

# **Relatório ICIST DTC 12/99**

---

## Programa para Aplicação de um Modelo Híbrido-Misto de Tensão à Análise de Placas

---

Mário Vicente da Silva  
Eduardo M. B. R. Pereira

Outubro de 1999

## ÍNDICE

|                                                |           |
|------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introdução</b>                           | <b>1</b>  |
| <b>2. Formulação</b>                           | <b>2</b>  |
| 2.1 Condições Fundamentais                     | 2         |
| 2.2 Modelo Híbrido-Misto de Tensão             | 3         |
| <b>3. Organização do Programa</b>              | <b>6</b>  |
| 3.1 Rotinas Principais                         | 6         |
| 3.2 Geometria                                  | 7         |
| 3.3 Funções de Aproximação                     | 7         |
| 3.4 Montagem do Sistema Governativo            | 8         |
| 3.4.1 Mudança de Coordenadas                   | 9         |
| 3.4.2 Blocos do Sistema Governativo            | 11        |
| 1.1.3 Cálculo dos Operadores Elementares       | 11        |
| <b>4. Introdução dos Dados</b>                 | <b>12</b> |
| 4.1 Estrutura do Ficheiro de Dados             | 12        |
| 4.1.1 Nós (1ºBloco)                            | 13        |
| 4.1.2 Lados (2ºBloco)                          | 13        |
| 1.1.3 Elementos (3ºBloco)                      | 14        |
| 1.1.4 Carregamento (4ºBloco)                   | 15        |
| <b>5. Pós-Processamento</b>                    | <b>16</b> |
| <b>6. Bibliografia</b>                         | <b>17</b> |
| <b><u>ANEXO A</u> - Polinómios de Legendre</b> | <b>18</b> |
| <b><u>ANEXO B</u> - Exemplo de Aplicação</b>   | <b>21</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

O presente relatório pretende descrever o modo de utilização/funcionamento de um programa para a análise elástica linear de placas, desenvolvido no âmbito do núcleo de Análise de Estruturas do Instituto de Engenharia de Estruturas Território e Construção do Instituto Superior Técnico, com apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia através do projecto PBICT/C/CEG/2342/95.

Este programa baseia-se numa formulação não convencional de elementos finitos Híbridos-Mistos de Tensão. São utilizados Polinómios de Legendre como funções de aproximação de tensões e deslocamentos. Para modelar a geometria do domínio consideram-se elementos quadrangulares de 4 ou 8 nós.

Quanto ao carregamento considerou-se que a estrutura podia estar sujeita a dois tipos de cargas diferentes. O primeiro consiste em forças de massa uniformemente distribuídas, sendo o segundo constituído por distribuições lineares de tensões na fronteira.

Este programa foi escrito em *C Standard*, sobre uma plataforma de programação elaborada para o desenvolvimento de programas de elementos finitos para o cálculo de estruturas.

## 2. FORMULAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se um pequeno resumo da formulação dos elementos finitos Híbridos-Mistos de Tensão para a análise de placas.

### 2.1 Condições Fundamentais

As condições fundamentais que regem os problemas de elasticidade plana podem ser expressas do seguinte modo,

| Compatibilidade                               | Relações Constitutivas            | Equilíbrio                                        |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\varepsilon = D^* u \text{ em } V \quad (1)$ | $f\sigma = \varepsilon \quad (3)$ | $D\sigma + b = 0 \text{ em } V \quad (4)$         |
| $u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u \quad (2)$  |                                   | $N\sigma = t \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (5)$ |

em que,

$u$  é o vector que agrupa as componentes de deslocamento;

$$u^T = \{u_x \quad u_y\}$$

$\bar{u}$  é o vector dos deslocamentos impostos nas fronteiras cinemáticas ( $\Gamma_u$ );

$\varepsilon$  é o vector das componentes do tensor das deformações;

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}\}$$

$\sigma$  é o vector das componentes do tensor das tensões;

$$\sigma^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}\}$$

$b$  é o vector das forças de massa;

$$b^T = \{b_x \quad b_y\}$$

$t$  é o vector das tensões aplicadas nas fronteiras estáticas ( $\Gamma_\sigma$ );

$$t^T = \{t_x \quad t_y\}$$

$D$  é o operador diferencial de equilíbrio;

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$D^*$  é o operador diferencial de compatibilidade (transposto de  $D$ );

$N$  é a matriz das componentes da normal exterior associada ao operador diferencial de equilíbrio;

$f$  é a matriz de flexibilidade e tem a seguinte configuração no caso de se tratar de um estado plano de tensão (EPT),

$$f = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & \cdot \\ -\nu & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \cdot (1 + \nu) \end{bmatrix}$$

ou de um estado plano de deformação (EPD),

$$f = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & \cdot \\ -\nu & 1-\nu & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix}$$

onde  $E$  representa o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

## 2.2 Modelo Híbrido-Misto de Tensão

Neste tipo de elemento finito, são aproximadas de modo independente as tensões e os deslocamentos no domínio:

$$\sigma = S_v \cdot X_v \quad (6) \quad u = U_v \cdot q_v \quad (7)$$

São igualmente aproximados os deslocamentos na fronteira estática,

$$u = U_\Gamma \cdot q_\Gamma \quad (8)$$

sendo  $S_v$ ,  $U_v$  e  $U_\Gamma$  as matrizes das funções de aproximação e  $X_v$ ,  $q_v$  e  $q_\Gamma$  os vector dos pesos das funções de aproximação.

As condições de compatibilidade e equilíbrio no domínio (1) e (4) são impostas de forma ponderada sendo utilizadas, respectivamente, como funções de ponderação as funções de aproximação das tensões e dos deslocamentos no domínio:

$$\int_V S_V^T \varepsilon dV = \int_V S_V^T D^* u dV \quad (9)$$

$$\int_V U_V^T (D\sigma + b) dV = 0 \quad (10)$$

Paralelamente, a condição de equilíbrio na fronteira estática (5) é imposta ponderadamente utilizando como funções de peso as funções de aproximação dos deslocamentos na fronteira,

$$\int_{\Gamma_\sigma} U_\Gamma^T (N\sigma) d\Gamma_\sigma = \int_{\Gamma_\sigma} U_\Gamma^T \cdot t d\Gamma_\sigma \quad (11)$$

Introduzindo a aproximação do campo de tensões (6) nas condições de equilíbrio (10) e (11) é possível descrever as condições de equilíbrio na forma

$$A_V^T X_V = Q_V \quad (12)$$

$$-A_\Gamma^T X_V = Q_\Gamma \quad (13)$$

em que:

$$A_V = \int_V (DS_V)^T U_V dV \quad Q_V = - \int_V U_V^T \cdot b dV$$

$$A_\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma} (NS_V)^T U_\Gamma d\Gamma_\sigma \quad Q_\Gamma = - \int_{\Gamma_\sigma} U_\Gamma^T \cdot t d\Gamma_\sigma$$

A condição de compatibilidade do modelo de elementos finitos

$$e = A_\Gamma q_\Gamma - A_V q_V \quad (14)$$

relaciona as deformações generalizadas

$$e = \int_V S_V^T \varepsilon dV \quad (15)$$

com os parâmetros de deslocamento  $q_v$  e  $q_\Gamma$ , podendo ser obtida através de integração por partes da equação de compatibilidade (9) tendo em conta as aproximações (7) e (8)

$$e = \int_{\Gamma_\sigma} (NS_v)^T u \, d\Gamma_\sigma - \int_{\Gamma_\sigma} (DS_v)^T u \, dV$$

A introdução das relações constitutivas (3) na definição (15) permite escrever as relações constitutivas do modelo de elementos finitos na forma

$$e = FX_v \quad (16)$$

em que,

$$F = \int_v S_v^T f S_v \, dV$$

O sistema governativo é obtido pela combinação das relações de equilíbrio (12), (13) de compatibilidade (15) e constitutivas (16) através da eliminação das deformações generalizadas.

$$\begin{bmatrix} F & A_v & -A_\Gamma \\ A_v^T & \cdot & \cdot \\ -A_\Gamma^T & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_v \\ q_v \\ q_\Gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_v \\ Q_\Gamma \end{Bmatrix}$$

### 3. ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA

Neste capítulo é abordada genericamente a organização do programa por forma a possibilitar um entendimento mais fácil do seu funcionamento, sem se descreverem exhaustivamente os pormenores de programação.

A plataforma de programação sobre a qual foi desenvolvido este programa cria, a partir de um ficheiro de dados, uma estrutura que descreve a topologia do problema. Com base nesta estrutura é posteriormente resolvido o sistema governativo de equações.

A resolução do sistema pode ser feita através de dois métodos distintos. O primeiro consiste no método de resolução iterativo dos gradientes conjugados, sendo o segundo o método de eliminação de Gauss, utilizando a rotina MA47 da biblioteca Harwell para sistemas esparsos e simétricos.

Esta plataforma está preparada para processamento sequencial ou paralelo, sendo para este programa utilizado somente o processamento sequencial.

Deste modo, o programa é constituído por um conjunto de rotinas que definem a posição e a dimensão dos diferentes blocos que constituem o sistema governativo e que calculam os termos deste sistema. É ainda composto por uma rotina de pós-processamento, que executa o tratamento dos resultados obtidos.

#### 3.1 Rotinas Principais

A interligação com a plataforma de programação é feita através das seguintes rotinas:

***void LocalStructureSetup ( )*** – onde são lidos e introduzidos os dados nas estruturas locais;

***int SetupParts (int current\_subdomain)*** – define as organização/dimensões dos blocos que constituem a matriz do sistema governativo;

***int ComputeMatrix (int current\_subdomain)*** – rotina na qual se executa a montagem do triângulo superior da matriz do sistema;

***int ComputeRhs (int wich\_subdomain)*** – efectua a montagem do vector dos termos independentes.

***int PostProc (char \*nome)*** – rotina na qual se executa o pós-processamento.

Estas rotinas são escritas pelo programador e variam consoante a formulação de elementos finitos utilizada.

### 3.2 Geometria

A modelação da geometria é feita através de três estruturas base, definidas na plataforma de programação: o Nó (*node*), o Lado (*edge*) e o Elemento (*loop*).

Neste programa consideram-se apenas elementos com 4 lados, sendo cada lado constituído por 2 ou 3 nós, ficando assim definida a sua orientação do primeiro para o último nó.

Existem dois tipos distintos de elementos (os elementos de 4 ou 8 nós). Um elemento é considerado de 8 nós, sempre que pelo menos um dos seus lados tenha 3 nós, quando necessário são considerados nós virtuais a meio dos lados de 2 nós por forma a definir completamente o elemento de 8 nós.

Deste modo o programa permite a utilização simultânea de elementos com diferente número de nós sem que haja problemas de compatibilidade de geometria na estrutura.

### 3.3 Funções de Aproximação

Para a aproximação das tensões (6) e dos deslocamentos no domínio (7) e nas fronteiras estáticas (8), utilizaram-se polinómios de Legendre. Estas funções de aproximação encontram-se no referencial local ( $\xi, \eta$ ) dos elementos, por forma a simplificar as operações de integração necessárias à montagem dos operadores elementares.

A estrutura adoptada para as funções de aproximação no domínio foi:

$$S_V = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} P_\xi^0 P_\eta^0 & P_\xi^0 P_\eta^1 & \dots & P_\xi^0 P_\eta^n & \\ P_\xi^1 P_\eta^0 & P_\xi^1 P_\eta^1 & \dots & P_\xi^1 P_\eta^n & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_\xi^n P_\eta^0 & P_\xi^n P_\eta^1 & \dots & P_\xi^n P_\eta^n & \end{array} \right]$$

$$U_V = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} P_\xi^0 P_\eta^0 & P_\xi^0 P_\eta^1 & \dots & P_\xi^0 P_\eta^n & \\ P_\xi^1 P_\eta^0 & P_\xi^1 P_\eta^1 & \dots & P_\xi^1 P_\eta^n & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_\xi^n P_\eta^0 & P_\xi^n P_\eta^1 & \dots & P_\xi^n P_\eta^n & \end{array} \right]$$

representando  $P_x^i$  o polinómio de Legendre do grau  $i$  na direcção  $x$ .

Para formar todas as combinações  $P_\xi^i P_\eta^j$  adopta-se um ciclo no qual, para cada grau do polinómio em  $\xi$  se percorre todos os graus do polinómio em  $\eta$ .

Para a aproximação dos deslocamentos nas fronteiras a adoptou-se a seguinte estrutura:

$$U_\Gamma = \left[ \begin{array}{c|c|c} P_\zeta^0 & \dots & P_\zeta^i \\ \hline P_\zeta^0 & \dots & P_\zeta^j \end{array} \right]$$

sendo  $\zeta$  a coordenada local do lado.

Neste caso, podem ser considerados diferentes valores para os graus máximos utilizados na aproximação dos deslocamentos  $u_x$  e  $u_y$ .

### 3.4 Montagem do Sistema Governativo

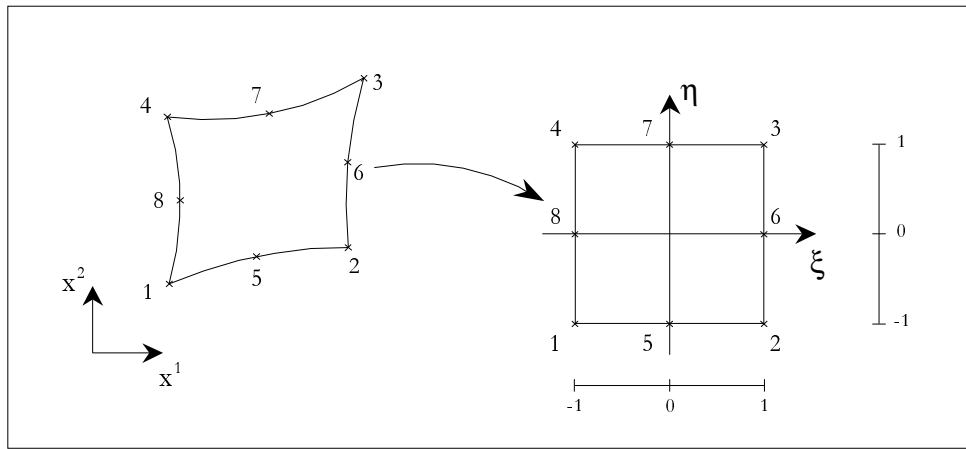
A montagem dos termos que constituem o sistema governativo é realizada através de integrações analíticas, utilizando as propriedades de ortogonalidade dos Polinómios de Legendre. Para realizar estas integrações é necessário recorrer à matriz Jacobiana dado que as funções de interpolação estão escritas no referencial local do elemento.

### 3.4.1 Mudança de Coordenadas

No caso mais geral (o elemento de 8 nós) obtém-se a seguinte expressão para a transformação de coordenadas:

$$x^k = \sum_{i=1}^8 \varphi_i x_i^k \quad k = 1, 2 \quad (17)$$

onde  $\varphi_i$  são as funções de forma do elemento serendipiano de 8 nós e  $x_i^k$  são as coordenadas do nó  $i$  na direcção  $k$ .



**Figura 1** – Mudança de Coordenadas

Sendo as funções  $\varphi_i$  polinómios, a expressão da transformação de coordenadas (17) pode ainda ser desenvolvida na sua forma polinomial:

$$x^k = \alpha_{00}^k + \alpha_{10}^k \xi + \alpha_{01}^k \eta + \alpha_{20}^k \xi^2 + \alpha_{11}^k \xi \eta + \alpha_{02}^k \eta^2 + \alpha_{21}^k \xi^2 \eta + \alpha_{12}^k \xi \eta^2$$

onde,

$$\alpha_{00}^k = \frac{1}{2}(x_5^k + x_6^k + x_7^k + x_8^k) - \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) \quad \alpha_{11}^k = \frac{1}{4}(x_1^k - x_2^k + x_3^k - x_4^k)$$

$$\alpha_{10}^k = \frac{1}{2}(x_6^k - x_8^k) \quad \alpha_{01}^k = \frac{1}{2}(x_7^k - x_5^k)$$

$$\alpha_{12}^k = \frac{1}{4}(x_3^k - x_1^k + x_2^k - x_4^k) - \frac{1}{2}(x_6^k - x_8^k) \quad \alpha_{21}^k = \frac{1}{4}(x_3^k - x_1^k + x_4^k - x_2^k) - \frac{1}{2}(x_7^k - x_5^k)$$

$$\alpha_{20}^k = \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) - \frac{1}{2}(x_5^k + x_7^k) \quad \alpha_{02}^k = \frac{1}{4}(x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k) - \frac{1}{2}(x_6^k + x_8^k)$$

Para esta transformação de coordenadas a matriz Jacobiana e o seu determinante tomam as seguintes expressões:

$$J = \begin{bmatrix} x^1,_{\xi} & x^2,_{\xi} \\ x^1,_{\eta} & x^2,_{\eta} \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde,

$$\begin{aligned} x^k,_{\xi} &= (\alpha_{10}^k + \alpha_{11}^k \eta + \alpha_{12}^k \eta^2) + 2(\alpha_{20}^k + \alpha_{21}^k \eta) \xi \\ x^k,_{\eta} &= (\alpha_{01}^k + \alpha_{11}^k \xi + \alpha_{21}^k \xi^2) + 2(\alpha_{02}^k + \alpha_{12}^k \xi) \eta \end{aligned}$$

$$|J| = J_{00} + J_{10}\xi + J_{01}\eta + J_{20}\xi^2 + J_{11}\xi\eta + J_{02}\eta^2 + J_{30}\xi^3 + J_{21}\xi^2\eta + J_{12}\xi\eta^2 + J_{03}\eta^3 + J_{22}\xi^2\eta^2 \quad (19)$$

com,

$$\begin{aligned} J_{00} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{10}^2 & J_{22} &= 3(\alpha_{21}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{21}^2) \\ J_{10} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{10}^2 + 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{20}^2) & J_{01} &= \alpha_{11}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{11}^2 + 2(\alpha_{10}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{10}^2) \\ J_{12} &= \alpha_{11}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{11}^2 + 4(\alpha_{21}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{21}^2) & J_{21} &= \alpha_{21}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{21}^2 + 4(\alpha_{20}^1 \alpha_{12}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{20}^2) \\ J_{20} &= \alpha_{10}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{21}^1 \alpha_{10}^2 + 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}^1 \alpha_{20}^2) & J_{02} &= \alpha_{12}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{12}^2 + 2(\alpha_{11}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{11}^2) \\ J_{30} &= 2(\alpha_{20}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{21}^1 \alpha_{20}^2) & J_{03} &= 2(\alpha_{12}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{12}^2) \\ J_{11} &= 2(\alpha_{10}^1 \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^1 \alpha_{01}^2 - \alpha_{01}^1 \alpha_{21}^2 - \alpha_{12}^1 \alpha_{10}^2) + 4(\alpha_{20}^1 \alpha_{02}^2 - \alpha_{02}^1 \alpha_{20}^2) \end{aligned}$$

É ainda possível definir o operador diferencial de equilíbrio,  $D$ , no sistema de coordenadas locais:

$$D = \frac{1}{|J|} D' \quad (20)$$

com,

$$D' = \begin{bmatrix} x^2,_{\eta} & \cdot & -x^1,_{\eta} \\ \cdot & -x^1,_{\eta} & x^2,_{\eta} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} x^2,_{\xi} & \cdot & -x^1,_{\xi} \\ \cdot & -x^1,_{\xi} & x^2,_{\xi} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (21)$$

podendo também  $D'$  ser escrito na seguinte forma:

$$D' = (\mathcal{D}_{21}\xi^2 + 2\mathcal{D}_{12}\xi\eta + \mathcal{D}_{11}\xi + 2\mathcal{D}_{02}\eta + \mathcal{D}_{10})\frac{\partial}{\partial\xi} - (\mathcal{D}_{12}\eta^2 + 2\mathcal{D}_{21}\xi\eta + \mathcal{D}_{11}\eta + 2\mathcal{D}_{20}\xi + \mathcal{D}_{10})\frac{\partial}{\partial\eta}$$

sendo,

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij}^2 & \cdot & -\alpha_{ij}^1 \\ \cdot & -\alpha_{ij}^1 & \alpha_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

### 3.4.2 Blocos do Sistema Governativo

Adoptada a mudança de coordenadas (17), os blocos que constituem o sistema governativo podem ser expressos na seguinte forma:

$$F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_v^T f S_v |J| d\xi d\eta \quad (22)$$

$$A_v = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D' S_v)^T U_v d\xi d\eta \quad (23)$$

$$A_\Gamma = \int_{-1}^1 (N' S_v)^T U_\Gamma d\zeta \quad (24)$$

$$Q_v = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_v^T \cdot b |J| d\xi d\eta \quad (25)$$

$$Q_\Gamma = - \int_{-1}^1 U_v^T \cdot n' t d\zeta \quad (26)$$

sendo  $n'$  e  $N'$  o vector das normais e a matriz das componentes da normal no sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$ , respectivamente. O vector das tracções aplicadas na fronteira,  $t$ , está escrito nas coordenadas locais do respectivo lado.

### 3.4.3 Cálculo dos Operadores Elementares

Com base nas definições (22) a (26) e tendo em conta o tipo de aproximações adoptadas e as definições (19) e (21) obtidas para o Jacobiano e para o operador diferencial  $D'$  é possível com base numa tabela de integrações como a apresentada no anexo A, proceder à montagem dos operadores para cada elemento.

## 4. INTRODUÇÃO DOS DADOS

A introdução de dados é feita através de um ficheiro ASCII, cujo nome é o primeiro parâmetro de execução do programa.

A versão actual do programa é muito limitada quanto a detecção de dados mal introduzidos, pelo que o utilizador deve ser cuidadoso na criação do ficheiro de dados. Qualquer valor mal introduzido pode provocar a interrupção do programa ou produzir resultados não pretendidos.

De seguida descreve-se detalhadamente a estrutura do ficheiro de dados, sendo apresentado no anexo B um exemplo de aplicação.

### 4.1 Estrutura do Ficheiro de Dados

A primeira linha do ficheiro deverá conter o título do exemplo a testar, não devendo este ter mais de 80 caracteres.

Seguem-se 4 blocos nos quais se fornece a informação necessária para a definição dos nós, dos lados, dos elementos e do carregamento. Para assinalar o final de cada bloco dever-se-á introduzir uma linha com o algarismo 0 (zero).

A última linha do ficheiro de dados deverá ser constituída dois números inteiros, os quais definem:

- i) o número de subdomínios, devendo este tomar sempre o valor 1 (uma vez que não estamos a utilizar um processamento em paralelo);
- ii) o modo de resolução, correspondendo o valor 0 ao modo de resolução iterativo e o valor 6 ao modo de resolução directo.

#### 4.1.1 Nós (1º Bloco)

Cada linha do 1º bloco deverá ter a seguinte estrutura:

| <i>id</i> | <i>x</i> | <i>y</i> | <i>idl</i> |
|-----------|----------|----------|------------|
|-----------|----------|----------|------------|

sendo,

|            |                                                    |
|------------|----------------------------------------------------|
| <i>id</i>  | número de identificação do nó (inteiro positivo)   |
| <i>x</i>   | coordenada do nó segundo x                         |
| <i>y</i>   | coordenada do nó segundo y                         |
| <i>idl</i> | número de identificação de um lado que contem o nó |

#### 4.1.2 Lados (2º Bloco)

A estrutura das linhas do 2º bloco é:

| <i>id</i> | <i>nnos</i> | <i>idn<sup>1</sup> ... idn<sup>nnos</sup></i> | <i>eesq</i> | <i>edir</i> | <i>lccw</i> | <i>lcw</i> | <i>rccw</i> | <i>rcw</i> | <i>gx</i> | <i>gy</i> |
|-----------|-------------|-----------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|------------|-----------|-----------|
|-----------|-------------|-----------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|------------|-----------|-----------|

sendo,

|                             |                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>id</i>                   | número de identificação do lado (inteiro positivo)                                                                                                                                                      |
| <i>nnos</i>                 | número de nós do lado (2 ou 3)                                                                                                                                                                          |
| <i>idn<sup>i</sup></i>      | número de identificação do nó <i>i</i>                                                                                                                                                                  |
| <i>eesq</i>                 | número de identificação do elemento à esquerda do lado                                                                                                                                                  |
| <i>edir</i>                 | número de identificação do elemento à direita do lado                                                                                                                                                   |
| <i>lccw, lcw, rccw, rcw</i> | número de identificação dos lados adjacentes (fig. 2)                                                                                                                                                   |
| <i>gx, gy</i>               | grau do polinómio de Legendre para a aproximação dos deslocamentos no lado nas direcções x e y, respectivamente (sendo possível impedir o deslocamento nessa direcção atribuindo ao grau o valor de -1) |

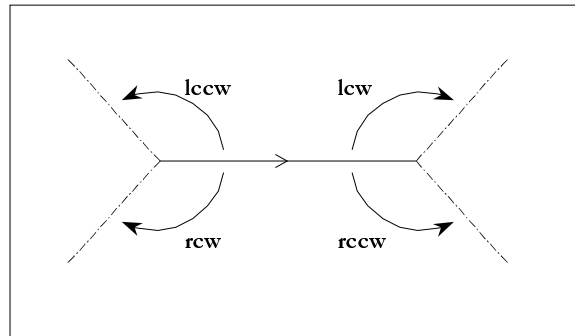


Figura 2 – Identificação dos Lados Adjacentes

#### 4.1.3 Elementos (3º Bloco)

A estrutura das linhas do 3º bloco é:

| <i>id</i> | <i>idl</i> | <i>sd</i> | <i>gX</i> | <i>gQv</i> | <i>E</i> | <i>v</i> | <i>ept/epd</i> |
|-----------|------------|-----------|-----------|------------|----------|----------|----------------|
|-----------|------------|-----------|-----------|------------|----------|----------|----------------|

sendo,

|                |                                                                               |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| <i>id</i>      | número de identificação do elemento (inteiro positivo)                        |
| <i>idl</i>     | número identificação de um lado que pertence ao elemento                      |
| <i>sd</i>      | identificação do subdomínio (deve ter sempre o valor 1)                       |
| <i>gX</i>      | grau do polinómio de Legendre para a aproximação das tensões no domínio       |
| <i>gQv</i>     | grau do polinómio de Legendre para a aproximação dos deslocamentos no domínio |
| <i>E</i>       | valor do módulo de Young                                                      |
| <i>v</i>       | valor do coeficiente de Poisson                                               |
| <i>ept/epd</i> | estado plano de tensão (ept) ou estado plano de deformação (epd)              |

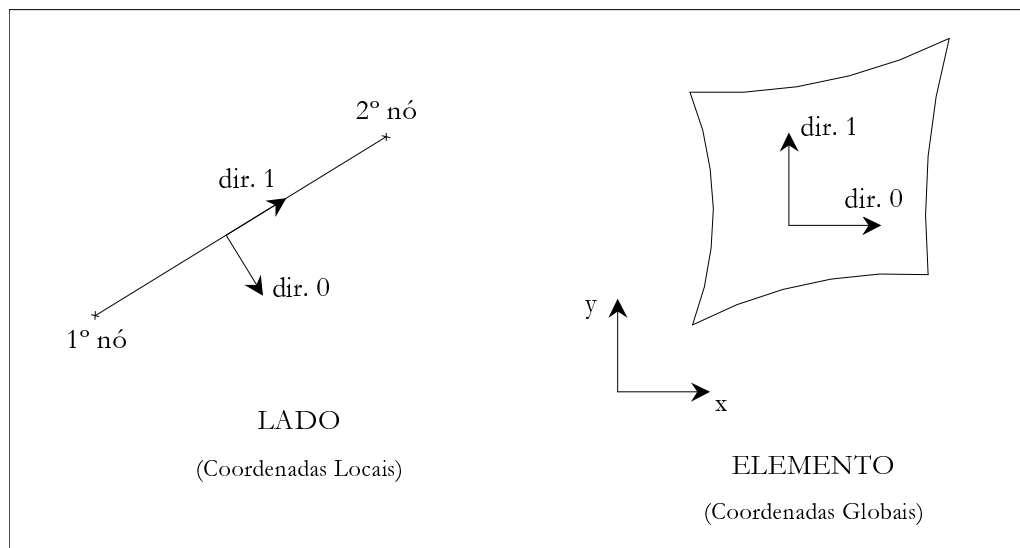
#### 4.1.4 Carregamento (4º Bloco)

A estrutura das linhas do 4º bloco é:

| <i>id</i> | <i>E/L</i> | <i>idc</i> | <i>dir</i> | <i>val1</i> | <i>val2</i> |
|-----------|------------|------------|------------|-------------|-------------|
|-----------|------------|------------|------------|-------------|-------------|

sendo,

|                    |                                                                                                                                          |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b><i>id</i></b>   | número de identificação do carregamento (inteiro positivo)                                                                               |
| <b><i>E/L</i></b>  | o caracter E ( <i>edge</i> ) ou L ( <i>loop</i> ) identificam, respectivamente, se a carga se encontra aplicada na fronteira ou elemento |
| <b><i>idc</i></b>  | número de identificação do lado/elemento carregado                                                                                       |
| <b><i>dir</i></b>  | direcção do carregamento, podendo tomar os valores 0 ou 1                                                                                |
| <b><i>val1</i></b> | valor da carga no início do lado, ou no caso de ser um carregamento no elemento é o valor da carga uniformemente distribuída             |
| <b><i>val2</i></b> | valor da carga no final do lado (este valor não é utilizado para cargas aplicadas no elemento)                                           |



**Figura 3** – Direcção do Carregamento

## 5. PÓS-PROCESSAMENTO

Como resultado do pós-processamento o programa cria 2 ficheiros:

i) o ficheiro com a extensão *ff*, contém o valor das tensões e deslocamentos no domínio, sendo o número de pontos nos quais se pretende calcular estes valores introduzido pelo utilizador durante a execução do pós-processamento.

ii) no ficheiro com a extensão *sol*, é armazenada, em formato binário de dupla precisão, a solução do sistema. São escritos em primeiro lugar os valores de  $X_v$  (para todos os elementos) seguidos dos valores de  $q_v$  (igualmente para todos os elementos) e finalmente os valores  $q_r$  (para todas as fronteiras estáticas), sendo a ordem dos valores definida pela estrutura adoptada para as matrizes das funções de aproximação (cap. 3.3).

Para uma análise mais fácil dos resultados obtidos poder-se-á recorrer a um programa auxiliar que executa uma representação gráfica dos resultados utilizando os ficheiros das soluções e da entrada de dados.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] E. M. B. R. Pereira, *Elementos Finitos de Tensão - Aplicação à Análise Elástica de Estruturas*, Tese de doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, (1993);
- [2] I. Cismasiu, J. P. Moitinho de Almeida, L. M. S. Castro e D. C. Harbis, *Parallel Solution Techniques for Hybrid Mixed Finite Element Models*, in Innovative Computational Methods for Structural Mechanics, Edited by M Papadrakakis and B.H.V. Topping, Saxe-Coburg Publications, Chapter 6, pp. 109-125, (1999);
- [3] *Harwell Subroutine Library*, Release 11 – Vol. I, Theoretical Studies Department of AEA Technology, pp.377-384, UK (1993).

## **ANEXO A - *POLINÓMIOS DE LEGENDRE***

Geração do sistema de polinómios de Legendre através da formula recursiva:

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = x \\ P_{n+1} = 2xP_n - P_{n-1} - \frac{xP_n - P_{n-1}}{n+1} \end{cases}$$

Ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 P_i P_j dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{2}{2n+1} & i = j \end{cases}$$

Normalização

$$\bar{P}_n = P_n \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$

Integrais  $\int_{-1}^1 x^k \bar{P}_i \bar{P}_j dx$

$$I^0 = \int_{-1}^1 \bar{P}_i \bar{P}_j dx = \delta_{ij}$$

$$I^1 = \int_{-1}^1 x \bar{P}_i \bar{P}_j dx = \frac{j}{\sqrt{4j^2-1}} \delta_{i+1,j} + \frac{i}{\sqrt{4i^2-1}} \delta_{i,j+1}$$

$$\begin{aligned} I^2 = \int_{-1}^1 x^2 \bar{P}_i \bar{P}_j dx = & \left[ \frac{(i+1)^2}{(2i+3)(2i+1)} + \frac{i^2}{(2i+1)(2i-1)} \right] \delta_{ij} + \frac{j(j-1)}{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2j-1)}} \delta_{i+2,j} + \\ & + \frac{i(i-1)}{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2i-1)}} \delta_{i,j+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^3 = \int_{-1}^1 x^3 \bar{P}_i \bar{P}_j dx = & \frac{j(j-1)(j-2)}{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2j-1)(2j-3)}} \delta_{i+3,j} + \frac{i(i-1)(i-2)}{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2i-1)(2i-3)}} \delta_{i,j+3} \\ & + \frac{j}{\sqrt{(2i+1)(2j+1)}} \left[ \frac{(j+1)^2}{(2j+3)(2j+1)} + \frac{j^2}{(2j+1)(2j-1)} + \frac{(j-1)^2}{(2j-1)(2j-3)} \right] \delta_{i+1,j} + \\ & + \frac{i}{\sqrt{(2i+1)(2j+1)}} \left[ \frac{(i+1)^2}{(2i+3)(2i+1)} + \frac{i^2}{(2i+1)(2i-1)} + \frac{(i-1)^2}{(2i-1)(2i-3)} \right] \delta_{i,j+1} \end{aligned}$$

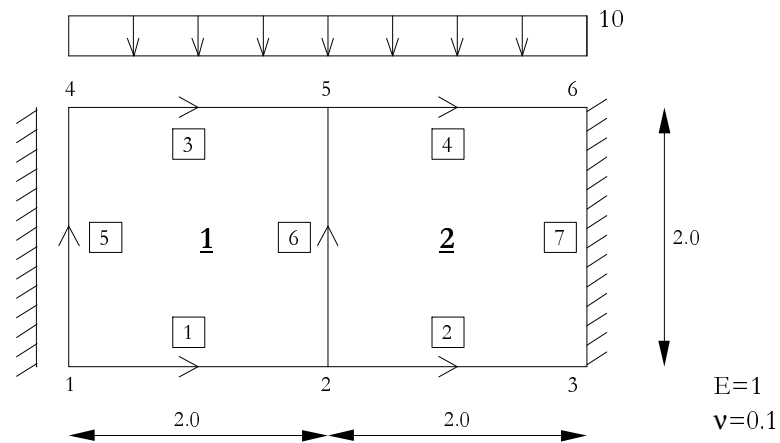
Integrais  $\int_{-1}^1 x^k \bar{P}_i \bar{P}_j' dx$

$$H^0 = \int_{-1}^1 \bar{P}_i \bar{P}_j' dx = \begin{cases} 0 & \text{se } j \leq i \\ 0 & \text{se } j > i \wedge (i+j) \text{ par} \\ \sqrt{(2i+1)(2j+1)} & \text{se } j > i \wedge (i+j) \text{ impar} \end{cases}$$

$$H^1 = \int_{-1}^1 x \bar{P}_i \bar{P}_j' dx = \begin{cases} i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } j < i \\ 0 & \text{se } j > i \wedge (i+j) \text{ impar} \\ \sqrt{(2i+1)(2j+1)} & \text{se } j > i \wedge (i+j) \text{ par} \end{cases}$$

$$H^2 = \int_{-1}^1 x^2 \bar{P}_i \bar{P}_j' dx = \begin{cases} \frac{3j^2 - j - 1}{\sqrt{(2i+1)(2j+1)}} & \text{se } j = i+1 \\ \frac{i(i-1)}{\sqrt{(2i+1)(2j+1)}} & \text{se } i = j+1 \\ \sqrt{(2i+1)(2j+1)} & \text{se } j > i+1 \wedge (i+j) \text{ impar} \\ 0 & \text{se } j > i+1 \wedge (i+j) \text{ par} \\ 0 & \text{se } j < i-1 \end{cases}$$

## **ANEXO B - EXEMPLO DE APLICAÇÃO**



*Nota:* as tensões e os deslocamentos nas fronteiras estáticas foram aproximados por polinómios 6º grau e os deslocamentos no domínio por polinómios do 5º grau.

#### Ficheiro de entrada de dados:

```

exemplo de placas
1 0.0000 0.0000 1
2 2.0000 0.0000 2
3 4.0000 0.0000 2
4 0.0000 2.0000 3
5 2.0000 2.0000 4
6 4.0000 2.0000 4
0
1 2 1 2 1 0 5 6 2 5 6 6
2 2 2 3 2 0 6 7 7 1 6 6
3 2 4 5 0 1 5 4 6 5 6 6
4 2 5 6 0 2 3 7 7 6 6 6
5 2 1 4 0 1 1 3 3 1 -1 6
6 2 2 5 1 2 1 3 4 2 6 6
7 2 3 6 2 0 2 4 4 2 -1 -1
0
1 6 1 6 5 1.0 .1 ept
2 7 1 6 5 1.0 .1 ept
0
1 E 3 0 10 10
2 E 4 0 10 10
0
1 0

```

Listagem do ficheiro *.lfi*:

| - ELEMENTO 1 - |        |             |             |             |             |             |
|----------------|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| X              | Y      | Sxx         | Syy         | Sxy         | Ux          | Uy          |
| 2.0000         | 0.0000 | 1.1947e+01  | -1.6399e-11 | -2.1468e-12 | 6.4070e+01  | -1.6376e+02 |
| 2.0000         | 1.0000 | -3.8295e-01 | -5.0727e+00 | 1.5001e+01  | 1.0185e-01  | -1.6612e+02 |
| 2.0000         | 2.0000 | -1.3094e+01 | -1.0000e+01 | 3.9288e-11  | -6.3986e+01 | -1.7375e+02 |
| 1.0000         | 0.0000 | 3.4550e+01  | 4.4445e-12  | 3.1614e-12  | 3.9553e+01  | -2.3319e+02 |
| 1.0000         | 1.0000 | -4.6251e-01 | -5.0120e+00 | 7.5007e+00  | 3.3792e-02  | -2.3665e+02 |
| 1.0000         | 2.0000 | -3.5478e+01 | -1.0000e+01 | 7.9420e-12  | -3.9478e+01 | -2.4311e+02 |
| 0.0000         | 0.0000 | 4.2054e+01  | -1.2749e-11 | 9.8844e-12  | 1.1583e-04  | -2.5883e+02 |
| 0.0000         | 1.0000 | -4.6781e-01 | -5.0006e+00 | 9.5531e-12  | 6.1377e-06  | -2.6266e+02 |
| 0.0000         | 2.0000 | -4.2980e+01 | -1.0000e+01 | -7.8028e-11 | 9.0264e-05  | -2.6873e+02 |
| - ELEMENTO 2 - |        |             |             |             |             |             |
| X              | Y      | Sxx         | Syy         | Sxy         | Ux          | Uy          |
| 4.0000         | 0.0000 | -1.1740e+02 | -2.2090e-11 | 9.3319e-12  | 4.1677e-01  | 4.2348e-01  |
| 4.0000         | 1.0000 | -1.4490e+00 | -9.4374e-01 | 2.4778e+01  | -2.0083e-02 | -1.9620e-01 |
| 4.0000         | 2.0000 | 1.3284e+02  | -1.0000e+01 | -5.3337e-12 | -5.8061e-01 | -1.5092e+00 |
| 3.0000         | 0.0000 | -2.6026e+01 | -3.4817e-12 | 1.5881e-12  | 5.8263e+01  | -7.3166e+01 |
| 3.0000         | 1.0000 | -1.3487e-01 | -4.7250e+00 | 2.2132e+01  | 3.5356e-01  | -7.3680e+01 |
| 3.0000         | 2.0000 | 2.3360e+01  | -1.0000e+01 | 7.0191e-13  | -5.8871e+01 | -8.2806e+01 |
| 2.0000         | 0.0000 | 1.1947e+01  | 5.2794e-12  | -3.4550e-12 | 6.4233e+01  | -1.6376e+02 |
| 2.0000         | 1.0000 | -3.8295e-01 | -5.0418e+00 | 1.5001e+01  | 9.2969e-02  | -1.6618e+02 |
| 2.0000         | 2.0000 | -1.3094e+01 | -1.0000e+01 | 1.4028e-11  | -6.4237e+01 | -1.7372e+02 |