

Relatório ICIST DTC 14/99

Programa para Aplicação de um Modelo Híbrido-Misto de Tensão à Análise de Placas de Ordem Superior

Mário Vicente da Silva

Eduardo M.B. Ribeiro Pereira

Outubro 1999

ÍNDICE

1	<i>Introdução</i>	1
2	<i>Formulação</i>	2
2.1	Equações Fundamentais	2
2.2	Modelo de Ordem Superior	3
2.2.1	Deformações Generalizadas	4
2.2.2	Esforços Generalizados	5
2.2.3	Relações Constitutivas	6
2.2.4	Equações da Peça Laminar de Ordem Superior	6
2.3	Modelo Híbrido-Misto de Tensão	8
3	<i>Modo de Funcionamento</i>	9
1.1	Rotinas Principais	9
1.2	Geometria	10
1.3	Funções de Aproximação	10
1.4	Montagem do Sistema Governativo	11
1.4.1	Mudança de Coordenadas	11
1.4.2	Blocos do Sistema Governativo	14
1.4.3	Cálculo dos Operadores Elementares	15
4	<i>Introdução dos Dados</i>	16
4.1	Estrutura do Ficheiro de Dados .dat	16
4.1.1	Nós (1ºBloco)	17
4.1.2	Lados (2ºBloco)	17
4.1.3	Elementos (3ºBloco)	18
4.2	Estrutura do Ficheiro de Dados .los	18
4.2.1	Elementos (1º Bloco)	18
4.2.2	Lados (2º Bloco)	19
4.2.3	Carregamento (3º Bloco)	20
5	<i>Pós-Processamento</i>	21
6	<i>Bibliografia</i>	22
	<u>ANEXO A</u> - Exemplo de Aplicação	23
	<u>ANEXO B</u> – Estrutura do Ficheiro das Soluções	30

1 INTRODUÇÃO

O presente relatório pretende descrever o modo de utilização/funcionamento de um programa para a análise elástica linear de estruturas laminares, desenvolvido no âmbito do núcleo de Análise de Estruturas do Instituto de Engenharia de Estruturas Território e Construção do Instituto Superior Técnico, com apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia através do projecto PBICT/C/CEG/2342/95.

Considerou-se a utilização de um modelo de ordem superior para simular o comportamento das estruturas laminares. Assim é possível ter em conta os efeitos tridimensionais com base num modelo bidimensional, facto de grande importância quando se pretende analisar estruturas como sejam as lajes muito espessas ou os laminados de material compósito.

A formulação de elementos finitos utilizada neste programa baseia-se numa formulação não convencional de elementos finitos Híbridos-Mistos de Tensão. São utilizados Polinómios de Legendre como funções de aproximação de tensões e deslocamentos. Para modelar a geometria do domínio consideram-se elementos quadrangulares de 4 ou 8 nós.

Este programa foi escrito em *C Standard*, sobre uma plataforma de programação elaborada para o desenvolvimento de programas de elementos finitos para o cálculo de estruturas.

2 FORMULAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se um breve resumo dos fundamentos teóricos utilizados na realização deste programa, outros detalhes poderão ser encontrados em [1] e [4].

2.1 Equações Fundamentais

As relações de equilíbrio, compatibilidade e constitutivas, que regem um problema de elasticidade tridimensional podem ser expressas do seguinte modo,

Compatibilidade	Relações Constitutivas	Equilíbrio
$D^*u = \varepsilon \text{ em } V \quad (1)$	$f\sigma = \varepsilon \quad (3)$	$D\sigma + b = 0 \text{ em } V \quad (5)$
$u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u \quad (2)$	$k\varepsilon = \sigma \quad (4)$	$N\sigma = t \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (6)$

em que,

u é o vector que agrupa as componentes de deslocamento;

$\bar{u}$ é o vector dos deslocamentos impostos nas fronteiras cinemáticas (Γ_u);

ε é o vector das componentes do tensor das deformações;

σ é o vector das componentes do tensor das tensões;

b é o vector das forças de massa;

t é o vector das tensões aplicadas nas fronteiras estáticas (Γ_σ);

D é o operador diferencial de equilíbrio;

$$D = \begin{bmatrix} \partial_x & \cdot & \cdot & \cdot & \partial_z & \partial_y \\ \cdot & \partial_y & \cdot & \partial_z & \cdot & \partial_x \\ \cdot & \cdot & \partial_z & \partial_y & \partial_x & \cdot \end{bmatrix}$$

D^* é operador diferencial de compatibilidade (transposto de D);

N é a matriz das componentes da normal à fronteira associada ao operador diferencial de equilíbrio;

f é a matriz de flexibilidade e, para um material ortotrópico, tem a seguinte configuração no caso tridimensional elástico:

$$f = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & -\nu_{zx}/E_z & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & -\nu_{zy}/E_z & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nu_{xz}/E_x & -\nu_{yz}/E_y & 1/E_z & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1/G_{yz} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/G_{xz} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/G_{xy} \end{bmatrix}$$

sendo E o módulo de elasticidade, G o módulo de distorção, ν o coeficiente de Poisson e os eixos x,y,z referidos ao referencial principal de ortotropia.

k é a matriz de rigidez (inversa da flexibilidade).

2.2 Modelo de Ordem Superior

O modelo de ordem superior utilizado consiste na expansão do campo dos deslocamentos de uma peça laminar numa série de Taylor (ao longo da sua espessura) em torno do seu plano médio ($z=0$), considerando tantos termos da série quantos os que se achar necessários para obter uma boa aproximação do comportamento da estrutura. O número de termos considerados, n , é designado por ordem.

Deste modo, obtém-se a seguinte aproximação para o campo dos deslocamentos,

$$u(x, y, z) = \sum_{i=0}^n U^{(i)}(z) \cdot u^{(i)}(x, y) \quad (7)$$

em que,

$$U^{(i)}(z) = \left\langle \frac{z^i}{i!}; \frac{z^i}{i!}; \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} \right\rangle \quad u^{(i)}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}^{(i)}$$

2.2.1 Deformações Generalizadas

Tendo em conta a equação de compatibilidade (1), é possível fazer corresponder ao campo de deslocamentos considerado o seguinte campo de deformações:

$$\varepsilon(x, y, z) = \sum_{i=0}^n E^{(i)}(z) \cdot e^{(i)}(x, y) \quad (8)$$

em que,

$$E^{(i)}(z) = \left\langle \frac{z^i}{i!}; \frac{z^i}{i!}; \frac{z^{i-2}}{(i-2)!}; \frac{z^{i-1}}{(i-1)!}; \frac{z^{i-1}}{(i-1)!}; \frac{z^i}{i!}; \frac{z^i}{i!} \right\rangle$$

e as deformações generalizadas,

$$e^{(i)}(x, y) = \left\{ \begin{matrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{matrix} \right\}^{(i)}$$

são definidas em função dos parâmetros de deslocamento na forma,

$$e^{(i)}(x, y) = \hat{D}^* \cdot u^{(i)}(x, y), \quad (9)$$

em que $\hat{D}^*$ é o operador diferencial de compatibilidade,

$$\hat{D}^* = \begin{bmatrix} \partial_x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \partial_y & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \partial_y \\ 1 & \cdot & \partial_x \\ \partial_y & \partial_x & \cdot \end{bmatrix}$$

Com base nas aproximações anteriores é possível reduzir o comportamento de uma lâmina a um problema bidimensional referido ao seu plano médio Ω , para o qual são escritas as condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade, sendo necessário considerar para além das fronteiras

laterais (Γ^Ω), as fronteiras horizontais superior (Γ^+) e inferior (Γ^-) para a ligação entre camadas (figura 1).

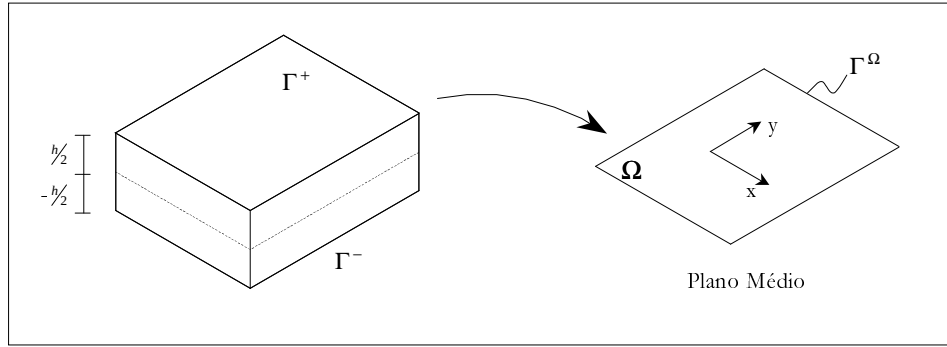


Figura 1- Domínio da Peça Laminar

2.2.2 Esforços Generalizados

Associados às deformações generalizadas definem-se os esforços generalizados como resultantes de tensões na espessura da peça laminar,

$$\sigma^{(i)}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} [E^{(i)}(z)]^T \cdot \sigma(x, y, z) dz \quad (10)$$

com base nesta definição é possível redefinir as equações de equilíbrio (5) e (6) na forma,

$$\hat{D}\sigma^{(i)} + b_\Omega^{(i)} + b_+^{(i)} + b_-^{(i)} = 0 \text{ em } \Omega \quad (11)$$

$$N\sigma^{(i)} = t_\Omega^{(i)} \text{ em } \Gamma_\sigma^\Omega \quad (12)$$

em que,

$$b_\Omega^{(i)}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} [U^{(i)}(z)]^T \cdot b(x, y, z) dz,$$

$$b_+^{(i)}(x, y) = [U^{(i)}(h/2)]^T \cdot t_+(x, y),$$

$$b_{-}^{(i)}(x, y) = [U^{(i)}(-h/2)]^T \cdot t_{-}(x, y) \quad e$$

$$t_{\Omega}^{(i)} = \int_{-h/2}^{h/2} [U^{(i)}(z)]^T \cdot t_{\Omega}(z) dz,$$

definem respectivamente as forças de domínio devidas às forças de massa ($b_{\Omega}^{(i)}$), devidas às forças aplicadas nas fronteiras horizontais ($b_{+}^{(i)}$, $b_{-}^{(i)}$) e às forças de fronteira generalizadas ($t_{\Omega}^{(i)}$).

2.2.3 Relações Constitutivas

Substituindo nas relações constitutivas (4) a definição das deformações (8) e dos esforços generalizados (10), obtém-se a relação entre os esforços generalizados da ordem i com as deformações de ordem j na forma:

$$\sigma^{(i)}(x, y) = k^{(i)(j)} e^{(j)} \quad (13)$$

sendo $k^{(i)(j)}$ a matriz de rigidez,

$$k^{(i)(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} [E^{(i)}(z)]^T \cdot k \cdot E^{(j)}(z) dz \quad (14)$$

2.2.4 Equações da Peça Laminar de Ordem Superior

Para uma peça laminar plana, a análise de um problema tridimensional é, deste modo, transformada numa serie de problemas bidimensionais interdependentes definidos em relação ao seu plano médio. Assim as equações fundamentais podem ser escritas na forma:

Compatibilidade	Relações Constitutivas	Equilíbrio
$\hat{D}^* u^{(i)} = e^{(i)} \quad em \Omega \quad (9)$	$f^{(i)(j)} \sigma^{(i)} = e^{(j)} \quad em \Omega \quad (16)$	$\hat{D} \sigma^{(i)} + b^{(i)} = 0 \quad em \Omega \quad (11)$
$u^{(i)} = \bar{u}^{(i)} \quad em \Gamma_u^{\Omega} \quad (15)$		$N \sigma^{(i)} = t_{\Omega}^{(i)} \quad em \Gamma_{\sigma}^{\Omega} \quad (12)$

A matriz de flexibilidade, $f^{(i)(j)}$, é obtida pela inversão matriz de rigidez, $k^{(i)(j)}$, definida em (14).

É de salientar o facto da ligação entre as diversas ordens aparecem apenas através das relações constitutivas, só havendo interacção de ordem par com ordem par e de ordem ímpar com ordem ímpar.

2.3 Modelo Híbrido-Misto de Tensão

À semelhança do modelo Híbrido-Misto de Tensão apresentado em [5], os esforços e os deslocamentos no domínio são aproximados de modo independente,

$$\sigma^{(i)} = S_{\Omega} \cdot X_{\Omega}^{(i)} \quad (17), \quad u^{(i)} = U_{\Omega} \cdot q_{\Omega}^{(i)} \quad (18)$$

sendo igualmente aproximados os deslocamentos na fronteira estática (Γ_{σ}^{ω}),

$$u^{(i)} = U_{\Gamma} \cdot q_{\Gamma}^{(i)} \quad (19)$$

É ainda necessário aproximar as tensões nas fronteiras cinemáticas horizontais (Γ_u^+ e Γ_u^-),

$$t_+ = S_+ \cdot X_+ \quad (20), \quad t_- = S_- \cdot X_- \quad (21)$$

Adoptando uma metodologia análoga à apresentada em [5] obtém-se o seguinte sistema de equações governativo para o elemento Híbrido-Misto de Tensão aplicado a o modelo de placa de ordem superior:

$$\begin{bmatrix} F & A & \cdot & \cdot & -B \\ A^T & \cdot & C_+^{(i)} & C_-^{(i)} & \cdot \\ \cdot & C_+^{(i)T} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & C_-^{(i)T} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -B^T & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{\Omega}^{(i)} \\ q_{\Omega}^{(i)} \\ X_+ \\ X_- \\ q_{\Gamma}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ Q_{\Omega}^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_{\Gamma}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

em que,

$$F = \int_{\Omega} S_{\Omega}^T f S_{\Omega} d\Omega, \quad A = \int_{\Omega} (DS_{\Omega})^T U_{\Omega} d\Omega, \quad B = \int_{\Gamma_{\sigma}^{\omega}} (NS_{\Omega})^T U_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma}^{\omega},$$

$$C_+^{(i)} = \int_{\Omega} [U_{\Omega} \cdot U^{(i)}(\frac{h}{2})]^T S_+ d\Omega, \quad C_-^{(i)} = \int_{\Omega} [U_{\Omega} \cdot U^{(i)}(-\frac{h}{2})]^T S_- d\Omega,$$

$$Q_{\Omega}^{(i)} = \int_{\Omega} U_{\Omega}^T \cdot b_{\Omega}^{(i)} d\Omega \quad \text{e} \quad Q_{\Gamma}^{(i)} = - \int_{\Gamma_{\sigma}^{\omega}} U_{\Gamma}^T \cdot t_{\Omega}^{(i)} d\Gamma_{\sigma}^{\omega}$$

As equações que constituem o sistema correspondem, respectivamente, à equação de compatibilidade/elasticidade no domínio, de equilíbrio no domínio, de compatibilidade nas fronteiras horizontais superior e inferior e de equilíbrio nas fronteiras estáticas laterais.

3 MODO DE FUNCIONAMENTO

Neste capítulo é abordada genericamente a organização do programa por forma a possibilitar um entendimento mais fácil do seu funcionamento, sem se descrever exaustivamente o modo de programação.

A plataforma de programação sobre a qual foi desenvolvido este programa [2] cria, a partir de um ficheiro de dados, uma estrutura que descreve a topologia do problema. Com base nesta estrutura é posteriormente resolvido o sistema governativo de equações.

A resolução do sistema pode ser feita através de dois métodos distintos. O primeiro consiste no método de resolução iterativo dos gradientes conjugados, sendo o segundo o método de eliminação de Gauss, utilizando a rotina MA47 da biblioteca Harwell [3] para sistemas esparsos e simétricos.

Esta plataforma está preparada para processamento sequencial ou paralelo, sendo para este programa utilizado somente o processamento sequencial.

Deste modo, o programa é constituído por um conjunto de rotinas que definem a posição e a dimensão dos diferentes blocos que constituem o sistema governativo e que calculam os termos deste sistema. É ainda composto por uma rotina de pós-processamento, que executa o tratamento dos resultados obtidos.

1.1 Rotinas Principais

A interligação com a plataforma de programação é feita através das seguintes rotinas:

void LocalStructureSetup () – onde são lidos e introduzidos os dados nas estruturas locais;

int SetupParts (int current_subdomain) – define a organização/dimensões dos blocos que constituem a matriz do sistema governativo;

int ComputeMatrix (int current_subdomain) – rotina na qual se executa a montagem do triângulo superior da matriz do sistema;

int ComputeRhs (int wich_subdomain) – efectua a montagem do vector dos termos independentes.

*int PostProc (char *nome)* – rotina na qual se executa o pós-processamento.

Estas rotinas são escritas pelo programador e variam consoante a formulação de elementos finitos utilizada.

1.2 Geometria

A modelação da geometria é feita a dois níveis. Num primeiro nível define-se a geometria do laminado através da representação do seu plano médio. Num segundo nível são definidas as propriedades das diferentes camadas.

A geometria de representação plana do laminado é feita através de três estruturas base, definidas na plataforma de programação: o Nó (*node*), o Lado (*edge*) e o Elemento (*loop*).

Neste programa consideram-se apenas elementos com 4 lados, sendo cada lado constituído por 2 ou 3 nós, ficando assim definida a sua orientação do primeiro para o último nó.

Existem dois tipos distintos de elementos (os elementos de 4 ou 8 nós). Um elemento é considerado de 8 nós, sempre que pelo menos um dos seus lados tenha 3 nós, quando necessário são considerados nós virtuais a meio dos lados de 2 nós por forma a definir completamente o elemento de 8 nós.

Deste modo o programa permite a utilização simultânea de elementos com diferente número de nós sem que haja problemas de compatibilidade de geometria na estrutura.

1.3 Funções de Aproximação

Para a aproximação dos esforços (17) e dos deslocamentos no domínio (18) e nas fronteiras estáticas (19) e das tensões nas fronteiras cinemáticas horizontais (20, 21) utilizaram-se polinómios de Legendre. Estas funções de aproximação encontram-se no referencial local (ξ, η) dos elementos, de modo a simplificar as operações de integração necessárias à montagem dos operadores elementares.

O programa permite adoptar diferentes graus máximos para os polinómios de aproximação de cada esforço, deslocamento ou tensão. É no entanto de referir que uma escolha inadequada dos graus máximos dos polinómios pode traduzir-se no aparecimento de modos espúrios no sistema governativo.

1.4 Montagem do Sistema Governativo

A montagem dos termos que constituem o sistema governativo é realizada através de integrações analíticas, utilizando as propriedades de ortogonalidade dos Polinómios de Legendre. Para realizar estas integrações é necessário recorrer à matriz Jacobiana dado que as funções de interpolação estão escritas no referencial local do elemento.

1.4.1 Mudança de Coordenadas

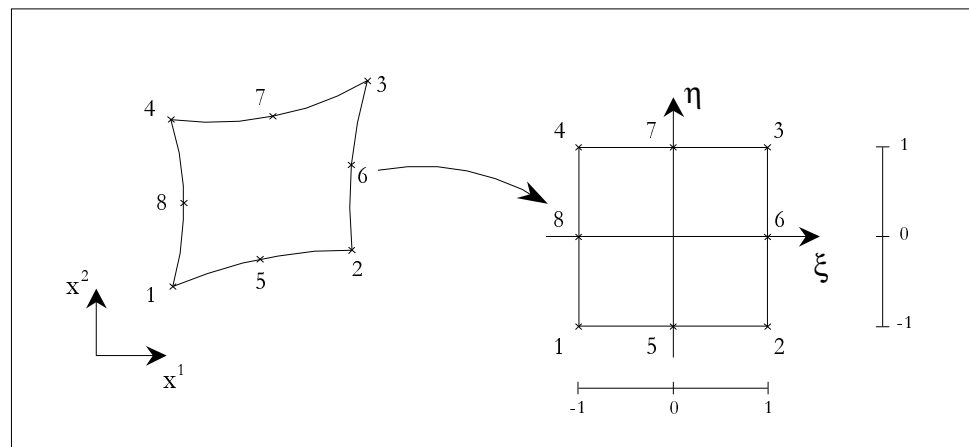


Figura 1 – Mudança de Coordenadas

No caso mais geral (o elemento de 8 nós) obtém-se a seguinte expressão para a transformação de coordenadas:

$$x^k = \sum_{i=1}^8 \varphi_i x_i^k \quad k = 1, 2 \quad (23)$$

onde φ_i são as funções de forma do elemento serendipiano de 8 nós e x_i^k são as coordenadas do nó i na direcção k

Sendo as funções φ_i polinómios, a expressão da transformação de coordenadas (23) pode ainda ser desenvolvida na sua forma polinomial:

$$x^k = \alpha_{00}^k + \alpha_{10}^k \xi + \alpha_{01}^k \eta + \alpha_{20}^k \xi^2 + \alpha_{11}^k \xi \eta + \alpha_{02}^k \eta^2 + \alpha_{21}^k \xi^2 \eta + \alpha_{12}^k \xi \eta^2$$

onde,

$$\begin{aligned} \alpha_{00}^k &= \frac{1}{2}(x_5^k + x_6^k + x_7^k + x_8^k) - \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) & \alpha_{11}^k &= \frac{1}{4}(x_1^k - x_2^k + x_3^k - x_4^k) \\ \alpha_{10}^k &= \frac{1}{2}(x_6^k - x_8^k) & \alpha_{01}^k &= \frac{1}{2}(x_7^k - x_5^k) \\ \alpha_{12}^k &= \frac{1}{4}(x_3^k - x_1^k + x_2^k - x_4^k) - \frac{1}{2}(x_6^k - x_8^k) & \alpha_{21}^k &= \frac{1}{4}(x_3^k - x_1^k + x_4^k - x_2^k) - \frac{1}{2}(x_7^k - x_5^k) \\ \alpha_{20}^k &= \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) - \frac{1}{2}(x_5^k + x_7^k) & \alpha_{02}^k &= \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) - \frac{1}{2}(x_6^k + x_8^k) \end{aligned}$$

Para esta transformação de coordenadas a matriz Jacobiana e o seu determinante tomam as seguintes expressões:

$$J = \begin{bmatrix} x^1,_{\xi} & x^2,_{\xi} \\ x^1,_{\eta} & x^2,_{\eta} \end{bmatrix} \quad (24)$$

onde,

$$\begin{aligned} x^k,_{\xi} &= (\alpha_{10}^k + \alpha_{11}^k \eta + \alpha_{12}^k \eta^2) + 2(\alpha_{20}^k + \alpha_{21}^k \eta) \xi \\ x^k,_{\eta} &= (\alpha_{01}^k + \alpha_{11}^k \xi + \alpha_{21}^k \xi^2) + 2(\alpha_{02}^k + \alpha_{12}^k \xi) \eta \end{aligned}$$

$$|J| = J_{00} + J_{10} \xi + J_{01} \eta + J_{20} \xi^2 + J_{11} \xi \eta + J_{02} \eta^2 + J_{30} \xi^3 + J_{21} \xi^2 \eta + J_{12} \xi \eta^2 + J_{03} \eta^3 + J_{22} \xi^2 \eta^2 \quad (25)$$

com,

$$\begin{aligned} J_{00} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{10}^2 & J_{22} &= 3(\alpha_{21}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{21}^2) \\ J_{10} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{10}^2 + 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{20}^2) & J_{01} &= \alpha_{11}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{11}^2 + 2(\alpha_{10}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{10}^2) \\ J_{12} &= \alpha_{11}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{11}^2 + 4(\alpha_{21}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{21}^2) & J_{21} &= \alpha_{21}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{21}^2 + 4(\alpha_{20}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{20}^2) \\ J_{20} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{21}^1 \alpha_{10}^2 + 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{20}^2) & J_{02} &= \alpha_{12}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{12}^2 + 2(\alpha_{11}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{11}^2) \\ J_{30} &= 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{21}^1 \alpha_{20}^2) & J_{03} &= 2(\alpha_{12}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{12}^2) \\ J_{11} &= 2(\alpha_{10}^1 \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{10}^2) + 4(\alpha_{20}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{20}^2) \end{aligned}$$

O operador diferencial de equilíbrio, $\hat{D}$, no sistema de coordenadas locais pode ser expresso do seguinte modo:

$$\hat{D} = \frac{1}{|J|} \hat{D}' - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (26)$$

com,

$$\hat{D}' = \begin{bmatrix} x^2_{,\eta} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -x^1_{,\eta} \\ \cdot & -x^1_{,\eta} & \cdot & \cdot & \cdot & x^2_{,\eta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -x^1_{,\eta} & x^2_{,\eta} & \cdot \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} x^2_{,\xi} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -x^1_{,\xi} \\ \cdot & -x^1_{,\xi} & \cdot & \cdot & \cdot & x^2_{,\xi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -x^1_{,\xi} & x^2_{,\xi} & \cdot \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

podendo também $\hat{D}'$ ser escrito na seguinte forma:

$$\hat{D}' = (\mathcal{D}_{21}\xi^2 + 2\mathcal{D}_{12}\xi\eta + \mathcal{D}_{11}\xi + 2\mathcal{D}_{02}\eta + \mathcal{D}_{10}) \frac{\partial}{\partial \xi} - (\mathcal{D}_{12}\eta^2 + 2\mathcal{D}_{21}\xi\eta + \mathcal{D}_{11}\eta + 2\mathcal{D}_{20}\xi + \mathcal{D}_{10}) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

sendo,

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\alpha_{ij}^1 \\ \cdot & -\alpha_{ij}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{ij}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\alpha_{ij}^1 & \alpha_{ij}^2 & \cdot \end{bmatrix}$$

É ainda possível escrever a matriz das componentes da matriz das componentes da normal, N , no sistema de coordenadas (ξ, η) :

$$N = \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} N' \quad (27)$$

$$N' = \begin{bmatrix} n_x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n_y \\ \cdot & n_y & \cdot & \cdot & \cdot & n_x \\ \cdot & \cdot & \cdot & n_y & n_x & \cdot \end{bmatrix}, \quad n_x = \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad n_y = -\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

onde $\mathbf{p}$ é a coordenada local do lado, tomando os valores $\pm\xi$ ou $\pm\eta$ consoante o lado em questão.

A matriz $\mathbf{n}$ de transformação das coordenadas locais do lado nas coordenadas globais (x, y) tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \mathbf{n}' \quad (28)$$

em que,

$$\mathbf{n}' = \begin{bmatrix} n_x & -n_y & \cdot \\ -n_y & n_x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \end{bmatrix}$$

1.4.2 Blocos do Sistema Governativo

Adoptado a mudança de coordenadas (23), os blocos que constituem o sistema governativo podem ser expressos na seguinte forma:

$$F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_{\Omega}^T f S_{\Omega} |J| d\xi d\eta \quad (29)$$

$$A_{\Omega} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\hat{D}' S_{\Omega})^T U_{\Omega} d\xi d\eta \quad (30)$$

$$A_{\Gamma} = \int_{-1}^1 (N' S_{\Omega})^T U_{\Gamma} d\xi \quad (31)$$

$$C_{+}^{(i)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [U_{\Omega} \cdot U^{(i)}(\frac{h}{2})]^T S_{+} d\xi d\eta \quad (32)$$

$$C_{-}^{(i)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [U_{\Omega} \cdot U^{(i)}(-\frac{h}{2})]^T S_{-} d\xi d\eta \quad (33)$$

$$Q_{\Omega}^{(i)} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{\Omega}^T \cdot b_{\Omega}^{(i)} |J| d\xi d\eta \quad (34)$$

$$Q_{\Gamma}^{(i)} = - \int_{-1}^1 U_{\Gamma}^T \cdot n' t_{\Omega}^{(i)} d\xi \quad (35)$$

sendo as tensões na fronteira aplicadas nas direcções das coordenadas locais do respectivo lado.

1.4.3 Cálculo dos Operadores Elementares

Com base nas expressões (29) a (35) e tendo em conta o tipo de aproximações adoptadas e as definições (25) a (28) é possível com base numa tabela de integrações como a apresentada no anexo A de [5], proceder à montagem dos operadores para cada elemento.

4 INTRODUÇÃO DOS DADOS

A introdução de dados é feita através de dois ficheiros ASCII, cujo nome é o primeiro parâmetro de execução do programa:

- i) o primeiro ficheiro contém dados relativos à topologia do plano médio da estrutura e ao modo de resolução do sistema governativo. Este ficheiro deverá ter a extensão *.dat*
- ii) o segundo ficheiro (com a extensão *.los*) contém os dados referentes às camadas e ao carregamento da estrutura.

A actual versão do programa é muito limitada quanto a detecção de dados mal introduzidos, pelo que o utilizador deve ser cuidadoso na criação do ficheiro de dados. Qualquer valor mal introduzido pode provocar a interrupção do programa ou produzir resultados não pretendidos.

De seguida descreve-se detalhadamente a estrutura dos ficheiros de dados, sendo apresentado em anexo um exemplo de aplicação.

4.1 Estrutura do Ficheiro de Dados *.dat*

A primeira linha do ficheiro deverá conter o título do exemplo a testar.

Seguem-se 3 blocos nos quais se fornece a informação necessária para a definição da geometria do plano médio da estrutura (nós, lados e elementos). Cada bloco encontra-se separado do seguinte através de uma linha com o algarismo 0 (zero).

A última linha do ficheiro de dados deverá ser constituída dois números inteiros, os quais definem:

- i) o número de subdomínios, devendo este tomar sempre o valor 1 (uma vez que não estamos a utilizar um processamento em paralelo);
- ii) o modo de resolução, correspondendo o valor 0 ao modo de resolução iterativo e o valor 6 ao modo de resolução directo.

4.1.1 Nós (1ºBloco)

Cada linha do 1º bloco deverá ter a seguinte estrutura:

<i>id</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>idl</i>
-----------	----------	----------	------------

sendo:

<i>id</i>	número de identificação do nó (inteiro positivo)
<i>x</i>	coordenada do nó segundo x
<i>y</i>	coordenada do nó segundo y
<i>idl</i>	número de identificação de um lado que contem o nó

4.1.2 Lados (2ºBloco)

A estrutura das linhas do 2º bloco é:

<i>id</i>	<i>nnos</i>	<i>idn¹... idn^{nnos}</i>	<i>eesq</i>	<i>edir</i>	<i>lccw</i>	<i>lcw</i>	<i>rccw</i>	<i>rcw</i>
-----------	-------------	--	-------------	-------------	-------------	------------	-------------	------------

sendo:

<i>id</i>	número de identificação do lado (inteiro positivo)
<i>nnos</i>	número de número de nós do lado (2 ou 3)
<i>idnⁱ</i>	número de identificação do nó <i>i</i>
<i>eesq</i>	número de identificação do elemento à esquerda do lado
<i>edir</i>	número de identificação do elemento à direita do lado
<i>lccw, lcw, rccw, rcw</i>	número de identificação dos lados adjacentes (fig. 2)

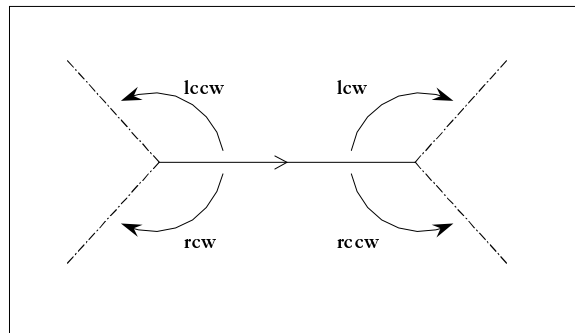


Figura 2- Identificação dos lados adjacentes

4.1.3 Elementos (3º Bloco)

A estrutura das linhas do 3º bloco é:

<i>id</i>	<i>idl</i>	<i>sd</i>
-----------	------------	-----------

sendo:

- id* número de identificação do elemento (inteiro positivo)
- idl* número de identificação de um lado que pertence ao elemento
- sd* número de identificação do subdomínio (deve ter sempre o valor 1)

4.2 Estrutura do Ficheiro de Dados .Jos

Este ficheiro deverá conter na primeira linha o número de camadas da estrutura. As linhas que se seguem (tantas quanto o número de camadas) fornecem a espessura das camadas.

Seguem-se 3 blocos nos quais se fornece a informação referente aos elementos, aos lados e ao carregamento. Tal como no ficheiro *.dat*, cada bloco encontra-se separado do seguinte através de uma linha com o algarismo zero.

4.2.1 Elementos (1º Bloco)

A estrutura do 1º bloco é constituída por 3 sub-blocos, devendo o 2º e 3º sub-blocos ser repetidos n e $n+1$ vezes, respectivamente, sendo n o número de camadas da estrutura.

<i>id</i>	
<i>ordem</i>	
<i>Prop</i>	
<i>Grau_S_v</i>	$n.º \text{ camadas}$
<i>Grau_U_v</i>	
<i>Grau_S_Γ</i>	$n.º \text{ camadas} + 1$

sendo:

<i>id</i>	número de identificação do elemento
<i>ordem</i>	ordem da camada
<i>Prop</i>	linha constituída por 10 reais* representando os módulos de elasticidade (E_x, E_y, E_z), módulos de distorção (G_{yz}, G_{xz}, G_{xy}), os coeficientes de Poisson ($\nu_{yz}, \nu_{xz}, \nu_{xy}$) e o angulo entre o referencial global da estrutura e o referencial principal de ortotropia
<i>Grau_S_v</i>	6 inteiros representando os graus dos polinómios de Legendre para a aproximação dos esforços no domínio ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}$)
<i>Grau_U_v</i>	3 inteiros representando graus dos polinómios de Legendre para a aproximação dos deslocamentos no domínio (u_x, u_y, u_z)
<i>Grau_S_r</i>	3 inteiros representando graus dos polinómios de Legendre para a aproximação das tensões nas faces horizontais (t_x, t_y, t_z), sendo possível libertar a face atribuindo o valor -1

*NOTA: no caso do material ser isotrópico, basta dar valor o módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson seguidos pelo símbolo dólar.

4.2.2 Lados (2º Bloco)

A estrutura do 2ºbloco é constituída por 2 sub-blocos, devendo o 2º dos sub-blocos ser repetido n vezes, sendo n o número de camadas da estrutura.

<i>Id</i>	<i>n.º camadas</i>
<i>Grau_U_r</i>	

sendo:

<i>id</i>	número de identificação do lado
<i>Grau_U_r</i>	3 inteiros representando graus dos polinómios de Legendre para a aproximação dos deslocamentos no lado (u_x, u_y, u_z), sendo possível impedir o deslocamento pretendido atribuindo ao grau o valor de -1

4.2.3 Carregamento (3º Bloco)

A estrutura das linhas do 3º bloco é:

<i>id</i>	<i>E/L</i>	<i>idc</i>	<i>cam</i>	<i>dir</i>	<i>val¹... val⁴</i>
-----------	------------	------------	------------	------------	---

sendo:

- id*** número de identificação do carregamento
- E/L*** o caracter E (*edge*) e L (*loop*) identificam, respectivamente, se a carga se encontra aplicada na fronteira ou elemento
- idc*** número de identificação do lado/elemento carregado
- cam*** camada na qual está aplicada a carga
- dir*** direcção do carregamento (0, 1 ou 2)
- valⁱ*** valor da carga no nó *i*

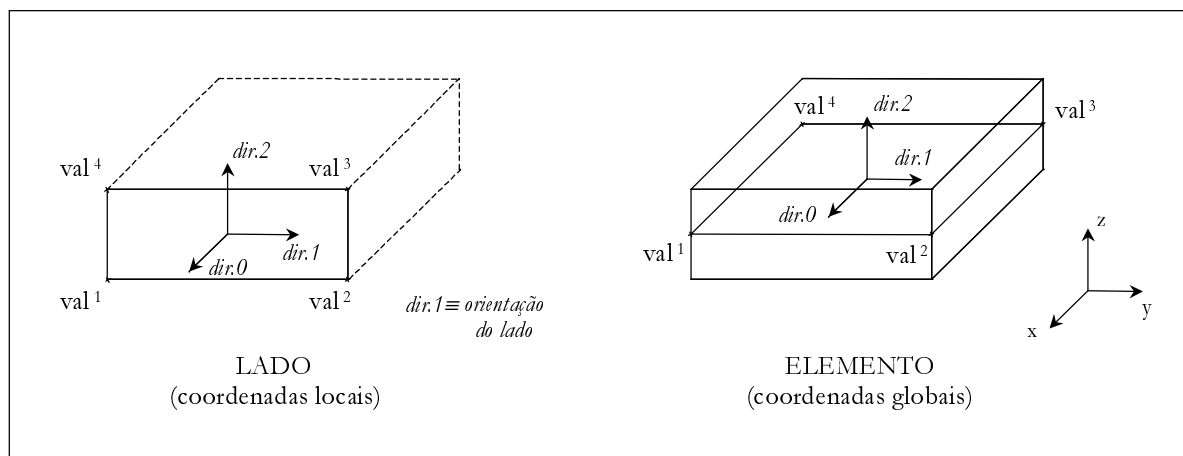


Figura 3 - Direcção do Carregamento

5 PÓS-PROCESSAMENTO

Como resultado do pós-processamento o programa cria 2 ficheiros:

i) o ficheiro com a extensão *lfi* contém o valor dos deslocamentos no domínio e na fronteira estática, o valor das tensões no domínio e os esforços no domínio da ordem 0 e 1. O número de pontos nos quais se pretende calcular estes valores introduzido pelo utilizador durante a execução do pós-processamento.

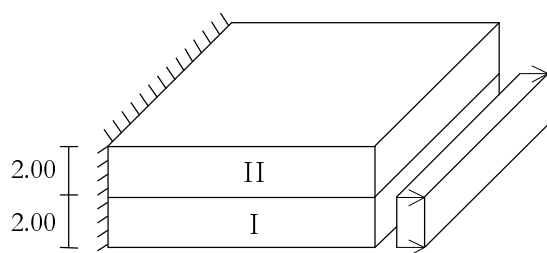
ii) no ficheiro com a extensão *sol*, é armazenada a solução do sistema. No anexo B é apresentada a estrutura deste ficheiro.

Para uma análise mais fácil dos resultados obtidos poder-se-á recorrer a um programa auxiliar que executa uma representação gráfica dos resultados, utilizando os ficheiros das soluções e da entrada de dados.

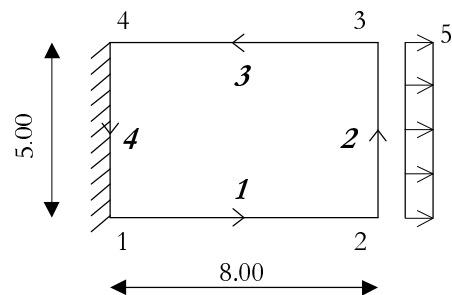
6 BIBLIOGRAFIA

- [1] E. M. B. R. Pereira, *Elementos Finitos de Tensão - Aplicação à Análise Elástica de Estruturas*, Tese de doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, (1993);
- [2] I. Cismasiu, J. P. Moitinho de Almeida, L. M. S. Castro e D. C. Harb is, *Parallel Solution Techniques for Hybrid Mixed Finite Element Models*, in Innovative Computational Methods for Structural Mechanics, Edited by M Papadrakakis and B.H.V. Topping, Saxe-Coburg Publications, Chapter 6, pp. 109-125, (1999);
- [3] *Harwell Subroutine Library*, Release 11 – Vol. I, Theoretical Studies Department of AEA Technology, pp.377-384, UK (1993);
- [4] E. M. B. R. Pereira e J. A. T. Freitas, *High-Order Models for Plates Analysis*, artigo submetido para publicação;
- [5] M. Vicente da Silva e E. M. B. R. Pereira, *Programa para Aplicação de um Modelo Híbrido-Misto de Tensão à Análise de Placas*, Relatório ICIST DTC 12/99, (1999).

ANEXO A - EXEMPLO DE APLICAÇÃO



$$\begin{aligned} E_I &= 20 & E_{II} &= 10 \\ \nu_I &= 0.25 & \nu_{II} &= 0.10 \end{aligned}$$



PLANTA

No exemplo testado utilizou-se a ordem 2 para ambas as camadas.

Os esforços no domínio e as tensões nas fronteiras entre camadas foram aproximados com polinómios de Legendre do 5º grau. Para os deslocamentos no domínio e nas fronteiras estáticas utilizaram-se polinómios do 4º grau.

Listagem do ficheiro *.dat*:

```
Exemplo Est. Laminar
1 0.00 0.00 1
2 8.00 0.00 1
3 8.00 5.00 2
4 0.00 5.00 4
0
1 2 1 2 1 0 4 2 2 4
2 2 2 3 1 0 1 3 3 1
3 2 3 4 1 0 2 4 4 2
4 2 4 1 1 0 3 1 1 3
0
1 1 1
0
1 0 0
```

Listagem do ficheiro *.los* :

2	número de camadas
2.0	espessura 1ª camada
2.0	espessura 2ª camada
1	id. elemento
2	ordem 1ª camada
20.0 .25 \$	propriedades
5 5 5 5 5 5	grau S_V
4 4 4	grau U_V
2	ordem 2ª camada
10.0 .10 \$	propriedades
5 5 5 5 5 5	grau S_V
4 4 4	grau U_V
-1 -1 -1	grau S_F face 1
5 5 5	grau S_F face 2
-1 -1 -1	grau S_F face 3
0	
1	id. lado
4 4 4	grau U_F 1ª camada
4 4 4	grau U_F 2ª camada
2	...
4 4 4	
4 4 4	
3	
4 4 4	
4 4 4	
4	
-1 -1 -1	
-1 -1 -1	
0	
1 E 2 1 0 5 5 5 5	carregamento
0	

Listagem do ficheiro *.lfi*:

* DESLOCAMENTOS NO DOMINIO *						

- ELEMENTO 1 -						
X	Y	h	Ux	Uy	Uz	
-----+-----						
LAYER 1						
		1.000	1.413e-02	1.694e-02	-1.414e-02	
0.000	0.000	0.000	1.293e-02	3.547e-02	-1.108e-03	
		-1.000	3.484e-02	5.854e-02	1.193e-02	
		1.000	3.250e-03	-2.895e-07	-1.420e-02	
0.000	2.500	0.000	-7.691e-03	-1.077e-07	-1.156e-04	
		-1.000	1.202e-02	-4.932e-08	1.397e-02	
		1.000	1.413e-02	-1.694e-02	-1.414e-02	
0.000	5.000	0.000	1.293e-02	-3.547e-02	-1.107e-03	
		-1.000	3.484e-02	-5.854e-02	1.193e-02	
		1.000	5.397e-01	6.857e-02	6.106e-01	
4.000	0.000	0.000	8.909e-01	1.389e-01	6.631e-01	
		-1.000	1.241e+00	2.104e-01	7.155e-01	
		1.000	5.364e-01	-3.726e-07	6.869e-01	
4.000	2.500	0.000	8.868e-01	-1.466e-07	7.429e-01	
		-1.000	1.236e+00	3.059e-08	7.988e-01	
		1.000	5.397e-01	-6.857e-02	6.106e-01	
4.000	5.000	0.000	8.909e-01	-1.389e-01	6.631e-01	
		-1.000	1.241e+00	-2.104e-01	7.155e-01	
		1.000	1.136e+00	9.183e-02	2.713e+00	
8.000	0.000	0.000	1.843e+00	1.548e-01	2.756e+00	
		-1.000	2.410e+00	1.798e-01	2.799e+00	
		1.000	1.129e+00	5.495e-08	2.791e+00	
8.000	2.500	0.000	1.836e+00	3.214e-08	2.826e+00	
		-1.000	2.405e+00	-3.304e-08	2.861e+00	
		1.000	1.136e+00	-9.183e-02	2.713e+00	
8.000	5.000	0.000	1.843e+00	-1.548e-01	2.756e+00	
		-1.000	2.410e+00	-1.798e-01	2.799e+00	
LAYER 2						
		1.000	1.383e-02	2.201e-03	-5.158e-03	
0.000	0.000	0.000	-3.808e-04	1.141e-03	-9.649e-03	
		-1.000	1.413e-02	1.693e-02	-1.414e-02	
		1.000	1.109e-02	1.899e-08	-6.315e-03	
0.000	2.500	0.000	-1.840e-03	-2.358e-08	-1.026e-02	
		-1.000	3.250e-03	2.525e-08	-1.420e-02	
		1.000	1.383e-02	-2.202e-03	-5.158e-03	
0.000	5.000	0.000	-3.810e-04	-1.143e-03	-9.650e-03	
		-1.000	1.413e-02	-1.694e-02	-1.414e-02	
		1.000	-1.627e-01	-2.313e-02	6.093e-01	
4.000	0.000	0.000	1.846e-01	1.362e-02	6.100e-01	
		-1.000	5.397e-01	6.857e-02	6.106e-01	
		1.000	-1.645e-01	3.995e-08	6.685e-01	
4.000	2.500	0.000	1.833e-01	5.341e-08	6.777e-01	
		-1.000	5.364e-01	1.447e-07	6.869e-01	
		1.000	-1.627e-01	2.313e-02	6.093e-01	
4.000	5.000	0.000	1.846e-01	-1.363e-02	6.100e-01	
		-1.000	5.397e-01	-6.857e-02	6.106e-01	
		1.000	-2.770e-01	-1.642e-02	2.706e+00	
8.000	0.000	0.000	3.047e-01	8.739e-03	2.710e+00	
		-1.000	1.136e+00	9.183e-02	2.713e+00	
		1.000	-2.781e-01	1.905e-07	2.769e+00	
8.000	2.500	0.000	3.055e-01	3.692e-08	2.780e+00	
		-1.000	1.129e+00	1.631e-07	2.791e+00	
		1.000	-2.770e-01	1.642e-02	2.706e+00	
8.000	5.000	0.000	3.047e-01	-8.739e-03	2.710e+00	
		-1.000	1.136e+00	-9.183e-02	2.713e+00	

* DESLOCAMENTOS NAS FRONTEIRAS ESTATICAS *				

- FRONTEIRA 1 -				
CSI	h	Ux	Uy	Uz
-----+-----				
LAYER 1				
	1.000	2.247e-02	2.108e-02	-1.519e-02
-1.000	0.000	3.162e-02	3.924e-02	-2.756e-03
	-1.000	6.429e-02	6.567e-02	9.673e-03
	1.000	5.401e-01	6.989e-02	6.101e-01
0.000	0.000	8.919e-01	1.393e-01	6.628e-01
	-1.000	1.243e+00	2.110e-01	7.155e-01
	1.000	1.139e+00	9.596e-02	2.712e+00
1.000	0.000	1.849e+00	1.559e-01	2.756e+00
	-1.000	2.418e+00	1.849e-01	2.800e+00
LAYER 2				
	1.000	1.285e-02	1.224e-03	-4.312e-03
-1.000	0.000	1.038e-03	1.725e-03	-1.022e-02
	-1.000	2.247e-02	1.459e-02	-1.613e-02
	1.000	-1.627e-01	-2.406e-02	6.099e-01
0.000	0.000	1.847e-01	1.430e-02	6.103e-01
	-1.000	5.401e-01	6.726e-02	6.108e-01
	1.000	-2.763e-01	-1.818e-02	2.710e+00
1.000	0.000	3.047e-01	1.006e-02	2.709e+00
	-1.000	1.139e+00	8.630e-02	2.708e+00
- FRONTEIRA 2 -				
CSI	h	Ux	Uy	Uz
-----+-----				
LAYER 1				
	1.000	1.154e+00	9.913e-02	2.725e+00
-1.000	0.000	1.841e+00	1.718e-01	2.748e+00
	-1.000	2.421e+00	2.110e-01	2.771e+00
	1.000	1.141e+00	-1.455e-08	2.803e+00
0.000	0.000	1.827e+00	3.143e-10	2.821e+00
	-1.000	2.411e+00	8.344e-09	2.838e+00
	1.000	1.154e+00	-9.913e-02	2.725e+00
1.000	0.000	1.841e+00	-1.718e-01	2.748e+00
	-1.000	2.421e+00	-2.110e-01	2.771e+00
LAYER 2				
	1.000	-2.828e-01	-1.677e-02	2.659e+00
-1.000	0.000	3.115e-01	9.765e-03	2.712e+00
	-1.000	1.100e+00	9.913e-02	2.765e+00
	1.000	-2.853e-01	1.784e-09	2.723e+00
0.000	0.000	3.111e-01	-4.537e-10	2.782e+00
	-1.000	1.091e+00	-2.303e-08	2.841e+00
	1.000	-2.828e-01	1.677e-02	2.659e+00
1.000	0.000	3.115e-01	-9.765e-03	2.712e+00
	-1.000	1.100e+00	-9.913e-02	2.765e+00
- FRONTEIRA 3 -				
CSI	h	Ux	Uy	Uz
-----+-----				
LAYER 1				
	1.000	1.139e+00	-9.596e-02	2.712e+00
-1.000	0.000	1.849e+00	-1.559e-01	2.756e+00
	-1.000	2.418e+00	-1.849e-01	2.800e+00
	1.000	5.401e-01	-6.989e-02	6.101e-01
0.000	0.000	8.919e-01	-1.393e-01	6.628e-01
	-1.000	1.243e+00	-2.110e-01	7.155e-01
	1.000	2.247e-02	-2.108e-02	-1.519e-02
1.000	0.000	3.162e-02	-3.924e-02	-2.756e-03
	-1.000	6.429e-02	-6.567e-02	9.673e-03
LAYER 2				
	1.000	-2.763e-01	1.818e-02	2.710e+00
-1.000	0.000	3.047e-01	-1.006e-02	2.709e+00
	-1.000	1.139e+00	-8.630e-02	2.708e+00
	1.000	-1.627e-01	2.406e-02	6.099e-01
0.000	0.000	1.847e-01	-1.430e-02	6.103e-01
	-1.000	5.401e-01	-6.726e-02	6.108e-01
	1.000	1.285e-02	-1.224e-03	-4.312e-03
1.000	0.000	1.038e-03	-1.724e-03	-1.022e-02
	-1.000	2.247e-02	-1.459e-02	-1.613e-02

* TENSOES NO DOMINIO *									

- ELEMENTO 1 -									
X	Y	h	Txx	Tyy	Tzz	Tyz	Txz	Txy	
LAYER 1									
0.000	0.000	1.000	3.646e+00	-4.234e-02	6.403e-01	-1.020e-06	-1.004e+00	1.060e-01	
		0.000	5.893e+00	1.717e-01	1.255e+00	-4.348e-07	-1.329e-01	2.027e-01	
		-1.000	9.503e+00	2.603e-01	2.180e+00	1.504e-07	7.382e-01	3.009e-01	
0.000	2.500	1.000	2.511e+00	8.079e-01	5.479e-01	-1.402e-07	-5.122e-01	6.647e-08	
		0.000	3.944e+00	1.345e+00	1.041e+00	-4.934e-08	3.795e-01	-1.089e-07	
		-1.000	7.865e+00	2.646e+00	2.346e+00	4.150e-08	1.271e+00	3.222e-07	
0.000	5.000	1.000	3.646e+00	-4.235e-02	6.403e-01	1.086e-07	-1.004e+00	-1.060e-01	
		0.000	5.893e+00	1.717e-01	1.255e+00	8.593e-08	-1.329e-01	-2.027e-01	
		-1.000	9.503e+00	2.603e-01	2.180e+00	6.324e-08	7.382e-01	-3.009e-01	
4.000	0.000	1.000	2.774e+00	-1.110e-06	-3.553e-01	4.760e-09	-1.641e-02	-1.591e-07	
		0.000	4.500e+00	7.509e-08	7.608e-02	7.066e-08	-1.073e-02	4.154e-07	
		-1.000	6.670e+00	2.067e-07	6.186e-01	1.366e-07	-5.061e-03	-8.179e-07	
4.000	2.500	1.000	2.761e+00	-3.942e-02	-4.388e-01	-1.311e-08	1.062e-02	1.011e-06	
		0.000	4.484e+00	-6.913e-03	2.491e-05	-2.695e-08	7.173e-03	-5.378e-07	
		-1.000	6.685e+00	1.587e-01	5.918e-01	-4.080e-08	3.725e-03	1.122e-06	
4.000	5.000	1.000	2.774e+00	-1.652e-06	-3.553e-01	5.170e-08	-1.641e-02	3.693e-06	
		0.000	4.500e+00	7.698e-07	7.608e-02	-1.073e-07	-1.073e-02	-2.264e-06	
		-1.000	6.670e+00	-1.296e-06	6.186e-01	-2.662e-07	-5.061e-03	4.323e-06	
8.000	0.000	1.000	5.000e+00	4.234e-02	4.020e-01	-1.238e-06	8.899e-07	-1.060e-01	
		0.000	5.000e+00	-1.717e-01	3.484e-01	-3.220e-08	5.699e-07	-2.027e-01	
		-1.000	5.000e+00	-2.603e-01	3.263e-01	1.174e-06	2.500e-07	-3.009e-01	
8.000	2.500	1.000	5.000e+00	6.725e-01	7.195e-01	-1.035e-07	-4.275e-07	-2.143e-06	
		0.000	5.000e+00	2.122e-01	6.045e-01	-3.152e-08	-1.056e-07	-1.082e-06	
		-1.000	5.000e+00	-3.776e-01	4.570e-01	4.044e-08	2.163e-07	1.980e-06	
8.000	5.000	1.000	5.000e+00	4.233e-02	4.020e-01	5.516e-07	2.242e-07	1.060e-01	
		0.000	5.000e+00	-1.717e-01	3.484e-01	-2.123e-07	3.558e-07	2.027e-01	
		-1.000	5.000e+00	-2.603e-01	3.263e-01	-9.763e-07	4.874e-07	3.009e-01	
LAYER 2									
0.000	0.000	1.000	1.408e-01	3.061e-02	6.207e-02	-1.478e-07	2.401e-02	1.596e-02	
		0.000	5.612e-01	-1.121e-02	9.993e-02	3.163e-08	-4.354e-01	7.222e-04	
		-1.000	2.189e+00	7.846e-02	2.717e-01	2.110e-07	-8.948e-01	6.023e-02	
0.000	2.500	1.000	-8.936e-02	1.255e-02	3.176e-02	-1.955e-08	1.208e-01	2.853e-07	
		0.000	3.917e-01	5.759e-02	8.438e-02	3.719e-08	-2.407e-01	-1.653e-07	
		-1.000	1.512e+00	2.429e-01	2.149e-01	9.393e-08	-6.023e-01	-3.242e-08	
0.000	5.000	1.000	1.408e-01	3.061e-02	6.207e-02	1.086e-06	2.401e-02	-1.596e-02	
		0.000	5.612e-01	-1.120e-02	9.993e-02	2.161e-07	-4.354e-01	-7.249e-04	
		-1.000	2.189e+00	7.846e-02	2.717e-01	-6.537e-07	-8.948e-01	-6.023e-02	
4.000	0.000	1.000	-4.909e-01	-2.392e-06	-5.559e-02	1.790e-07	-2.482e-02	-1.418e-06	
		0.000	5.130e-01	9.200e-07	4.481e-02	1.015e-07	-1.274e-02	8.721e-07	
		-1.000	1.317e+00	-2.062e-06	1.252e-01	2.394e-08	-6.636e-04	-1.123e-06	
4.000	2.500	1.000	-4.760e-01	8.558e-02	-1.312e-01	3.500e-08	-1.701e-02	-1.755e-07	
		0.000	5.125e-01	-3.215e-02	-4.415e-02	-3.233e-08	3.608e-03	7.771e-08	
		-1.000	1.308e+00	-1.571e-01	2.292e-02	-9.966e-08	2.423e-02	-1.902e-07	
4.000	5.000	1.000	-4.909e-01	1.567e-06	-5.559e-02	2.725e-07	-2.482e-02	1.329e-06	
		0.000	5.130e-01	-6.204e-07	4.481e-02	-1.900e-07	-1.274e-02	-8.331e-07	
		-1.000	1.317e+00	7.780e-07	1.252e-01	-6.526e-07	-6.637e-04	7.749e-07	
8.000	0.000	1.000	9.111e-06	-3.061e-02	-3.487e-02	-6.373e-07	-6.458e-07	-1.596e-02	
		0.000	-2.173e-06	1.120e-02	-3.069e-02	5.418e-07	6.560e-07	-7.225e-04	
		-1.000	3.928e-06	-7.845e-02	-3.965e-02	1.721e-06	1.958e-06	-6.023e-02	
8.000	2.500	1.000	-3.634e-06	1.687e-01	-9.298e-02	1.029e-07	-8.862e-07	1.380e-06	
		0.000	1.808e-06	-1.214e-01	-1.220e-01	2.085e-08	-1.296e-08	-8.960e-07	
		-1.000	-2.085e-06	-3.204e-01	-1.419e-01	-6.122e-08	8.603e-07	1.770e-06	
8.000	5.000	1.000	1.091e-05	-3.062e-02	-3.487e-02	8.614e-07	-3.919e-07	1.596e-02	
		0.000	-2.839e-06	1.121e-02	-3.069e-02	-3.129e-07	8.631e-07	7.222e-04	
		-1.000	5.020e-06	-7.846e-02	-3.965e-02	-1.487e-06	2.118e-06	6.023e-02	

* ESFORÇOS NO DOMÍNIO *

- ELEMENTO 1 -

X	Y	Nxx	Nyy	Nxy	Mxx	Myy	Vy	Vx	Mxy
LAYER 1									
0.000	0.000	1.224e+01	3.016e-01	4.059e-01	-1.952e+00	-1.009e-01	-8.696e-07	-2.658e-01	-6.497e-02
0.000	2.500	8.717e+00	2.945e+00	-1.559e-08	-1.785e+00	-6.128e-01	-9.869e-08	7.591e-01	-8.524e-08
0.000	5.000	1.224e+01	3.016e-01	-4.059e-01	-1.952e+00	-1.009e-01	1.719e-07	-2.658e-01	6.497e-02
4.000	0.000	9.148e+00	-2.008e-07	2.283e-07	-1.299e+00	-4.388e-07	1.413e-07	-2.147e-02	2.196e-07
4.000	2.500	9.127e+00	3.056e-02	-6.241e-09	-1.308e+00	-6.605e-02	-5.391e-08	1.435e-02	-3.699e-08
4.000	5.000	9.148e+00	4.380e-08	-3.470e-07	-1.299e+00	-1.188e-07	-2.145e-07	-2.147e-02	-2.100e-07
8.000	0.000	1.000e+01	-3.016e-01	-4.059e-01	9.296e-07	1.009e-01	-6.441e-08	1.140e-06	6.497e-02
8.000	2.500	1.000e+01	3.813e-01	-6.821e-08	8.020e-07	3.500e-01	-6.304e-08	-2.112e-07	5.448e-08
8.000	5.000	1.000e+01	-3.016e-01	4.059e-01	7.504e-07	1.009e-01	-4.247e-07	7.116e-07	-6.497e-02
LAYER 2									
0.000	0.000	1.525e+00	2.142e-02	2.636e-02	-6.827e-01	-1.595e-02	6.327e-08	-8.708e-01	-1.476e-02
0.000	2.500	9.964e-01	1.619e-01	-1.362e-07	-5.337e-01	-7.680e-02	7.438e-08	-4.814e-01	1.059e-07
0.000	5.000	1.525e+00	2.142e-02	-2.636e-02	-6.827e-01	-1.595e-02	4.323e-07	-8.708e-01	1.476e-02
4.000	0.000	9.595e-01	-2.580e-07	3.156e-07	-6.028e-01	-1.099e-07	2.029e-07	-2.548e-02	-9.831e-08
4.000	2.500	9.607e-01	-6.672e-02	-1.830e-08	-5.947e-01	8.090e-02	-6.467e-08	7.215e-03	4.919e-09
4.000	5.000	9.595e-01	-4.541e-08	-4.095e-07	-6.028e-01	2.631e-07	-3.801e-07	-2.548e-02	1.847e-07
8.000	0.000	1.449e-06	-2.142e-02	-2.636e-02	1.728e-06	1.595e-02	1.084e-06	1.312e-06	1.476e-02
8.000	2.500	5.043e-07	-2.124e-01	-1.449e-07	-5.164e-07	1.630e-01	4.169e-08	-2.591e-08	-1.300e-07
8.000	5.000	1.523e-06	-2.142e-02	2.636e-02	1.962e-06	1.595e-02	-6.257e-07	1.726e-06	-1.476e-02

ANEXO B – ESTRUTURA DO FICHEIRO DAS SOLUÇÕES

O ficheiro *.sol* contém a solução do sistema governativo armazenada em formato binário de dupla precisão. Estes valores correspondem aos pesos das funções de aproximação e encontram-se organizados por blocos na seguinte sequência: X_Ω , q_Ω , X_Γ e q_Γ .

Para X_Ω e q_Ω os valores encontram-se agrupados por elementos, dentro de cada elemento, por camadas e dentro de cada camada por grau de aproximação: para cada grau de polinómio em ξ percorrem-se todos os graus dos polinómios em η . Tendo em conta que os esforços e os deslocamentos são definidos por ordem de aproximação na espessura, a sequência adoptada faz com que sejam considerados primeiro os esforços ou deslocamentos de ordem par e em seguida os de ordem impar.

No caso de X_Γ agrupam-se os valores por elemento, dentro de cada elemento, por faces horizontais e para cada face por grau de aproximação, sendo a sequência adoptada para os graus igual à sequência anteriormente referida.

Refira-se que a ordenação de cada grupo de esforços, tensões ou deslocamentos encontra-se indicada no quadro B.1.

A organização dos valores de q_Γ é igual à adoptada para q_Ω , tendo como única diferença o facto de só existir grau da função de aproximação numa direcção (ξ).

Esforços	Desloc.	Tensões
$\sigma_{xx}^{(i)}$	$u_x^{(i)}$	t_x
$\sigma_{yy}^{(i)}$		
$\sigma_{zz}^{(i)}$	$u_y^{(i)}$	t_y
$\sigma_{yz}^{(i)}$		
$\sigma_{xz}^{(i)}$	$u_z^{(i)}$	t_z
$\sigma_{xy}^{(i)}$		

Quadro B.1 – Sequência adoptada na listagem dos esforços, das tensões e dos deslocamentos.

Como exemplo apresenta-se a organização de X_{Ω} de uma estrutura com um elemento e duas camadas de ordem 2 e 0, respectivamente. Para a primeira camada os esforços σ_{xx} foram aproximados por polinómios do 1º grau, aproximando-se os restantes esforços por polinómios do grau 0. Na segunda camada todos os esforços foram aproximados por polinómios do grau 0.

[illegible]