

Relatório ICIST DTC 13/99

Programa para Aplicação de um Modelo Híbrido-Misto de Tensão à Análise de Lajes

Mário Vicente da Silva

Eduardo M.B. Ribeiro Pereira

Outubro de 1999

ÍNDICE

1. Introdução	1
2. Formulação	2
2.1 Condições Fundamentais	2
2.2 Modelo Híbrido-Misto de Tensão	4
3. Organização do Programa	6
3.1 Rotinas Principais	6
3.2 Geometria	7
3.3 Funções de Aproximação	7
3.4 Montagem do Sistema Governativo	9
3.4.1 Mudança de Coordenadas	9
3.4.2 Blocos do Sistema Governativo	12
3.4.3 Cálculo dos Operadores Elementares	13
4. Introdução dos Dados	14
4.1 Estrutura do Ficheiro de Dados	14
4.1.1 Nós (1ºBloco)	15
4.1.2 Lados (2ºBloco)	15
4.1.3 Elementos (3ºBloco)	16
4.1.4 Carregamento (4ºBloco)	17
5. Pós-Processamento	19
6. Bibliografia	20
<u>ANEXO A - Exemplo de Aplicação</u>	21

1. INTRODUÇÃO

O presente relatório pretende descrever o modo de utilização/funcionamento de um programa para a análise elástica linear de lajes de Reissner, desenvolvido no âmbito do núcleo de Análise de Estruturas do Instituto de Engenharia de Estruturas Território e Construção do Instituto Superior Técnico, com apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia através do projecto PBICT/C/CEG/2342/95.

Este programa baseia-se numa formulação não convencional de elementos finitos: Híbridos-Mistos de Tensão. São utilizados Polinómios de Legendre como funções de aproximação de tensões e deslocamentos. Para modelar a geometria do domínio consideram-se elementos quadrangulares de 4 ou 8 nós.

Quanto ao carregamento considerou-se que a estrutura podia estar sujeita a dois tipos de cargas diferentes. O primeiro consiste em forças de massa transversais, sendo o segundo constituído por cargas aplicadas nas fronteiras estáticas.

Este programa foi escrito em *C Standard*, sobre uma plataforma de programação elaborada para o desenvolvimento de programas de elementos finitos para o cálculo de estruturas.

2. FORMULAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se um pequeno resumo da formulação dos elementos finitos Híbridos-Mistos de Tensão para a análise de lajes de Reissner.

2.1 Condições Fundamentais

As condições fundamentais que regem os problemas de elasticidade plana podem ser expressas do seguinte modo,

Compatibilidade	Relações Constitutivas	Equilíbrio
$\varepsilon = D^* u \text{ em } V \quad (1)$	$f\sigma = \varepsilon \quad (3)$	$D\sigma + b = 0 \text{ em } V \quad (4)$
$u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u \quad (2)$		$N\sigma = t \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (5)$

em que,

u é o vector que agrupa as componentes de deslocamento;

$$u^T = \{\theta_x \quad \theta_y \quad w\}$$

$\bar{u}$ é o vector dos deslocamentos impostos nas fronteiras cinemáticas (Γ_u);

ε é o vector das componentes das deformações de laje;

$$\varepsilon^T = \{\chi_{xx} \quad \chi_{yy} \quad \chi_{xy} \quad \gamma_x \quad \gamma_y\}$$

σ é o vector das componentes dos esforços de laje;

$$\sigma^T = \{m_{xx} \quad m_{yy} \quad m_{xy} \quad v_x \quad v_y\}$$

b é o vector das forças de massa;

$$b^T = \{0 \quad 0 \quad q\}$$

t é o vector das forças generalizadas aplicadas nas fronteiras estáticas (Γ_σ);

$$t^T = \{m_x \quad m_y \quad p\}$$

D é o operador diferencial de equilíbrio;

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

D^* é o operador diferencial de compatibilidade (adjunto de D);

$$D^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \\ 1 & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \cdot & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

N é a matriz das componentes da normal exterior associada ao operador diferencial de equilíbrio;

f é a matriz de flexibilidade;

$$f = \frac{12}{E \cdot t^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nu & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2(1+\nu) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(1+\nu)t^2}{6\varphi} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(1+\nu)t^2}{6\varphi} \end{bmatrix}$$

onde E representa o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson e φ o factor de forma ao corte para o qual se adopta o valor de 5/6

2.2 Modelo Híbrido-Misto de Tensão

Neste tipo de elemento finito, são aproximados de modo independente os esforços e os deslocamentos no domínio:

$$\sigma = S_v \cdot X_v \quad (6) \quad u = U_v \cdot q_v \quad (7)$$

São igualmente aproximados os deslocamentos na fronteira estática,

$$u = U_\Gamma \cdot q_\Gamma \quad (8)$$

sendo S_v , U_v e U_Γ as matrizes das funções de aproximação e X_v , q_v e q_Γ os vector dos pesos das funções de aproximação.

As condições de compatibilidade e equilíbrio no domínio (1) e (4) são impostas de forma ponderada sendo utilizadas, respectivamente, como funções de ponderação as funções de aproximação dos esforços e dos deslocamentos no domínio:

$$\int_V S_v^T \epsilon \, dV = \int_V S_v^T D^* u \, dV \quad (9)$$

$$\int_V U_v^T (D\sigma + b) \, dV = 0 \quad (10)$$

Paralelamente, a condição de equilíbrio na fronteira estática (5) é imposta ponderadamente utilizando como funções de peso as funções de aproximação dos deslocamentos na fronteira,

$$\int_{\Gamma_\sigma} U_\Gamma^T (N\sigma) \, d\Gamma_\sigma = \int_{\Gamma_\sigma} U_\Gamma^T \cdot t \, d\Gamma_\sigma \quad (11)$$

Introduzindo a aproximação do campo dos esforços (6) nas condições de equilíbrio (10) e (11) é possível descrever as condições de equilíbrio na forma:

$$A_v^T X_v = Q_v \quad (12)$$

$$-A_\Gamma^T X_v = Q_\Gamma \quad (13)$$

em que,

$$\begin{aligned} A_V &= \int_V (DS_V)^T U_V dV & Q_V &= - \int_V U_V^T \cdot b dV \\ A_\Gamma &= \int_{\Gamma_\sigma} (NS_V)^T U_\Gamma d\Gamma_\sigma & Q_\Gamma &= - \int_{\Gamma_\sigma} U_\Gamma^T \cdot t d\Gamma_\sigma \end{aligned}$$

A condição de compatibilidade do modelo de elementos finitos,

$$e = A_\Gamma q_\Gamma - A_V q_V \quad (14)$$

relaciona as deformações generalizadas,

$$e = \int_V S_V^T \varepsilon dV \quad (15)$$

com os parâmetros de deslocamento q_V e q_Γ , podendo ser obtida através de integração por partes da equação de compatibilidade (9) tendo em conta as aproximações (7) e (8)

$$e = \int_{\Gamma_\sigma} (NS_V)^T u d\Gamma_\sigma - \int_{\Gamma_\sigma} (DS_V)^T u dV$$

A introdução das relações constitutivas (3) na definição (15) permite escrever as relações constitutivas do modelo de elementos finitos na forma

$$e = F X_V \quad (16)$$

em que,

$$F = \int_V S_V^T f S_V dV$$

O sistema governativo é obtido pela combinação das relações de equilíbrio (12), (13) de compatibilidade (15) e constitutivas (16) através da eliminação das deformações generalizadas.

$$\begin{bmatrix} F & A_V & -A_\Gamma \\ A_V^T & \cdot & \cdot \\ -A_\Gamma^T & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_V \\ q_V \\ q_\Gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_V \\ Q_\Gamma \end{Bmatrix}$$

3. ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA

Neste capítulo é abordada genericamente a organização do programa por forma a possibilitar um entendimento mais fácil do seu funcionamento, sem se descreverem exaustivamente o modo de programação.

A plataforma de programação sobre a qual foi desenvolvido este programa cria, a partir de um ficheiro de dados, uma estrutura que descreve a topologia do problema. Com base nesta estrutura é posteriormente resolvido o sistema governativo de equações.

A resolução do sistema pode ser feita através de dois métodos distintos. O primeiro consiste no método de resolução iterativo dos gradientes conjugados, sendo o segundo o método de eliminação de Gauss, utilizando a rotina MA47 da biblioteca Harwell para sistemas esparsos e simétricos.

Esta plataforma está preparada para processamento sequencial ou paralelo, sendo para este programa utilizado somente o processamento sequencial.

Deste modo, o programa é constituído por um conjunto de rotinas que definem a posição e a dimensão dos diferentes blocos que constituem o sistema governativo e que calculam os termos deste sistema. É ainda composto por uma rotina de pós-processamento, que executa o tratamento dos resultados obtidos.

3.1 Rotinas Principais

A interligação com a plataforma de programação é feita através das seguintes rotinas:

void LocalStructureSetup () – onde são lidos e introduzidos os dados nas estruturas locais;

int SetupParts (int current_subdomain) – define as organização/dimensões dos blocos que constituem a matriz do sistema governativo;

int ComputeMatrix (int current_subdomain) – rotina na qual se executa a montagem do triângulo superior da matriz do sistema;

int ComputeRhs (int wich_subdomain) – efectua a montagem do vector dos termos independentes.

int PostProc (char *nome) – rotina na qual se executa o pós-processamento.

Estas rotinas são escritas pelo programador e variam consoante a formulação de elementos finitos utilizada.

3.2 Geometria

A modelação da geometria é feita através de três estruturas base, definidas na plataforma de programação: o Nó (*node*), o Lado (*edge*) e o Elemento (*loop*).

Neste programa consideram-se apenas elementos com 4 lados, sendo cada lado constituído por 2 ou 3 nós, ficando assim definida a sua orientação do primeiro para o último nó.

Existem dois tipos distintos de elementos (os elementos de 4 ou 8 nós). Um elemento é considerado de 8 nós, sempre que pelo menos um dos seus lados tenha 3 nós, quando necessário são considerados nós virtuais a meio dos lados de 2 nós por forma a definir completamente o elemento de 8 nós.

Deste modo o programa permite a utilização simultânea de elementos com diferente número de nós sem que haja problemas de compatibilidade de geometria na estrutura.

3.3 Funções de Aproximação

Para a aproximação dos esforços (6) e dos deslocamentos no domínio (7) e nas fronteiras estáticas (8), utilizaram-se polinómios de Legendre. Estas funções de aproximação encontram-se no referencial local (ξ, η) dos elementos, de modo a simplificar as operações de integração necessárias à montagem dos operadores elementares.

O programa permite adoptar diferentes graus máximos para os polinómios de aproximação de cada esforço/deslocamento. É no entanto de referir que uma escolha inadequada dos graus máximos dos polinómios pode traduzir-se no aparecimento de modos espúrios no sistema governativo.

A estrutura adoptada para as funções de aproximação no domínio é:

$$S_V = \left[\begin{array}{cccc|cccc} P_\xi^0 P_\eta^0 & & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & & \\ & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & \\ & & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & \\ & & & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & & P_\xi^0 P_\eta^1 \\ & & & & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & \\ & & & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & \\ & & & & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & \\ & & & & & & & P_\xi^0 P_\eta^1 \end{array} \right] \dots\dots$$

$$U_V = \left[\begin{array}{ccc|ccc} P_\xi^0 P_\eta^0 & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & & \\ & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & P_\xi^0 P_\eta^1 & \\ & & P_\xi^0 P_\eta^0 & & & P_\xi^0 P_\eta^1 \\ & & & & & \dots\dots\dots \end{array} \right]$$

representando P_x^i o polinómio de Legendre do grau i na direcção x

Para formar todas as combinações $P_{\xi}^i P_{\eta}^j$ adoptou-se um ciclo no qual, para cada grau do polinómio em ξ se percorria todos os graus do polinómio em η . Sempre que, numa combinação o grau i ou j for superior ao grau máximo adoptado na aproximação, a coluna que lhe corresponde não é considerada.

Apresenta-se a montagem da estrutura da matriz da função de aproximação dos esforços como exemplo, adoptado-se os graus 1 e 0 para a aproximação dos momentos e dos esforços transversos, respectivamente.

$$S_V = \begin{bmatrix} P_{\xi}^0 P_{\eta}^0 & . & . & . & . & P_{\xi}^0 P_{\eta}^1 & . & . & P_{\xi}^1 P_{\eta}^0 & . & . & P_{\xi}^1 P_{\eta}^1 & . & . \\ . & P_{\xi}^0 P_{\eta}^0 & . & . & . & . & P_{\xi}^0 P_{\eta}^1 & . & . & P_{\xi}^1 P_{\eta}^0 & . & . & P_{\xi}^1 P_{\eta}^1 & . \\ . & . & P_{\xi}^0 P_{\eta}^0 & . & . & . & . & P_{\xi}^0 P_{\eta}^1 & . & . & P_{\xi}^1 P_{\eta}^0 & . & . & P_{\xi}^1 P_{\eta}^1 \\ . & . & . & P_{\xi}^0 P_{\eta}^0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & P_{\xi}^0 P_{\eta}^0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & P_{\xi}^0 P_{\eta}^0 & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Para a aproximação dos deslocamentos nas fronteiras adoptou-se a seguinte estrutura:

$$U_r = \left[\begin{array}{c|c|c} P_\zeta^0 & P_\zeta^1 & \dots \\ P_\zeta^0 & P_\zeta^1 & \dots \\ P_\zeta^0 & P_\zeta^1 & \dots \end{array} \right]$$

sendo ζ a coordenada local do lado.

3.4 Montagem do Sistema Governativo

A montagem dos termos que constituem o sistema governativo é realizada através de integrações analíticas, utilizando as propriedades de ortogonalidade dos Polinómios de Legendre. Para realizar estas integrações é necessário recorrer à matriz Jacobiana dado que as funções de interpolação estão escritas no referencial local do elemento.

3.4.1 Mudança de Coordenadas

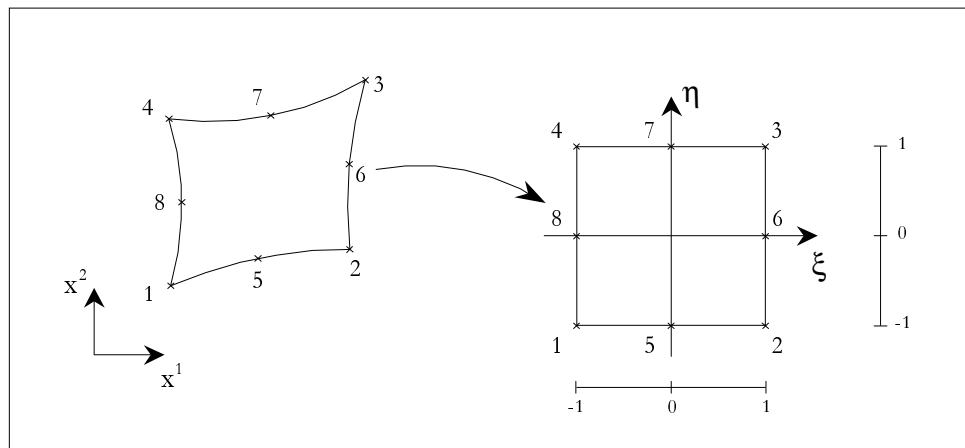


Figura 1 – Mudança de Coordenadas

No caso mais geral (o elemento de 8 nós) obtém-se a seguinte expressão para a transformação de coordenadas:

$$x^k = \sum_{i=1}^8 \varphi_i x_i^k \quad k=1,2 \quad (17)$$

onde φ_i são as funções de forma do elemento serendipiano de 8 nós e x_i^k são as coordenadas do nó i na direcção k

Sendo as funções φ_i polinómios, a expressão da transformação de coordenadas (17) pode ainda ser desenvolvida na sua forma polinomial:

$$x^k = \alpha_{00}^k + \alpha_{10}^k \xi + \alpha_{01}^k \eta + \alpha_{20}^k \xi^2 + \alpha_{11}^k \xi \eta + \alpha_{02}^k \eta^2 + \alpha_{21}^k \xi^2 \eta + \alpha_{12}^k \xi \eta^2$$

onde,

$$\begin{aligned} \alpha_{00}^k &= \frac{1}{2}(x_5^k + x_6^k + x_7^k + x_8^k) - \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) & \alpha_{11}^k &= \frac{1}{4}(x_1^k - x_2^k + x_3^k - x_4^k) \\ \alpha_{10}^k &= \frac{1}{2}(x_6^k - x_8^k) & \alpha_{01}^k &= \frac{1}{2}(x_7^k - x_5^k) \\ \alpha_{12}^k &= \frac{1}{4}(x_3^k - x_1^k + x_2^k - x_4^k) - \frac{1}{2}(x_6^k - x_8^k) & \alpha_{21}^k &= \frac{1}{4}(x_3^k - x_1^k + x_4^k - x_2^k) - \frac{1}{2}(x_7^k - x_5^k) \\ \alpha_{20}^k &= \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) - \frac{1}{2}(x_5^k + x_7^k) & \alpha_{02}^k &= \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) - \frac{1}{2}(x_6^k + x_8^k) \end{aligned}$$

Para esta transformação de coordenadas a matriz Jacobiana e o seu determinante tomam as seguintes expressões:

$$J = \begin{bmatrix} x^1_{,\xi} & x^2_{,\xi} \\ x^1_{,\eta} & x^2_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde,

$$\begin{aligned} x^k_{,\xi} &= (\alpha_{10}^k + \alpha_{11}^k \eta + \alpha_{12}^k \eta^2) + 2(\alpha_{20}^k + \alpha_{21}^k \eta) \xi \\ x^k_{,\eta} &= (\alpha_{01}^k + \alpha_{11}^k \xi + \alpha_{21}^k \xi^2) + 2(\alpha_{02}^k + \alpha_{12}^k \xi) \eta \end{aligned}$$

$$|J| = J_{00} + J_{10}\xi + J_{01}\eta + J_{20}\xi^2 + J_{11}\xi\eta + J_{02}\eta^2 + J_{30}\xi^3 + J_{21}\xi^2\eta + J_{12}\xi\eta^2 + J_{03}\eta^3 + J_{22}\xi^2\eta^2 \quad (19)$$

com,

$$\begin{aligned} J_{00} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{10}^2 & J_{22} &= 3(\alpha_{21}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{21}^2) \\ J_{10} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{10}^2 + 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{20}^2) & J_{01} &= \alpha_{11}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{11}^2 + 2(\alpha_{10}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{10}^2) \\ J_{12} &= \alpha_{11}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{11}^2 + 4(\alpha_{21}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{21}^2) & J_{21} &= \alpha_{21}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{21}^2 + 4(\alpha_{20}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{20}^2) \\ J_{20} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{21}^1 \alpha_{10}^2 + 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{20}^2) & J_{02} &= \alpha_{12}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{12}^2 + 2(\alpha_{11}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{11}^2) \\ J_{30} &= 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{21}^1 \alpha_{20}^2) & J_{03} &= 2(\alpha_{12}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{12}^2) \\ J_{11} &= 2(\alpha_{10}^1 \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{10}^2) + 4(\alpha_{20}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{20}^2) \end{aligned}$$

O operador diferencial de equilíbrio, D , no sistema de coordenadas locais pode ser expresso do seguinte modo:

$$D = \frac{1}{|J|} D' - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (20)$$

com,

$$D' = \begin{bmatrix} x^2_{,\eta} & \cdot & -x^1_{,\eta} & \cdot & \cdot \\ \cdot & -x^1_{,\eta} & x^2_{,\eta} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x^2_{,\eta} & -x^1_{,\eta} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} x^2_{,\xi} & \cdot & -x^1_{,\xi} & \cdot & \cdot \\ \cdot & -x^1_{,\xi} & x^2_{,\xi} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & x^2_{,\xi} & -x^1_{,\xi} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

podendo também D' ser escrito na seguinte forma:

$$D' = (\mathcal{D}_{21}\xi^2 + 2\mathcal{D}_{12}\xi\eta + \mathcal{D}_{11}\xi + 2\mathcal{D}_{02}\eta + \mathcal{D}_{10}) \frac{\partial}{\partial \xi} - (\mathcal{D}_{12}\eta^2 + 2\mathcal{D}_{21}\xi\eta + \mathcal{D}_{11}\eta + 2\mathcal{D}_{20}\xi + \mathcal{D}_{10}) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

sendo,

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij}^2 & \cdot & -\alpha_{ij}^1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\alpha_{ij}^1 & \alpha_{ij}^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{ij}^2 & -\alpha_{ij}^1 \end{bmatrix}$$

É ainda possível escrever a matriz das componentes da matriz das componentes da normal, N , no sistema de coordenadas (ξ, η) :

$$N = \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} N' \quad (21)$$

$$N' = \begin{bmatrix} n_x & \cdot & n_y & \cdot & \cdot \\ \cdot & n_y & n_x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & n_x & n_y \end{bmatrix}, \quad n_x = \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \quad n_y = -\frac{\partial x}{\partial \zeta}$$

onde ζ é a coordenada local do lado, tomando os valores $\pm\xi$ ou $\pm\eta$ consoante o lado em questão.

A matriz n de transformação das coordenadas locais do lado nas coordenadas globais (x, y) tem a seguinte expressão:

$$n = \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} n' \quad (22)$$

em que,

$$n' = \begin{bmatrix} n_x & -n_y & \cdot \\ -n_y & n_x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \end{bmatrix}$$

3.4.2 Blocos do Sistema Governativo

Adoptado a mudança de coordenadas (17), os blocos que constituem o sistema governativo podem ser expressos na seguinte forma:

$$F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_v^T f S_v |J| d\xi d\eta \quad (23)$$

$$A_v = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D^T S_v)^T U_v d\xi d\eta \quad (24)$$

$$A_r = \int_{-1}^1 (N^T S_v)^T U_r d\zeta \quad (25)$$

$$Q_V = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_V^T \cdot b |J| d\xi d\eta \quad (26)$$

$$Q_\Gamma = - \int_{-1}^1 U_V^T \cdot n' t d\zeta \quad (27)$$

sendo o vector das tracções aplicadas na fronteira, t , escrito nas coordenadas locais do respectivo lado.

3.4.3 Cálculo dos Operadores Elementares

Com base nas expressões (23) a (27) e tendo em conta o tipo de aproximações adoptadas e as definições (19) a (22) é possível com base numa tabela de integrações como a apresentada no anexo A em [5], proceder à montagem dos operadores para cada elemento.

4. INTRODUÇÃO DOS DADOS

A introdução de dados é feita através de um ficheiro ASCII, cujo nome é o primeiro parâmetro de execução do programa.

A versão do programa é muito limitado quanta a detecção de dados mal introduzidos, pelo que o utilizador deve ser cuidadoso na criação do ficheiro de dados. Qualquer valor mal introduzido pode provocar a interrupção do programa ou produzir resultados não pretendidos.

De seguida descreve-se detalhadamente a estrutura do ficheiro de dados, sendo apresentado em anexo um exemplo de aplicação.

4.1 Estrutura do Ficheiro de Dados

A primeira linha do ficheiro deverá conter o título do exemplo a testar, não devendo este ter mais de 80 caracteres.

Seguem-se 4 blocos nos quais se fornece a informação necessária para a definição dos nós, dos lados, dos elementos e do carregamento. Para assinalar o final de cada bloco dever-se-á introduzir uma linha com o algarismo 0 (zero).

A última linha do ficheiro de dados deverá ser constituída dois números inteiros, os quais definem:

- i) o número de subdomínios, devendo este tomar sempre o valor 1 (uma vez que não estamos a utilizar um processamento em paralelo);
- ii) o modo de resolução, correspondendo o valor 0 ao modo de resolução iterativo e o valor 6 ao modo de resolução directo.

4.1.1 Nós (1ºBloco)

Cada linha do 1º bloco deverá ter a seguinte estrutura:

<i>id</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>idl</i>
-----------	----------	----------	------------

sendo,

<i>id</i>	número de identificação do nó (inteiro positivo)
<i>x</i>	coordenada do nó segundo x
<i>y</i>	coordenada do nó segundo y
<i>idl</i>	número de identificação de um lado que contem o nó

4.1.2 Lados (2ºBloco)

A estrutura das linhas do 2º bloco é:

<i>id</i>	<i>nnos</i>	<i>idn¹ ... idn^{nnos}</i>	<i>eesq</i>	<i>edir</i>	<i>lccw</i>	<i>lcw</i>	<i>rccw</i>	<i>rcw</i>	<i>ref</i>	θ_1	θ_2	<i>w</i>
-----------	-------------	---	-------------	-------------	-------------	------------	-------------	------------	------------	------------	------------	----------

sendo,

<i>id</i>	número de identificação do lado (inteiro positivo)
<i>nnos</i>	número de nós do lado (2 ou 3)
<i>idnⁱ</i>	número de identificação do nó <i>i</i>
<i>eesq</i>	número de identificação do elemento à esquerda do lado
<i>edir</i>	número de identificação do elemento à direita do lado
<i>lccw, lcw, rccw, rcw</i>	número de identificação dos lados adjacentes (fig. 2)

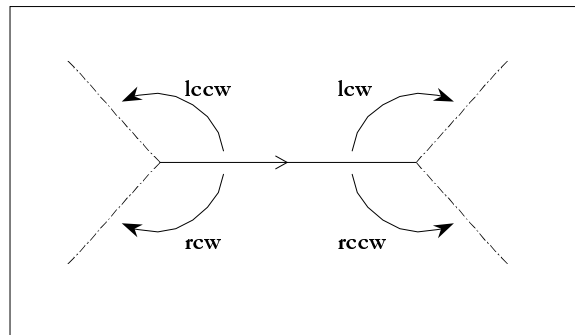


Figura 2 – Identificação dos Lados Adjacentes

- ref** referencial utilizado para o lado, correspondendo 0 ao referencial global e 1 ao referencial local
- θ_1, θ_2, w** grau máximo do polinómio de Legendre para a aproximação dos deslocamentos no lado (sendo possível impedir o deslocamento pretendido atribuindo ao grau o valor de -1)

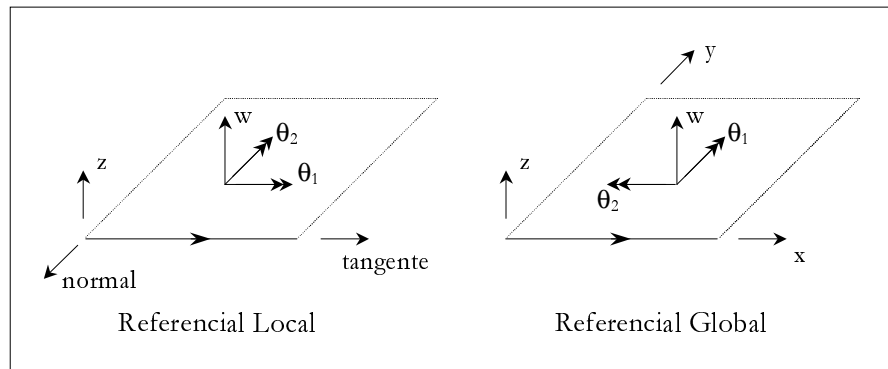


Figura 3 – Referenciais do Lado

4.1.3 Elementos (3ºBloco)

A estrutura das linhas do 3º bloco é:

<i>id</i>	<i>idl</i>	<i>sd</i>	m_{xx}	m_{yy}	m_{xy}	v_x	v_y	θ_x	θ_y	w	E	ν	t
-----------	------------	-----------	----------	----------	----------	-------	-------	------------	------------	-----	-----	-------	-----

sendo,

- id*** número de identificação do elemento (inteiro positivo)
- idl*** número identificação de um lado que pertence ao elemento
- sd*** identificação do subdomínio (deve ter sempre o valor 1)
- $m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}, v_x, v_y$** máximo grau do polinómio de Legendre para a aproximação do respectivo esforços no domínio
- θ_x, θ_y, w** máximo grau do polinómio de Legendre para a aproximação do respectivo deslocamento no domínio
- E** valor do módulo de elasticidade
- ν** valor do coeficiente de Poisson
- t** valor da espessura da laje

4.1.4 Carregamento (4ºBloco)

A estrutura das linhas do 4º bloco é:

<i>id</i>	<i>E/L</i>	<i>idc</i>	<i>tca</i>	<i>nval</i>	<i>val</i> ¹ ...	<i>val</i> ^{nval}
-----------	------------	------------	------------	-------------	-----------------------------	----------------------------

sendo,

- id*** número de identificação do carregamento (inteiro positivo)
- E/L*** o caracter E (*edge*) ou L (*loop*) identificam, respectivamente, se a carga se encontra aplicada na fronteira ou elemento. O programa não permite a aplicação de cargas em lados curvos.
- idc*** número de identificação do lado/elemento carregado
- tca*** este parâmetro só deve ser fornecido para uma carga aplicada na fronteira e define o tipo de carga aplicada ¹:

<i>tca</i>	Tipo de Carga
0	Carregamento transversal (p)
1	Momento (m ₁)
2	Momento (m ₂)

sendo adoptado para o carregamento o referencial usado para lado

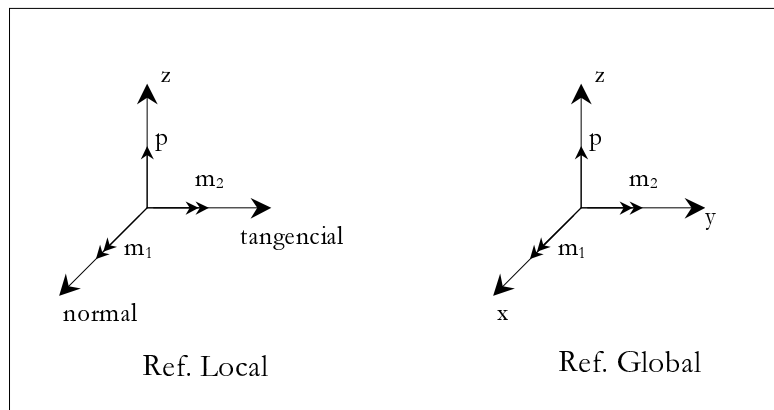


Figura 4 – Direcções do Carregamento

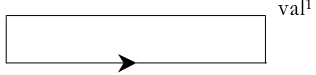
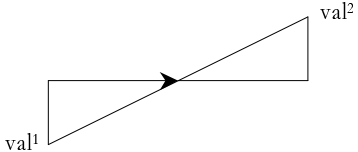
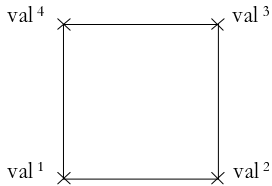
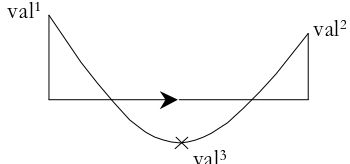
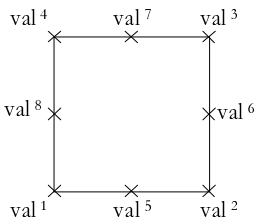
¹ Quando a carga se encontra aplicada num elemento assume-se que esta é uma carga transversal.

$nval$

número de valores da carga fornecidos

val^i

valor da carga na posição i

$nval$	Carga Aplicada no Lado (E)	$nval$	Carga Aplicada no Elemento (L)
1		1	carga uniformemente distribuída
2		4	
3		8	

5. PÓS-PROCESSAMENTO

Como resultado do pós-processamento o programa cria 2 ficheiros:

i) o ficheiro com a extensão *ff*, contém o valor dos esforços e dos deslocamentos no domínio, sendo o número de pontos nos quais se pretende calcular estes valores introduzido pelo utilizador durante a execução do pós-processamento.

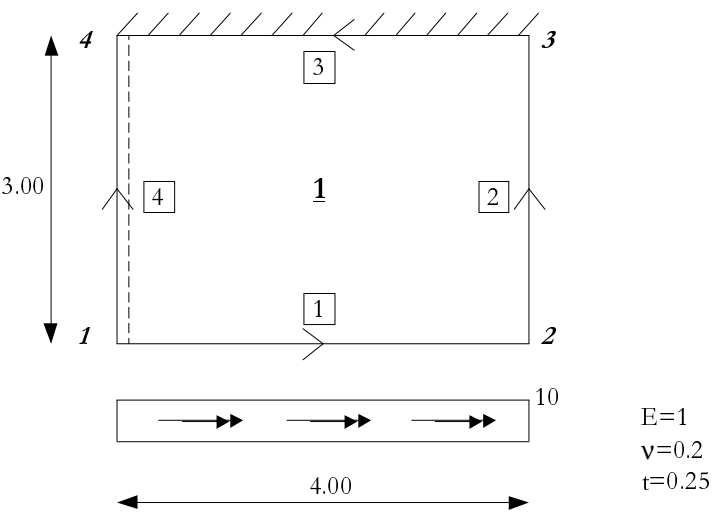
ii) no ficheiro com a extensão *so* armazena-se, em formato binário de dupla precisão, a solução do sistema. São escritos em primeiro lugar os valores de X_v (para todos os elementos) seguidos dos valores de q_v (igualmente para todos os elementos) e finalmente os valores q_r (para todas as fronteiras estáticas), sendo a ordem dos valores definida pela estrutura adoptada para as matrizes das funções de aproximação (cap. 3.3).

Para uma análise mais fácil dos resultados obtidos, poder-se-á recorrer a um programa auxiliar que executa uma representação gráfica dos resultados, utilizando os ficheiros das soluções e da entrada de dados.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] E. M. B. R. Pereira, *Elementos Finitos de Tensão - Aplicação à Análise Elástica de Estruturas*, Tese de doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, (1993);
- [2] I. Cismasiu, J. P. Moitinho de Almeida, L. M. S. Castro e D. C. Harbis, *Parallel Solution Techniques for Hybrid Mixed Finite Element Models*, in Innovative Computational Methods for Structural Mechanics, Edited by M Papadrakakis and B.H.V. Topping, Saxe-Coburg Publications, Chapter 6, pp. 109-125, (1999);
- [3] *Harwell Subroutine Library*, Release 11 – Vol. I, Theoretical Studies Department of AEA Technology, pp.377-384, UK (1993);
- [4] E. Reissner, *The effect of Transverse Shear Deformation on the Bending Elastic Plates*, J Appl Mech, Vol. 12, A69-A77, (1945);
- [5] M. Vicente da Silva e E. M. B. R. Pereira, *Programa para Aplicação de um Modelo Híbrido-Misto de Tensão à Análise de Placas*, Relatório ICIST DTC 12/99, (1999).

ANEXO A - EXEMPLO DE APLICAÇÃO



Nota: no domínio aproximaram-se os momentos, os esforços transversos, os deslocamentos transversais e as rotações por polinómios do 6º, 5º, 4º e 5º grau, respectivamente; na aproximação dos deslocamentos nas fronteiras estáticas utilizaram-se polinómios do 5º grau para os deslocamentos transversais e do 6º grau para as rotações.

Ficheiro de entrada de dados:

```
Exemplo de Laje
1 0.000 0.000 1
2 4.000 0.000 1
3 4.000 3.000 2
4 0.000 3.000 3
0
1 2 1 2 1 0 4 2 2 4 0 6 6 5
2 2 2 3 1 0 1 3 3 1 0 6 6 5
3 2 3 4 1 0 2 4 4 2 0 -1 -1 -1
4 2 1 4 0 1 1 3 3 1 0 6 -1 -1
0
1 1 1 6 6 6 5 5 5 5 4 1 .2 .25
0
1 E 1 1 1 10
0
1 0
```

Listagem do ficheiro *.lfi*:

* ESFORÇOS *						

- ELEMENTO 1 -						
X	Y	Mxx	Myy	Mxy	Vx	Vy
0.0000	0.0000	4.6522e-11	1.0000e+01	1.2577e-11	-1.0640e+02	1.1608e-12
2.0000	0.0000	-1.1647e+00	1.0000e+01	1.0585e-11	-2.1807e+01	1.6402e-12
4.0000	0.0000	8.5373e-12	1.0000e+01	3.6266e-11	-3.7536e-11	-1.4178e-11
0.0000	1.5000	-2.6942e-13	6.0309e-01	-4.1260e+00	2.0139e-01	1.7964e+00
2.0000	1.5000	3.5843e-01	5.4183e+00	-2.0328e+00	7.6324e-01	-9.0747e-01
4.0000	1.5000	-2.0369e-11	6.9715e+00	2.3420e-11	6.8160e-12	1.3263e+00
0.0000	3.0000	-4.1335e-12	-6.5081e-01	6.3144e-01	1.9007e+01	-5.6652e-01
2.0000	3.0000	4.3510e-01	3.7538e+00	1.5236e-01	5.7472e+00	-3.4473e-01
4.0000	3.0000	1.0069e-11	4.8458e+00	5.1476e-11	4.5491e-11	-7.9688e+00

* DESLOCAMENTOS *						

- ELEMENTO 1 -						
X	Y	TETAx	TETAy	w		
0.0000	0.0000	1.0402e+04	-1.9233e+03	2.6515e+01		
2.0000	0.0000	4.8930e+03	-1.3761e+04	-1.6616e+04		
4.0000	0.0000	7.9557e+02	-1.6549e+04	-2.1870e+04		
0.0000	1.5000	1.8681e+03	-1.0431e+02	-4.6142e+00		
2.0000	1.5000	1.3925e+03	-4.9062e+03	-3.4364e+03		
4.0000	1.5000	-1.5542e+02	-6.8741e+03	-4.8373e+03		
0.0000	3.0000	5.8087e+02	1.3662e+02	-2.9596e+01		
2.0000	3.0000	4.3881e+01	-5.5236e+00	-4.5594e+00		
4.0000	3.0000	-3.6381e+02	-7.3042e+00	-7.3030e+00		