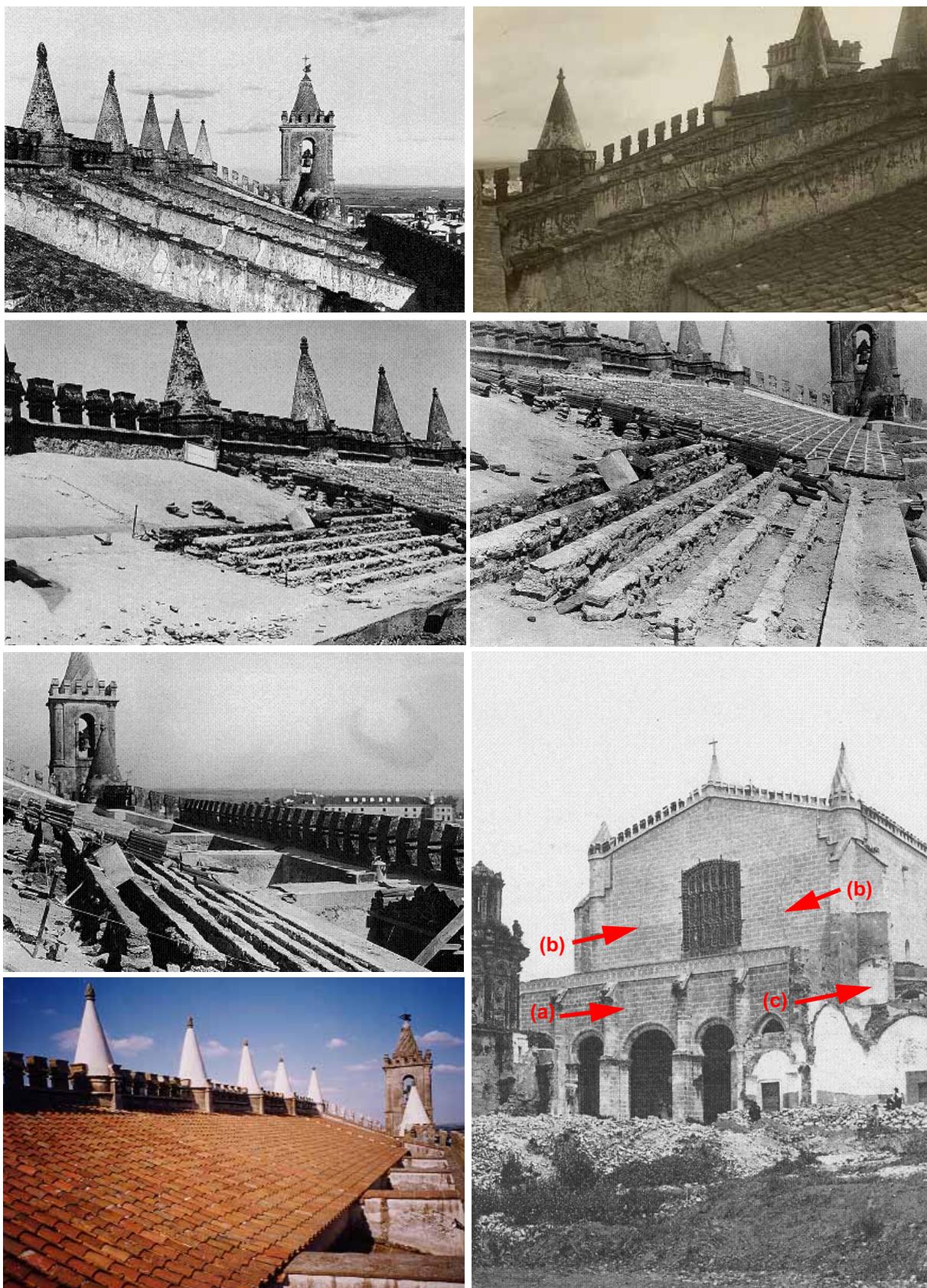


Figura 6.4 - Vistas da cobertura antes de 1937 (cima); Intervenção de 1937 (no meio); Vista actual da cobertura (baixo); e vista da fachada antes de 1837 (baixo), onde são visíveis os trabalhos de demolição de edifícios para abertura do largo, o pórtico da entrada (a), as fendas na fachada principal (b) e o claustro Sul em ruínas (c) - Imagens a preto e branco do arquivo da DGEMN.

Em 1884, o engenheiro civil Adriano Augusto da Silva Monteiro publicou na *Gazeta do Sul*^{Sul,1884}, curiosamente em pequenas partes e ao longo de dezoito números, um interessante relatório de uma inspecção efectuada, em Maio desse ano, ao estado de conservação da Igreja de São Francisco. O original não foi ainda encontrado nem é referido o encomendador nem os objectivos da inspecção. Deste importante relato constata-se que as patologias estruturais mais relevantes são, no essencial, aquelas que ainda hoje se identificam, nomeadamente a fendilhação da fachada principal e da abóbada da nave. O estado de abandono do edifício era generalizado, verificando-se a falta de conservação dos telhados e que o claustro adjacente à fachada sul do templo se encontrava em adiantado estado de ruína. Contrariando a hipótese de que as obras de reordenamento do largo poderiam ter sido causadoras dos danos estruturais na Igreja, Adriano da Silva Monteiro refere que as fendas da fachada já tinham sido detectadas quando se procedera à reparação do templo em 1860 e que, provavelmente, elas já existiam em 1834, isto é, antes da extinção das ordens religiosas.

Constatando que, desde a sua primeira inspecção, em Julho de 1876, não verificava alterações na abertura ou extensão das fendas, o autor considera não haver razões para alarme, embora salientando ser necessário acompanhar a evolução do fenómeno. A causa encontrada para a fendilhação da fachada principal e da abóbada é a rotação "em volta da aresta exterior do cunhal do sul, que, pelo seu peso, tem arrastado atrás de si (...) a parte sul do edifício, sendo a ruína do lado norte apenas consequência necessária daquela", e que esta resultou das perturbações introduzidas na estrutura em virtude da abertura da nova porta de entrada do templo. No entanto, o relatório aconselha a reconstrução do claustro do convento na empena sul ou a sua substituição por um pórtico, que deveria ser construído em simultâneo com a demolição gradual do claustro em ruína. Estas recomendações caíram, porém, no esquecimento e o claustro viria a ser totalmente demolido.

Em 1892, a Câmara Municipal foi autorizada a vender os restos da cerca e do edifício do extinto convento que não tinham sido aproveitados em 1865. Num comunicado, datado de 26 de Dezembro de 1892, onde se propõe adquirir, a pedido do Município, as ruínas do convento de São Francisco e a reabilitar a sua Igreja, o benemérito Francisco Barahona compromete-se a "construir gigantes de alvenaria e cantaria e fazer edificações contíguas ao templo, que todas concorram para a sua conservação e segurança"^{Moniz,1959}. Essas construções, concordantes com as recomendações do relatório de Adriano da Silva Monteiro, não viriam a ser efectuadas.

Francisco Barahona, que efectuou a aquisição em 1894, demoliu o que restava do extinto convento e construiu o quarteirão ainda hoje existente. Na Igreja executou diversas reparações, que incluíram o refechamento das fendas exteriores, o revestimento exterior das fachadas e a consolidação da base e dos compartimentos sob a torre sineira que se encontravam em mau estado devido ao peso da mesma^{Moniz, 1959}.

Com a implantação da República, o financiamento para obras de conservação através de colectas públicas ou de donativos de beneméritos cessou, tendo sido parcialmente substituído pela intervenção do Estado e por associações de defesa do património que então surgiram.

Em 1910, a Igreja de São Francisco é classificada e, em 1920, por iniciativa ministerial e do grupo Pró-Évora, foi visitada por uma delegação da Comissão dos Monumentos. De novo as fendas na abóbada da nave foram objecto de registo, tendo o arquitecto Adães Bermudes constatado a existência "de fendas em toda a espessura dos tímpanos da abóbada compreendidos entre os arcos terciários e os formaletes, fendas que cortam os muros de carga dos arcos mestres, reproduzindo-se de um e outro lado da abóbada em todos os tramos da mesma e repetindo-se na parede da fachada principal, em toda a espessura, à direita e à esquerda do largo janelão central"^{Arte em Portugal}.

A partir de 1929, com a criação da DGEMN, o Estado iniciou um plano de conservação dos monumentos e as obras de conservação e manutenção de São Francisco começaram a ter alguma regularidade. Em 1937, teve lugar a primeira grande obra estatal (Figura 6.4) que resultou, conforme se depreende da breve memória descritiva que encabeça o programa de concurso, da crescente preocupação com a segurança estrutural da abóbada que cobre a nave da Igreja. Os trabalhos consistiram na demolição das paredes de alvenaria divisórias do telhado da Igreja, na cintagem das paredes que suportam a abóbada da nave com lintéis de betão armado, na reconstrução do telhado da Igreja, na reparação de rebocos da galilé, na consolidação da abóbada que cobre a galilé e outros "trabalhos de menos importância", como assentamento de vitrais, reparação geral das ameias e demolição de "anexos sem qualquer valor".

Curiosamente, não é feita qualquer referência à construção da actual estrutura de apoio das telhas em muretes de alvenaria, a qual terá sido executada nesta campanha de obras. Pelo contrário, nos trabalhos de carpintaria estava previsto o apeamento e a reconstrução da armação

do telhado (em pinho). No entanto, observando as fotografias (Figura 6.4) antes e depois da intervenção de 1937, verifica-se que não houve uma modificação significativa da pendente do telhado. De qualquer modo, com ou sem substituição da estrutura de suporte das telhas e um eventual enchimento do extradorso da abóbada com argamassa de regularização, houve uma alteração significativa das condições de carregamento, resultado, sobretudo, da redução da altura das paredes de alvenaria divisórias do telhado, denominadas por Adães Bermudes "muros de carga dos arcos mestres". Do mesmo modo não é feita referência à reparação dos rebocos fingidos junto às fendas das lunetas, cuja coloração diferente (Figura 6.2) demonstra terem ocorrido depois de 1862 (campanha de obras de Bouvie).

Entre 1937 e 1955, não há registo de intervenções na cobertura da Igreja de São Francisco. Em 1955, chegou a estar prevista (conforme caderno de encargos proposto) uma grande intervenção, com reconstrução dos telhados da sacristia, Capela dos Ossos e transeptos, bem como refechamento de juntas em terraços, construção de cintas de betão armado para consolidação da abóbada da nave e reparação de fendas (alegramento e colmatagem com alvenaria de tijolo). Isto leva a concluir que a estabilidade da abóbada da nave continuava a ser motivo de preocupação. Esta empreitada não teve, no entanto, parecer favorável da tutela e foi remetida para anos seguintes. Não se encontram nos registos posteriores a 1955 referências a obras de cintagem para consolidação das abóbadas, pelo que é de admitir que elas não foram intervencionadas desde então, limitando-se a DGEMN, com uma periodicidade mais ou menos bia-anual, a manter as coberturas (limpeza e substituição de telhas danificadas).

Em 1969, em resultado dos danos causados pelo sismo de 28 de Fevereiro, foi efectuada uma intervenção na Capela dos Ossos. De acordo com a respectiva memória descritiva, o sismo provocou profundas fendas nas abóbadas e arcos e nas paredes da capela e os trabalhos previstos consistiam no escoramento da abóbada e nervuras. Relativamente a danos na Igreja, nomeadamente na abóbada da nave, não há qualquer registo.

Recentemente, em 2001, a DGEMN lançou uma empreitada para substituição dos rebocos exteriores das empenas e fachadas da igreja de São Francisco. Nesta empreitada, que decorreu entre 2001 e 2003, foram eliminadas todas as fendas que eram visíveis na fachada principal e na empena Sul, corrigidos eventuais desaprumos e substituídos, por elementos em aço inox, os tirantes metálicos existentes na fachada principal, sobre e sob o janelão.

6.2.4 - Descrição dos Danos Observados

Como referido, as principais patologias estruturais da Igreja de São Francisco são as fendas existentes na superfície interior da abóbada da nave que se desenvolvem, de forma aproximadamente simétrica, ao longo de quase todo o seu comprimento e se propagam à fachada principal. Estes graves danos, que apresentam evolução, motivaram, já em 1998, uma inspeção pedida ao LNEC^{LNEC,1998}, a qual confirma a coincidência com os danos observados em épocas anteriores.

De facto, em 1998, antes das recentes obras de reparação dos rebocos exteriores, identificavam-se na face exterior da parede da fachada principal e nos dois lados do janelão, duas fendas um pouco mais afastadas ao nível da varanda e que se prolongavam, aproximando-se, até ao topo (Figura 6.2). Correspondiam exactamente às já descritas no relatório de 1884: "De um e outro lado da porta, e nas duas faces da parede, notam-se duas fendas que (...) vão até ao alto do frontão, que também está partido. Estas duas fendas, que são a maior manifestação aparente da ruína do templo, (...) são muito mais abertas em cima do que em baixo, o que indica que elas começaram no alto do edifício e se propagaram de cima para baixo. (...) Em Julho de 1876, foram tomadas a leite de argamassa (...) desde o pavimento da varanda até uma certa altura, para se conhecer se tinha lugar qualquer movimento sensível nos três maciços, separados por elas. São passados quase oito anos, e o exame que agora fiz (...) apenas me indica que pode ter havido contracção d'argamassa".

Apesar desta opinião sobre a relativa estacionaridade destas fendas, é conhecido que o reboco da fachada foi reparado em data posterior a 1884: na base e por cima da grande janela da fachada principal existiam, em 1998, dois tirantes metálicos, cuja corrosão provocou o destacamento do reboco e foram substituídos nas últimas obras.

As duas fendas existentes na fachada principal prolongam-se pela abóbada da nave paralelamente às empenas e dispostas de forma quase simétrica em relação ao seu eixo, sendo mais pronunciadas e visíveis nas lunetas. Esta fendilhação é detectável nos seis tramos da abóbada, com maior dimensão nos tramos centrais (3º e 4º tramos), perdendo alguma expressão com a aproximação à fachada (1º e 2º tramos) e significativamente menor nos tramos mais próximos do cruzeiro (5º e 6º tramos). Na luneta Sul do sétimo tramo, correspondente ao

cruzeiro, identifica-se uma ligeira fenda com direcção perpendicular à empena, claramente diferente das restantes.

Embora não se tenham encontrado registos de intervenções na abóbada posteriores a 1884, constata-se que junto das zonas fendilhadas, o reboco fingindo cantaria (da empreitada de Bouvie?) tem coloração diferente, indiciando reparação. Dada a quase coincidência entre os danos actuais e os descritos no relatório de 1884[†] é de supor que, tal como aconteceu na fachada, as fendas ressurgiram depois dessa reparação.

Após os primeiros estudos numéricos (que se apresentam no parágrafo 6.4) foi levantada parcialmente a cobertura no 3º tramo (sobre a luneta mais fendilhada) e retiradas as pedras soltas e poeiras que preenchiam a fenda. Nessa operação foi possível verificar que a fenda atravessa totalmente a abóbada, sendo significativamente mais aberta no seu extradorso (Figura 6.5).

No relatório de 1884 são também descritas fendas nas paredes de alvenaria sobre os arcos principais (reduzidas em altura nas obras de 1937), situadas na continuação das fendas da face inferior da abóbada^{††}. Esta fendilhação das paredes de alvenaria sobre os arcos principais é também descrita por Adães Bermudes em 1920 e é visível nas imagens fotográficas da cobertura anteriores às obras de 1937 (Figura 6.4).

Relativamente aos arcos principais da abóbada, o relatório de 1884 referia que "(...) só há ruína visível nos seguintes: primeiro, segundo e terceiro, a partir da entrada do templo. O primeiro está fendido d'ambos os lados do fecho, tendo as fendas direcções irregulares, de modo que as fracturas não são a topo, mas oblíquas em relação ao eixo médio do cintel do arco. (...) O

† Segundo Adriano da Silva Monteiro, em 1884, os danos na abóbada eram os seguintes: "A primeira zona da grande abóbada está fendida em várias direcções, sendo a parte mais arruinada a da parte do sul; tem as lunetas partidas paralelamente ao grande eixo da Igreja, (...) A segunda zona da abóbada tem duas lunetas partidas, parecendo que, do lado do sul, a fenda respeitando os arcos não poupou o corpo principal da abóbada, depois de ter passado através do segundo grande arco da primeira zona para esta. A terceira zona tem ambas as lunetas partidas, mas não se vêem fendas no resto do corpo da abóbada. A quarta só tem fenda visível na luneta sul. A quinta parece ter só uma fenda na luneta do norte. As sexta e sétima não apresentam ruína visível. Em todas as zonas da grande abóbada, onde se manifestam fendas, as duas principais, por assim dizer simétricas de posição, a um e outro lado do fecho geral da abóbada, têm direcção paralela ao eixo longitudinal da Igreja, convergem para o fecho no sentido de poente para nascente, isto é, da entrada principal para a capela-mor, parecendo co-existentes com as da fachada principal, ou antes propagação destas.". Relativamente aos danos descritos em 1884, detectam-se hoje novas fendas na luneta do lado Norte do quarto tramo e na luneta do lado Sul do cruzeiro (que não pertence à família das restantes) e não é visível a referida convergência das fendas para o fecho da abóbada, notando-se unicamente que são inclinadas em relação ao eixo.

segundo grande arco, está partido na junta da sexta para a sétima aduela, a contar do fecho, para o lado do sul. O terceiro apresenta, na junta da quinta para a sexta aduela, a partir do fecho e também do lado do sul, um traço, cuja natureza se não pode apreciar, nem mesmo armado d'óculo. Todos os pés direitos estão alinhados e sensivelmente aprumados. Só pode haver leve pendor, para fora, nos pés direitos do lado sul, nos três primeiros arcos, mas não é desvio (se existe) sensível e de fácil medição". Nas inspeções recentemente realizadas, identificaram-se os danos nos arcos descritos no relatório de 1884, sendo os danos no arco sobre a parede da fachada os mais significativos. Nas colunas e paredes não se detectaram desalinhamentos e desaprumos significativos. No entanto, esta informação será melhor avaliada através do levantamento topográfico rigoroso, previsto no âmbito desta investigação.

Antes das recentes obras de reparação dos rebocos era visível na empena Sul, aproximadamente a meio do comprimento da nave, uma fenda vertical de dimensão decrescente de cima para baixo.



Figura 6.5 - Vistas superiores (pelo lado da cobertura) da fenda da luneta do 3º tramo do lado Sul.

†† "Dum e outro lado do espigão do grande telhado vêem-se fendas nos carregos dos grandes arcos, as quais vão desde o primeiro, a contar da fachada principal, até ao quinto. (...) Há, porém, duas características que são paralelas ao grande eixo da Igreja e parecem convergir ligeiramente para a linha do fecho geral da abobada, à maneira que se propagam de poente para nascente até ao carrego do quinto arco. (...) Também, como fiz naquela fachada, em 1876 (Julho) mandei tapar as fendas maiores nos dois primeiros arcos dum e outro lado, sul e norte; e, observadas agora, sou forçado a pensar que estão nas mesmas circunstâncias indicadas para a sua situação sobre a aludida fachada principal, isto é, durante um período de quase oito anos, não houve movimento sensível, e que apenas pode ter havido contracção da argamassa"

6.3 - INSPECÇÃO E MONITORIZAÇÃO

6.3.1 - Introdução

Após uma inspecção preliminar, onde se identificaram os principais danos na abóbada da nave, e o estudo histórico que permitiu concluir que o fenómeno não é recente e que, muito provavelmente, tem evolução lenta, houve que efectuar uma inspecção mais apurada e a instalação de um sistema de monitorização que permitisse avaliar a evolução temporal das aberturas das fendas na abóbada e dos movimentos da estrutura. Para tal foi necessário encontrar um meio de elevação que permitisse a observação próxima das fendas da abóbada, localizadas a, aproximadamente, 21 metros de altura, e colocação de sensores de deslocamento. O meio encontrado foi uma plataforma elevatória com 25 metros de alcance, vinda de Espanha, com dimensões e peso reduzidos, permitindo uma fácil circulação no interior da Igreja (Figura 6.6).

Comparado com a alternativa de instalação de andaimes, a solução da plataforma elevatória revelou-se bastante menos perturbadora da utilização normal da Igreja e, sobretudo, muito mais económica, mesmo tendo em conta a necessidade de desmontar provisoriamente a coluna da entrada principal da Igreja para entrada da plataforma (Figura 6.6).

A inspecção e instalação do sistema de monitorização foram acompanhadas de um levantamento topográfico de alta precisão (cuja análise está em curso) e da colocação de alvos para monitorização topográfica (com campanhas semestrais) dos movimentos da estrutura (Figura 6.7).

Extraíram-se, também, carotes das paredes em granito e da abóbada da nave, em tijolo cerâmico, (Figura 6.8), e amostras do material de revestimento do extradorso da abóbada. Pretende-se, assim, avaliar as características mecânicas e o estado de degradação dos materiais construtivos (em curso).

Efectuou-se um registo de imagens de alta qualidade, em suporte fotográfico e em filme, de toda a nave da igreja, com especial incidência na abóbada, arcos, paredes e colunas. As fendas mais significativas e que causam maior apreensão foram cuidadosamente filmadas e fotografadas, de modo a, no futuro, poder-se avaliar a sua evolução.



Figura 6.6 - Plataforma elevatória para inspeção e monitorização da abóbada da Igreja de São Francisco.

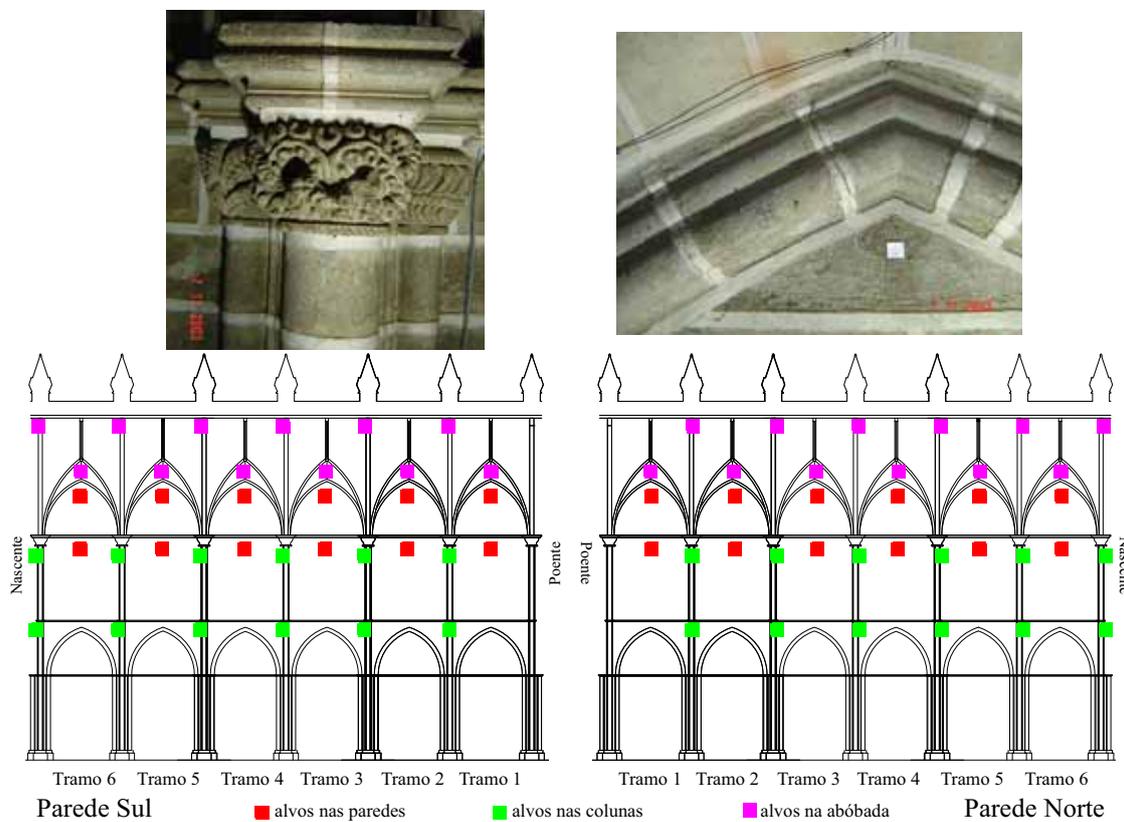


Figura 6.7 - Alvos para registo topográfico da evolução dos deslocamentos no interior da Igreja.



Figura 6.8 - Extração de carotes nas paredes da nave e na abóbada.

6.3.2 - Inspeção - Danos Observados

Na inspeção realizada observaram-se os seguintes danos:

Na Fachada Principal: Em virtude dos recentes trabalhos de reparação dos rebocos exteriores da Igreja, no lado exterior da fachada principal já não são visíveis as fendas detectadas em 1998 (Figura 6.2) e nas fotografias do início do século XIX (Figura 6.4). No entanto, no lado interior dessa parede são ainda visíveis diversas fendas que se desenvolvem na proximidade do janelão e junto dos arcos sobre a parede (Figura 6.9). As fendas mais expressivas foram instrumentadas com sensores de deslocamento.

Na Abóbada da Nave: Identificam-se diversas fendas na superfície interior (Figura 6.10), sendo as fendas nas lunetas as que merecem maior atenção. Com a excepção do tramo do

cruzeiro, todas as lunetas apresentam fendas aproximadamente paralelas ao eixo da nave, as quais se propagam, com maior ou menor expressão, para as nervuras e arcos principais em granito. As dimensões das fendas diminuem nas lunetas mais próximas do cruzeiro, sendo pouco significativas no sexto tramo a contar da entrada principal. Nas lunetas onde a dimensão das fendas é mais significativa (1º, 2º, 3º e 4º tramos) identificou-se um desnivelamento vertical dos bordos da fenda, verificando-se que do lado da fenda mais próximo das paredes longitudinais a superfície da abóbada se encontra cerca de 0.5 a 1 cm acima da superfície da abóbada do outro lado da fenda (Figura 6.12, em baixo à direita). Constatou-se, também, que a coloração diferente junto das fendas corresponde a antigas intervenções de reparação. Nas lunetas do cruzeiro (Figura 6.23) a fendilhação é diferente de todas as outras, ocorrendo perpendicularmente ao eixo da nave.

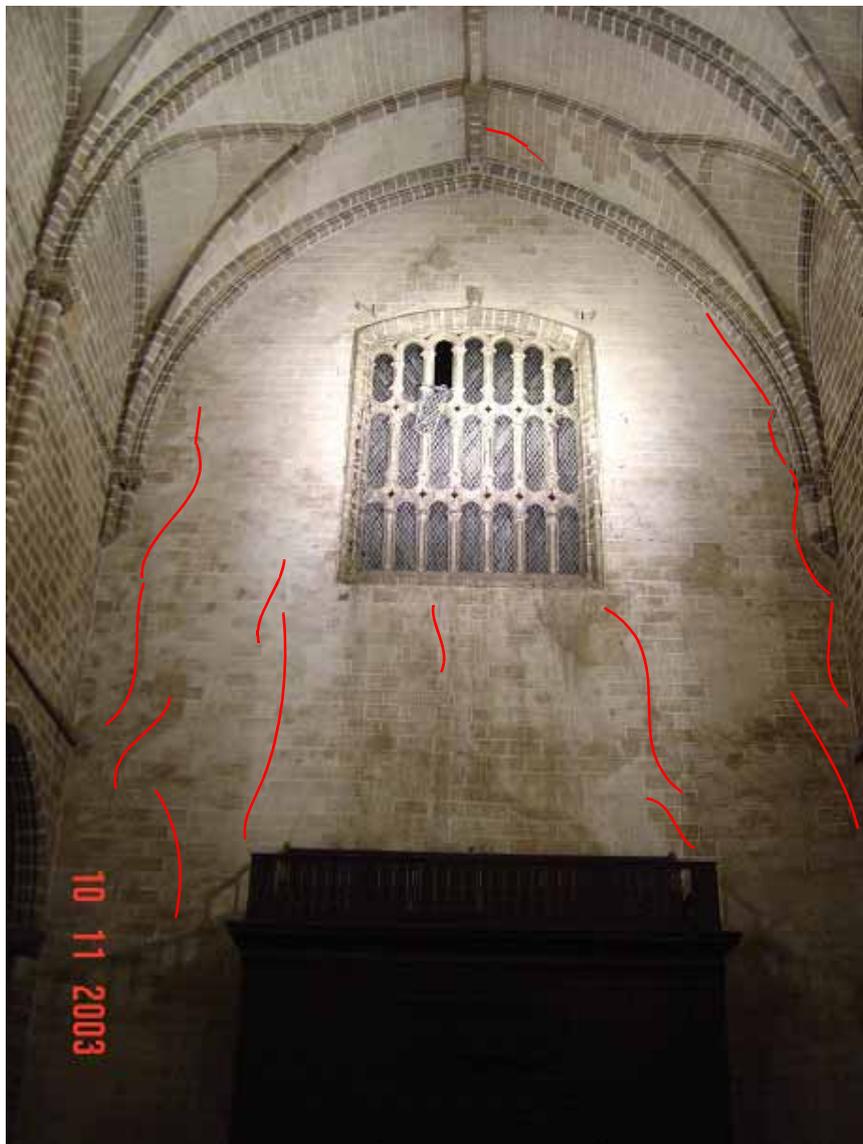


Figura 6.9 - Levantamento da fendilhação da fachada principal da Igreja de São Francisco - vista interior.

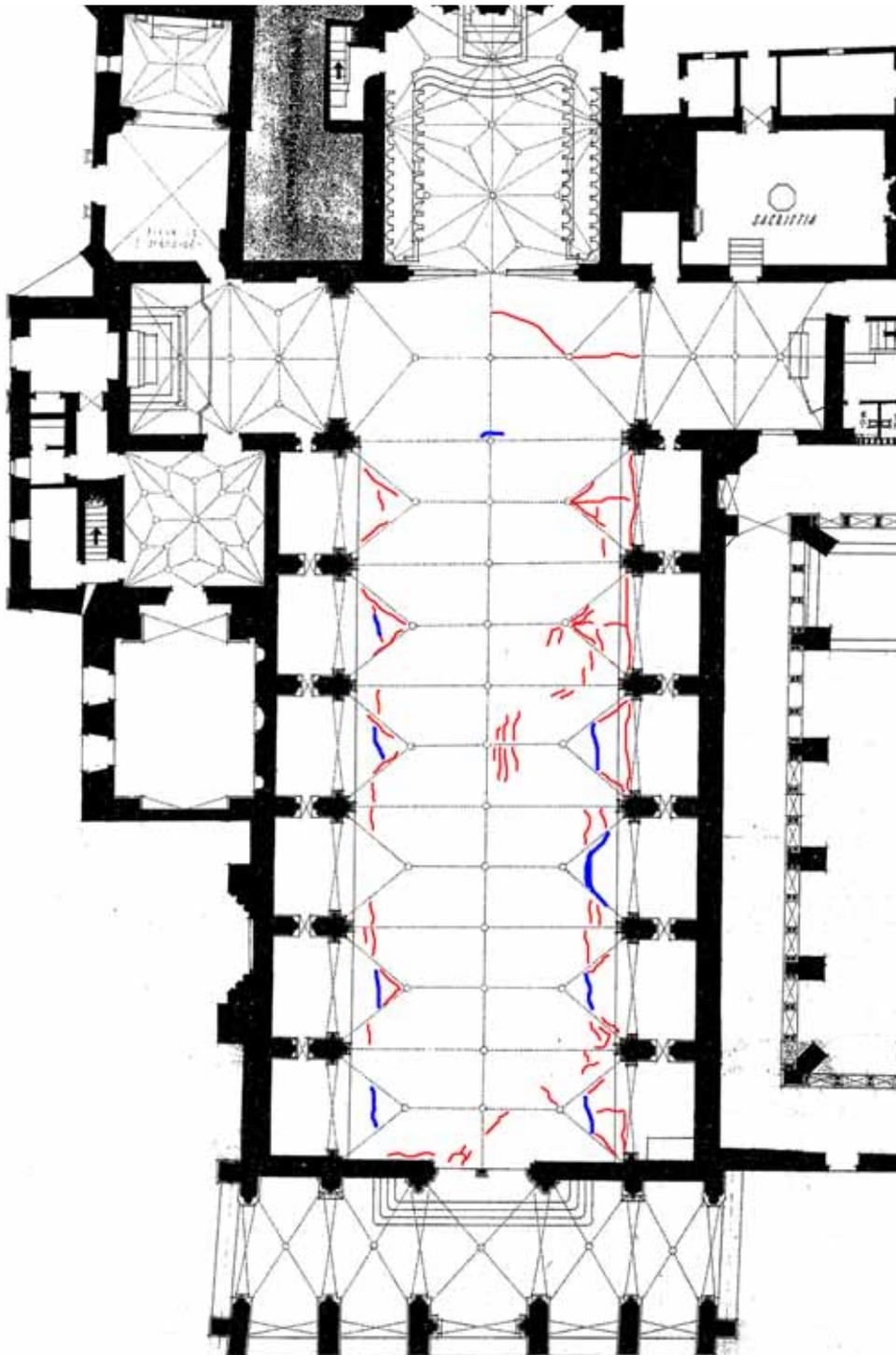


Figura 6.10 - Levantamento da fendilhação da abóbada da nave da Igreja de São Francisco.

No primeiro tramo a contar da entrada principal, a abóbada apresenta fendilhação nas duas lunetas e algumas fendas na zona central junto do fecho. Na luneta Sul as fendas são mais expressivas, com 2 cm de abertura máxima (Figura 6.11), e propagam-se para as nervuras que definem a luneta e para o arco localizado sobre a parede longitudinal. Na luneta Norte são menos significativas, com 1cm de abertura máxima (Figura 6.12), com propagação em direcção

às nervuras que definem a luneta. Em ambas as situações identificou-se uma diferença de nivelamento dos bordos das fendas. No segundo tramo, a abóbada apresenta apenas fendas junto das duas lunetas, sendo a fendilhação do lado Sul (com 7 mm de abertura máxima - Figura 6.13) ligeiramente mais acentuada do que a fendilhação do lado Norte (com 5 mm de abertura máxima - Figura 6.14).

No terceiro tramo, o mais danificado de todos os tramos da nave, identificam-se fendas muito expressivas nas duas lunetas, sendo a fendilhação do lado Sul mais extensa e ligeiramente mais aberta (com 6.5 cm de abertura máxima - Figura 6.15) do que a fenda do lado Norte (com 5.3 cm de abertura máxima - Figura 6.16). No quarto tramo, as lunetas Sul e Norte apresentam, também, fendas de dimensão significativa, sendo de novo a luneta Sul a mais danificada (com fendas de 4.1 cm de abertura máxima - Figura 6.17; a fenda do lado Norte apresenta abertura máxima da ordem de 1 cm - Figura 6.18). Neste tramo identificam-se também na abóbada diversas fendas junto da zona central.

No quinto tramo, os danos na abóbada concentram-se, também, nas lunetas, embora menos expressivos do que nas anteriores. Desta vez, os danos no lado Sul são menos graves (abertura das fendas da ordem de 1 mm - Figura 6.19) do que no lado Norte (abertura máxima das fendas de 9 mm - Figura 6.20). A fendilhação da luneta Sul é ligeiramente diferente da fendilhação das restantes lunetas, verificando-se, juntamente com as fendas paralelas ao eixo da nave, a ocorrência de fendas perpendiculares ao plano da parede longitudinal. Esta tendência de fendilhação perpendicular ao eixo da nave, manifesta-se pela primeira vez neste tramo, ocorrendo novamente no sexto (Figura 6.21) e sétimo (Figura 6.23) tramos Sul, sendo mais expressiva no sétimo tramo, o do cruzeiro. Neste último tramo identifica-se a propagação da fenda em direcção à zona central da abóbada (Figura 6.10). No sexto tramo Sul a fendilhação paralela ao eixo da nave é pouco significativa.

No sexto tramo Norte a fendilhação da abóbada ocorre também na luneta, paralelamente ao eixo da nave, mas de forma ligeira (com 1.5 mm de abertura máxima - Figura 6.22). No sétimo tramo Norte, o do cruzeiro, não são visíveis danos significativos na abóbada (Figura 6.23).

Com a excepção da fenda (ligeira) do sexto tramo do lado Sul e das fendas das lunetas do cruzeiro, todas as fendas foram instrumentadas com sensores de deslocamento.

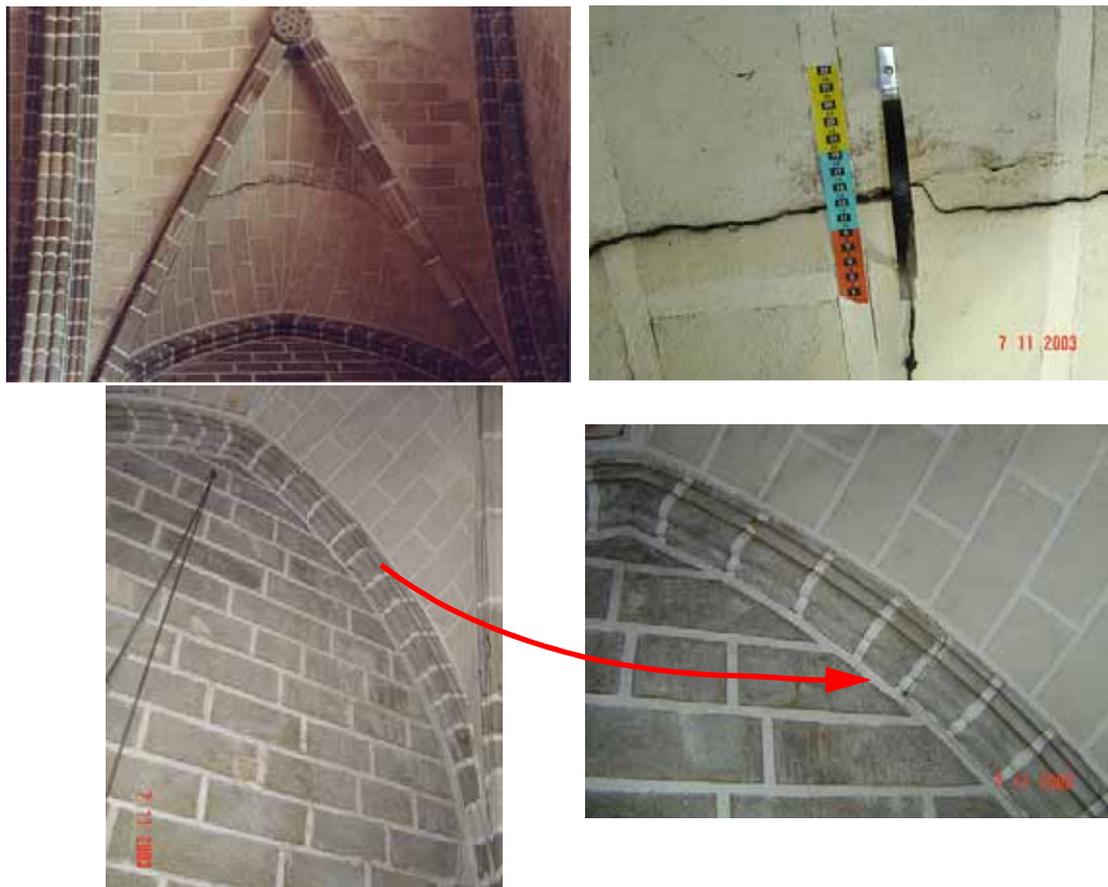


Figura 6.11 - Pormenores da luneta do 1º tramo do lado Sul.



Figura 6.12 - Pormenores da luneta do 1º tramo do lado Norte.



Figura 6.13 - Pormenores da luneta do 2º tramo do lado Sul.



Figura 6.14 - Pormenores da luneta do 2º tramo do lado Norte.



Figura 6.15 - Pormenores da luneta do 3º tramo do lado Sul.



Figura 6.16 - Pormenores da luneta do 3º tramo do lado Norte.



Figura 6.17 - Pormenores da luneta do 4º tramo do lado Sul.



Figura 6.18 - Pormenores da luneta do 4º tramo do lado Norte.

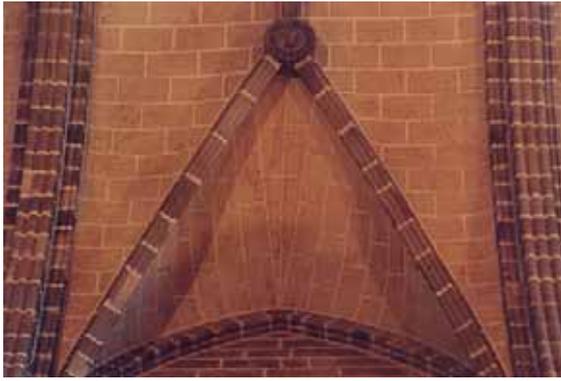


Figura 6.19 - Pormenores da luneta do 5º tramo do lado Sul.



Figura 6.20 - Pormenores da luneta do 5º tramo do lado Norte.



Figura 6.21 - Pormenores da luneta do 6º tramo do lado Sul.



Figura 6.22 - Pormenores da luneta do 6º tramo do lado Norte.



Figura 6.23 - Pormenores das lunetas do 7º tramo: esquerda - lado Norte; direita - lado Sul.

Nos Arcos Principais: Identificaram-se alguns danos, sendo os quatro primeiros arcos aqueles que apresentam patologias estruturais. Com a exceção do primeiro arco, sobre a parede da fachada, onde as fendas são mais expressivas, as fendas nos outros arcos são significativamente mais ligeiras do que as fendas nas lunetas, ocorrendo nas juntas entre aduelas e na continuidade de fendas da abóbada da nave.

No primeiro arco, sobre a parede da fachada, identificaram-se fendas junto do fecho e nas zonas laterais Norte e Sul (Figura 6.24). Todas as fendas visíveis neste arco resultam do desenvolvimento de fendas existentes na face interior da parede da fachada principal. No segundo, terceiro e quarto arcos identificaram-se, no lado Sul, fendas ligeiras numa das juntas entre aduelas (Figura 6.24).

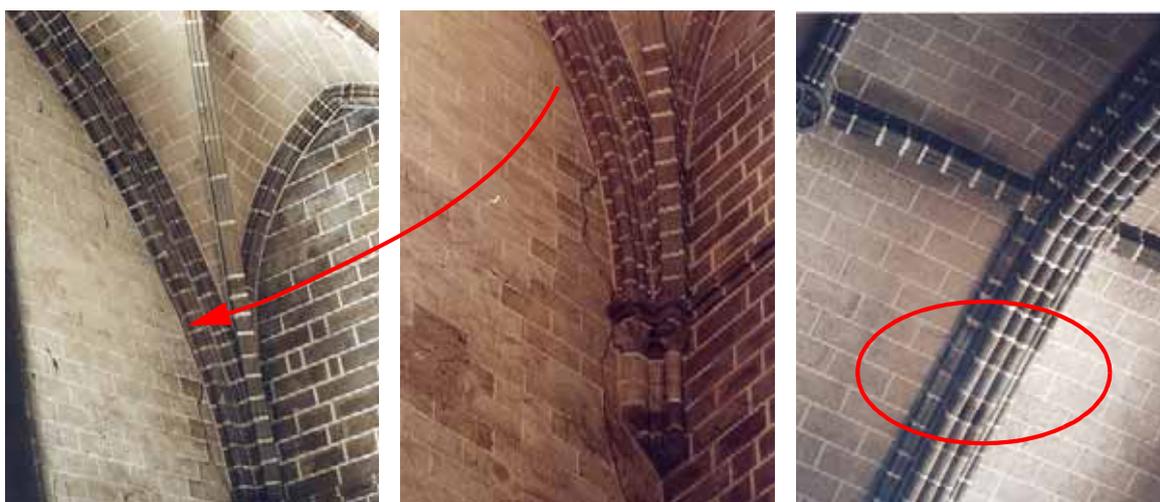


Figura 6.24 - Fendilhação dos arcos principais (Esquerda - 1º arco; Direita. - 4º arco).

Na transição da nave para o cruzeiro, na ligação do sétimo arco à nervura longitudinal central da abóbada da nave, identificou-se uma fenda de abertura significativa, a qual viria a ser

instrumentada com um sensor de deslocamento (Figura 6.25).



Figura 6.25 - Fendilhação na nervura longitudinal no cruzeiro.

Nas Paredes Longitudinais: Nas paredes longitudinais Norte e Sul da nave não se identificaram patologias estruturais nem desaprumos significativos (a confirmar através do levantamento topográfico rigoroso - em curso). As principais patologias detectadas prendem-se com a degradação dos materiais e com a existência de sais, consequência de infiltrações e humidades. No entanto, na parede Sul do cruzeiro detectou-se uma fenda interior com alguma expressão (Figura 6.26), a qual foi instrumentada com um sensor de deslocamento.



Figura 6.26 - Vista das paredes Norte (esquerda) e Sul (direita) do cruzeiro (7º tramo).

Nas Galerias sobre as Capelas: Nas galerias, ou tribunas, sobre as capelas laterais constatou-se uma degradação generalizadas das paredes e abóbadas botantes, em resultado da infiltração de águas pluviais que se acumulam nos terraços laterais da cobertura: em todas as faces interiores das abóbadas botantes são visíveis zonas onde o reboco se destacou deixando o tijolo

à vista. Detectaram-se, também, algumas fendas na segunda e quarta tribunas da galeria Sul e uma fenda diagonal, com alguma expressão, na primeira tribuna da galeria Norte (Figura 6.27).



Figura 6.27 - Fendilhação da abóbada botante da 1ª tribuna da galeria Norte.

Danos em Outras Zonas: Além das patologias descritas identificaram-se outras deficiências no edifício, nomeadamente na capela-mor, na sacristia e nas salas adjacentes. No entanto, quer pela distância a que se encontram da nave, quer pela sua natureza, os danos detectados nessas dependências não parecem estar relacionados com os danos na abóbada da nave da Igreja.

6.3.3 - Monitorização da Igreja

Como referido, as fendas de maior expressão da abóbada e das paredes da fachada e do cruzeiro foram instrumentadas com sensores de deslocamento, com precisão de leitura da décima do milímetro. Estes sensores de deslocamento (num total de 17) foram ligados, juntamente com outros instrumentos de medição, a dois sistemas de aquisição de dados, posicionados nas galerias Norte e Sul (Figura 6.28). Na Figura 6.30 representa-se esquematicamente o posicionamento destes sensores de deslocamento.

De modo a ser possível a correlação de eventuais movimentos da estrutura com alterações climáticas, preveu-se a medição contínua das temperaturas do interior das paredes e ambiente, e da humidade relativa no interior da nave, a qual se efectuará em simultâneo com o registo dos movimentos das fendas. Assim, colocaram-se 4 sensores de temperatura e humidade relativa no interior da nave (três deles no lado Sul e um deles no lado Norte) e 10 sensores de temperatura no interior das paredes: três na parede Sul, um na parede Norte, dois na face interior da fachada principal e quatro nas paredes interiores da quarta tribuna do lado Sul. As localizações dos sensores de temperatura (Figura 6.30) foram definidas de modo a obter-se registos que

identifiquem as variações de temperatura e humidade a várias alturas da nave, da parede da fachada e no interior das tribunas.

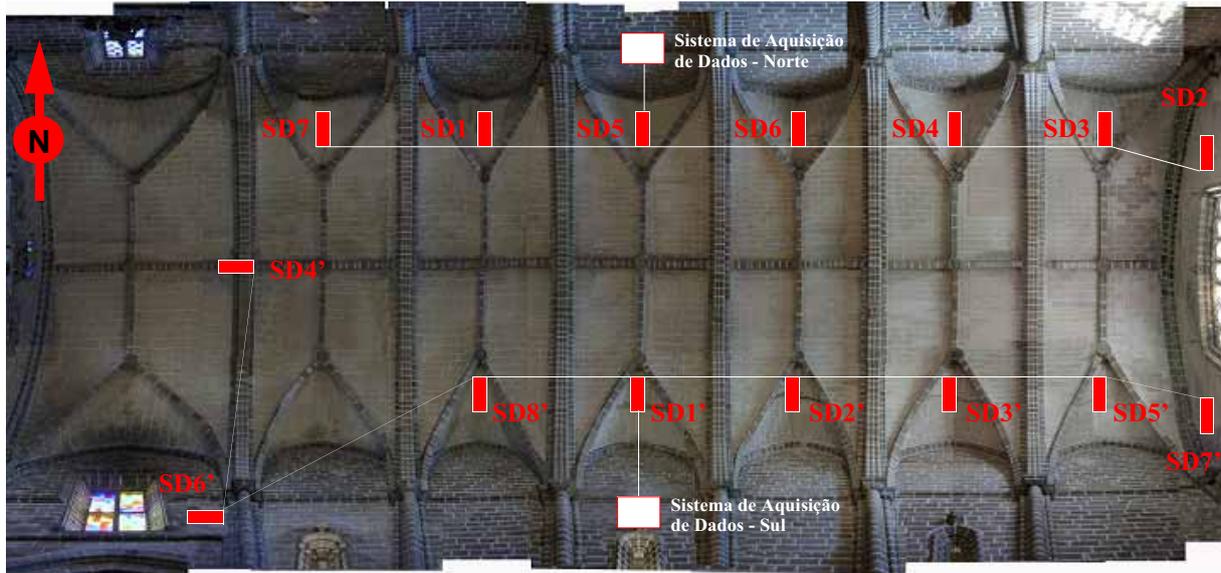
Numa fase inicial, os dois sistemas de aquisição de dados serão programados para registos horários das medições dos sensores, podendo vir a alterar-se a frequência de leitura em função dos resultados obtidos. Prevê-se que o sistema entre em funcionamento em breve e que os primeiros registos tratados estejam disponíveis dentro de 3 a 6 meses.



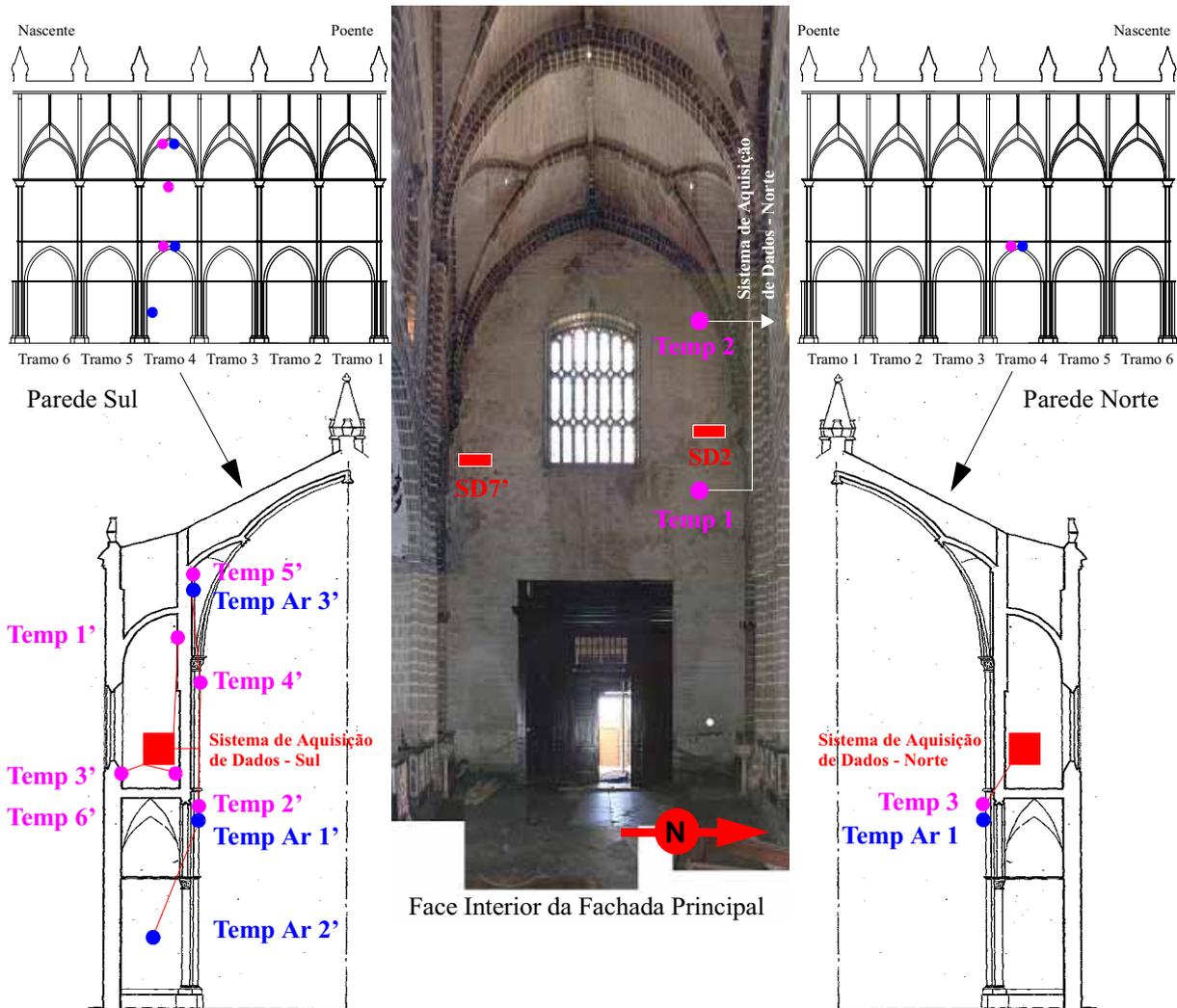
Figura 6.28 - Instrumentação: sensores de deslocamento - precisão 0.1 mm (em cima); sensor para registo de temperatura ambiente e humidade relativa - precisão 0.01 °C e 0.01 % (em baixo à direita); sistema de aquisição de dados (em baixo à esquerda).



Figura 6.29 - Pormenor da instalação dos instrumentos de medição.



Vista Inferior da Abóbada da Nave



SD - Sensores de Deslocamento

Temp - Sensores de temperatura (interior paredes)

Temp Ar - Sensores de temperatura (ambiente) e humidade

Figura 6.30 - Plano de instrumentação da abóbada e das paredes da nave.

6.4 - ESTUDOS NUMÉRICOS

Até se dispor de resultados do levantamento geométrico rigoroso, utilizaram-se os desenhos existentes nos arquivos da DGEMN (plantas e cortes) para estimar as espessuras dos elementos estruturais e de cobertura, bem como as cargas dos enchimentos no extradorso da abóbada[†]. A caracterização mecânica dos materiais baseou-se em parâmetros tabelados relativos a cantarias de granito e alvenarias correntes.

6.4.1 - Modelos de Elementos Finitos Elásticos e Lineares

Nas primeiras análises numéricas utilizou-se um modelo de elementos finitos de comportamento elástico linear, o qual permitiu avaliar qualitativamente o comportamento da estrutura e identificar a natureza do problema. Consideraram-se elementos finitos de casca quadrangulares, de 8 nós, com comportamento elástico linear, espessura constante (0.35 m), peso próprio de 25 kN/m³, módulo de elasticidade de 10 GPa e coeficiente de Poisson de 0.20. As zonas das nervuras foram simuladas com os mesmos elementos finitos, admitindo, no entanto, uma espessura superior (0.85 m). Foi analisado apenas um quarto de um dos tramos da abóbada, tendo-se considerado condições de fronteira de simetria (Figura 6.31).

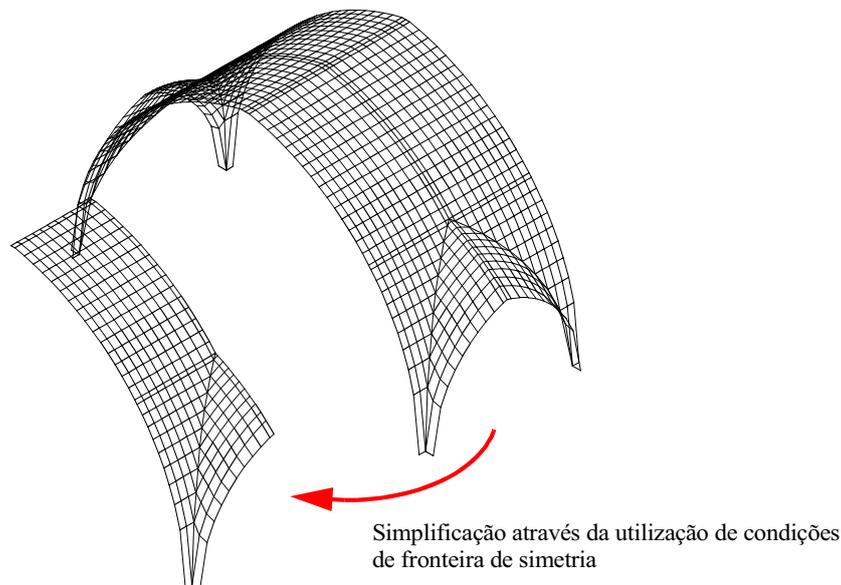


Figura 6.31 - Primeiro modelo de elementos finitos da abóbada - simulação da abóbada completa através de condições de fronteira de simetria.

[†] No entanto, as primeiras medições efectuadas no local mostram que as dimensões admitidas não se afastam muito das reais.

No primeiro modelo de elementos finitos analisado consideraram-se apoios fixos na extremidade da luneta (Figura 6.32), bloqueando todos os graus de liberdade ^{Gago et al.,2001}. Pretendia-se com este modelo verificar se na abóbada com ligações rígidas ao exterior poderia surgir a fendilhação detectada, o que parece não se verificar, pois a partir dos resultados obtidos as fendas teriam orientações diferentes das detectadas no local (Figura 6.33). Assim, é de supor que o funcionamento estrutural da abóbada, para surgirem as fendas detectadas, não é o de uma estrutura apoiada contra um suporte rígido.

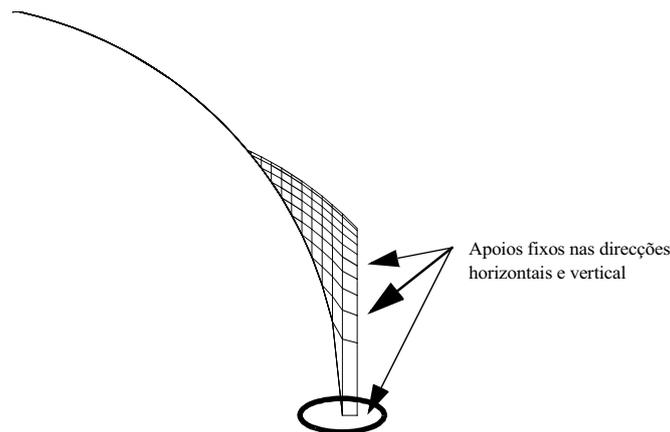


Figura 6.32 - Modelo 1 - condições de fronteira.

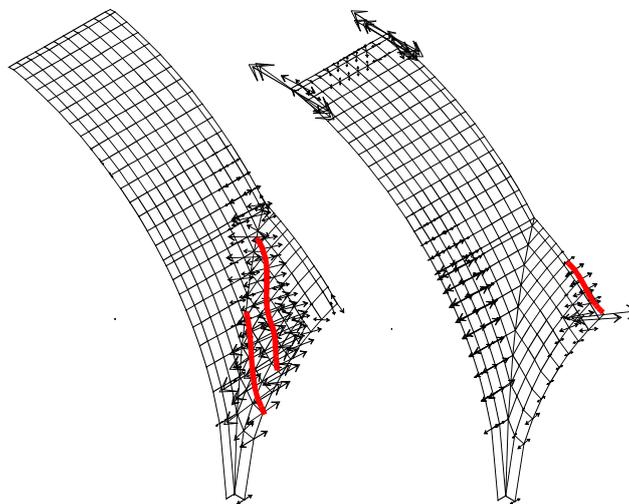


Figura 6.33 - Modelo 1 - tensões de tracção nas faces inferior (esq.) e superior (dta.) da abóbada e orientações das fendas que lhes corresponderiam.

Considerou-se, então, um novo modelo de elementos finitos onde, além da abóbada, se simulou a estrutura vertical de suporte, constituída pelas paredes transversais e longitudinais, unidas através da abóbada botante (Figura 6.34). Os elementos finitos utilizados na simulação desta estrutura vertical foram idênticos aos utilizados na restante abóbada, com as mesmas características mecânicas e com uma espessura de 1 m. Na base da estrutura vertical

consideraram-se condições de fronteira correspondentes a apoios fixos.

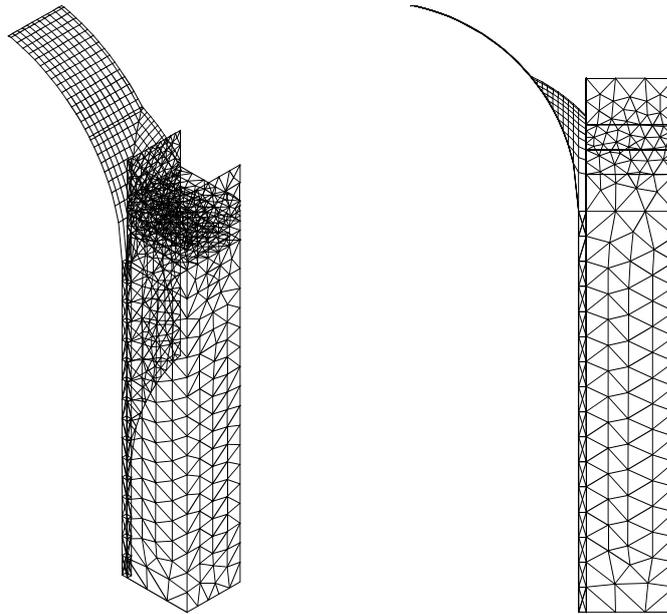


Figura 6.34 - Modelo 2 - modelo de elementos finitos da abóbada e da estrutura de apoio.

Como se pode observar na Figura 6.35, a consideração da deformabilidade da estrutura vertical de apoio resulta numa distribuição de tensões com tracções elevadas em direcções compatíveis com as fendas observadas. No entanto, essas tracções ocorrem na face superior do modelo e as fendas na abóbada foram detectadas na sua face interior. Na face inferior do modelo numérico detectaram-se, também, algumas tensões de tracção e tensões de compressão aproximadamente paralelas à direcção das fendas.

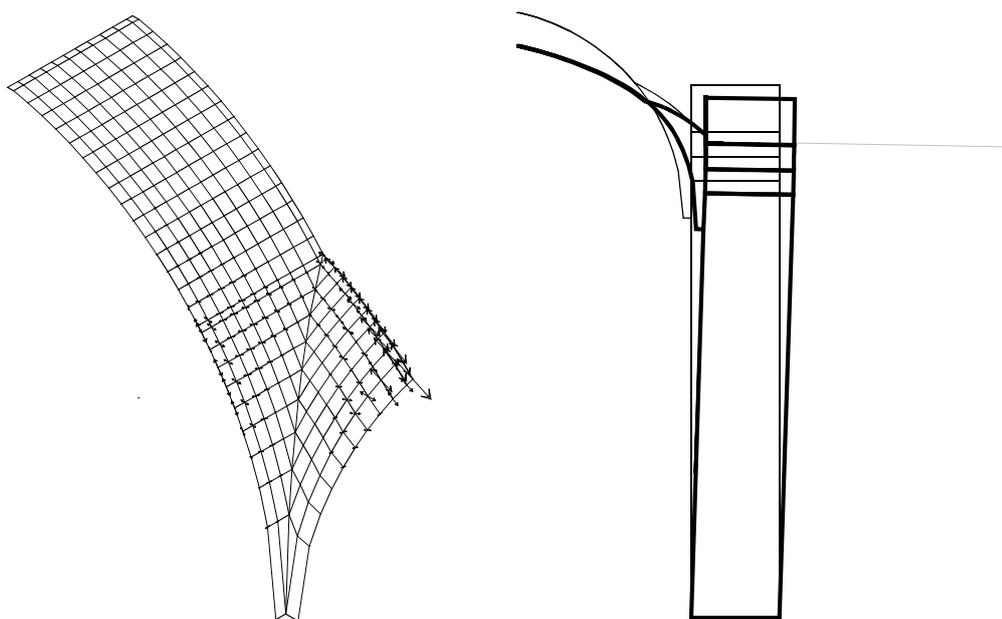


Figura 6.35 - Modelo 2 - tensões principais de tracção na face superior e deformada *Gago e Lamas, 2001*.

Destes resultados pode concluir-se que o aumento do vão da abóbada, em virtude da deformabilidade horizontal da sua estrutura de apoio, resulta em tensões de tracção de intensidade significativa na sua face superior, as quais poderiam originar fendas no extradorso da abóbada, com a direcção das observadas. Na ausência de tensões de compressão perpendiculares à direcção da fenda[†], esta pode propagar-se livremente em direcção à face inferior da abóbada. Assim, seria visível uma completa separação da alvenaria através da fenda. Foi em consequência desta interpretação dos resultados numéricos, que se decidiu descobrir uma parcela da cobertura (sobre a luneta mais danificada), constatando-se a existência de fendas na face superior da abóbada, de dimensão muito superior às da face inferior (Figura 6.5), e com uma separação completa das duas faces em toda a espessura da abóbada, o que confirmou a teoria de geração da fenda no extradorso da abóbada^{††} e, conseqüentemente, a causa do fenómeno - o aumento de vão da abóbada.

De modo a despistar a possibilidade de as fendas terem origem num assentamento diferencial das fundações das duas paredes longitudinais exteriores, estudou-se um modelo numérico com condições de apoio rígidas numa das paredes longitudinais e elásticas na outra (Figura 6.36).

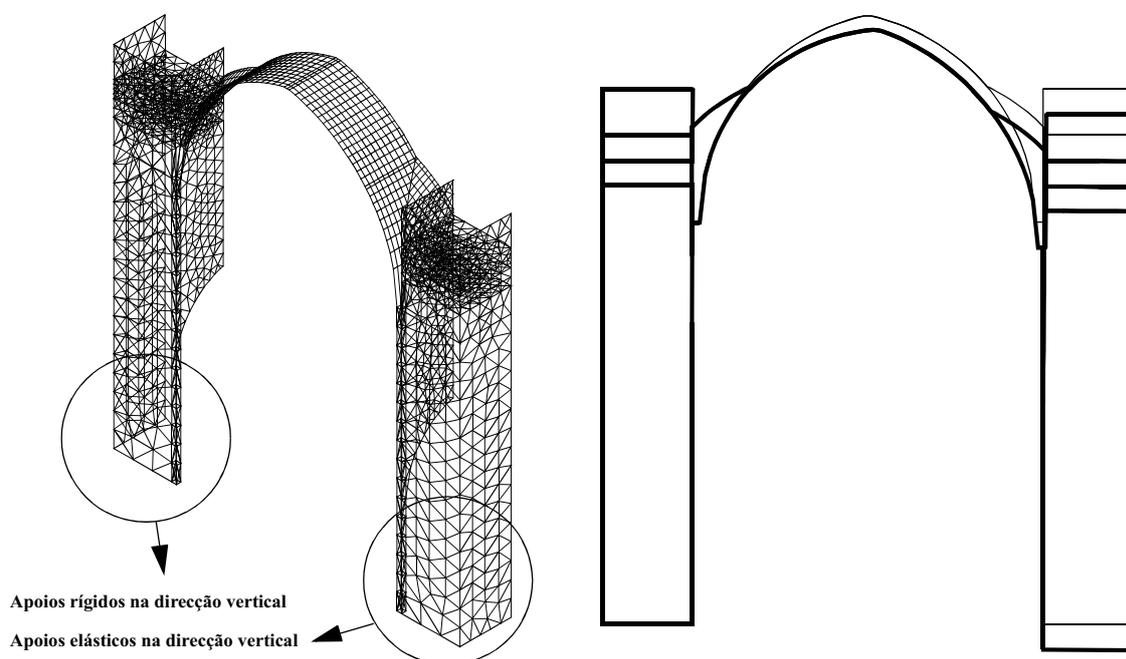


Figura 6.36 - Modelo 3 - modelo completo com condições de fronteira assimétricas.

[†] De facto, as tensões de compressão na face inferior do modelo de elementos finitos são aproximadamente paralelas à direcção da fenda.

^{††} Este mecanismo de geração da fenda a partir da face superior da abóbada é semelhante ao descrito por Heyman^{Heyman, 1996} para as fendas de Sabouret.

Como se pode observar nos resultados obtidos com o modelo anterior (Figura 6.37), a assimetria das condições de apoio conduz a uma assimetria na distribuição das tensões de tracção, com tensões muito mais elevadas na parte da abóbada mais próxima dos apoios rígidos. Em virtude da distribuição quase simétrica das fendas detectadas no local e tendo em conta os resultados numéricos obtidos, parece pouco provável que o fenómeno de fendilhação da abóbada tenha tido origem num assentamento diferencial das paredes longitudinais e contrafortes.

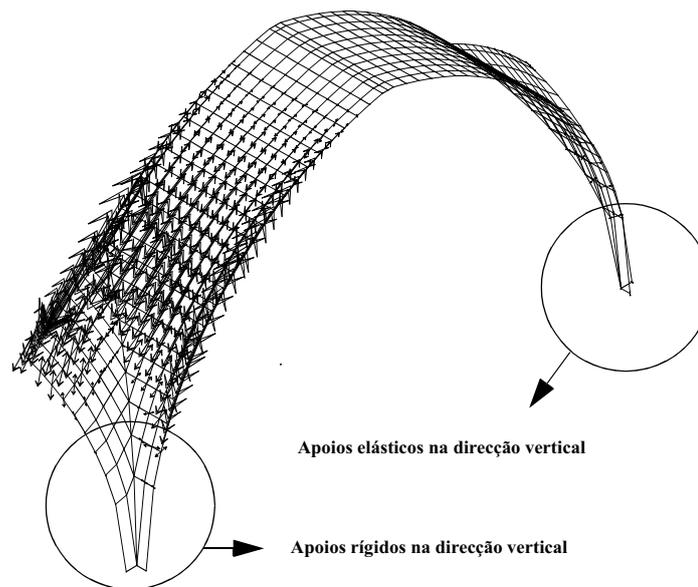


Figura 6.37 - Modelo 3 - tensões principais de tracção na face superior.

Identificada uma possível origem das fendas nas lunetas tornava-se necessário avaliar numericamente a segurança actual da estrutura. Assim, efectuou-se um quarto modelo numérico no qual a fenda foi explicitamente modelada através da separação de elementos finitos (Figura 6.38). Dos resultados desse modelo verificou-se que, embora a existência da descontinuidade altere o percurso das tensões na abóbada, o equilíbrio da estrutura não fica comprometido.

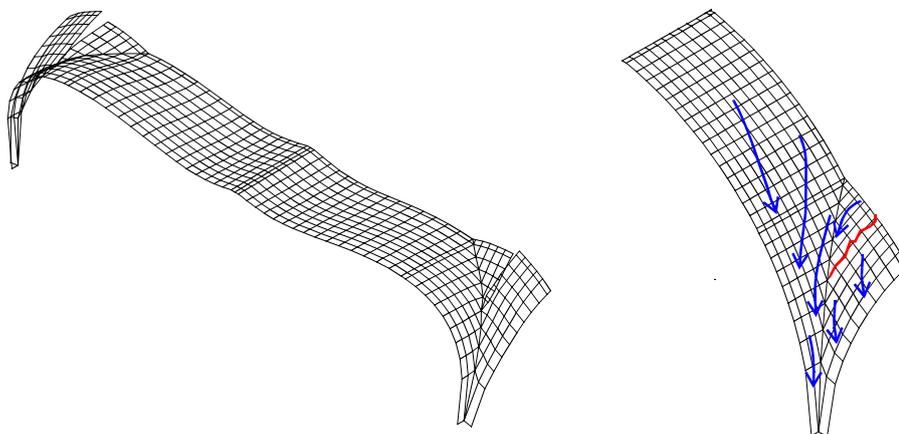


Figura 6.38 - Modelo 4 - junta entre elementos finitos para simulação da fenda.

6.4.2 - Modelos de Elementos Finitos não Lineares

Após as primeiras simulações numéricas realizadas com elementos finitos de comportamento elástico linear, simulou-se a não resistência à tracção da alvenaria através de elementos finitos triangulares de seis nós e dum modelo de fenda distribuída (fenda fixa tradicional - parágrafo 4.4.3.2), isto é, através de uma formulação capaz de redistribuir tensões internas quando ocorrem fracturas. Admitiram-se as mesmas características mecânicas consideradas nos modelos elásticos lineares e considerou-se uma resistência à tracção de 0.1 MPa, com uma curva de amolecimento exponencial definida por uma energia de fractura de 0.1 Nmm/mm^2 . As características de resistência à tracção foram definidas tendo em conta valores correntes em alvenarias, mas com o objectivo de ultrapassar problemas de convergência numérica. De facto, para as condições reais da alvenaria de tijolo da abóbada, uma resistência à tracção de 0.1 MPa e uma energia de fractura de 0.1 Nmm/mm^2 parecerem demasiado elevadas. No entanto, a consideração de valores inferiores resultava em dificuldades de convergência, em virtude de fracturar em simultâneo um número muito elevado de pontos de integração. Deste modo, os resultados do modelo numérico não linear devem ser analisados numa perspectiva qualitativa e não quantitativa.

Para corroborar a interpretação de que a origem das fendas nas lunetas se deve ao afastamento dos encontros sob impulso das abóbadas, tomou-se um tramo intermédio, onde se admitiu que o efeito de extremidade (restrição ao movimento devida às paredes de fachada e transepto) não se faria sentir, e considerou-se as paredes longitudinais interiores a rodarem (para fora), como corpo rígido, em torno do eixo da sua base. Admitiu-se ainda simetria de comportamento dos encontros Norte e Sul.

Considerando as hipóteses de simetria referidas, analisou-se apenas um quarto de um tramo intermédio da abóbada, através de condições de fronteira apropriadas. Além da abóbada e das respectivas nervuras foi também simulado o "muro de carga" do arco, o qual, de acordo com Adriano da Silva Monteiro e Adães Bermudes, apresentava fendas na continuidade das fissuras da abóbada.

Reproduziu-se no modelo o que se julga ter acontecido: o afastamento dos encontros deu-se após equilíbrio das acções permanentes sem movimento das paredes laterais ^{Gago e Lamas, 2003}.

Sem esse movimento, os resultados indicam que não ocorreriam fendas. O afastamento dos encontros foi seguidamente simulado através da imposição de deslocamentos horizontais da parede lateral variáveis linearmente com a altura (Figura 6.39).

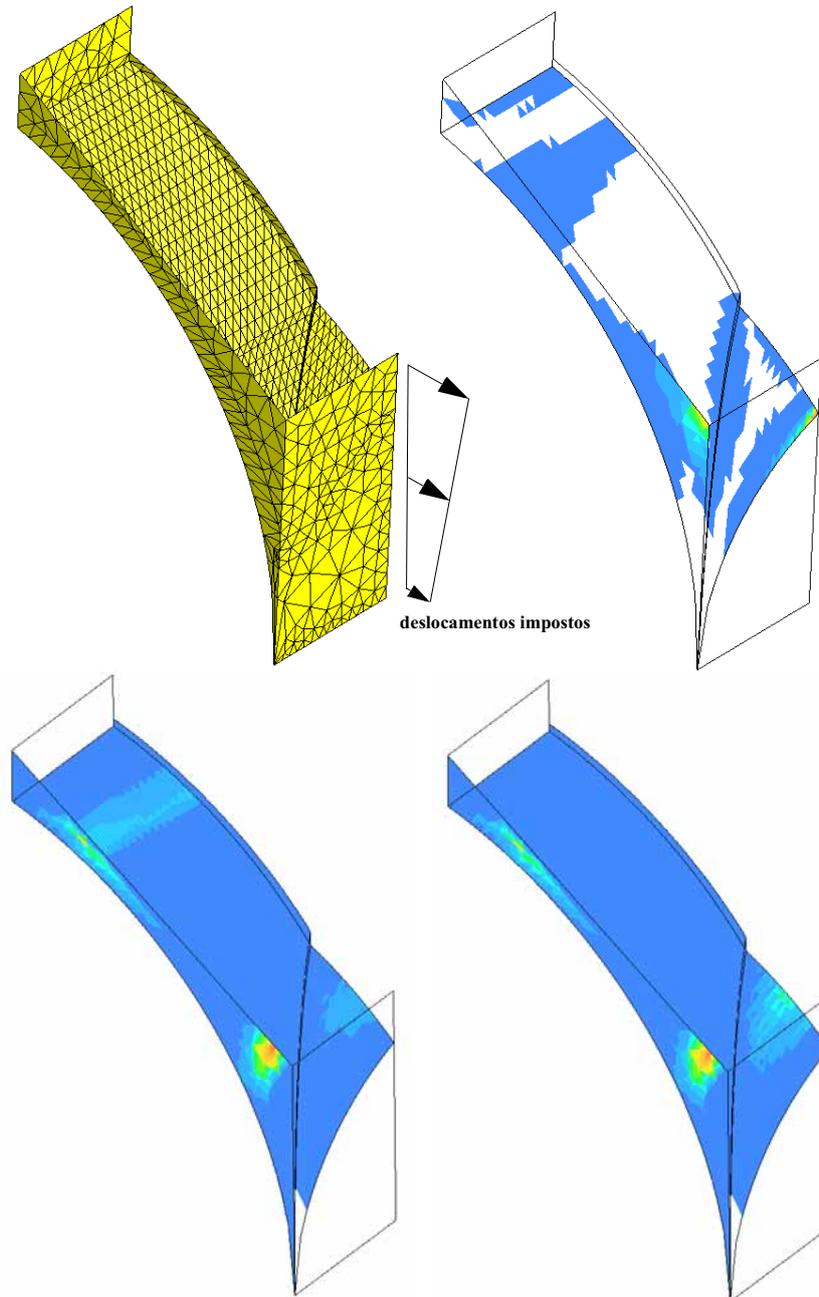


Figura 6.39 - Resultados da análise numérica - Em cima: malha de elementos finitos (esquerda) e danos na face inferior da abóbada para pequenas rotações da parede lateral, com fendilhação da ligação luneta/parede (direita); Em baixo: danos na face superior da abóbada (esquerda) e na face inferior (direita) para um deslocamento horizontal no topo da parede de 10 cm, a que corresponde a uma diminuição do impulso horizontal (resultante das forças transmitidas pela luneta à parede) de 46.6%.

Da análise dos resultados (Figura 6.39), verifica-se que, inicialmente, para pequenas rotações da parede lateral, a ligação entre a luneta e a parede fendilha, ocorrendo progressiva

redistribuição de tensões e fendilhação da luneta no seu coroamento, com distribuição semelhante à observada. O muro de carga do arco também fendilha como descrito por Adriano da Silva Monteiro. Isto parece corroborar o diagnóstico preliminar, isto é, a fendilhação das abóbadas está relacionada com o afastamento dos encontros, provocado pela deformação do sistema de paredes longitudinais e paredes-contraforte impulsionado pelas abóbadas.

6.5 - DIAGNÓSTICO

Identificou-se nos estudos numéricos que o afastamento dos encontros dos arcos e abóbada (constituídos pelo sistema de duas paredes longitudinais, paredes-contraforte e abóbadas botantes) podia produzir nas lunetas fendas como as observadas (do tipo das fendas de Sabouret).

Sem o tratamento dos dados do levantamento geométrico rigoroso da estrutura não é possível avaliar se o afastamento dos encontros se deve a um movimento simétrico dos lados Sul e Norte, ou se só resulta do movimento da parede do lado Sul. De facto, sabe-se que à empena do lado Sul encostava um claustro com mais de dois andares, o qual estaria em ruínas e foi demolido sem que o efeito de "amparo" que oferecia para contrariar os impulsos horizontais da abóbada fosse compensado. Adriano da Silva Monteiro chega a mencionar a necessidade de construção de um pórtico com esse fim no caso de se demolir o claustro, mas esta recomendação não foi seguida. Será que foi a partir da ruína do claustro e, depois, com a sua demolição que surgiram e continuam a abrir as fendas? Será que as construções do lado Norte oferecem "amparo" suficiente e que a abertura do vão da nave resulta sobretudo da deformação das paredes longitudinais e contrafortes do lado Sul? Ou será que os contraventamentos, a Norte e a Sul, nunca foram suficientes e as fendas surgiram mesmo antes da eliminação do claustro? O que parece, e os presentes estudos apontam, é que o fenómeno de fendilhação terá tido origem na abertura do vão da nave, resultado de, pelo menos do lado Sul, duma restrição horizontal (contraventamento) insuficiente.

As aberturas das fendas nas lunetas (ligeiramente maiores do lado Sul que do lado Norte) são menores no tramo junto da fachada, crescendo até ao terceiro tramo e diminuindo até ao sexto, onde não são já aparentes. Isto sugere que o afastamento dos encontros da abóbada (e impostas dos arcos) tem um andamento semelhante, isto é, que há movimento diferencial desses

encontros e do coroamento das paredes, ou seja, flexão horizontal das mesmas (Figura 6.40a). Este movimento diferencial dever-se-ia à restrição parcial ao movimento dos encontros produzida pela fachada principal, onde existem parede e cunhais, e pela parede transversal do transepto. Esta hipótese, também a reforçar com um levantamento geométrico rigoroso, é aliás corroborada pela observação, na face exterior da empena Sul, a meio comprimento da nave, de uma fenda vertical com abertura decrescente de cima para baixo (de flexão horizontal da empena).

Não é, porém, ainda possível aferir se o movimento dos encontros "para fora" está associado simplesmente a flexão vertical das paredes-contraforte (Figura 6.40b), que produziria fendas horizontais nas faces interiores das paredes (o que não se conseguiu investigar), ou se também ocorre rotação das paredes-contraforte como corpo rígido em torno da base (Figura 6.40c), por assentamento diferencial do solo de fundação. De qualquer forma, para a abóbada, a ocorrência de qualquer um destes modos de deformação das paredes contraforte tem efeitos equivalentes.

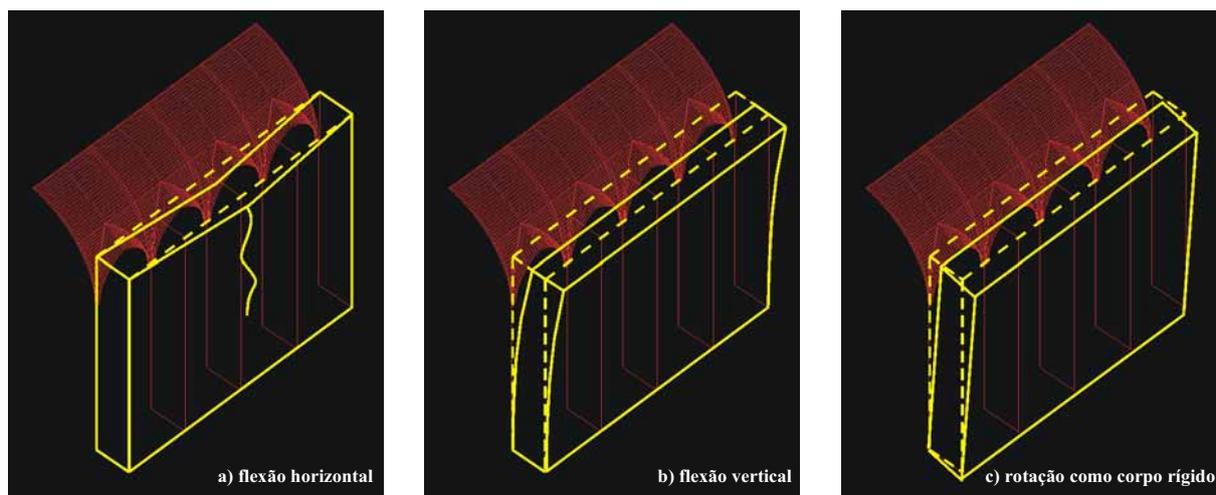


Figura 6.40 - Modos de deformação das paredes-contraforte.

6.6 - DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Não parece viável investigar a hipótese de o afastamento dos encontros da abóbada se dever apenas à demolição do claustro Sul. A dúvida sobre se este afastamento se deve a um movimento simultâneo dos encontros Norte e Sul, poderá ser esclarecida através de um levantamento geométrico rigoroso, e a sua evolução, que parece lenta, e a possibilidade de estabilizar, poderá ser avaliada através das leituras do sistema de instrumentação instalado na

Igreja.

Quanto ao aperfeiçoamento do modelo numérico, refere-se, para além da simulação mais perfeita da geometria e da utilização de elementos finitos tridimensionais (Figura 6.41), a necessidade de estudar a sequência de carregamento (simulação das fases construtivas), melhorar a estimativa das cargas presentes e características dos materiais e avaliar a possibilidade de simular o fenómeno da fluência das alvenarias e do solo. Está também previsto investigar o comportamento do edifício sob acções sísmicas e o eventual contributo de abalos passados nos danos acumulados visíveis. De qualquer modo, pensa-se que o estudo da eventual solução de reforço estrutural se deve dirigir à contenção da aparente causa da fendilhação: sustentar o afastamento dos encontros. Isto, numa atitude clássica perante abóbadas com problemas deste tipo, em que a solução vulgar e eficaz consiste no seu atirantamento (neste caso tirando partido das paredes-contraforte).

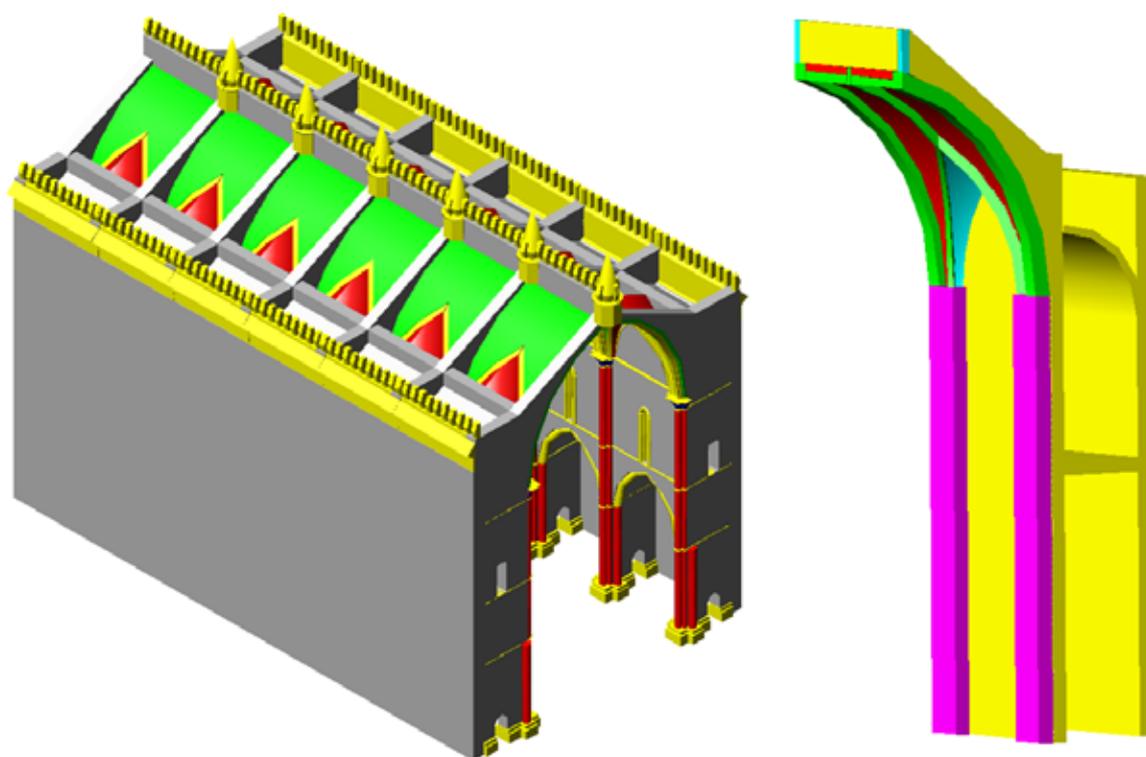


Figura 6.41 - Modelo CAD e modelo de elementos finitos tridimensionais.

CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

7.1 - INTRODUÇÃO

A actual filosofia de intervenção em património construído considera que o valor das construções históricas não está apenas na aparência, mas também na integridade dos seus componentes, na concepção original e nas técnicas de construção utilizadas, devendo qualquer intervenção ser considerada no contexto do restauro e conservação, evitando a alteração do esquema estrutural original^{ICOMOS,2004}. Assim, nenhuma acção de natureza estrutural sobre edifícios antigos deverá ser empreendida sem se averiguar o benefício e o prejuízo que resultam da sua implementação. Consequentemente, projectistas que intervenham sobre património construído deverão ser capazes de simular e compreender o funcionamento estrutural das construções antigas na sua forma actual, de modo a avaliar a sua segurança actual, as suas deficiências e os efeitos das propostas de intervenção, sendo necessário que disponham de ferramentas de análise adequadas ao estudo dessas construções, geralmente em alvenaria.

O ascendente da construção em betão armado em relação aos materiais tradicionais de construção resultou no abandono dos antigos métodos de dimensionamento de construções em alvenaria, que não chegaram a ser actualizados. Nas últimas décadas o ensino da engenharia civil concentrou-se nas novas tecnologias construtivas e os conceitos de dimensionamento e de verificação de segurança divulgados nas escolas são os desenvolvidos para estruturas modernas, principalmente contínuas e que apresentam um comportamento significativamente diferente do das antigas.

A fraca resistência a esforços de tracção e a presença de descontinuidades nas alvenarias das construções antigas têm como consequência comportamentos descontínuos e altamente não lineares, que dificilmente poderão ser analisados pelas técnicas correntes de dimensionamento.

O presente trabalho insere-se no âmbito do estudo do comportamento estrutural de edifícios antigos tendo sido dado especial relevo às estruturas arqueadas, nomeadamente arcos, abóbadas e cúpulas. A selecção das estruturas arqueadas fundamenta-se pela sua importância no arranjo estrutural das construções antigas, em particular nos grandes edifícios históricos, e por ser neste tipo de estruturas que os métodos actuais de dimensionamento apresentam maiores deficiências.

O principal propósito do presente trabalho era a definição de métodos e regras de análise para estruturas arqueadas de construções antigas, podendo afirmar-se que, no essencial, o objectivo inicialmente proposto foi alcançado.

No desenvolvimento do trabalho e com o objectivo de identificar metodologias de análise simples que permitiam a previsão da resposta das estruturas arqueadas das construções antigas, procurou-se, em primeiro lugar, reaprender as antigas técnicas de análise, enquadrando-as, avaliando-as e desenvolvendo-as à luz dos actuais conceitos da mecânica estrutural. Assim, estudou-se a evolução da construção em alvenaria ao longo dos tempos e das correspondentes técnicas de dimensionamento (capítulo 2) e analisaram-se as metodologias analíticas e gráficas aplicáveis na análise de estruturas arqueadas em alvenaria (capítulo 3).

Os modernos modelos computacionais, por possibilitarem a simulação de comportamentos não lineares, são instrumentos que podem ser utilizados na modelação de estruturas de alvenaria. Estudaram-se os modelos disponíveis e seleccionaram-se os métodos dos elementos finitos e dos elementos discretos para aplicação, com sucesso, na modelação de estruturas arqueadas de alvenaria (capítulo 4).

O presente trabalho reporta, também, ensaios experimentais realizados sobre um protótipo à escala real da arcaria dos claustros do mosteiro de São Vicente de Fora, que permitiram a calibração desses modelos numéricos (capítulo 5), e aplicaram-se as metodologias de análise estrutural ao estudo de um caso real - a igreja de São Francisco, em Évora (capítulo 6).

7.2 - CONCLUSÕES

A base das metodologias gráficas e analíticas para dimensionamento de estruturas arqueadas de alvenaria é o conceito de linha de pressões (ou de superfície de pressões, no caso de estruturas tridimensionais), que é determinável através de considerações de equilíbrio. A estabilidade da estrutura é, então, avaliada em função da posição dessa linha (ou superfície) no seu interior: linhas (ou superfícies) totalmente incluídas na sua espessura correspondem a soluções que não violam as condições de resistência das secções (que apresentam diminuta resistência à tracção).

Tendo em conta o comportamento das construções em alvenaria de blocos (de pedra ou tijolo), como são a maioria das estruturas arqueadas existentes nas construções antigas, em face das solicitações estáticas correntes, a sua análise pode basear-se nas seguintes hipóteses, as quais validam a aplicação da teoria da análise limite esse tipo de estruturas:

- 1) A alvenaria apresenta uma resistência à tracção nula;
- 2) A alvenaria apresenta uma resistência à compressão ilimitada;
- 3) Nas estruturas de alvenaria não ocorrem movimentos de deslizamento relativo nas juntas entre aduelas.

De acordo com o teorema estático da teoria da análise limite, se para um dado carregamento for possível encontrar uma distribuição de esforços (isto é, no caso das estruturas arqueadas, uma linha ou superfície de pressões) estática e plasticamente admissível (ou seja, em equilíbrio com as cargas actuantes e sem que excedam limites de resistência do material), então a estrutura será capaz de suportar esse carregamento.

Deste modo, o problema estaticamente indeterminado[†] de identificação da linha (ou superfície) de pressões realmente “instalada” na estrutura é ultrapassado, uma vez que o teorema estático garante ser suficiente encontrar uma qualquer solução equilibrada e verificar o seu posicionamento: se essa linha (ou superfície) estiver totalmente incluída no interior da estrutura então ela é estável. Por outras palavras, pode dizer-se que se o analista consegue encontrar uma solução admissível, então a própria estrutura também o conseguirá.

[†] Cujas soluções exigem outras equações para além das equações de equilíbrio estático.

Observe-se, no entanto, que o teorema estático apenas permite concluir pela positiva, isto é, se a solução encontrada não for plasticamente admissível nada se poderá concluir quanto à estabilidade da estrutura.

No caso de arcos, o estudo das linhas de pressões pode efectuar-se através de métodos analíticos idênticos aos utilizados em cabos suspensos e em estruturas tridimensionais a teoria das membranas é o método indicado para a análise do equilíbrio das correspondentes superfícies de pressões.

As metodologias bidimensionais aplicáveis a arcos e abóbodas cilíndricas longas podem ser também utilizadas em estruturas tridimensionais, desde que se decomponha essas estruturas em sub-estruturas planas mutuamente apoiadas. O teorema estático garante que se for possível encontrar uma solução estável para cada uma das estruturas elementares também o será para a estrutura completa.

A espessura mínima admissível de uma estrutura arqueada para uma dada solicitação, definida em função da geometria da linha (ou superfície) de pressões, é uma medida da sua estabilidade, sendo possível definir coeficientes de segurança geométricos com base nessa espessura, ou nos valores dos impulsos horizontais máximo e mínimo. A análise das espessuras mínimas correspondentes a vários tipos de carregamentos permite, também, concluir quanto às consequências de determinadas acções, nomeadamente quanto ao efeito favorável do carregamento dos rins dos arcos através do enchimento do extradorso.

Em certas circunstâncias, porém, a geometria da estrutura arqueada inviabiliza a utilização dos modelos simples habitualmente admitidos nos métodos analíticos e gráficos. Por outro lado, os efeitos geometricamente não lineares, que se estimam ser importantes em estruturas de grande vão, não são considerados nessas análises. Assim, em algumas estruturas é inevitável o recurso a modelos de cálculo mais sofisticados, nomeadamente a modelos computacionais de comportamento material e geometricamente não linear.

O comportamento materialmente não linear das alvenarias torna complexa a sua simulação numérica, exigindo modelos que simulem correctamente as características mecânicas dos seus materiais. Em geral, a utilização desses modelos conduz a problemas de estabilidade numérica,

os quais só são ultrapassados através de metodologias numéricas específicas. Como o método dos elementos finitos é frequentemente utilizado o método de Newton-Raphson em associação com algoritmos de pesquisa em linha e com o método do comprimento do arco.

Dentro das metodologias mais avançadas para a modelação numérica das estruturas em alvenaria destacam-se o método dos elementos finitos com formulações descontínuas (com elementos de junta de comportamento não linear), o método dos elementos finitos com formulações contínuas (com modelos de fractura distribuída) e o método dos elementos discretos (onde as juntas entre elementos são substituídas por um conjunto discreto de contactos pontuais). Todas essas metodologias possibilitam a simulação da fractura por tracção (e de danos por compressão ou corte, quando associados a modelos de plasticidade), revelando-se opções adequadas para a simulação estrutural das alvenarias. A escolha da método numérico depende do problema em estudo, verificando-se que os modelos de elementos finitos de fenda distribuída são mais adequados para a simulação de fendilhações difusas ou de estruturas de grandes dimensões, enquanto que os modelos de elementos finitos de fenda discreta e os de elementos discretos são mais adequados para a simulação de estruturas de blocos ou estruturas onde a ocorrência da fendilhação é localizada. De uma forma geral pode dizer-se que com a formulação implícita do método dos elementos finitos tradicional é mais difícil a obtenção de resultados, embora sejam mais fiáveis do que os obtidos pelo método (explícito) dos elementos discretos.

Do ponto de vista computacional, todas os métodos anteriores consomem grandes recursos, pelo que a modelação de grandes estruturas nem sempre é possível através dessas metodologias. Por outro lado, a utilização dos métodos numéricos mais evoluídos exige do analista uma sólida preparação em aspectos numéricos e mecânicos, donde, na ausência dessa formação específica, pode ser mais adequado a utilização de metodologias numéricas simplificadas, complementadas com estudos analíticos ou gráficos.

Em alguns casos, nomeadamente em conjuntos construídos de grande dimensão, é difícil a obtenção de resultados através da modelação numérica não linear, sendo usual a associação de modelos globais de comportamento linear com modelos locais, mais detalhados, de comportamento não linear. Nestes casos, a modelação elástica linear pode conduzir a boas avaliações do comportamento global das estruturas.

No entendimento do autor, a análise de estruturas antigas complexas deve ser realizada através de metodologias de análise progressivamente mais sofisticadas. Se bem que alguns aspectos do comportamento material da estrutura não sejam considerados nas metodologias mais simples, nesses modelos o analista tem maior controlo sobre os parâmetros que influenciam a sua resposta. Assim, primeiras aproximações que resultem de estudos analíticos e gráficos e de modelos numéricos lineares podem permitir o entendimento qualitativo do funcionamento estrutural do edifício, o qual deverá ser confirmado através de modelos mais sofisticados, por comparação com ensaios experimentais existentes na literatura ou especificamente realizados para o efeito.

Como é actualmente reconhecido a intervenção estrutural em edifícios antigos requer uma abordagem multidisciplinar e uma sequência cuidadosa dos passos de intervenção. A organização dos estudos e propostas de intervenção deverá seguir fases semelhantes às utilizadas em medicina: anamnese, diagnóstico, terapia e controlo correspondem numa intervenção estrutural em edifícios antigos à recolha de informação, identificação das causas dos danos, especificação da acção de intervenção e controlo da eficácia da intervenção. O caso de estudo apresentado no capítulo 6 pretendeu, também, exemplificar estes procedimentos.

Os passos a seguir numa intervenção estrutural num edifício antigo podem resumir-se nos seguintes pontos^{ICOMOS,2004}:

1. Aquisição de dados

O conhecimento da estrutura requer em primeiro lugar informações sobre a sua concepção, sobre as técnicas utilizadas na sua construção e sobre alterações que a tenham afectado, as quais resultarão duma investigação histórica abrangendo a vida completa da estrutura.

A observação directa da estrutura é uma fase essencial no estudo, que permite identificar danos e deficiências estruturais e decidir sobre a necessidade de medidas de intervenção urgentes. O levantamento geométrico assim como a realização de ensaios locais para identificação de características mecânicas deverão ser executados nesta fase, assim como, uma eventual monitorização da estrutura com vista a registar a evolução temporal dos fenómenos de dano.

2. Análise do comportamento estrutural

O levantamento geométrico do edifício, a caracterização dos materiais e a quantificação das acções permitem a execução de modelos estruturais para análise dos danos identificados.

Como referido, a selecção do tipo de análise resulta do compromisso entre a complexidade de cálculo e o grau de aproximação pretendido: modelos mais rigorosos estão normalmente associados a procedimentos de cálculo mais complexos. A realização de abordagens com graus de aproximação distintos resulta em diferentes contribuições que, combinadas, podem conduzir a uma melhor identificação da origem dos danos.

As alterações na construção, reconhecidas no estudo histórico do edifício, deverão ser consideradas nos diferentes modelos estruturais de forma a reproduzir a vida estrutural da construção.

3. Diagnóstico e avaliação da segurança

A interpretação (qualitativa e quantitativa) das observações da estrutura, dos ensaios experimentais e dos resultados dos modelos gráficos, analíticos e numéricos permitirá a compreensão das causas das deficiências, devendo neste juízo serem tidas em conta as hipóteses e aproximações de cada um dos métodos utilizados.

A quantificação da segurança do edifício, realizada com base nos estudos e conclusões anteriores, permitirá decidir quanto à extensão das medidas de intervenção a adoptar.

Observe-se que a utilização dos critérios de segurança definidos nos regulamentos actuais não é apropriada para este tipo de estruturas por resultar, frequentemente, em medidas correctivas de extensão inadequada para a natureza da construção. É necessário adoptar uma abordagem mais flexível para que se preserve o princípio de intervenção mínima.

4. Selecção das medidas de intervenção

Identificada a origem dos danos deverá estudar-se eventuais medidas de intervenção através da

avaliação do efeito de cada uma das soluções preconizadas. As intervenções deverão procurar respeitar os princípios de compatibilidade, reversibilidade e de intervenção mínima. O esquema de funcionamento estrutural original deverá ser respeitado, evitando a substituição do dispositivo de suporte das acções.

A definição de programas de manutenção e, eventualmente, de monitorização da estrutura pode ser, numa fase inicial, a única medida de intervenção, ou poderão ser implementados juntamente com a implementação das soluções de reforço estrutural.

7.3 - PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Os desenvolvimentos previstos para o presente trabalho assentam nas seguintes frentes principais:

- 1) Melhor caracterização dos materiais das construções antigas e identificação dos correspondentes parâmetros que definem os modelos numéricos, nomeadamente, energias de fractura, resistências à compressão e tracção, módulos de elasticidade e ângulos de atrito. A realização de ensaios experimentais e numéricos permitirá um gradual refinamento dos valores desses parâmetros para diferentes tipos de materiais;
- 2) Estudo dos efeitos da rigidez e resistência do material de enchimento nas pontes em arco com viés, através de modelos tridimensionais que incluam explicitamente esse material na malha de elementos finitos;
- 3) Aplicação dos modelos estudados na simulação de fenómenos físicos não abordados neste trabalho. Em particular, pretende-se modelar o comportamento sísmico de estruturas antigas e estudar os efeitos das variações de temperatura e da fluência nas abóbadas e cúpulas de alvenaria;
- 4) Estudo do efeitos da história da construção no estado de tensão instalado na estrutura, através da modelação numérica das diferentes fases construtivas e das acções a que o edifício esteve sujeito;

5) Desenvolvimento da análise dos resultados do projecto *COSISMO* correspondentes aos ensaios com reforço estrutural e sua utilização para calibração de modelos numéricos;

6) Aplicações dos modelos estudados a estruturas de construções antigas reais com o objectivo de identificar causas de anomalias estruturais e de propor intervenções de reforço estrutural. A modelação numérica de soluções de reforço, não abordada no presente trabalho, será, assim, objecto de investigação.

Relativamente ao caso de estudo apresentado, igreja de São Francisco, em Évora, a obtenção dos resultados do esquema de monitorização implementado e do levantamento topográfico de alta precisão, assim como, de outros estudos complementares (por exemplo estudos de vibrações para avaliação do impacto do trânsito rodoviário), permitirão a definição da intervenção a realizar. A análise do comportamento sísmico do edifício conduzirá a dados complementares para essa decisão.

No âmbito da investigação do autor no Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção do Instituto Superior Técnico (*ICIST*) estão previstos estudos estruturais em outros edifícios históricos, nomeadamente na igreja de São Francisco em Montemor (Figura 7.1) que apresenta uma extensa fendilhação da fachada e da abóbada do coro alto, em resultado de movimentos da parede da empena, e a igreja dos Agostinhos em Vila Viçosa onde se identifica um fenómeno de esmagamento por compressão do revestimento (em mármore) das paredes junto do cruzeiro (Figura 7.2).



Figura 7.1 - Igreja de São Francisco em Montemor - fendilhação da fachada principal.



Figura 7.2 - Igreja dos Agostinhos em Vila Viçosa - esmagamento do revestimento em mármore das paredes junto do cruzeiro.

BIBLIOGRAFIA HISTÓRICA

- [1] Barlow, W. H. (1846) - "On the existence of the line of equal horizontal thrust in arches, and the mode of determining it by geometrical construction"
- [2] Bélidor, B. F. de (1729) - "La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile", Paris
- [3] Bélidor, B. F. de (1755) - "Dictionnaire portatif de l'ingénieur", Paris
- [4] Bossut, C. (1778) - "Recherches sur l'équilibre des voûtes". Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1770), Paris
- [5] Bossut, C. (1779) - "Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme". Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1776), Paris
- [6] Bouguer, P. (1734) - "Sur les lignes courbes qui sont propres à former les voûtes en dôme", Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris
- [7] Breyman, G. A. (1849) - "Allgemeine Bau-Constructions-Lehre, mit besonderer Beziehung auf das Hochbauwesen", Hoffman, Stuttgart
- [8] Breyman, G. A. (1889) - "Trattato generale di costruzioni civili", Vallardi, Milão
- [9] Castigliano, C. A. P. (1879) - "Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications", Turin

- [10] Coulomb, C. A. (1776) - “Essai sur une application des règles des “maximis & minimis” à quelques problèmes de statique, relatifs à l’architecture”, Mémoires de Mathématique & de Physique, présentés à l’Académie Royale des Sciences par divers Savans & lûs dans ses Assemblées (1773), Paris
- [11] Couplet, P. (1731) - “De la poussée des terres contre leurs revestements, et de la force des revestements qu’on leur doit opposer”, Mémoires de l’Académie Royale des Sciences (1728), Paris
- [12] Couplet, P. (1732) - “De la poussée des voûtes”, Mémoires de l’Académie Royale des Sciences (1730), Paris
- [13] Danyzy, A. (1778) - “Méthode générale pour déterminer la résistance qu’il faut opposer à la poussée des voûtes”, Mémoires de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier (1732), Lyon
- [14] Derand, F. (1643)- “L’architecture des voûtes, ou l’art des traits, et coupes des voûtes”, Paris
- [15] Fabri, H. (1669) - “Tractatus II”, vol. 5, Physica
- [16] Frézier, A. F. (1737-1739) - “La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des batimens civils et militaires, ou traité de stereotomie à l’usage de l’architecture”, 3 vols., Strasbourg, Paris
- [17] Fuller, G. (1875) - “Curve of equilibrium for a rigid arch under vertical forces”
- [18] Gautier, H. (1717) - “Dissertation sur l’épaisseur des culées des ponts”, Paris, 1717
- [19] Gregory, D. (1697) - “Catenaria”, Phil. Trans. no. 231
- [20] Hooke, R.(1675) - “A description of helioscopes, and some other instruments”, Londres
- [21] La Hire, F. de (1695) - “Traité de Mécanique”, Paris
- [22] La Hire, F. de (1731) - “Sur la construction des voûtes dans les édifices”, Mémoires de l’Académie Royale des Sciences (1712), Paris,
- [23] Lévy, M. (1888) - “Cupoles en maçonnerie” (chapter II - la statique graphique et ses applications aux constructions), Gauthier-Villars Imprimeur, Paris
- [24] Mascheroni, L. (1785) - “Nuove ricerche sull’equilibrio delle volte”, Bergamo
- [25] Méry, E. (1840) - “Sur l’équilibre des voûtes en berceau”, Annales des Ponts et Chaussées, Paris

- [26] Moseley, H. (1843) - "The mechanical principles of engineering and architecture",
Londres
- [27] Navier, C. L. M. H. (1833) - "Résumé des leçons données à l'École des Ponts et
Chaussés, sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et
des machines", 2^a Ed., Paris
- [28] Pippard, A. J. S. (1948) - "The approximate estimation of safe loads on masonry
bridges", Civil engineer in war, 1, The institute of Civil Engineers, Londres
- [29] Poleni, G. (1748) - "Memoire istoriche della gran cupola del Tempio Vaticano",
Padova
- [30] Poncelet, J. V. (1839) - "Mécanique Industrielle", Liège
- [31] Poncelet, J. V. (1852) - "Examen critique et historique des principales théories ou
solutions concernant l'équilibre des voûtes", Comptes rendus
- [32] Rondelet, J. (1802) - "Traité théorique et pratique de l'art de bâtir", Paris
- [33] Venturoli, G. (1810) - "Elementi di meccanica e d'idraulica", Fratelli Masi,
Bolonha

BIBLIOGRAFIA

- [1] Adam, J. P. (1995) - “La construction romaine - Matériaux et techniques”, 3^{ème} Edition, Éditions A.et J. Picard, Paris
- [2] Alfaiate, J. V. (1992) - “Estudo e modelação do comportamento do betão fissurado”, Dissertação para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil, IST, Lisboa
- [3] Alfaiate, J.; Pires, E.B.; Martins, J.A.C. (1997) - “A Finite Element Analysis of Non-Prescribed Crack Propagation in Concrete”, Computers & Structures, Vol.63(1)
- [4] Ambrosetti, C.; Pegon, P (1998) - "3D modelling of complex block arrangement for columns of monuments", Monument 98 - Workshop on Seismic Performance of Monuments, LNEC, Lisboa
- [5] Anthonie, A. (1995) - “Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory”, Int. J. Solids and Structures, Vol. 32(2)
- [6] Appleton, J. (2003) - "Reabilitação de edifícios antigos - patologias e tecnologias de intervenção", Edições Orion, Amadora
- [7] Archivo Pittoresco (1868), Editores Castro Irmão & C.^a, Lisboa
- [8] Arte em Portugal N.º 8 - Évora, Editores Marques Abreu, Porto
- [9] Augarde, C. E.; Davey, J. D. (2001) - “Modelling skew arch behaviour”, ARCH’01 - Third International Arch Bridges Conference, Paris

- [10] Azevedo J., Sincaian, G., Lemos, J. V. (2000) - “Seismic behaviour of blocky masonry structures”, *Earthquake Spectra*, Vol. 16(2)
- [11] BA 16/93 (1993) - “The assessment of highway bridges and structures - Advice Note”, Department of Transport, London
- [12] BA 16/97 (1997) - “The assessment of highway bridges and structures - Part 4 - Amendment N.º 1”, Department of Transport, London
- [13] Backes, H. P. (1985) - “On the behaviour of masonry under tension in the direction of the bed joints in direct shear”, *J. Struct. Engrg.*, ASCE Vol. 115(9)
- [14] Bathe, K.; Wilson, E. L. (1976) - “Numerical methods in finite elements analysis”, Prentice-Hall, New Jersey
- [15] Bazant, Z. P. (1985) - “Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete structures”, *Engineering Application of Fracture Mechanics*, Ed. G. C. Sih, A. Dito-
mmaso, Martinus Nijhoff Publishers
- [16] Bazant, Z. P.; Oh, B. H. (1983) - “Crack band theory for fracture of concrete”, *RILEM Mat. Struct.* Vol. 16
- [17] BD 16/84 (1984) - “Complementary advice note”, Department of Transport, London
- [18] BD 21/84 (1984) - “Assessment of highway bridges and structures”, Department of Transport, London
- [19] Beer, F.; Johnston E. (1997) - “Mecânica vectorial para engenheiros -Estática”, 6ª Ed., McGraw-Hill, Lisboa
- [20] Begg, D.; Fishwick, R. (1995) - “Numerical analysis of rigid block structures including sliding”, *Proc. Third International Symposium on Computer Methods in Structural Masonry*, Lisbon
- [21] Benvenuto, E. (1991) - “An introduction to the history of structural mechanics - Part II: Vaulted structures and elastic systems”, Springer-Verlag, New York
- [22] Binda, L. (1980) - “Sul calcolo a rottura delle strutture murarie: profilo dello sviluppo storico”, *Atti e rassegna tecnica della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino - Nuova Serie - A. 34 - N. 10*, Torino
- [23] Blasi, C.; Foraboschi, P. (1994) - “Analytical approach to collapse of circular masonry arch”, *Journal of Structural Engineering* - Vol. 120(8)

-
- [24] Borst R. de; Sluys, L. J. (1999) - "Computational methods in non linear solid mechanics", Koiter Institute Delft, Delft University of Technology, The Netherlands
- [25] Brencich, A.; Gambarotta, L.; Lagomarsino, S. (1998) - "A macro-element approach to the three dimensional seismic analysis of masonry buildings", Proc. 11th European Conference on Earthquake Engineering, Paris
- [26] Brencich, A.; Lagomarsino, S. (1997) - "A macro-element dynamic model for masonry shear walls", Computer Methods in Structural Masonry 4, Ed. G. N. Pande, J. Middleton, B. Kralj, Florence
- [27] Buchet, P.; Capéran, P.; Pegon, P. (2000) - "Visual Castem 3M - User Manual", SSMU, ISIS, Joint Research Centre, Ispra
- [28] Cardoso, E. (1953) - "Pontes - segundo as lições do Prof. Eng.º Edgar Cardoso", Ed. Madeira e Costa; Quaresma Guerreiro, AEIST, Lisboa
- [29] Carvalho, E. C. (2000) - "Seismic testing of structures", Encontro Nacional de Betão Estrutural, LNEC, Lisboa
- [30] CEN (1995) - "Eurocode 6: Design of masonry structures", ENV 1996-1-1:1995, CEN, Brussels
- [31] Cerqueira, P. B.; Vaz; C. T. (1996) - "Estudo dinâmico linear da portaria de São Vicente de Fora - 1º Relatório de progresso" -Relatório 46/96 - C3ES, LNEC, Lisboa
- [32] Clough, R. W.; Penzien, J. (1993) - "Dynamic of structures", McGrawll-Hill, Second Edition, Taipe
- [33] Combescure, D.;Pegon, P. (1994) - "Alpha-operator splitting time integration technique for pseudo-dynamic tests - error propagation analysis", Special Publication N.º I.94.65, ELSA-JRC, Ispra
- [34] Cope, R. J.; Rao, P. V.; Clark, L. A.; Norris, P. (1980) - "Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridge slabs", Numerical Methods for Non Linear Problems, Ed. C. Taylor, Pineridge Press, Swansea
- [35] Cormeau, A.; Shrive, N. G. (1995) - "A 2D model for the prediction of failure modes in masonry subject to in-plane loads", Computer Methods in Structural Masonry 3, Ed. J. Middleton, G. N. Pande, Lisbon
- [36] Costa, A. C.; Sousa, M. L. N.; Martins, A. (1996) - "Ensaio dinâmicos in situ da portaria de São Vicente de Fora - Relatório final" -Relatório 90/97 - C3ES, LNEC, Lisboa

- [37] Crisfield, M. A. (1981) - "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through", *Computer & Structures* Vol. 13
- [38] Crisfield, M. A. (1985) - "Finite element and mechanism methods for the analysis of masonry and brickwork arches", Res. Rep. 19, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, Berks
- [39] Crisfield, M. A. (1991) - "Non linear finite element analysis of solid and structures - Vol. 1: essentials", John Wiley & Sons Ltd
- [40] Crisfield, M. A.; Packaham, A. J. (1987) - "A mechanism program for computing the strength of masonry arches", Res. Rep. 124, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, Berks
- [41] Crisfield, M. A.; Page, J. (1990) - "Assessment of the load carrying capacity of arch bridges", *The maintenance of brick and stone masonry structures*, Ed. A. M. Sowden, E.&F. N. Spon, London
- [42] Croci, G. (1998) - "The conservation and structural restoration of architectural heritage", *Computational Mechanics Publications*, Southampton, UK
- [43] Cundall, P. A. (1971) - "A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems", *Symp. Rock Fracture (ISRM)*, vol 1, paper II-8, Nancy
- [44] Cundall, P. A. (1980) - "UDEC - A generalized distinct element program for modelling jointed rock", *European Research Office, Final Technical Report DAJA37-39-C-O548*
- [45] Cundall, P. A. (1982) - "Adaptative density-scaling for time-explicit calculations", *4th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Edmond
- [46] Cundall, P. A. (1987) - "Distinct element models of rock and soil structure", *Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics*, Ed. E. T. Brown, George Allen & Unwin
- [47] Cundall, P. A. (1988) - "Formulation of a three dimensional distinct element model - Part I: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks", *Int. J. Rock Mech. Sci.*, Vol. 25
- [48] Cundall, P. A.; Hart, R. D. (1992) - "Numerical modelling of discontinua", *Engineering Computations*, Vol. 9

-
- [49] CUR (1997) - "Structural masonry - an experimental/numerical basis for practical design rules", Ed. J. G. Rots, A. A. Balkema, Rotterdam
- [50] Das, P. C. (1995) "The assesment of masonry arch bridges", Arch Bridges, Ed. C. Melbourne, Thomas Telford, London
- [51] Dermitzakis, S. N.; Mahin, S. A. (1985) - "Development of substruturing techniques for on-line computer controlled seismic performance testing", Report N.º UCB/EERC-85/04, UCB, USA
- [52] Dhanasekar, M.; Page, A. W.; Kleeman, P. W. (1985) - "The failure of brick masonry under biaxial stresses", Proc. Instn. Civ. Engrs. Part 2, Vol. 79
- [53] Diana (2002) - "Diana user's manual - release 8.1", Ed. Frits C. de Witte, TNO Building and Constrution Research, Delft
- [54] Drysdale, R. G.; Hamid, A. A.; Baker, L. R.(1999) - "Masonry structures - behaviour and desing", The Masonry Society, Boulder, Colorado
- [55] Dyngeland, T.; Pinto, A. V. (1997) - "Linear dynamic analyses of the São Vicente de For a monastery in Lisbon, Portugal", Special Publication N.º I-97.48, ELSA-JRC, Ispra
- [56] Espanca, Túlio (1966) - "Inventário artístico de Portugal - Concelho de Évora", Vol. 6, Academia Nacional de Belas Artes, Lisboa
- [57] Espanca, Túlio (1966) - "Inventário artístico de Portugal - Concelho de Évora", Vol. 6, Academia Nacional de Belas Artes, Lisboa, Portugal
- [58] Fernandes, M. (1998) - "Os restauros e a memória da cidade de Évora (1836-1986)", Dissertação de Mestrado em Recuperação do Património Arquitectónico e Paisagístico. Universidade de Évora, Évora
- [59] Fishwick, R.; Begg, D. (1994), "Analysis of masonry arches using linear programming", Proc. International Conference on Computational Methods in Structural and Geotechnical Engineering, IV, Hong Kong
- [60] Gago, A. S.; Alfaiate, J.; Almeida, J. R. (2003) - "Simulação numérica de um ensaio experimental efectuado numa ponte em alvenaria de pedra", VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Évora.
- [61] Gago, A. S.; Alfaiate, J.; Gallardo, A. (2002) - "Numerical analyses of the Bargower arch bridge", Finite Elements in Civil Engineering Applications, Hendriks & Rots (eds.), Swets & Zeitlinger, Lisse.

- [62] Gago, A. S.; Lamas, A. R. G (2003) - “Explicação das fendas da abóbada da Igreja de São Francisco”, Actas do congresso 3º Encore, LNEC, Lisboa
- [63] Gago, A.; Lamas, A. (2001) - "Structural Analysis of the Vault of the Church of S. Francisco in Évora", Proceedings of the Historical Constructions 2001, Ed. P. Lourenço, P. Roca, Guimarães
- [64] Gago, A.; Lamas, A.; Azevedo, J., (2001) - "Análise Estrutural da Abóbada da Igreja de S. Francisco em Évora", Relatório ICIST DTC 5/01, Lisboa
- [65] Gambarotta, L.; Lagomarsino E. S. (1997a) - “Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: the mortar joint model and its applications”, Earthquake Eng. Struct. Dyn., 26
- [66] Gambarotta, L.; Lagomarsino E. S. (1997b) - “Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: the continuum model and its applications”, Earthquake Eng. Struct. Dyn., 26
- [67] Ghaboussi, J; Barbosa, R. (1990) - “Tree-dimensional discrete element method for granular materials”, Int. J. Num. Amal. Meth. Geomech., Vol. 14
- [68] Giuffré, A. (1986) - “La meccanica nell’ architettura - la Statica”, La Nuova Italia Scientifica, Roma
- [69] Giuffré, A. (1988) - “Monumenti e terremoti”, Multigrafica Editrice, Roma
- [70] Giuffré, A. (1991) - “Lecture sulla meccanica delle murature storiche”, Editori Kappa, Roma
- [71] Giuffré, A. (1993) - “Sicurezza e conservazione dei centri storici - Il caso Ortigia”, Editori Laterza, Roma
- [72] Goodman, R. E.; Taylor, R. L.; Brekke, T. L. (1968) - “A model for the mechanics of jointed rock”, J. Soil. Mech. Found. Div., ASCE, Vol. 94(3)
- [73] Hahn, J. K. (1988) - Realistic animation of rigid bodies”, Computer Graphics, Vol. 24(4)
- [74] Hanganu, A.; Barbat, A.; Oñate, E. (1997) - “Metodología de evaluación del deterioro en estructuras de hormigon armado”, Monografia CIMNE N.º 39, Barcelona
- [75] Hart, R. D.; Cundall, P. A. (1988) - “Formulation of a three dimensional distinct element model - Part II: Mechanical calculations”, Int. J. Rock Mech. Sci., 25, pp. 117-125

-
- [76] Harvey, W. J. (1991) - "Stability, strength, elasticity and thrust lines in masonry structures", *The Structural Engineer*, Vol 69, 9
- [77] Hendry, A.W.; Davies, S.R.; Royles, R. (1985) - "Test on stone masonry arch at Bridgemill - Girvan", *Contract. Report 7*, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne.
- [78] Hendry, A.W.; Davies, S.R.; Royles, R.; Ponniah, D.A.; Forde, M.C.; Komeyli-Birjandi, F. (1986) - "Test on masonry arch bridge at Bargower", *Contract. Report 26*, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne.
- [79] Heyman, J. (1966) - "The stone skeleton", *Int. J. Solids Structures - Vol. 2*, Oxford
- [80] Heyman, J. (1969) - "The safety of masonry arches", *Int. J. Mech. Sci. Pergamon Press - Vol. 11*, Oxford
- [81] Heyman, J. (1971) "Plastic design of frames 2 - applications", Cambridge University Press, Cambridge
- [82] Heyman, J. (1972) - "Coulomb's memoir on statics - an essay in the history of civil engineering", Imperial College Press, London
- [83] Heyman, J. (1976) - "Couple's engineering memoirs 1726-33", *History of Technology* ed. A. Rupert Hall and Norman Smith, London
- [84] Heyman, J. (1980a) - "The rehabilitation of Teston bridge", *Proc. Instn. Civ. Engrs.* 69, London
- [85] Heyman, J. (1980b) - "The estimation of the strength of masonry arches", *Proc. Instn. Civ. Engrs.* 69, London
- [86] Heyman, J. (1982) - "The masonry arch", Ellis Horwood Limited, London.
- [87] Heyman, J. (1988) - "Poleni's problem", *Proc. Instn. Civ. Engrs.* 84, London
- [88] Heyman, J. (1995) - "The stone skeleton - structural engineering of masonry architecture", Cambridge University Press, Cambridge
- [89] Heyman, J. (1996) - "Arches, vaults and buttresses - masonry structures and their engineering", *Variorum Collected Studies Series*, Hampshire
- [90] Heyman, J. (1998) - "Mechanical behaviour of brches and baults", *Proceedings of Structural Analysis of Historical Constructions II - Possibilities of Numerical and Experimental Techniques*, Ed. P. Roca, J.L. Gonzalez, E. Onate, P. B. Lourenço, CIMNE, Barcelona
-

- [91] Hilber, H. M.; Hughes, T. J. R.; Taylor, R. L. (1997) - "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", EESD, Vol. 5
- [92] Hillerborg, A. (1988) - "Fracture mechanics concepts applied to moment capacity and rotational capacity of reinforced concrete beams", Int. Conf. on Fracture of Concrete and Rock, Vienna
- [93] Hillerborg, A.; Modéer, M.; Petersson, P. (1976) - "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", Cem. and Concr. Res., Vol. 6
- [94] Hocking, G.; Mustoe, G. G. W.; Williams, J. R. (1985) - "CICE - Discrete element code - theoretical manual", Lakewood, Colorado
- [95] Hogg, V.; Choo, B. S. (2000) - "A study of scale effects in masonry arch bridges: is testing of large-scale structures still necessary?", The Structural Engineer, Vol 75, 5
- [96] Huges, T. G.; Davies, M. C. R.; Taunton, P. R. (1998) - "The small scale modelling of brick work arch bridges using centrifuge", Proc. Institution of Civil Engineers - Structures & Buildings, 128
- [97] Hughes, T. H. (1997) - "The testing, analysis and assessment of masonry arch bridges", Proceedings of Structural Analysis of Historical Constructions - Possibilities of Numerical and Experimental Techniques, Ed. P. Roca, J.L. Gonzalez, A. R. Marí, E. Onate, CIMNE, Barcelona
- [98] ICOMOS, Comité Científico Internacional para a Análise e Restauro de Estruturas do Património Arquitectónico (2004) - "Recomendações para a análise, conservação e restauro estrutural do património arquitectónico", tradução para português de Paulo Lourenço e Daniel Oliveira, revisão técnica de Aníbal Costa, António Sousa Gago, Luís Marreiros, Manuel Raposo, Paulo Lourenço, S. Pompeu dos Santos, V. Córias e Silva
- [99] Ingraffea, A. (1989) - "Shear cracks, Fracture Mechanics of Concrete Structures - from theory to applications", Report of the Technical Committee 90-FMA Fracture Mechanics of Concrete - Applications, (Ed. L. Elfgren, Chapman and Hall), London
- [100] ITASCA Consulting Group (2000) - "UDEC - Universal Distinct Element Code, User's Manual", Minneapolis
- [101] Kooharian, A. (1953) - "Limit analysis of voussoirs", Proc. Am. Concr. Inst.

-
- [102] Lamas, A.; Gago, A. (2002) - “Análise estrutural da abóbada”, Revista Semestral de Edifícios e Monumentos - Monumentos N.º 17, DGEMN (Ed.), Lisboa
- [103] Lee, J. S.; Pande, G. N.; Middleton, J.; Kralj, B. (1996) - “Numerical modeling of brick masonry panels subject to lateral loadings”, Computers & Structures Vol. 61(4), Pergamon Press, Oxford
- [104] Lemos, J. V. (1995) - “Assessment of the ultimate load of a masonry arch using discrete elements”, Computer Methods in Structural Masonry 3, Ed. J. Middleton and G. N. Pande, Lisbon
- [105] Lemos, J. V. (1997) - “Representação do contacto em modelos de elementos discretos” - V Encontro Nacional de Mecânica Computacional, Guimarães
- [106] Lemos, J. V. (1998a) - “Discrete Element Analysis of the S. Vicente de Fora Model Test”, Monuments 98 - Workshop on Seismic Performance of Monuments, Lisbon
- [107] Lemos, J. V. (1998b) - “Numerical models for seismic analysis of monuments”, Monuments 98 - Workshop on Seismic Performance of Monuments, Lisbon
- [108] LNEC - Núcleo de Processos de Construção - "Parecer sobre as anomalias verificadas na Igreja de S. Francisco em Évora", LNEC, Julho de 1998, Relatório 184/98-NPC
- [109] Lourenço, P. B. (1996) - “Computational strategies for masonry structures”, Doctoral Dissertation, Delft University of Technology, Department of Civil Engineering, Delft
- [110] Macchi, G. (2001) - “Diagnosis of the facade of St. Peter’s basilica in Rome”, Proceedings of Historical Constructions - Possibilities of Numerical and Experimental Techniques, Ed. P. B. Lourenço, P. Roca, Guimarães
- [111] Macchi, G.; Ruggeri, E.; Eusébio, M.; Moncecchi, M. (1993) - “Structural assessment of the leaning tower of Pisa”, IABSE Symposium - Structural Preservation of the Architectural Heritage, Rome
- [112] Mainstone, R. (1988) - “Stability concepts from the renaissance to today”, Stable-Unstable, La Consolidation des Structures Anciennes, Leuven University Press, Leuven
- [113] Mark, R. (1982) - “Experiments in gothic structure”, The MIT Press, Cambridge

- [114] Middleton, J.; Pande, G. N.; Kralj, B.; Gazzola, F. (1997) - "Three dimensional finite element analysis of masonry structures using homogenization: application to arch structures", *Computer Methods in Structural Masonry 4*, Ed. G. N. Pande, J. Middleton, B. Kralj, Florence
- [115] Mola, F; Vitaliani, R. (1997) - "Analysis, diagnosis and preservation of ancient monuments: the St. Mark's basilica in Venice", *Proceedings of Structural Analysis of Historical Constructions - Possibilities of Numerical and Experimental Techniques*, Ed. P. Roca, J.L. Gonzalez, A. R. Marí, E. Onate, CIMNE, Barcelona
- [116] Moniz, M. C., (1959) - "O Convento e a Igreja de S. Francisco de Évora", Évora
- [117] Muhlhaus, H. B. (1993) - "Continuum models for layered soil and blocky rock", *Comprehensive Rock Engineering*, Vol. 12, Pergamon Press, Oxford
- [118] Nakashima, M.; Kamnosono, T.; Ishida, M.; Ando, K. (1990) - "Integration techniques for substructure pseudo-dynamic test", *Conference on Earthquake Engineering*, Palm Springs
- [119] Ngo, D; Scordelis, A. C. (1967) - "Finite element analysis of reinforced concrete beams", *J. Amer. Concr. Inst.* Vol. 64 (3)
- [120] Oliveira, D. V. (2002) - "Análise experimental e numérica de estruturas de alvenaria de blocos sob acções cíclicas", *Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil*, UM, Guimarães
- [121] Oliveira, E. A. (1999) - "Elementos da teoria da elasticidade", IST Press, Lisboa
- [122] Onate, E; Hanganu, A.; Barbat, A.; Oller, S.; Vitaliani, R.; Saetta, A.; Scotta, R. (1996) - "Structural analysis and durability assessment of historical constructions using a finite element damage models", *Structural Analysis of Historical Constructions - Possibilities of numerical and experimental techniques*, Ed. P. Roca, J.L. Gonzalez, E. Onate, CIMNE, Barcelona
- [123] Otter, J. R. H.; Cassel, E.; Hobbs, R. E. (1966) - "Dynamic relaxation", *Proc. Inst. Civ. Engrg.*, Vol. 35
- [124] Page, A. W. (1981) - "The biaxial compressive strength of brick masonry", *Proc. Intsn. Civ. Engrs.*, Part 2, Vol. 71
- [125] Page, A. W. (1983) - "The strength of brick masonry under biaxial compression-tension", *Int. J. Masonry Constr.*, Vol. 31(1)

-
- [126] Page, J. (1995 a) - "Load tests to collapse on masonry arch bridges", Arch bridges, Ed. C. Melbourne, Thomas Telford, London
- [127] Page, J. (1995 b) - "Load tests for assessment of in service arch bridges", Arch bridges, Ed. C. Melbourne, Thomas Telford, London
- [128] Palomeque, 1997 - "Métodos gráficos de cálculo", Cuadernos del Instituto Juan de Herrera de la Escuela de Arquitectura de Madrid, Madrid
- [129] Pegon, P. (1998) - "The numerical simulation of buildings subjected to seismic loading: application of an integrated modelling strategy", Eleventh European Conference on Earthquake Engineering, Paris
- [130] Pegon, P. (1999) - "Automatic generation of blocks connected with joints in Castem 2000", Special Publication N.º I.99.101, ELSA-JRC, Ispra
- [131] Pegon, P.; Pinto, A. V. (1996) - "Seismic study of monumental structures - structural analysis, modelling and definition of experimental model", Report EUR 16387, ELSA-JRC, Ispra
- [132] Pegon, P.; Pinto, A. V. (1998) - "Numerical modelling in support of experimental model definition - the S. Vicente de Fora model", Monument 98 - Workshop on Seismic Performance of Monuments, LNEC, Lisboa
- [133] Pegon, P.; Pinto, A. V.; Geradin, M. (1999) - "Numerical modelling of stone block monumental structures", ECCM 99 - European Conference on Computer Mechanics, Munchen
- [134] Pegon, P.; Pinto, A. V.; Géradin, M. (1999) - "Numerical modelling of stone-block monumental structures", European Conference on Computational Mechanics ECCM'99, Munchen
- [135] Pinto, A. V.; Verzeletti, G.; Molina, J.; Plumier, C. (1998) - "Seismic tests on the S. Vicente de Fora model", Monument 98 - Workshop on Seismic Performance of Monuments, LNEC, Lisboa
- [136] Pinto, A. V.; Ârede, A.; Guedes, J. (1994) - "O método pseudo-dinâmico e suas aplicações no laboratório ELSA - Parte I - Métodos de integração e de sub-estruturação", 2º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, FEUP, Porto
- [137] Pinto, V.; Gago, A.; Verzeletti, G.; Molina, F. (1999a) - "Seismic tests on the S. Vicente de Fora model - assessment and retrofitting - Part I", 4º Encontro Nacional de Engenharia Sísmica e Sismologia, Faro
-

- [138] Pinto, V.; Gago, A.; Verzeletti, G.; Molina, F. (1999b) - "Seismic tests on the S. Vicente de Fora model - assessment and retrofitting - Part II", 4º Encontro Nacional de Engenharia Sísmica e Sismologia, Faro
- [139] Póvoas, R. H. (1991) - "Modelos não lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão, incluindo efeitos diferidos", Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil, FEUP, Porto
- [140] Prager, W. (1959) - "An Introduction to Plasticity", Addison-Wesley, London
- [141] Prager, W. (1959) - "An introduction to plasticity", Addison-Wesley, Read. Mass.
- [142] Ramm, E. (1981) - "Strategies for tracing nonlinear response near limit points", Non Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Ed. W. Wunderlich et al., Springer-Verlag, New York
- [143] Ramos, L F. (2002) - "Análise experimental e numérica de estruturas históricas de alvenaria", Dissertação para Mestrado em Engenharia Civil, UM, Guimarães
- [144] Riks, E. (1972) - "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", ASME J. Appl. Mech., Vol. 39
- [145] RILEM (1994) - "Technical recommendations for the testing and use of construction materials: LUMB1- Compressive strength of small walls and prisms", Chapman & Hall
- [146] Roca, P.; Oliveira, D.; Lourenço, P.; Carol, I. (2001) - "Mechanical response of dry joint masonry", 2nd International Congress on Studies in Ancient Structures, Yıldız Technical University, Istanbul
- [147] Rodrigues, T. (1948) - "Pontes - curso do Exmo. Sr. Prof. Eng.º Theotónio Rodrigues", Revista Engenharia, FEUP, Porto
- [148] Rots, J. G. (1988) - "Computational modeling of concrete structures", Doctoral Dissertation, Delft University of Technology, Department of Civil Engineering, Delft
- [149] Rua, M. H. (1998) - "Os dez livros de arquitectura de Vitruvius", Edição de Autor, DECivil, IST, Lisboa
- [150] Saliger, R. (1942) - "Estática aplicada - cálculo de estructuras - aplicado a las construcciones elevadas y al hormigón armado", Editorial Labor, S.A, Barcelona

-
- [151] Sanabria, S. L. (1988) - "Structural sizing in the late medieval world", Stable-Unstable - La Consolidation des Structures Anciennes, Leuven University Press, Leuven
- [152] Save, M. (1988) - "La théorie des charges limites et son application aux maçonneries", Stable-Unstable - La Consolidation des Structures Anciennes, Leuven University Press
- [153] Schlangen, E; van Mier, J G. (1993) - "Mixed-mode fracture propagation: a combined numerical and experimental study", Fracture and damage of concrete and rock
- [154] Shi, G. H. (1989) - "Discontinuous deformation analysis - a new numerical model for the statics and dynamics of block systems", Lawrence Berkeley Laboratory, Report to DOE OWTD, Contract ACO3-76SF0098
- [155] Sincraian, G. (2001) - "Seismic behaviour of blocky masonry structures", Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil, IST, Lisboa
- [156] Sousa, M. L. N.; Martins, A. (1997) - "Monitorização de simos em São Vicente de Fora", Relatório 265/97 - C3ES, LNEC, Lisboa
- [157] Sul - Folha Bissemanal Política e Notisiosa - Órgão do Partido Regenerador no Districto d'Evora (1884) - 4º anno Nº 378 a 402
- [158] Sulem, J.; Cerrolaza, M. ;El Bied, A. (1997) - "Numerical analysis of masonry structures with homogenized Cosserat continuum model", Computer Methods in Structural Masonry 4, Ed. G. N. Pande, J. Middleton, B. Kralj, Florence
- [159] Timoshenko, S. P. (1953) - "History of strength of materials", McGraw-Hill, New York
- [160] Timoshenko, S. P.; Woinowsky-Krieger, (1959) - "Theory of plates and shells", McGraw-Hill International Editions, New York
- [161] Trent, B. C.; Margolin, L. G (1995) - " Numerical validation of constitutive theory for an arbitrarily fractured solid", Engineering Computations, Vol. 12
- [162] Underwood, P. (1983) - "Dynamic relaxation", Computational Methods for Transient Analysis, Eds. T. Belytschko, T. J. R. Hughes, North Holland
- [163] Vaz, C. T. (1996) - "Ensaio sísmico do modelo experimental da portaria de São Vicente de Fora - Relatório de progresso", Relatório 293/96 - C3ES, LNEC, Lisboa
- [164] Vaz; C. T. (1997) - "Estudo dinâmico linear da portaria de São Vicente de Fora - Relatório final" -Relatório 91/97 - C3ES, LNEC, Lisboa
-

- [165] Vermelfoort, A. T. (1997) - “Effects of the width and boundary conditions on the mechanical properties of masonry prisms under compression”, Proc. 11th In. Brick/Block Masonry Conference, Shangai
- [166] Viollet le Duc, E. (1858-1868) - “La construcción medieval - el artículo «Construction» del «Dictionnaire raisonné de l’architectutre française du XI^{ème} au XVI^{ème} siècle»”, traducción y notas de Enrique Rabasa Díaz, Instituto Juan de Herrera (1996), Madrid
- [167] Wemper, G. A. (197) - “Discrete aproximations related to nonlinear theories of solids”, Int. J. Solids & Structures, Vol. 7
- [168] White, R. N. (1970) - “Models for concrete structures”, American Concrete Institute, SP-24
- [169] Wood, W. G.; Martin, D. G. (1974) - “Experimental method”, Athlone Press, London
- [170] Zienkiewicz, O. C. (1991a) - “The finite element method - Vol. 1: Basic formulation and linear problems”, McGraw-Hill, 4th edition, London
- [171] Zienkiewicz, O. C. (1991b) - “The finite element method - Vol. 2: Solid and fluid mechanic. Dynamis and Non-linearity”, McGraw-Hill, 4th edition, London
- [172] Zucchini, A.; Lourenço, P. B. (2002) - “A micro-mechanical model for the homogenization of masonry”, Int. J. Solids & Structures, Vol. 39(12)

ÍNDICE REMISSIVO

A

abertura da fenda, controle de 221
alpha-implícito, método 342
amolecimento 203, 222, 229, 232, 263, 367
amolecimento, curva de 204, 269, 272
amolecimento, lei de 228, 252, 366
amortecimento automático, método de 260
amortecimento local, método de 260
amortecimento, coeficiente de 324, 345
amortecimento, constante de 259, 260
Arquimedes 22
atrito, ângulo de 98, 144, 203, 206, 229, 274, 294,
310, 326, 366
Augarde, C. E. 285

B

Backes, H. P. 208
Barahona, Francisco 388, 389
Bargower, ponte de 265, 281, 283, 288, 295, 297
Barlow, W. 42
Bazant, Z. P. 234
Belidor, Bernard 28, 35, 94, 97, 105
Bermudes, Adães 389, 392, 414
Bossut, Charles 34
Bouger, Pierre 32, 37
Bouvie, John 386
Breyman, Gustav 42
Bridgemill, ponte de 292, 298

Brunelleschi, Filippo 18, 22

C

Cardoso, Eduardo 44
CASTEM 211
Castigliano, Carlo 44, 46
catenária 25, 32, 44, 86, 106, 112, 115, 179
central, núcleo 39, 60, 67, 157
Chettoe 47
cinemático, teorema 80, 94, 110, 124, 126, 137, 138
Cluny, ordem de 17
CMOD, método de controle 221
comprimento do arco, método do 218, 266, 302, 305,
423
Constantino 15
controle de cargas, método de 218
controle de deslocamentos, método de 218
convergência, critério de 218, 225
Cope, R. J. 239
Cosserat, teoria de 192
Coulomb, Charles Augustin de 26, 31, 35, 95, 100,
101, 105
Coulomb, critério de 203, 229, 231, 253, 372
Coulomb, lei de 203, 325
Coulomb, modelo de 229, 366
Coulomb, superfície de 229
Couplet, Pierre 23, 29, 35, 37
Crisfield, M. A. 50, 219

Cundall, Peter 200, 260

D

D. Afonso V 385

D. Felipe II 385

D. João I 385

D. João II 385

D. Manuel 385

dano, modelo de 192, 194

dano, teoria do 50, 194, 198

Danyzy, Augustin 28, 31, 35

deformação descontínua, método de 201

Derand, François 24, 28, 105

deslocamentos, controle indirecto dos 221

DIANA 211, 234

diferenças finitas centrais, método das 254, 257, 261, 343

diferenças finitas, algoritmo de 254

diferenças finitas, elementos de 241, 245, 254, 274, 294, 370, 374

dilatância 230, 252, 325

dilatância, ângulo de 206, 252, 326

dimensional, análise 289, 291

discreta, fenda 193, 196, 198, 227, 229, 232, 235, 265, 278, 284, 298, 300, 305

distribuída multi-direccional, modelo de fenda 237

distribuída rotativa, modelo de fenda 239

distribuída, fenda 192, 196, 199, 227, 232, 276, 285, 314

Domingues, Afonso 4

Duc, Viollet le 16, 24

E

elementos discretos, método dos 7, 188, 200, 240, 251, 256, 259, 262, 274, 278, 314, 371, 423

elementos discretos, modelo de 200, 242, 370, 377

elementos distintos, método dos 201

elementos finitos contínuos, modelo de 196, 277, 313

elementos finitos, método dos 7, 49, 188, 193, 201,

210, 262, 274, 423

elementos finitos, modelo contínuo de 189, 198, 276

elementos finitos, modelo de 50, 149, 199, 216, 227, 266, 273, 276, 284, 298, 302, 304, 306, 312, 314, 322, 326, 364, 377

elementos finitos, modelo descontínuo de 196, 201, 264

enviesadas, abóbadas 281

esférico, método 221

estático, teorema 34, 48, 80, 85, 97, 137, 148, 155, 158, 175, 183, 421, 422

estruturais, elementos 188, 323

Euclides 22

explícito, algoritmo 254

explícito, esquema 201

explícito, método 254, 261, 263, 343

F

Fabri, Honoré 24, 26

fenda fixa, modelo de 232, 234

fenda rotativa, modelo de 239

finas, cascas 148

Fitchen 48

fractura, energia de 194, 204, 228, 270, 272, 305, 314

Frézier, Amédée 31, 35

Fuller, G. 44, 69

funicular, polígono 44, 64, 69, 71

G

Galilei, Galileo 24, 33

Gambarotta, L. 198

Gaudí, Antoni 44

Gautier, Hubert 28

geométrico, coeficiente de segurança 84, 85, 106, 117, 127, 184

Gerstner, Franz 39

Giuffré, Antonino 49

Goodman, R. E. 198

gradiente, modelos do 195

Gregory, David 25, 33

H

Henderson 47

Henriques, Afonso 320

Herrera, Juan de 320

Heyman, Jacques 20, 48, 78, 106, 153, 412

Hilber, H. M. 342

Hire, Philippe de la 25, 31, 33, 35, 94, 103

homogeneização, técnicas de 191

Honnecourt, Villard de 20

Hontañón, Rodrigo Gil de 21, 24

Hooke, Robert 25

Howe 45

Huges, T. H. 289

I

implícita, formulação 263

implícito, método 263

incrementalmente 294

interface, elemento de 197, 228

interface, modelo de 273, 325

iterativos, procedimentos 223

J

Justiniano 15

K

Kooharian, Anthony 48

L

Lagomarsino, E. S. 198

Lee, J. S. 192

Lemos, J. V. 188, 370

Lévy, Maurice 45, 171, 174

limite, análise 34, 48, 66, 80, 82, 94, 97, 110, 124, 126, 129, 132, 136, 140, 144, 147, 155, 158, 167, 175, 183, 185, 421

Lourenço, P. B. 198, 231, 272

M

macro-elementos 188, 198

Mark, Robert 49

Mascheroni, Lorenzo 37, 95, 100, 105

membranas, teoria das 148, 162, 165, 167, 171, 174, 180, 185, 422

Méry, Édouard 40, 67, 109, 157, 159, 183

Méry, método de 157

metade central, regra da 47, 61, 74

MEXE/MOT, método 47, 76, 184, 282

Michelangelo 18

modais, métodos 201

Mohr-Coulomb, critério de 251, 273, 298, 305, 308, 325, 327, 365

Mohr-Coulomb, lei de 295

Mohr-Coulomb, modelo de 272

Mohr-Coulomb, superfície de 327

Mohr-Coulomb, tensão equivalente de 328, 332, 368

Mola, F. 190

Monteiro, Adriano Augusto da Silva 388, 414, 416

Moseley, Henry 40

N

Nakashima, M. 342

Navier, Claude 39

neutro, ponto 174

Newton, lei de 254

Newton-Raphson modificado, método de 223, 253

Newton-Raphson, método de 223, 266, 302, 305, 423

Ngo, D. 198

O

Operator-Splitting, método 342

P

Page, A. W. 198, 208

passivo, impulso 144, 310

Pegon, Pierre 365, 367

Perrodil 44

pesquisa em linha, algoritmo de 224, 423
Pippard, A. 46, 61
Pippard, método de 72, 184
plano normal atualizado, método do 221
plasticidade, teoria da 7, 48, 76, 183
Plínio 20, 22
Pluijm, Van der 206
Poisson, coeficiente de 196, 325
Poleni, Giovanni 32, 37, 48, 149, 175
Poncelet, Jean Victor 42
Prager 48
pressões, centro de 39
pressões, curva de 29, 40, 43, 46, 48
pressões, linha de 7, 39, 54, 58, 60, 71, 80, 82, 85, 106
112, 115, 120, 124, 127, 134, 137, 140, 142, 148, 157,
175, 179, 280, 421
pressões, superfície de 148, 167, 185, 421
programação linear, métodos de 82
pseudo-dinâmico, ensaio 8, 319, 331, 340, 352, 355,
368, 376

Q

Quase-Newton, método 223

R

Rankine 45, 47
Rankine, critério de 251, 253, 305
Rayleigh, amortecimento de 261
redução, factor de 233
relaxação, dinâmica 201, 254, 259
resistência, linha de 39, 58, 60
retenção, factor de 233, 240
rigidez linear constante, método da 223
Riks, E. 219
Rondelet, Jean 24, 38
Rots, J. G. 205, 229

S

Sabouret, fendas de 412

Sanabria, S. L. 21
São Vicente de Fora, mosteiro de 318, 320, 333, 357,
376
Sawko 49
Scordelis, A. C. 198
semelhança, condições de 289
semelhança, relações de 289
semelhança, teoria da 289
snap-back 219, 221, 263, 302

T

terço central, regra do 40, 45, 47, 54, 60, 67, 157, 182
Terzi, Filippo 320
Thompson 45
Timoshenko, S. P. 58, 60, 65
Towler 49
Transport and Road Research Laboratory 290

U

UDEC 202, 241, 243, 252, 260, 264, 274, 370

V

Vegécio 20, 22
Venturoli, Giuseppe 37
viés, pontes em arco com 281
Villarceau, Yvon 88
Vinci, Leonardo da 22
Vitruvius 20, 22
Voronoi, algoritmo de 295

W

Wemper, G. A. 219
Winkler 44
