

Relatório ICIST DTC 15/99

Programa para Aplicação de um Modelo Híbrido-Misto de Deslocamento à Análise de Placas

Mário Vicente da Silva

Eduardo M. B. R. Pereira

Outubro de 1999

ÍNDICE

1. Introdução	1
2. Formulação	2
2.1 Condições Fundamentais	2
2.2 Modelo Híbrido-Misto de Deslocamento	4
3. Organização do Programa	7
3.1 Rotinas Principais	7
3.2 Geometria	8
3.3 Funções de Aproximação	8
3.4 Montagem do Sistema Governativo	10
3.4.1 Mudança de Coordenadas	10
3.4.2 Blocos do Sistema Governativo	13
3.4.3 Cálculo dos Operadores Elementares	13
4. Introdução dos Dados	14
4.1 Estrutura do Ficheiro de Dados	14
4.1.1 Nós (1ºBloco)	15
4.1.2 Lados (2ºBloco)	15
4.1.3 Elementos (3ºBloco)	16
4.1.4 Carregamento (4ºBloco)	17
5. Pós-Processamento	19
6. Bibliografia	20
<u>ANEXO A - Exemplo de Aplicação</u>	21

1. INTRODUÇÃO

O presente relatório pretende descrever o modo de utilização/funcionamento de um programa para a análise elástica linear de placas, desenvolvido no âmbito do núcleo de Análise de Estruturas do Instituto de Engenharia de Estruturas Território e Construção do Instituto Superior Técnico, com apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia através do projecto PBICT/C/CEG/2342/95.

Este programa baseia-se numa formulação não convencional de elementos finitos Híbridos-Mistos de Deslocamento. São utilizados Polinómios de Legendre como funções de aproximação de tensões e deslocamentos, para modelar o domínio consideram-se elementos quadrangulares de 4 ou 8 nós.

Este programa considera como acções actuantes na estrutura forças de massa e tensões aplicadas ao longo das fronteiras estáticas.

Este programa foi escrito em *C Standard*, sobre uma plataforma de programação elaborada para o desenvolvimento de programas de elementos finitos para o cálculo de estruturas.

2. FORMULAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se um pequeno resumo da formulação dos elementos finitos Híbridos-Mistos de Deslocamento para análise de placas.

2.1 Condições Fundamentais

As condições fundamentais que regem os problemas de elasticidade plana podem ser expressas do seguinte modo,

Compatibilidade	Relações Constitutivas	Equilíbrio
$\varepsilon = D^* u \text{ em } V \quad (1)$	$f\sigma = \varepsilon \quad (3)$	$D\sigma + b = 0 \text{ em } V \quad (4)$
$u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u \quad (2)$		$N\sigma = t \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (5)$

em que,

u é o vector que agrupa as componentes de deslocamento;

$$u^T = \{u_x \quad u_y\}$$

$\bar{u}$ é o vector dos deslocamentos impostos nas fronteiras cinemáticas (Γ_u);

ε é o vector das componentes do tensor das deformações;

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}\}$$

σ é o vector das componentes do tensor das tensões;

$$\sigma^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}\}$$

b é o vector das forças de massa;

$$b^T = \{b_x \quad b_y\}$$

t é o vector das tensões aplicadas nas fronteiras estáticas (Γ_σ);

$$t^T = \{t_x \quad t_y\}$$

D é o operador diferencial de equilíbrio;

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

D^* é o operador diferencial de compatibilidade (transposto de D);

N é a matriz das componentes da normal exterior associada ao operador diferencial de equilíbrio;

f é a matriz de flexibilidade e tem a seguinte configuração no caso de se tratar de um estado plano de tensão (EPT),

$$f = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & \cdot \\ -\nu & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \cdot (1 + \nu) \end{bmatrix}$$

ou de um estado plano de deformação (EPD),

$$f = \frac{1 + \nu}{E} \begin{bmatrix} 1 - \nu & -\nu & \cdot \\ -\nu & 1 - \nu & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix}$$

onde E representa o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

É ainda de referir que numa fronteira inter-elementar as condições de equilíbrio e de compatibilidade podem ser expressas na seguinte forma:

$$t_{elemento1} - t_{elemento2} = t_{aplicada} \quad (6)$$

$$u_{elemento1} = u_{elemento2} \quad (7)$$

2.2 Modelo Híbrido-Misto de Deslocamento

Neste modelo, são aproximadas de modo independente as tensões e os deslocamentos no domínio:

$$\sigma = S_v \cdot X_v \quad (8) \quad u = U_v \cdot q_v \quad (9)$$

São igualmente aproximadas as tensões nas fronteiras cinemática,

$$t = S_\Gamma \cdot X_\Gamma \quad (10)$$

sendo S_v , S_Γ e U_v as matrizes das funções de aproximação e X_v , X_Γ , q_v e os vector dos pesos das funções de aproximação.

As condições de equilíbrio e de compatibilidade no domínio (4) e (1) são impostas de forma ponderada sendo utilizadas, respectivamente, como funções de ponderação as funções de aproximação dos deslocamentos e das tensões no domínio:

$$\int_V U_v^T (D\sigma + b) dV = 0 \quad (11)$$

$$\int_V S_v^T \varepsilon dV = \int_V S_v^T D^* u dV \quad (12)$$

Paralelamente, a condição de compatibilidade na fronteira cinemática (2) é imposta ponderadamente utilizando as funções de ponderação das tensões na fronteira como funções de ponderação,

$$\int_{\Gamma_\sigma} S_\Gamma^T u d\Gamma_u = \int_{\Gamma_\sigma} S_\Gamma^T \cdot \bar{u} d\Gamma_u \quad (13)$$

Através da integração por partes da equação (11),

$$\int_V (D^* U_V)^T \sigma \, dV - \int_\Gamma U_V^T (N\sigma) \, d\Gamma = \int_V U_V^T b \, dV ,$$

é possível introduzir as condições de equilíbrio na fronteira (5) e (6) e as aproximações (8) e (10) obtendo-se a equação de equilíbrio do modelo,

$$B_V^T X_V \pm B_\Gamma^T X_\Gamma = Q_V + Q_\Gamma \quad (14)$$

em que,

$$\begin{aligned} B_V &= \int_V S_V^T (D^* U_V) \, dV & B_\Gamma &= \int_{\Gamma_u} S_\Gamma^T U_V \, d\Gamma_u \\ Q_V &= \int_V U_V^T b \, dV & Q_\Gamma &= \int_{\Gamma_\sigma} S_V^T t \, d\Gamma_\sigma \end{aligned}$$

A equação de compatibilidade no domínio é obtida substituindo a aproximação dos deslocamentos (9) na equação (12),

$$e = B_V q_V \quad (15)$$

onde e representa as deformações generalizadas,

$$e = \int_V S_V^T \varepsilon \, dV \quad (16)$$

Substituindo as relações constitutivas (3) e a aproximação (8) na definição das deformações generalizadas (16) é possível escrever as relações constitutivas do modelo de elementos finitos,

$$e = F X_V \quad (17)$$

em que,

$$F = \int_V S_V^T F S_V \, dV$$

A equação de compatibilidade na fronteira é obtida através da introdução da aproximação dos deslocamentos (9) na expressão (13) e tendo em conta a condição de compatibilidade (7),

$$\pm B_{\Gamma} q_V = 0 \quad (18)$$

Combinando as equações de equilíbrio (14), de compatibilidade (15), (18) e das relações constitutivas (17) é possível escrever o sistema governativo para o modelo híbrido -misto de deslocamento, através da eliminação das deformações generalizadas e .

$$\begin{bmatrix} F & -B_V & \cdot \\ B_V^T & \cdot & \pm B_{\Gamma}^T \\ \cdot & \pm B_{\Gamma} & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_V \\ q_V \\ X_{\Gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_V + Q_{\Gamma} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

3. ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA

Neste capítulo é abordada genericamente a organização do programa por forma a possibilitar um entendimento mais fácil do seu funcionamento, sem se descreverem exaustivamente o modo de programação.

A plataforma de programação sobre a qual foi desenvolvido este programa cria, a partir de um ficheiro de dados, uma estrutura que descreve a topologia do problema. Com base nesta estrutura é posteriormente resolvido o sistema governativo de equações.

A resolução do sistema pode ser feita através de dois métodos distintos. O primeiro consiste no método de resolução iterativo dos gradientes conjugados, sendo o segundo o método de eliminação de Gauss, utilizando a rotina MA47 da biblioteca Harwell para sistemas esparsos e simétricos.

Esta plataforma está preparada para processamento sequencial ou paralelo, sendo para este programa utilizado somente o processamento sequencial.

Deste modo, o programa é constituído por um conjunto de rotinas que definem a posição e a dimensão dos diferentes blocos que constituem o sistema governativo e que calculam os termos deste sistema. É ainda composto por uma rotina de pós-processamento, que executa o tratamento dos resultados obtidos.

3.1 Rotinas Principais

A interligação com a plataforma de programação é feita através das seguintes rotinas:

void LocalStructureSetup () – onde são lidos e introduzidos os dados nas estruturas locais;

int SetupParts (int current_subdomain) – define as organização/dimensões dos blocos que constituem a matriz do sistema governativo;

int ComputeMatrix (int current_subdomain) – rotina na qual se executa a montagem do triângulo superior da matriz do sistema;

int ComputeRhs (int wich_subdomain) – efectua a montagem do vector dos termos independentes.

*int PostProc (char *nome)* – rotina na qual se executa o pós-processamento.

Estas rotinas são escritas pelo programador e variam consoante a formulação de elementos finitos utilizada.

3.2 Geometria

A modelação da geometria é feita através de três estruturas base, definidas na plataforma de programação: o Nó (*node*), o Lado (*edge*) e o Elemento (*loop*).

Neste programa consideram-se apenas elementos com 4 lados, sendo cada lado constituído por 2 ou 3 nós, ficando assim definida a sua orientação do primeiro para o último nó.

Existem dois tipos distintos de elementos (os elementos de 4 ou 8 nós). Um elemento é considerado de 8 nós, sempre que pelo menos um dos seus lados tenha 3 nós, quando necessário são considerados nós virtuais a meio dos lados de 2 nós por forma a definir completamente o elemento de 8 nós.

Deste modo o programa permite a utilização simultânea de elementos com diferente número de nós sem que haja problemas de compatibilidade de geometria na estrutura.

3.3 Funções de Aproximação

Para a aproximação das tensões (8) e dos deslocamentos (9) no domínio e das tensões nas fronteiras cinemáticas (10), utilizaram-se polinómios de Legendre. Estas funções de aproximação encontram-se no referencial local (ξ, η) dos elementos, por forma a simplificar as operações de integração necessárias à montagem dos operadores elementares.

A estrutura adoptada para a matriz das funções de aproximação no domínio foi:

$$S_v = \begin{bmatrix} P_\xi^0 P_\eta^0 & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & & & P_\xi^n P_\eta^n & & \\ & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & & & P_\xi^n P_\eta^n & \\ & & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & & & P_\xi^n P_\eta^n \\ & & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & & & P_\xi^n P_\eta^n & \\ & & & & & & & & & P_\xi^n P_\eta^n \end{bmatrix}$$

$$U_v = \begin{bmatrix} P_\xi^0 P_\eta^0 & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & & & P_\xi^n P_\eta^n & & \\ & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & & & P_\xi^n P_\eta^n & \\ & & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & & & P_\xi^n P_\eta^n \\ & & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & & & P_\xi^n P_\eta^n & \\ & & & & & & & & & P_\xi^n P_\eta^n \end{bmatrix}$$

representando P_x^i o polinómio de Legendre do grau i na direcção x .

Para formar todas as combinações $P_\xi^i P_\eta^j$ adoptou-se um ciclo no qual, para cada grau do polinómio em ξ se percorria todos os graus do polinómio em η .

Uma estrutura semelhante foi utilizada para a matriz das funções de aproximação das tensões na fronteira,

$$S_\Gamma = \begin{bmatrix} P_\zeta^0 & & & P_\zeta^i & & \\ & P_\zeta^0 & & & P_\zeta^i & \\ & & \dots & & & \dots \\ & & & & P_\zeta^i & \\ & & & & & \dots \end{bmatrix}$$

sendo ζ a coordenada local do lado.

A aproximação das tensões é feita no sistema de coordenadas local dos lados, de modo a possibilitar a obtenção do termo B_Γ através do uso de integrações analíticas pela expressão (27).

Neste caso, podem ser considerados diferentes valores para os graus máximos utilizados na aproximação das tensões nas direcções normal e tangencial. Deste modo, sempre que o grau i for superior ao máximo grau para a tensão numa das direcções, a coluna correspondente não é considerada.

3.4 Montagem do Sistema Governativo

A montagem dos termos que constituem o sistema governativo é realizada através de integrações analíticas, utilizando as propriedades de ortogonalidade dos Polinómios de Legendre. Para realizar estas integrações é necessário recorrer à matriz Jacobiana dado que as funções de interpolação estão escritas no referencial local do elemento.

3.4.1 Mudança de Coordenadas

No caso mais geral (o elemento de 8 nós) obtém-se a seguinte expressão para a transformação de coordenadas:

$$x^k = \sum_{i=1}^8 \varphi_i x_i^k \quad k = 1, 2 \quad (20)$$

onde φ_i são as funções de forma do elemento serendipiano de 8 nós e x_i^k são as coordenadas do nó i na direcção k .

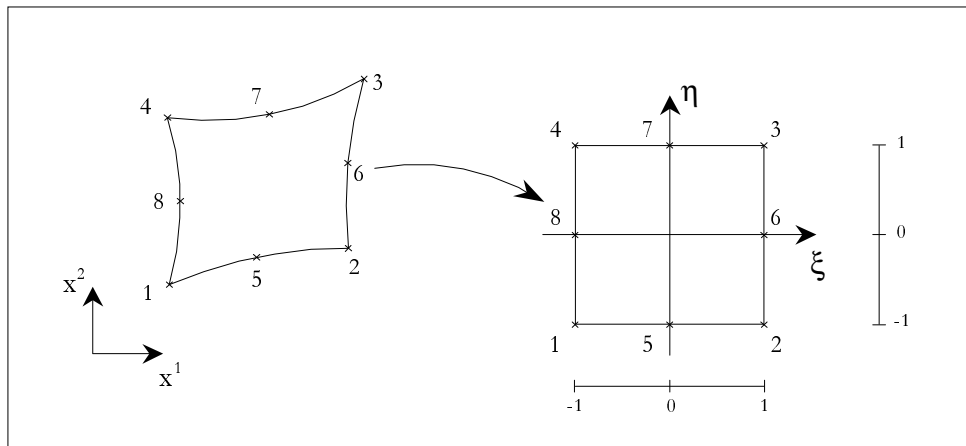


Figura 1 – Mudança de Coordenadas

Sendo as funções φ_i polinómios, a expressão da transformação de coordenadas (20) pode ainda ser desenvolvida na sua forma polinomial:

$$x^k = \alpha_{00}^k + \alpha_{10}^k \xi + \alpha_{01}^k \eta + \alpha_{20}^k \xi^2 + \alpha_{11}^k \xi \eta + \alpha_{02}^k \eta^2 + \alpha_{21}^k \xi^2 \eta + \alpha_{12}^k \xi \eta^2$$

onde,

$$\begin{aligned} \alpha_{00}^k &= \frac{1}{2}(x_5^k + x_6^k + x_7^k + x_8^k) - \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) & \alpha_{11}^k &= \frac{1}{4}(x_1^k - x_2^k + x_3^k - x_4^k) \\ \alpha_{10}^k &= \frac{1}{2}(x_6^k - x_8^k) & \alpha_{01}^k &= \frac{1}{2}(x_7^k - x_5^k) \\ \alpha_{12}^k &= \frac{1}{4}(x_3^k - x_1^k + x_2^k - x_4^k) - \frac{1}{2}(x_6^k - x_8^k) & \alpha_{21}^k &= \frac{1}{4}(x_3^k - x_1^k + x_4^k - x_2^k) - \frac{1}{2}(x_7^k - x_5^k) \\ \alpha_{20}^k &= \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) - \frac{1}{2}(x_5^k + x_7^k) & \alpha_{02}^k &= \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) - \frac{1}{2}(x_6^k + x_8^k) \end{aligned}$$

Para esta transformação de coordenadas a matriz Jacobiana e o seu determinante tomam as seguintes expressões:

$$J = \begin{bmatrix} x^1_{,\xi} & x^2_{,\xi} \\ x^1_{,\eta} & x^2_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde,

$$\begin{aligned} x^k_{,\xi} &= (\alpha_{10}^k + \alpha_{11}^k \eta + \alpha_{12}^k \eta^2) + 2(\alpha_{20}^k + \alpha_{21}^k \eta) \xi \\ x^k_{,\eta} &= (\alpha_{01}^k + \alpha_{11}^k \xi + \alpha_{21}^k \xi^2) + 2(\alpha_{02}^k + \alpha_{12}^k \xi) \eta \end{aligned}$$

$$|J| = J_{00} + J_{10} \xi + J_{01} \eta + J_{20} \xi^2 + J_{11} \xi \eta + J_{02} \eta^2 + J_{30} \xi^3 + J_{21} \xi^2 \eta + J_{12} \xi \eta^2 + J_{03} \eta^3 + J_{22} \xi^2 \eta^2 \quad (22)$$

com,

$$\begin{aligned} J_{00} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{10}^2 & J_{22} &= 3(\alpha_{21}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{21}^2) \\ J_{10} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{10}^2 + 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{20}^2) & J_{01} &= \alpha_{11}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{11}^2 + 2(\alpha_{10}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{10}^2) \\ J_{12} &= \alpha_{11}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{11}^2 + 4(\alpha_{21}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{21}^2) & J_{21} &= \alpha_{21}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{21}^2 + 4(\alpha_{20}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{20}^2) \\ J_{20} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{21}^1 \alpha_{10}^2 + 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{20}^2) & J_{02} &= \alpha_{12}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{12}^2 + 2(\alpha_{11}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{11}^2) \\ J_{30} &= 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{21}^1 \alpha_{20}^2) & J_{03} &= 2(\alpha_{12}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{12}^2) \\ J_{11} &= 2(\alpha_{10}^1 \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{10}^2) + 4(\alpha_{20}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{20}^2) \end{aligned}$$

É ainda possível definir o operador diferencial de compatibilidade, D^* , no sistema de coordenadas locais:

$$D^* = \frac{1}{|J|} D' \quad (23)$$

com,

$$D' = \begin{bmatrix} x^2,_{\eta} & \cdot \\ \cdot & -x^1,_{\eta} \\ -x^1,_{\eta} & x^2,_{\eta} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} x^2,_{\xi} & \cdot \\ \cdot & -x^1,_{\xi} \\ -x^1,_{\xi} & x^2,_{\xi} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

podendo também D' ser escrito na seguinte forma:

$$D' = (\mathcal{D}_{21}\xi^2 + 2\mathcal{D}_{12}\xi\eta + \mathcal{D}_{11}\xi + 2\mathcal{D}_{02}\eta + \mathcal{D}_{10}) \frac{\partial}{\partial \xi} - (\mathcal{D}_{12}\eta^2 + 2\mathcal{D}_{21}\xi\eta + \mathcal{D}_{11}\eta + 2\mathcal{D}_{20}\xi + \mathcal{D}_{10}) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

sendo,

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij}^2 & \cdot \\ \cdot & -\alpha_{ij}^1 \\ -\alpha_{ij}^1 & \alpha_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

A matriz n de transformação das coordenadas locais do lado nas coordenadas globais (x, y) tem a seguinte expressão:

$$n = \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} n' \quad (24)$$

$$n' = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad n_x = \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \quad n_y = -\frac{\partial x}{\partial \zeta}$$

onde ζ é a coordenada local do lado, tomando os valores $\pm\xi$ ou $\pm\eta$ consoante o lado em questão.

3.4.2 Blocos do Sistema Governativo

Adoptada a mudança de coordenadas (20), os blocos que constituem o sistema governativo podem ser expressos na seguinte forma:

$$F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_V^T f S_V |J| d\xi d\eta \quad (25)$$

$$B_V = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_V^T (D' U_V) d\xi d\eta \quad (26)$$

$$B_\Gamma = \int_{-1}^1 n' S_\Gamma^T U_\Gamma d\zeta \quad (27)$$

$$Q_V = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_V^T \cdot b |J| d\xi d\eta \quad (28)$$

$$Q_\Gamma = \int_{-1}^1 U_V^T \cdot n' t d\zeta \quad (29)$$

O vector das tracções aplicadas na fronteira (t), tal como a aproximação das tensões na fronteira cinemática, está escrito nas coordenadas locais do respectivo lado.

3.4.3 Cálculo dos Operadores Elementares

Com base nas expressões (25) a (29) e tendo em conta o tipo de aproximações adoptadas e as definições (22) a (24) é possível com base numa tabela de integrações como a apresentada no anexo A em [4], proceder à montagem dos operadores para cada elemento.

4. INTRODUÇÃO DOS DADOS

A introdução de dados é feita através de um ficheiro ASCII, cujo nome é o primeiro parâmetro de execução do programa.

A versão actual do programa é muito limitada quanto a detecção de dados mal introduzidos, pelo que o utilizador deve ser cuidadoso na criação do ficheiro de dados. Qualquer valor mal introduzido pode provocar a interrupção do programa ou produzir resultados não pretendidos.

De seguida descreve-se detalhadamente a estrutura do ficheiro de dados, sendo apresentado em anexo um exemplo de aplicação.

4.1 Estrutura do Ficheiro de Dados

A primeira linha do ficheiro deverá conter o título do exemplo a testar, não devendo este ter mais de 80 caracteres.

Seguem-se 4 blocos nos quais se fornece a informação necessária para a definição dos nós, dos lados, dos elementos e do carregamento. Para assinalar o final de cada bloco dever-se-á introduzir uma linha com o algarismo 0 (zero).

A última linha do ficheiro de dados deverá ser constituída dois números inteiros, os quais definem:

- i) o número de subdomínios, devendo este tomar sempre o valor 1 (uma vez que não estamos a utilizar um processamento em paralelo);
- ii) o modo de resolução, correspondendo o valor 0 ao modo de resolução iterativo e o valor 6 ao modo de resolução directo.

4.1.1 Nós (1ºBloco)

Cada linha do 1º bloco deverá ter a seguinte estrutura:

<i>id</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>idl</i>
-----------	----------	----------	------------

sendo,

<i>id</i>	número de identificação do nó (inteiro positivo)
<i>x</i>	coordenada do nó segundo x
<i>y</i>	coordenada do nó segundo y
<i>idl</i>	número de identificação de um lado que contem o nó

4.1.2 Lados (2ºBloco)

A estrutura das linhas do 2º bloco é:

<i>id</i>	<i>nnos</i>	<i>idn</i> ¹ ... <i>idn</i> ^{nnos}	<i>eesq</i>	<i>edir</i>	<i>lccw</i>	<i>lcw</i>	<i>rccw</i>	<i>rcw</i>	<i>apn</i>	<i>aptg</i>	<i>gX_Γ</i>
-----------	-------------	--	-------------	-------------	-------------	------------	-------------	------------	------------	-------------	-----------------------

sendo,

<i>id</i>	número de identificação do lado (inteiro positivo)
<i>nnos</i>	número de nós do lado (2 ou 3)
<i>idn</i> ^{<i>i</i>}	número de identificação do nó <i>i</i>
<i>eesq</i>	número de identificação do elemento à esquerda do lado
<i>edir</i>	número de identificação do elemento à direita do lado
<i>lccw, lcw, rccw, rcw</i>	número de identificação dos lados adjacentes (fig. 2)
<i>apn</i>	toma os valores 0 ou -1 consoante se pretenda libertar ou restringir o deslocamento na direcção normal ao lado
<i>aptg</i>	toma os valores 0 ou -1 consoante se pretenda libertar ou restringir o deslocamento na direcção tangente ao lado
<i>gX_Γ</i>	grau do polinómio de Legendre para a aproximação das tensões nas fronteiras cinemáticas

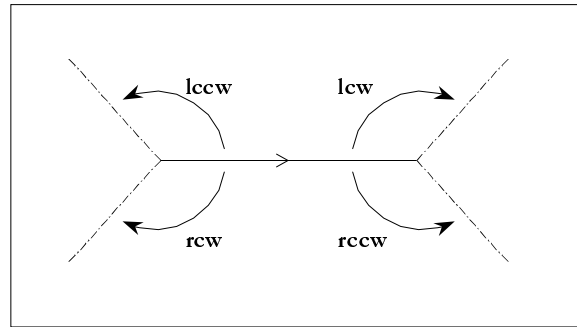


Figura 2 – Identificação dos Lados Adjacentes

4.1.3 Elementos (3ºBloco)

A estrutura das linhas do 3º bloco é:

<i>id</i>	<i>idl</i>	<i>sd</i>	<i>gX</i>	<i>gQv</i>	<i>E</i>	<i>v</i>	ept/epd
-----------	------------	-----------	-----------	------------	----------	----------	---------

sendo,

<i>id</i>	número de identificação do elemento (inteiro positivo)
<i>idl</i>	número identificação de um lado que pertence ao elemento
<i>sd</i>	identificação do subdomínio (deve ter sempre o valor 1)
<i>gX</i>	grau do polinómio de Legendre para a aproximação das tensões no domínio
<i>gQv</i>	grau do polinómio de Legendre para a aproximação dos deslocamentos no domínio
<i>E</i>	valor do módulo de Young
<i>v</i>	valor do coeficiente de Poisson
ept/epd	estado plano de tensão (ept) ou estado plano de deformação (epd)

4.1.4 Carregamento (4ºBloco)

A estrutura das linhas do 4º bloco é:

<i>id</i>	<i>E/L</i>	<i>idc</i>	<i>dir</i>	<i>nval</i>	<i>val</i> ¹ ... <i>val</i> ^{<i>nval</i>}
-----------	------------	------------	------------	-------------	---

sendo,

- id*** número de identificação do carregamento (inteiro positivo)
- E/L*** o caracter E (*edge*) ou L (*loop*) identificam, respectivamente, se a carga se encontra aplicada na fronteira ou elemento
- idc*** número de identificação do lado/elemento carregado
- dir*** direcção do carregamento, podendo tomar os valores 0 ou 1
- nval*** número de valores da carga fornecidos
- val*^{*i*}** valor da carga na posição *i*

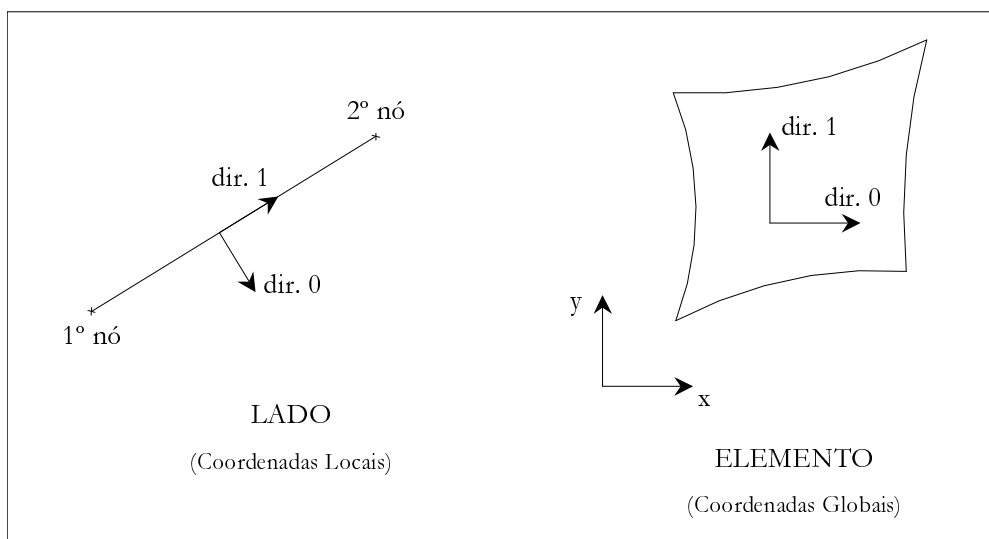
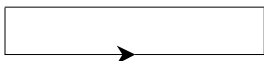
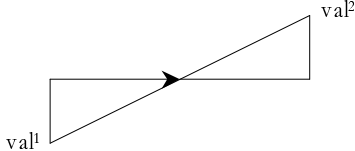
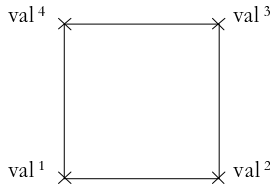
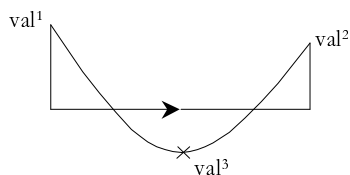
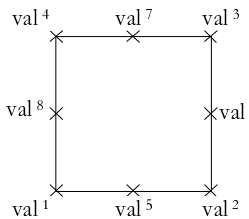


Figura 3 – Direcção do Carregamento

<i>nval</i>	Carga Aplicada no Lado (E)	<i>nval</i>	Carga Aplicada no Elemento (L)
1	 val ¹	1	carga uniformemente distribuída
2	 val ¹ val ²	4	 val ⁴ val ³ val ¹ val ²
3	 val ¹ val ² val ³	8	 val ⁴ val ⁷ val ³ val ⁸ val ⁶ val ¹ val ⁵ val ²

5. PÓS-PROCESSAMENTO

Como resultado do pós-processamento o programa cria 2 ficheiros:

i) o ficheiro com a extensão *ff*, contém o valor das tensões e deslocamentos no domínio, sendo o número de pontos nos quais se pretende calcular estes valores introduzido pelo utilizador durante a execução do pós-processamento.

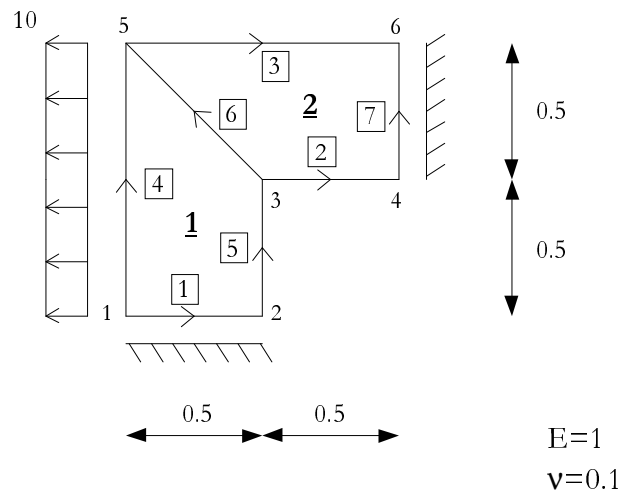
ii) o ficheiro com a extensão *sol*, onde se armazena, em formato binário de dupla precisão, a solução do sistema. São escritos em primeiro lugar os valores de X_v (para todos os elementos) seguidos dos valores de q_v (igualmente para todos os elementos) e finalmente os valores X_Γ (para todas as fronteiras cinemáticas), sendo a ordem dos valores definida pela estrutura adoptada para as matrizes das funções de aproximação (cap. 3.3).

Para uma análise mais fácil dos resultados obtidos, poder-se-á recorrer a um programa auxiliar que executa uma representação gráfica, utilizando os ficheiros das soluções e da entrada de dados.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] E. M. B. R. Pereira, *Elementos Finitos de Tensão - Aplicação à Análise Elástica de Estruturas*, Tese de doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, (1993);
- [2] I. Cismasiu, J. P. Moitinho de Almeida, L. M. S. Castro e D. C. Harbis, *Parallel Solution Techniques for Hybrid Mixed Finite Element Models*, in Innovative Computational Methods for Structural Mechanics, Edited by M Papadrakakis and B.H.V. Topping, Saxe-Coburg Publications, Chapter 6, pp. 109-125, (1999);
- [3] *Harwell Subroutine Library*, Realease 11 – Vol. I, Theoretical Studies Department of AEA Technology, pp.377-384, UK (1993);
- [4] M. Vicente da Silva e E. M. B. R. Pereira, *Programa para Aplicação de um Modelo Híbrido-Misto de Tensão à Análise de Placas*, Relatório ICIST DTC 12/99, (1999).

ANEXO A - EXEMPLO DE APLICAÇÃO



Nota: as tensões nas fronteiras cinemáticas e deslocamentos no domínio foram aproximados por polinómios de Legendre do 5º grau, sendo utilizados polinómios do 6º grau para a aproximação das tensões no domínio.

Ficheiro de entrada de dados:

```

exemplo de placas
1  0.0000 0.0000  1
2  0.5000 0.0000  5
3  0.5000 0.5000  2
4  1.0000 0.5000  2
5  0.0000 1.0000  3
6  1.0000 1.0000  3
0
1  2  1 2  1 0  4 5 5 4  -1  0  5
2  2  3 4  2 0  6 7 7 5   0  0  5
3  2  5 6  0 2  4 7 7 6   0  0  5
4  2  1 5  0 1  1 3 6 1   0  0  5
5  2  2 3  1 0  1 6 2 1   0  0  5
6  2  3 5  1 2  5 4 3 2   0  0  5
7  2  4 6  2 0  2 3 3 2  -1  0  5
0
1  6  1  6 5  1.0 .1 ept
2  7  1  6 5  1.0 .1 ept
0
1 E 4  0  1 -10
0
1 0

```


Listagem do ficheiro *.lff*:

- ELEMENTO 1 -						
X	Y	Sxx	Syy	Sxy	Ux	Uy
0.5000	0.5000	6.9308e+01	1.3610e+01	3.0129e+01	-2.3934e+01	-1.4492e+01
0.2500	0.7500	1.2987e+01	1.1564e-01	9.3599e-01	-1.3585e+01	-1.1474e+00
0.0000	1.0000	9.1267e+00	1.4755e+00	2.3106e+00	-2.0336e+00	1.2806e+01
0.5000	0.2500	2.5056e+00	-3.3903e+01	-1.3936e-01	-4.3995e+01	-9.2124e+00
0.2500	0.3750	8.8975e+00	2.9293e-01	1.0879e+01	-3.7767e+01	4.7360e-02
0.0000	0.5000	1.0047e+01	8.6835e+00	4.0703e-01	-3.2199e+01	1.2952e+01
0.5000	0.0000	-2.9613e+00	-4.0346e+01	3.9378e-01	-4.9972e+01	2.4415e-10
0.2500	0.0000	4.1588e+00	3.8466e-01	1.0448e+00	-5.0806e+01	6.9560e-11
0.0000	0.0000	8.2905e+00	3.6171e+01	-4.8277e-01	-5.2308e+01	2.1512e-10
- ELEMENTO 2 -						
X	Y	Sxx	Syy	Sxy	Ux	Uy
1.0000	0.5000	4.4670e+01	1.6002e+00	-1.3134e+00	1.8458e-10	-2.5984e+01
1.0000	0.7500	1.9573e+01	-5.2003e-02	-4.2029e-01	7.6851e-11	-2.6729e+01
1.0000	1.0000	-3.9587e+00	-1.1995e+00	-6.1923e-01	-1.2453e-10	-2.6937e+01
0.7500	0.5000	4.3698e+01	-1.3691e+00	-3.5599e-01	-1.0874e+01	-2.3079e+01
0.6250	0.7500	1.8326e+01	1.9890e+00	-9.2021e-01	-7.3300e+00	-1.9974e+01
0.5000	1.0000	1.0433e+00	5.8110e-01	4.2854e-01	1.3324e+00	-1.4763e+01
0.5000	0.5000	7.6919e+01	1.8168e+01	3.5108e+01	-2.3934e+01	-1.4492e+01
0.2500	0.7500	1.5845e+01	6.7375e-01	2.3333e+00	-1.3585e+01	-1.1474e+00
0.0000	1.0000	8.1293e+00	-1.3199e-01	1.2449e+00	-2.0336e+00	1.2806e+01