

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

ELEMENTOS FINITOS DE TENSÃO
APLICAÇÃO À ANÁLISE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS

Eduardo Manuel Baptista Ribeiro Pereira
(Mestre)

Orientador Científico

Professor João António Teixeira de Freitas

Tese para obtenção do grau de doutor em
Engenharia Civil

Fevereiro de 1993

Resumo

Apresenta-se um conjunto de modelos de elementos finitos para a análise elástica de estruturas desenvolvidos a partir dos princípios básicos da Mecânica, isto é, formulando separadamente as equações de equilíbrio e de compatibilidade e as relações constitutivas.

Os modelos de elementos finitos desenvolvidos têm como base a interpolação dos campos estáticos (tensões ou esforços) no domínio, pelo que são denominados Modelos Estáticos de Elementos Finitos. A utilização de funções de interpolação ortogonais, como os polinómios de Legendre e as funções trigonométricas, permite a obtenção de sistemas governativos com elevados índices de esparsidade.

Os modelos propostos são utilizados para a análise de um conjunto de problemas não só de elasticidade plana, mas também de elasticidade tridimensional, de peças laminares e de peças lineares. Particular atenção é dada à aplicação do modelo desenvolvido na análise de laminados de material compósito.

O modelo desenvolvido para a análise de peças laminares baseia-se na expansão em série do campo de deslocamentos ao longo da espessura. A sobreposição de um conjunto de problemas bidimensionais permite considerar o comportamento tridimensional deste tipo de estruturas. Uma metodologia análoga é utilizada na formulação do modelo para a análise de estruturas reticuladas.

Abstract

A set of finite element formulations is derived from first-principles of Mechanics, namely, equilibrium, compatibility and constitutive relations, and applied to the elastic analysis of structures.

Direct interpolation of the (generalized) stress field is the unifying feature of the alternative formulations presented. To obtain highly sparse governing systems, orthogonal functions are used, such as Legendre polynomials and trigonometric functions.

The stress models are applied to the analysis of solids, bending plates, stretching plates and beams. Particular attention is given to the modelling of interlaminar stresses in laminated composites.

The consistent higher-order models used in the analysis of plates and beams are obtained by specialization of the three-dimensional formulation. The displacement field is expanded in a Taylor series along the thickness of the plate in order to generate a sequence of equivalent two-dimensional finite elements formulations. A similar procedure is used to derive the higher-order finite element beam formulations.

Palavras Chave

Elementos Finitos de Tensão

Análise de Laminados de Material Compósito

Análise Elástica

Peças Tridimensionais

Modelos de Ordem Superior para Peças Laminares e Lineares

Key Words

Stress Finite Elements

Analysis of Laminated Composites

Elastic Analysis

Solids

Higher Order Models for Plates and Beams

Agradecimentos

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito dos programas de investigação do grupo de Análise de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico e da Linha 5, Cálculo Automático de Estruturas, do Centro de Mecânica e Engenharia Estruturais da Universidade Técnica de Lisboa.

A realização da presente tese insere-se no projecto PMCT/C/MPF/638/90 da Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, tendo sido apoiada pelo Instituto Nacional de Investigação Científica através da bolsa de doutoramento DBI/28787 e pelo programa PRODEP - Subprograma 4, "Ensino Superior - Formação de Formadores", Doutoramentos.

Refira-se o apoio concedido pelo AGARD, através do projecto SMP/589621A, que financiou a minha estadia em Outubro de 1990 no Dipartimento Aerospaziale da Università degli Studi di Roma "La Sapienza" onde, sob a orientação do Professor Paolo Santini e do Doutor Paolo Gaudenzi, desenvolvi estudos no domínio dos laminados de material compósito.

A realização desta tese de doutoramento só foi possível devido a inúmeros contributos. Para todos aqueles que de algum modo contribuíram para a sua realização quero deixar aqui os meus agradecimentos. Contudo, não posso deixar de mencionar algumas pessoas que muito contribuíram para o presente trabalho.

Ao Professor Teixeira de Freitas, meu orientador científico, por tudo o que me ensinou ao longo destes últimos 11 anos e pelo constante incentivo, compreensão e amizade que me tem dedicado.

Ao Moitinho de Almeida pelo apoio, amizade e disponibilidade que sempre me tem dado e que muito contribuiu para a minha formação.

Ao Francisco Virtuoso, não só pela amizade que nos une, mas também pela forma rigorosa e paciente com que me ajudou a corrigir alguns erros e imprecisões desta tese.

Aos meus colegas do Instituto Superior Técnico, e em especial ao Luis Castro, ao Pedro Parreira, ao Pedro Mendes, ao Vitor Leitão e ao Orlando Pereira pela camaradagem e boa disposição que faz com que o trabalho do dia a dia não se torne numa rotina, mas sim num agradável convívio.

À minha mãe e ao meu pai pelo exemplo, apoio e carinho que sempre me manifestaram ao longo de toda a minha carreira académica.

Para finalizar não posso deixar de agradecer à João e ao Guilherme pelo amor e principalmente pela paciência que me têm dedicado e que tão necessária tem sido nestes últimos tempos.

Índice geral

Resumo	i
Abstract	ii
Palavras chave	iii
Key words.....	iii
Agradecimentos.....	iv
Índice geral	vi
Índice de figuras	ix
1 - Introdução.....	1
1.1 - Tema.....	1
1.2 - Objectivo.....	2
1.3 - Definição do problema	4
1.4 - Organização.....	7
2 - Modelos Estáticos de Elementos Finitos.....	11
2.1 - Funções de interpolação genéricas.....	12
2.2 - Funções de interpolação autoequilibradas.....	18
2.3 - Funções de interpolação autoequilibradas e compatíveis.....	20
2.4 - Aplicação dos modelos de elementos finitos.....	22
2.4.1 - Modos de deformação espúrios.....	23
2.4.2 - Elementos finitos no modelo EG	24
2.4.3 - Elementos finitos no modelo EA	25
2.4.4 - Elementos finitos no modelo EAC	26

3 - Estudo de Funções de Interpolação	29
3.1 - Definição dos operadores intervenientes	30
3.2 - Modelo EG utilizando funções sinusoidais	32
3.2.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio.....	32
3.2.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos no domínio.....	33
3.2.3 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira.....	34
3.2.4 - Aplicação do modelo desenvolvido	35
3.3 - Modelo EA utilizando funções sinusoidais	35
3.3.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio.....	35
3.3.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira.....	37
3.4 - Modelo EAC utilizando funções sinusoidais	37
3.4.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio.....	37
3.4.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira.....	38
3.5 - Modelo EG utilizando polinómios de Legendre.....	39
3.5.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio.....	39
3.5.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos no domínio.....	40
3.5.3 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira.....	40
3.6 - Exemplos de aplicação	41
3.6.1 - Consola quadrada	41
3.6.2 - Placa em L.....	69
3.6.3 - Tubo cilíndrico de comprimento infinito.....	83
Anexo A3.1 - Aplicação do elemento rectangular de 8 nós ao modelo EG.....	91
Anexo A3.2 - Funções de interpolação sinusoidais para o modelo EAC	99
4 - Análise de Peças Tridimensionais	103
4.1 - Relações fundamentais	103
4.2 - Modelo EG utilizando polinómios de Legendre.....	106
4.2.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio.....	107
4.2.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos no domínio.....	107
4.2.3 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira.....	108
4.3 - Elemento prismático de 16 nós.....	108
4.4 - Exemplo de aplicação.....	109
Anexo A4.1 - Aplicação do elemento prismático de 16 nós ao modelo EG	119

5 - Análise de Peças Laminares	129
5.1 - Condições de compatibilidade.....	130
5.2 - Condições de equilíbrio	133
5.3 - Relações constitutivas.....	137
5.4 - Equações fundamentais	138
5.5 - Placas.....	140
5.6 - Lajes de Reissner-Mindlin	144
5.7 - Modelo EG em peças laminares.....	148
5.8 - Exemplo de aplicação.....	155
Anexo A5.1 - Utilização da regra de Leibnitz no desenvolvimento das equações de equilíbrio das peças laminares	167
6 - Estruturas Laminares de Material Compósito	171
6.1 - Relações constitutivas para materiais ortotrópicos	173
6.2 - Exemplo de aplicação.....	177
Anexo A6.1 - Transformação do operador de flexibilidade em materiais ortotrópicos..	191
7 - Análise de Peças Lineares	195
7.1 - Condições de compatibilidade.....	196
7.2 - Condições de equilíbrio	199
7.3 - Relações constitutivas	203
7.4 - Relações fundamentais	203
7.5 - Barra de estrutura articulada	205
7.6 - Barra de pórtico	208
7.7 - Modelo EG em peças lineares	215
8 - Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	227
8.1 - Conclusões	231
8.2 - Desenvolvimentos futuros	232
Referências	235

Índice de figuras

3.1 - Consola quadrada à tracção (A) e em flexão (B).....	42
3.2 - Discretização adoptada na análise da consola quadrada.	42
3.3 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada traccionada utilizando o modelo EG com séries trigonométricas como funções de interpolação.....	45
3.4 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada traccionada utilizando o modelo EG com polinómios de Legendre como funções de interpolação	47
3.5 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada traccionada utilizando o modelo EAC com séries trigonométricas como funções de interpolação.....	49
3.6 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada traccionada utilizando o modelo EA com séries trigonométricas como funções de interpolação	51
3.7 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o modelo EG com séries trigonométricas como funções de interpolação	55
3.8 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o modelo EG com polinómios de Legendre como funções de interpolação.....	57
3.9 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o modelo EAC com séries trigonométricas como funções de interpolação	59
3.10 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o modelo EA com séries trigonométricas como funções de interpolação.....	61
3.11 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o programa COSMOS/M.....	63
3.12 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando como funções de interpolação séries digitais de Walsh, Castro.....	65
3.13 - Placa em L submetida à tracção.....	69
3.14 - Discretizações adoptadas para a placa em L.....	70
3.15 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando 2 elementos e o modelo EG com séries trigonométricas como funções de interpolação	71
3.16 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando 3 elementos e o modelo EG com séries trigonométricas como funções de interpolação	73
3.17 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando 2 elementos e o modelo EG com polinómios de Legendre como funções de interpolação.....	75
3.18 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando 2 elementos e o modelo EG com polinómios de Legendre como funções de interpolação.....	77

3.19 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando o programa COSMOS/M e uma discretização composta por 1 200 elementos	79
3.20 - Tubo cilíndrico de comprimento infinito sujeito a pressão externa.....	83
3.21 - Discretização da secção transversal de um tubo cilíndrico.....	84
3.22 - Convergência da densidade de energia de deformação do tubo cilíndrico com pressão externa uniforme.....	87
3.23 - Tubo cilíndrico de comprimento infinito sujeito a pressão externa; comparação entre a solução exacta e uma aproximação baseada numa discretização por dois elementos	89
A3.1.1 - Elemento rectangular de 8 nós	91
4.1 - Consola curta com secção em T submetida a um efeito combinado de flexão, torção e corte.....	109
4.2 - Discretização e referencial utilizados na análise da consola curta com secção em T.....	110
4.3 - Malha de elementos finitos utilizada pelo programa COSMOS/M na análise da consola curta com secção em T quando submetida a uma acção combinada de flexão, torção e corte	111
4.4 - Deformada da consola curta com secção em T quando submetida a uma acção combinada de flexão, torção e corte; ponto de vista em $(-10; 1; 20)$	112
4.5 - Tensões na secção de encastramento da consola com secção em T sujeita a uma acção combinada de flexão, torção e corte	113
4.6 - Tensões na consola curta com secção em T sujeita a uma acção combinada de flexão, torção e corte; perspectiva com ponto de vista em $(-10; 1; 20)$	115
A4.1.1 - Elemento finito prismático de 16 nós.....	119
5.1 - Exemplo de laje quadrada encastrada com um bordo livre.....	155
5.2 - Elemento finito utilizado para a análise da laje quadrada encastrada com um bordo livre.....	156
5.3 - Variação ao longo da espessura do deslocamento transversal do ponto a da laje quadrada encastrada com um bordo livre	159
5.4 - Variação ao longo da espessura do deslocamento longitudinal do ponto a da laje quadrada encastrada com um bordo livre.....	161
5.5 - Deformada da laje (espessa) encastrada com bordo livre; ponto de vista em $(1; 0.5; 0.25)$	163

5.6 - Laje (espessa) quadrada encastrada com um bordo livre; variação do momento flector M_{xx} na secção de meio vão e variação do momento flector M_{yy} ao longo do bordo livre	165
6.1 - Exemplo de um laminado com a sequência de empilhamento $[30^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ]$	173
6.2 - Referencial principal de ortotropia numa camada de um laminado de material compósito.....	175
6.3 - Representação do laminado <i>cross-ply</i> com empilhamento $[90^\circ/0^\circ]_s$ e dos eixos principais de ortotropia das camadas	177
6.4 - Discretização adoptada para o estudo do laminado <i>cross-ply</i> com empilhamento $[90^\circ/0^\circ]_s$	178
6.5 - Variação da tensão σ_{zz} na superfície média do laminado <i>cross-ply</i> $[90^\circ/0^\circ]_s$	181
6.6 - Variação da tensão σ_{zz} ao longo da superfície média do laminado <i>cross-ply</i> $[90^\circ/0^\circ]_s$	184
6.7 - Variação da tensão σ_{yz} na superfície interlaminar do laminado <i>cross-ply</i>	185
6.8 - Variação da tensão σ_{zz} na superfície interlaminar do laminado <i>cross-ply</i>	187
6.9 - Variação da tensão σ_{yz} ao longo da superfície interlaminar do laminado $[90^\circ/0^\circ]_s$	189
7.1 - Pórtico tridimensional de betão armado.....	222
7.2 - Diagrama carga-deslocamento para o pórtico tridimensional de betão armado	222
7.3 - Diagramas de esforços na rotura para o pórtico tridimensional de betão armado	223
7.4 - Variação com a carga aplicada da tensão instalada na secção de encastramento da barra 3.....	225

1 Introdução

1.1 - Tema

No presente trabalho desenvolve-se um conjunto de modelos de elementos finitos para a análise de estruturas. Estes modelos são formulados com base nos princípios básicos da Mecânica, seguindo uma metodologia semelhante à adoptada por Smith⁵¹, Freitas¹², Adão da Fonseca¹ e Moitinho de Almeida³², isto é, no estabelecimento em separado das equações de equilíbrio e de compatibilidade e das relações constitutivas.

Este procedimento difere do habitualmente utilizado no método dos elementos finitos pois não baseia a formulação dos diferentes modelos na construção e minimização de uma função potencial. No entanto, para cada um dos modelos aqui apresentados, é possível definir funções potenciais as quais são implicitamente estacionarizadas por meio da imposição das equações de comportamento, Freitas¹⁴.

Os modelos de elementos finitos desenvolvidos são aplicados à análise elástica de estruturas sujeitas a acções quase estáticas. O estudo dos vários tipos de estruturas é feito considerando uma classificação quanto às suas características geométricas. Assim, são estudadas separadamente as estruturas compostas por corpos tridimensionais, as estruturas laminares e as estruturas constituídas por peças lineares.

1.2 - Objectivo

O objectivo que se pretende atingir com a utilização dos modelos desenvolvidos é comum ao da generalidade dos modelos de análise estrutural, isto é, a obtenção de uma descrição o mais exacta possível dos estados de deformação e de tensão das estruturas quando sujeitas a um conjunto de acções.

Para caracterizar os estados de tensão e deformação recorre-se habitualmente à definição de esforços generalizados e de deformações generalizadas. Consoante o tipo de comportamento da estrutura, esses campos estáticos e cinemáticos correspondem, respectivamente, a distribuições de tensões ou de resultantes de tensões e a distribuições de extensões e distorções ou a modos de deformação.

Neste trabalho procura-se desenvolver um conjunto de modelos estáticos de elementos finitos, designados habitualmente por modelos de tensão, que apresentam como característica comum a interpolação directa dos esforços generalizados, sendo as condições de equilíbrio no domínio e na fronteira estática impostas independentemente.

As funções de interpolação dos esforços generalizados, que podem ou não satisfazer localmente as condições de equilíbrio, são utilizadas como funções de ponderação da condição de compatibilidade no domínio.

Quando a condição de equilíbrio não é satisfeita localmente, torna-se necessário interpolar o campo de deslocamentos no domínio, utilizando-se essas funções como funções de ponderação da condição de equilíbrio.

Na fronteira estática são interpolados, independentemente, os deslocamentos, sendo utilizadas estas funções de interpolação para ponderação da condição de equilíbrio na fronteira.

Com base nestes modelos estáticos é possível considerar não só diferentes tipologias de estruturas bem como adoptar diferentes relações constitutivas. Este trabalho, apesar de considerar a aplicação dos modelos estáticos a estruturas tridimensionais, bidimensionais e reticuladas, só desenvolve o caso de um comportamento elástico das estruturas quando sujeitas a acções quase estáticas.

O estudo das peças laminares e lineares é feito a partir da consideração das relações básicas estabelecidas para os corpos tridimensionais. A obtenção das condições simplificadas de equilíbrio e de compatibilidade, bem como das relações constitutivas a utilizar na análise deste tipo de peças, baseia-se na expansão em série de Taylor da variação dos campos de deslocamentos ao longo das direcções de menor dimensão das peças, de modo a eliminar os correspondentes graus de liberdade. Desta forma é possível definir um conjunto de modelos consistentes para a análise simplificada tanto de lajes e placas como de estruturas reticuladas.

A partir da formulação apresentada para as peças laminares é possível obter as formulações habitualmente utilizadas no estudo dos estados planos de tensão e de deformação e, ainda, não só desenvolver os modelos de laje de Kirchhoff²² e de Reissner-Mindlin^{47,31}, mas também modelos de laje de ordem superior muito utilizados, como refere Ha²⁰, na análise de laminados de material compósito.

Analogamente, para o caso de peças lineares é possível obter uma formulação genérica a partir da qual se pode recuperar não só o modelo de barra de estrutura articulada, mas também o modelo de barra de pórtico, com ou sem deformabilidade por corte, bem como modelos de barra de ordem superior como os propostos por Vlassov⁵⁷.

1.3 - Definição do problema

Por forma a tornar claros os conceitos envolvidos no estudo dos diversos modelos de elementos finitos, interessa definir um conjunto de conceitos básicos nos quais assenta toda a formulação. Assim, considera-se a estrutura em análise definida por meio da especificação de um domínio, V , (tridimensional, bidimensional ou unidimensional) com geometria e propriedades mecânicas pré-definidas. Para que a descrição da estrutura em análise seja completa, torna-se necessário descrever o tipo de ligação do domínio com o meio que o rodeia. Assim, consoante a forma de ligação do domínio ao exterior, definem-se duas partições na fronteira, Γ , distintas, mas complementares ($\Gamma = \Gamma_{\sigma} \cup \Gamma_u$): a fronteira estática (Γ_{σ}) e a fronteira cinemática (Γ_u). Enquanto que sobre a fronteira Γ_{σ} as acções estáticas do exterior sobre a estrutura estão quantificadas, sobre a fronteira Γ_u são conhecidas as acções cinemáticas do exterior sobre a estrutura.

A descrição do estado de tensão da estrutura é feita por meio da definição de um conjunto de grandezas designadas por esforços generalizados. Paralelamente, para descrever o estado de deformação da estrutura definem-se as deformações generalizadas correspondentes. Estes esforços e deformações generalizados devem ser criteriosamente escolhidos para cada tipo de estrutura a analisar. No caso das estruturas tridimensionais ou das placas identificam-se directamente com as tensões e as extensões ou distorções. No caso das lajes e das peças lineares os esforços e deformações generalizados escolhidos consistem geralmente em momentos flectores, esforços normais ou esforços transversos e em curvaturas, extensões ou distorções médias.

Outro aspecto que deve ser definido é o que se relaciona com as acções sobre a estrutura. Assim, e de acordo com o Vocabulário de Teoria das Estruturas³⁵, NP-761, considera-se como acção sobre a estrutura toda e qualquer perturbação que provoca modificações no estado de tensão e/ou de deformação da estrutura, estando estes estados reportados a uma situação ideal de referência. Esta definição abrange inúmeras acções, as quais podem apresentar diferentes formas (aplicação de pressões ou imposição de deslocamentos),

variações com o tempo (estáticas ou dinâmicas) e zonas de actuação (no domínio ou sobre a fronteira). No presente trabalho, são consideradas unicamente acções não dependentes do tempo e que podem ser simuladas por meio de forças no domínio ou na fronteira, deslocamentos impostos na fronteira ou deformações impostas no domínio.

As equações fundamentais que os diversos modelos de elementos finitos devem satisfazer exprimem as condições de equilíbrio e de compatibilidade no domínio e na fronteira e ainda as que caracterizam o comportamento do material da estrutura.

A condição de equilíbrio local relaciona os valores dos esforços generalizados instalados na estrutura com as forças de domínio. Na hipótese da linearidade geométrica, esta relação pode ser expressa por meio do seguinte sistema de equações diferenciais lineares,

$$\mathbf{D} \mathbf{s} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } V, \quad (1.1)$$

em que o vector \mathbf{s} reúne os esforços generalizados, o vector \mathbf{b} as forças de domínio e a matriz \mathbf{D} representa o operador diferencial de equilíbrio. Esta relação de equilíbrio local identifica-se com a relação entre as tensões e as forças de massa no caso dos problemas de elasticidade bidimensional ou tridimensional e com as relações entre esforços e cargas de vão no caso das lajes e das estruturas reticuladas.

A condição de equilíbrio na fronteira estática impõe que os esforços generalizados ao longo dessa fronteira, Γ_{σ} , estejam em equilíbrio com as forças de fronteira, podendo ser expressa na forma,

$$\mathbf{N} \mathbf{s} = \mathbf{t}_* \quad \text{em } \Gamma_{\sigma}, \quad (1.2)$$

onde \mathbf{N} representa a matriz das componentes da normal exterior unitária correspondentes ao operador diferencial de equilíbrio \mathbf{D} e \mathbf{t}_* o vector que agrupa as forças de fronteira impostas na fronteira estática. No caso das estruturas tridimensionais e das placas esta condição corresponde à equação que relaciona as tensões com as tracções na fronteira.

Para as lajes e estruturas reticuladas a equação (1.2) relaciona os esforços com as forças aplicadas no contorno e nas extremidades, respectivamente.

A condição de compatibilidade no domínio impõe uma relação entre os deslocamentos e as deformações generalizadas. Esta relação, na hipótese da linearidade geométrica, exprime-se na forma de um sistema de equações diferenciais lineares do tipo,

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}^* \mathbf{u} \quad \text{em } V, \quad (1.3)$$

em que o vector \mathbf{e} agrupa as deformações generalizadas associadas aos esforços generalizados, \mathbf{s} , e o vector \mathbf{u} reúne os deslocamentos associados às forças de domínio, \mathbf{b} . Existindo esta correspondência entre grandezas estáticas e cinemáticas, o operador diferencial linear de compatibilidade, \mathbf{D}^* , como refere Freitas¹³, é adjunto do operador diferencial de equilíbrio, \mathbf{D} , apresentado na equação (1.1).

Saliente-se que a equação de compatibilidade local (1.3) no caso das placas e das estruturas tridimensionais define as extensões e distorções em função dos deslocamentos enquanto que no caso das lajes e das peças lineares esta equação define as curvaturas, as extensões e as distorções médias em função dos deslocamentos.

Ao longo da fronteira cinemática, Γ_u , a condição de compatibilidade é expressa na forma,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_* \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (1.4)$$

onde o vector \mathbf{u}_* reúne os valores impostos para os deslocamentos.

As relações constitutivas definem o comportamento do material da estrutura, relacionando os esforços generalizados com as deformações generalizadas. Consoante a abordagem seguida para a modelação das características mecânicas do material estrutural, assim se pode optar por uma modelação do tipo flexibilidade,

$$\mathbf{e} = \mathbf{F} (\mathbf{s}, \mathbf{e}_\theta) , \quad (1.5a)$$

ou rigidez,

$$\mathbf{s} = \mathbf{R} (\mathbf{e}, \mathbf{s}_\theta) . \quad (1.5b)$$

Na equação (1.5a), s_{θ} representa o vector que reúne os esforços generalizados residuais, independentes do estado de deformação. Em contrapartida, na equação (1.5b), e_{θ} representa o vector que reúne as deformações generalizadas devidas a acções do tipo deformação imposta, resultantes por exemplo do efeito das variações de temperatura ou da retracção.

No caso de se admitir para o material da estrutura um comportamento elástico e linear as equações genéricas (1.5a) e (1.5b) podem ser escritas na forma,

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} \mathbf{s} + \mathbf{e}_{\theta} \quad , \quad (1.6a)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{k} \mathbf{e} + \mathbf{s}_{\theta} \quad , \quad (1.6b)$$

respectivamente, representando \mathbf{f} a matriz de flexibilidade e \mathbf{k} a matriz de rigidez em que se reúnem as constantes elásticas.

As matrizes de rigidez e flexibilidade são, para o caso de se admitir um material com um comportamento descrito pela lei de Hooke generalizada, matrizes simétricas e positivas definidas, podendo escrever-se as seguintes relações:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^t = \mathbf{k}^{-1} \quad ; \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}^t = \mathbf{f}^{-1} \quad ;$$

$$\mathbf{e}_{\theta} = - \mathbf{f} \mathbf{s}_{\theta} \quad ; \quad \mathbf{s}_{\theta} = - \mathbf{k} \mathbf{e}_{\theta} \quad .$$

1.4 - Organização

Na apresentação deste trabalho começa-se por introduzir os modelos estáticos de elementos finitos de uma forma genérica, tendo em conta as relações fundamentais atrás expressas, mas sem a preocupação de uma aplicação imediata a um determinado tipo de estrutura. Assim, o desenvolvimento dos diferentes modelos estáticos é feito no segundo capítulo, sendo formulados três modelos diferentes de elementos finitos.

O primeiro modelo considera a interpolação do campo de esforços generalizados recorrendo a um conjunto de funções consideradas genéricas, logo, sem a preocupação de se utilizarem funções que respeitem localmente as condições de equilíbrio. Simultaneamente, surge a necessidade de considerar a interpolação dos campos de deslocamentos no domínio e ao longo da fronteira estática.

Seguidamente é considerada a hipótese das funções de interpolação dos esforços independentes respeitarem *a priori* as condições de equilíbrio local. Verifica-se que neste caso só se torna necessária a interpolação dos campos de deslocamentos ao longo da fronteira estática, conseguindo-se deste modo um modelo mais compacto.

Por fim, aumenta-se o grau de exigência em relação às funções de interpolação dos esforços generalizados, obrigando-se que estas funções tenham associados campos de deslocamentos compatíveis. Nestas condições, verifica-se que em termos genéricos o sistema resolutivo não sofre alterações em relação ao caso anterior. No entanto, a definição dos diferentes operadores apenas exige integrações ao longo das fronteiras dos elementos.

Por forma a testar o comportamento dos modelos formulados, no capítulo 3 procede-se à aplicação destes modelos ao caso de problemas de elasticidade plana, recorrendo à utilização de famílias de funções de interpolação derivadas de séries trigonométricas e de polinómios de Legendre. A aplicação das funções de interpolação aos diferentes modelos baseia-se, sempre que possível, na técnica da programação simbólica. Desenvolvendo analiticamente a definição dos diferentes operadores, consegue obter-se um melhor desempenho ao nível do tempo de cálculo do que quando se recorre a técnicas de integração numérica.

Por forma a caracterizar o comportamento dos diferentes modelos e das diferentes famílias de funções de interpolação, considera-se um conjunto de problemas tipo, nomeadamente o estudo do comportamento de uma consola curta sujeita à tracção e à

flexão, o estudo de uma placa em L traccionada e o estudo de uma secção tubular sujeita a pressão externa. Sempre que possível comparam-se os resultados obtidos com os apresentados por outros autores ou com os correspondentes à solução exacta.

No capítulo 4 é desenvolvido um modelo estático de elementos finitos adaptado à análise elástica de sólidos utilizando polinómios de Legendre como funções de interpolação. A análise do comportamento de uma consola curta com secção em T em modo combinado de flexão, torção e corte é utilizada para ilustrar a aplicação deste modelo ao caso de estruturas tridimensionais.

A simplificação para o comportamento das peças laminares é realizado no capítulo 5 recorrendo a uma expansão em série de Taylor do campo de deslocamentos ao longo da sua menor dimensão, a espessura. Desta forma consegue reduzir-se a análise das peças laminares, às quais corresponde um comportamento tridimensional, à análise de um conjunto de problemas referidos a um domínio bidimensional. Dependendo dos termos considerados na expansão em série, é possível recuperar os modelos tradicionalmente utilizados na análise de peças bidimensionais. Por forma a exemplificar o comportamento dos diferentes modelos, considera-se a análise de uma laje quadrada encastrada com um bordo livre sujeita a uma pressão uniforme.

No capítulo 6 são desenvolvidas as relações constitutivas para materiais ortotrópicos de modo a aplicar o modelo anteriormente desenvolvido ao caso dos laminados de material compósito. Esta aplicação permite demonstrar as capacidades deste modelo na análise de estruturas planas em que os efeitos tridimensionais adquirem especial importância.

O desenvolvimento da formulação para a análise de peças lineares segue uma metodologia em tudo análoga à seguida para as peças laminares. Neste caso procura reduzir-se o problema da análise das peças lineares à análise de um conjunto de problemas unidimensionais. No capítulo 7 desenvolve-se o modelo de peça linear verificando-se que, tal como sucedia para os modelos bidimensionais, se recuperam os

modelos de ordem inferior tradicionalmente utilizados na análise de peças lineares. A aplicação destes modelos é feita recorrendo à análise de um pórtico tridimensional de betão armado, considerando-se uma adaptação que permite ter em conta o comportamento elástico não linear.

No capítulo 8 apresenta-se uma síntese do trabalho desenvolvido realçando as principais características dos modelos formulados. A avaliação dos resultados obtidos a partir dos diferentes modelos permite definir linhas de acção para futuros trabalhos neste domínio.

2 Modelos Estáticos de Elementos Finitos

No presente capítulo apresenta-se um estudo sobre a formulação de modelos estáticos de elementos finitos, também designados como elementos finitos de tensão. A característica comum a estes modelos reside no facto das equações de equilíbrio no domínio e na fronteira estática serem impostas independentemente.

Os campos estáticos são interpolados no domínio, verificando localmente ou ponderadamente as condições de equilíbrio. Simultaneamente, as funções de interpolação dos campos estáticos são utilizadas como funções de ponderação da condição de compatibilidade local. Na fronteira estática são interpolados os deslocamentos, sendo utilizadas as funções de interpolação para ponderar as equações de equilíbrio na fronteira.

Neste capítulo apresentam-se três modelos de análise, os quais diferem no tipo de funções interpoladoras utilizadas. As designações adoptadas para estes modelos baseiam-se nas características das funções de interpolação adoptadas, sendo referidas sempre que possível outras designações encontradas na bibliografia para os mesmos modelos. Assim, consideram-se os seguintes tipos de funções:

- funções de interpolação genéricas;
- funções de interpolação autoequilibradas;
- funções de interpolação autoequilibradas e compatíveis.

Entende-se por funções de interpolação genéricas conjuntos de funções contínuas e diferenciáveis às quais não são *a priori* impostas quaisquer outras restrições.

As funções de interpolação autoequilibradas são funções que definem campos estáticos que satisfazem as condições de equilíbrio local, na ausência de forças de massa.

As funções de interpolação equilibradas e compatíveis são funções de interpolação que, para além de definirem campos de esforços autoequilibrados, têm associados campos cinemáticos compatíveis.

Consoante as aproximações feitas ao longo do desenvolvimento de cada modelo, surgem diferentes condicionantes à definição dos elementos finitos, bem como à sua reunião tendo em vista a simulação do comportamento da estrutura em análise.

No presente capítulo são referidos, para cada um dos modelos desenvolvidos, os problemas relacionados com a discretização e reunião de elementos finitos.

2.1 - Funções de interpolação genéricas

O desenvolvimento dos diferentes modelos tem como base as equações fundamentais definidas em 1.3. Assim, a condição de equilíbrio local, que relaciona os esforços generalizados, s , com as forças de domínio, b , é expressa pela equação,

$$D s + b = 0 \quad \text{em } V . \quad (2.1)$$

A condição de equilíbrio na fronteira estática, Γ_{σ} , impõe uma relação entre os esforços generalizados ao longo da fronteira estática e as forças de fronteira, t_* , sendo escrita na forma,

$$N s = t_* \quad \text{em } \Gamma_{\sigma} . \quad (2.2)$$

A condição de compatibilidade no domínio impõe uma relação entre os deslocamentos, \mathbf{d} , e as deformações generalizadas, \mathbf{e} ,

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}^* \mathbf{u} \quad \text{em } V . \quad (2.3)$$

Ao longo da fronteira cinemática, Γ_u , a condição de compatibilidade é expressa na forma,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_* \quad \text{em } \Gamma_u , \quad (2.4)$$

onde o vector \mathbf{u}_* reúne os valores impostos para os deslocamentos.

As relações constitutivas podem ser escritas numa abordagem do tipo flexibilidade ou do tipo rigidez na forma,

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} \mathbf{s} + \mathbf{e}_\theta , \quad (2.5a)$$

e,

$$\mathbf{s} = \mathbf{k} \mathbf{e} + \mathbf{s}_\theta , \quad (2.5b)$$

respectivamente, representando \mathbf{f} a matriz de flexibilidade e \mathbf{k} a matriz de rigidez, admitindo-se para o material da estrutura um comportamento elástico e linear .

Considere-se seguidamente uma interpolação do campo de esforços generalizados tendo em conta a sua decomposição em duas parcelas,

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_c + \mathbf{s}_0 , \quad (2.6)$$

sendo \mathbf{s}_0 a parcela particular e \mathbf{s}_c a parcela complementar tal que,

$$\mathbf{s}_c = \mathbf{S} \mathbf{X} , \quad (2.7)$$

onde a matriz \mathbf{S} agrupa as funções de interpolação e o vector \mathbf{X} os pesos que lhes estão associados, designados por esforços independentes.

Tendo em conta esta interpolação para os esforços generalizados as equações de equilíbrio no domínio, (2.1), e na fronteira estática, (2.2), podem ser escritas do seguinte modo:

$$\mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{X} + \mathbf{D} \mathbf{s}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } V ; \quad (2.8)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{S} \mathbf{X} + \mathbf{N} \mathbf{s}_0 = \mathbf{t}_* \quad \text{em } \Gamma_\sigma . \quad (2.9)$$

A equação de compatibilidade (2.3) pode ser satisfeita de uma forma ponderada, em que as funções de peso coincidem com as funções de interpolação de esforços:

$$\int S^t (e - D^* u) dV = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Esta equação de compatibilidade pode ser expressa na forma alternativa,

$$v = \int S^t D^* u dV \quad , \quad (2.11)$$

em que o vector,

$$v = \int S^t e dV \quad , \quad (2.12)$$

agrupa as deformações independentes duais dos esforços independentes X , visto verificarem a relação:

$$\int s_c^t e dV = X^t v \quad .$$

Se forem introduzidas na definição (2.12) as relações constitutivas expressas na forma (2.5a), e tendo em conta a interpolação dos esforços (2.6) e (2.7), obtem-se a seguinte relação entre deformações independentes e esforços independentes,

$$v = F X + v_0 - v_\theta \quad , \quad (2.13)$$

em que:

$$F = \int S^t f S dV \quad ; \quad (2.14a)$$

$$v_0 = \int S^t f s_0 dV \quad ; \quad (2.14b)$$

$$v_\theta = \int S^t f s_\theta dV \quad . \quad (2.14c)$$

Procedendo-se à integração por partes do segundo membro da equação (2.11), obtem-se a seguinte relação entre as deformações independentes e os deslocamentos:

$$v = \int (NS)^t u d\Gamma - \int (DS)^t u dV \quad . \quad (2.15)$$

Combinando as relações (2.13) e (2.15) obtém-se a seguinte expressão para a equação de compatibilidade:

$$\mathbf{F} \mathbf{X} + v_0 - v_\theta = \int (\mathbf{NS})^t \mathbf{u} \, d\Gamma - \int (\mathbf{DS})^t \mathbf{u} \, dV . \quad (2.16)$$

O modelo assim formulado, em que às funções de interpolação dos esforços generalizados apenas se impõe a condição de serem integráveis, passará a ser designado como modelo EG, (Modelo estático com funções de interpolação genéricas).

Para que a equação de compatibilidade (2.16) possa ser aplicada, torna-se necessário conhecer o campo de deslocamentos, \mathbf{u} . Se os deslocamentos, \mathbf{u}_* , ao longo da fronteira cinemática, Γ_u , são conhecidos *a priori*, já o mesmo não sucede com os deslocamentos no domínio e na fronteira estática, Γ_σ . Surge assim a necessidade de interpolar os campos de deslocamentos no domínio e na fronteira estática.

Considere-se, então, para os deslocamentos no domínio uma interpolação definida do seguinte modo,

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{d} \quad \text{em } V , \quad (2.17)$$

onde a matriz \mathbf{U} agrupa as funções de interpolação e o vector \mathbf{d} os pesos que lhes estão associados.

Considere-se ainda, para o campo de deslocamentos, \mathbf{u} , ao longo da fronteira estática, Γ_σ , uma interpolação independente. Essa interpolação pode ser escrita como,

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z} \mathbf{q} \quad \text{em } \Gamma_\sigma , \quad (2.18)$$

onde a matriz \mathbf{Z} agrupa as funções de interpolação e o vector \mathbf{q} os pesos que lhes estão associados.

Tendo em conta as interpolações de deslocamentos acima definidas, a equação de compatibilidade, (2.16), pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{F} \mathbf{X} + \mathbf{A} \mathbf{d} - \mathbf{B} \mathbf{q} = \mathbf{v}_* + \mathbf{v}_\theta - \mathbf{v}_0 , \quad (2.19)$$

em que:

$$\mathbf{A} = \int (\mathbf{D}\mathbf{S})^t \mathbf{U} \, d\mathbf{V} ; \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{B} = \int (\mathbf{N}\mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\Gamma_\sigma ; \quad (2.20b)$$

$$\mathbf{v}_* = \int (\mathbf{N}\mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\Gamma_u . \quad (2.20c)$$

No que diz respeito às condições de equilíbrio, a satisfação das equações (2.8) e (2.9) depende do tipo de funções de interpolação escolhidas para os esforços generalizados. Assim, e por forma a não condicionar *a priori* a natureza destas funções, considere-se que:

$$\mathbf{D} \mathbf{S} \neq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{D} \mathbf{s}_0 + \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \text{ em } \mathbf{V} .$$

Nestas condições a equação de equilíbrio no domínio deve ser satisfeita de uma forma ponderada, utilizando-se as funções de interpolação dos deslocamentos no domínio, \mathbf{U} , como funções de ponderação,

$$\int \mathbf{U}^t (\mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{X} + \mathbf{D} \mathbf{s}_0 + \mathbf{b}) \, d\mathbf{V} = \mathbf{0} . \quad (2.21)$$

A equação de equilíbrio no domínio toma a forma,

$$\mathbf{A}^t \mathbf{X} = - \mathbf{R} - \mathbf{R}_0 , \quad (2.22)$$

em que,

$$\mathbf{R} = \int \mathbf{U}^t \mathbf{b} \, d\mathbf{V} , \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{R}_0 = \int \mathbf{U}^t \mathbf{D} \mathbf{s}_0 \, d\mathbf{V} , \quad (2.23b)$$

e a matriz de equilíbrio \mathbf{A}^t é a transposta da matriz de compatibilidade, \mathbf{A} , definida em (2.20a).

As forças de domínio generalizadas, \mathbf{R} , são duais dos parâmetros de deslocamento, \mathbf{d} , visto obedecerem à relação:

$$\int \mathbf{b}^t \mathbf{u} \, dV = \mathbf{R}^t \mathbf{d} .$$

Analogamente, a equação de equilíbrio na fronteira estática, (2.9), é imposta ponderadamente, usando agora as funções de interpolação dos deslocamentos, \mathbf{Z} , como funções de ponderação,

$$\int \mathbf{Z}^t (\mathbf{N} \mathbf{S} \mathbf{X} + \mathbf{N} s_0 - \mathbf{t}_*) \, d\Gamma_\sigma = \mathbf{0} . \quad (2.24)$$

A equação de equilíbrio na fronteira estática toma a forma,

$$\mathbf{B}^t \mathbf{X} = \mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_0, \quad (2.25)$$

em que,

$$\mathbf{Q}_* = \int \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, d\Gamma_\sigma , \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{Q}_0 = \int \mathbf{Z}^t \mathbf{N} s_0 \, d\Gamma_\sigma , \quad (2.26b)$$

e a matriz de equilíbrio \mathbf{B}^t é a transposta da matriz de compatibilidade, \mathbf{B} , definida em (2.20b).

As forças de fronteira generalizadas, \mathbf{Q} , são duais dos parâmetros de deslocamento, \mathbf{q} , visto obedecerem à relação:

$$\int \mathbf{t}^t \mathbf{u} \, d\Gamma_\sigma = \mathbf{Q}^t \mathbf{q} .$$

O modelo **EG** assim formulado é um modelo coerente descrito pelo seguinte sistema governativo:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{A}^t & . & . \\ \mathbf{B}^t & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_* - \mathbf{v}_\theta \\ \mathbf{R} + \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_0 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

As suas principais características, em termos de campos interpolados e de equações impostas ponderadamente ou localmente, encontram-se resumidas no quadro seguinte.

	Equações		Variáveis	
	Equilíbrio	Compatibilidade	Estáticas	Cinemáticas
Domínio	Ponderadas (2.21)	Ponderadas (2.10)	Interpoladas (2.6) (2.7)	Interpoladas (2.17)
Fronteira	Ponderadas (2.24)	Impostas (2.4)		Interpoladas (2.18)

O modelo EG, tendo em conta as interpolações efectuadas, e seguindo as designações adoptadas por Pian⁴³, pode ser classificado como um modelo de elementos finitos híbrido e misto. Híbrido por serem interpoladas simultaneamente e independentemente grandezas no domínio e na fronteira. Misto por se interpolarem independentemente duas grandezas distintas no domínio. Este modelo corresponde ao "Modelo estático misto" apresentado por Moitinho de Almeida³².

2.2 - Funções de interpolação autoequilibradas

Admita-se agora que as funções de interpolação dos esforços generalizados são autoequilibradas, isto é, funções que respeitem a equação de equilíbrio, (2.8), na ausência de forças de domínio:

$$D S = 0 \quad \text{em } V . \quad (2.28)$$

Neste modelo, que passará a ser designado como modelo EA (Modelo estático com funções de interpolação autoequilibradas), a satisfação da condição de equilíbrio no domínio (2.8) é conseguida por meio da escolha de uma solução particular, s_0 , que equilibre as forças de domínio, b :

$$D s_0 + b = 0 \quad \text{em } V . \quad (2.29)$$

Tendo em conta as características impostas para as funções de interpolação, (2.28) e (2.29), a equação de equilíbrio no domínio, (2.22), torna-se universalmente satisfeita:

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} ; \quad \mathbf{R} + \mathbf{R}_0 = \mathbf{0} .$$

Simultaneamente, a equação de compatibilidade (2.19) toma a forma,

$$\mathbf{F} \mathbf{X} - \mathbf{B} \mathbf{q} = \mathbf{v}_* + \mathbf{v}_\theta - \mathbf{v}_0 , \quad (2.30)$$

em que o operador de flexibilidade, \mathbf{F} , o operador de compatibilidade, \mathbf{B} , e as deformações independentes, \mathbf{v}_* , \mathbf{v}_θ e \mathbf{v}_0 , mantêm as definições já apresentadas.

Tal como sucedia no modelo **EG**, o equilíbrio ao longo da fronteira estática é estabelecido de uma forma ponderada, em que as funções de peso coincidem com as funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira estática, \mathbf{Z} . O equilíbrio ao longo da fronteira estática continua, assim, a ser expresso pela equação (2.25).

O modelo **EA** assim formulado é descrito pelo seguinte sistema governativo:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^t & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_* - \mathbf{v}_\theta \\ \mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_0 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

As principais características deste modelo, em termos de campos interpolados e de equações impostas localmente ou ponderadamente, encontram-se resumidas no quadro seguinte.

	Equações		Variáveis	
	Equilíbrio	Compatibilidade	Estáticas	Cinemáticas
Domínio	Impostas (2.28) (2.29)	Ponderadas (2.10)	Interpoladas (2.6) (2.7)	
Fronteira	Ponderadas (2.24)	Impostas (2.4)		Interpoladas (2.18)

O modelo EA baseia-se na interpolação dos esforços generalizados no domínio bem como dos deslocamentos na fronteira estática, podendo ser classificado, seguindo a terminologia de Pian⁴³, como um modelo de elementos finitos híbrido. Note-se ainda que, ao contrário do que sucedia no modelo EG, não é feita no modelo EA qualquer interpolação de deslocamentos no domínio. Este modelo corresponde ao "Modelo estático puro" apresentado por Moitinho de Almeida³² ou à "Descrição nodal do modelo misto" apresentada por Freitas¹⁵.

2.3 - Funções de interpolação autoequilibradas e compatíveis

Neste modelo as funções de interpolação dos esforços generalizados escolhidas, S e s_0 , são funções que além de respeitarem as condições de equilíbrio, (2.28) e (2.29), têm associados campos de deslocamento compatíveis, designados respectivamente por U e U_0 . Considera-se, ainda, que para os esforços generalizados residuais, s_θ , existe o correspondente campo de deslocamentos, U_θ .

Nestas condições, é possível exprimir a dependência entre os campos estáticos e cinemáticos na forma,

$$f S = D^* U , \quad (2.32a)$$

$$f s_0 = D^* U_0 , \quad (2.32b)$$

$$f s_\theta = D^* U_\theta , \quad (2.32c)$$

em que f representa a matriz de flexibilidade.

No modelo assim definido, que passará a ser designado por EAC (Modelo estático com funções de interpolação autoequilibradas e compatíveis), o equilíbrio no domínio é respeitado da mesma forma que no modelo anterior EA, (2.28) e (2.29), podendo no entanto na definição do operador de flexibilidade, F , e das deformações independentes,

v_θ e v_0 , serem substituídos os campos de esforços generalizados pelos correspondentes campos de deslocamentos, obtendo-se as seguintes definições:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{S}^t \mathbf{f} \mathbf{S} \, dV = \int \mathbf{S}^t \mathbf{D}^* \mathbf{U} \, dV \quad ; \quad (2.33a)$$

$$v_\theta = \int \mathbf{S}^t \mathbf{f} s_\theta \, dV = \int \mathbf{S}^t \mathbf{D}^* \mathbf{U}_\theta \, dV \quad ; \quad (2.33b)$$

$$v_0 = \int \mathbf{S}^t \mathbf{f} s_0 \, dV = \int \mathbf{S}^t \mathbf{D}^* \mathbf{U}_0 \, dV \quad . \quad (2.33c)$$

Integrando por partes o segundo membro das definições (2.33) e tendo em conta (2.28) obtêm-se as seguintes definições:

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{NS})^t \mathbf{U} \, d\Gamma \quad ; \quad (2.34a)$$

$$v_\theta = \int (\mathbf{NS})^t \mathbf{U}_\theta \, d\Gamma \quad ; \quad (2.34b)$$

$$v_0 = \int (\mathbf{NS})^t \mathbf{U}_0 \, d\Gamma \quad . \quad (2.34c)$$

A descrição do modelo **EAC** é assim idêntica à do modelo **EA**,

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^t & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_0 - v_* - v_\theta \\ \mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_0 \end{Bmatrix} \quad , \quad (2.35)$$

apesar das novas definições obtidas para o operador de flexibilidade, \mathbf{F} , e para as deformações independentes, v_θ e v_0 . A particularidade do modelo **EAC** reside no facto de, em consequência de se impor a existência dos campos de deslocamentos definidos em (2.32), todos os operadores presentes no sistema governativo são resultado de integrações realizadas apenas na fronteira. Esta particularidade torna o presente modelo bastante interessante do ponto de vista numérico.

2.4 - Aplicação dos modelos de elementos finitos

O desenvolvimento dos diferentes modelos estáticos teve como base a consideração de um domínio genérico sem ter em atenção a sua adaptação a uma discretização por elementos finitos. É contudo necessário analisar quais os problemas que devem ser tidos em conta na aplicação dos diferentes modelos, bem como quais as razões que podem obrigar à discretização por elementos finitos das estruturas em análise.

A dificuldade na aplicação de qualquer modelo de elementos finitos apresenta em geral duas vertentes: a montagem do sistema governativo e a sua resolução.

As dificuldades na montagem do sistema governativo têm como origem as integrações presentes nas definições dos vários operadores. Estas integrações dependem não só da complexidade das funções de interpolação utilizadas, mas também da complexidade dos domínios de integração.

Como no capítulo seguinte se constatará, para uma mesma família de funções, a complexidade das funções de interpolação cresce quando se passa do modelo EG para o modelo EA e deste para o modelo EAC; este facto não constitui surpresa, sendo consequência das exigências crescentes feitas às funções de interpolação.

Uma forma de limitar a complexidade dos domínios de integração, limitando também a complexidade na realização dos vários integrais, é a divisão dos domínios de integração em elementos de geometria simples. Para elementos com características tipificadas é possível encontrar expressões genéricas para os vários integrais. Em certos casos existem mesmo soluções analíticas que permitem poupar os custos, em tempo e volume de cálculo, que a integração numérica sempre acarreta.

Nos modelos atrás apresentados, cada um dos elementos pode ser definido como um domínio distinto ao qual está associado um sistema governativo. A ligação entre os vários

elementos é feita impondo que elementos adjacentes partilhem, nas fronteiras comuns, as mesmas funções de interpolação dos deslocamentos, (2.18).

As dificuldades na resolução dos sistemas governativos estão ligadas à dimensão e características dos sistemas, nomeadamente em termos de simetria e índices de condicionamento e esparsidade.

A simetria dos sistemas governativos para os modelos apresentados é garantida pela coerência, em termos de interpolações e ponderações, adoptada na sua formulação. A sua esparsidade e dimensão dependerão, em grande medida, do tipo de funções escolhidas para as várias interpolações. A escolha de famílias de funções ortogonais garante à partida elevados índices de esparsidade dos sistemas governativos e propicia o seu bom condicionamento.

No processo de resolução dos sistemas governativos devem ser previstos procedimentos que permitam a eliminação de equações linearmente dependentes por forma a permitir a eliminação dos modos de deformação espúrios.

2.4.1 - Modos de deformação espúrios

Na aplicação dos modelos estáticos de elementos finitos deve ser dada especial atenção ao problema da possível existência de modos de deformação espúrios. Estes modos de deformação, *spurious modes* como os designa Maunder³⁰, manifestam-se por meio da existência de equações linearmente dependentes no sistema governativo. A sua origem está relacionada não só com o facto de as diferentes interpolações serem realizadas independentemente, mas também com a topografia da estrutura. Assim, o aparecimento de modos espúrios depende não só das características das funções de interpolação, mas também da geometria dos elementos e da forma como estes se ligam entre si.

No presente trabalho não será abordado o problema da metodologia a seguir para evitar o aparecimento dos modos de deformação espúrios. Estes modos serão eliminados durante o processo de resolução do sistema governativo por meio do anulamento dos correspondentes graus de liberdade.

No que diz respeito aos modos de tensão espúrios, este problema não é considerado, pois, ao contrário do que sucede em relação aos modos de deformação, a escolha de funções linearmente independentes para a interpolação dos esforços generalizados assegura à partida a não existência destes modos de tensão.

2.4.2 - Elementos finitos no modelo EG

No modelo **EG** considera-se a interpolação dos esforços generalizados no domínio e, independentemente, dos deslocamentos no domínio e na fronteira estática. A grande liberdade na escolha das funções de interpolação permite uma grande facilidade na definição de elementos finitos mestres, nos quais é possível definir analiticamente os operadores de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade.

Este procedimento, semelhante ao utilizado nos elementos finitos isoparamétricos, permite, para uma família de funções de interpolação, definir os operadores presentes no sistema governativo em função dos parâmetros que caracterizam a mudança de coordenadas entre o referencial em que se encontra definido o elemento finito e o referencial local do elemento mestre.

No anexo A3.1 apresenta-se, para o caso da elasticidade plana, a adaptação do elemento finito rectangular de 8 nós ao modelo **EG**. Da análise das expressões aí apresentadas para os diferentes operadores conclui-se que, escolhendo criteriosamente as famílias de funções de interpolação a utilizar, é possível definir analiticamente todos os integrais apresentados. Mais uma vez se destaca a importância da escolha de famílias de funções

ortogonais em relação ao domínio dos elementos mestres por forma a facilitar, não só a realização das integrações, mas também a resolução dos sistemas governativos.

Devido ao facto de no modelo EG serem interpolados independentemente os deslocamentos na fronteira estática e no domínio, o aparecimento de modos de deformação espúrios torna-se bastante frequente. A utilização de ordens de interpolação para os deslocamentos no domínio inferiores às utilizadas para os deslocamentos na fronteira limita, em geral, o aparecimento destes modos de deformação.

2.4.3 - Elementos finitos no modelo EA

No modelo EA torna-se necessário interpolar os esforços generalizados no domínio e os deslocamentos na fronteira estática. As funções de interpolação dos esforços generalizados devem ser autoequilibradas, isto é, devem satisfazer localmente a equação diferencial de equilíbrio (2.28).

Estando o operador diferencial de equilíbrio definido no referencial da estrutura, pode não ser possível definir *a priori*, para o modelo EA, funções de interpolação referidas a um referencial local. A escolha de elementos finitos mestres para os quais apenas são definidas mudanças de referencial com matriz de transformação diagonal permite ultrapassar esta dificuldade. Alternativamente, pode recorrer-se à integração directa dos termos dos operadores presentes no sistema governativo.

Entre estas duas opções, a primeira parece ser mais eficiente do ponto de vista numérico, mas demasiadamente restritiva, sendo mais razoável optar pela integração directa dos operadores partindo da definição das funções de interpolação no referencial da estrutura.

Para o caso das estruturas planas é possível recorrer a um artifício, utilizado por Moitinho de Almeida³² e Maunder²⁹ por forma a melhorar do ponto de vista numérico o desempenho deste modelo. Este artifício consiste na transformação das integrações no

domínio em integrações na fronteira recorrendo à seguinte fórmula de integração por partes,

$$\int_V f(x,y) dV = \int_S P_x(f) \frac{dy}{dr} dr, \quad (2.36)$$

em que $P_x(f)$ representa a primitiva de $f(x,y)$ em ordem a x . Uma fórmula análoga pode ser escrita utilizando primitivas de $f(x,y)$ em ordem a y .

Regra geral, estas integrações são realizadas numericamente, pois as condições impostas às funções de interpolação, aliadas ao elevado número de parâmetros, torna de grande complexidade e de difícil exequibilidade a integração analítica dos diferentes operadores presentes no sistema governativo do modelo EA.

Convém ter em conta que, para geometrias simples, a utilização de famílias de funções de interpolação ortogonais, se bem escolhidas, poderá em alguns casos produzir sistemas governativos com elevados índices de esparsidade.

2.4.4 - Elementos finitos no modelo EAC

A principal diferença entre o modelo EAC e o modelo EA reside no facto de no modelo EAC se exigir que as funções de interpolação dos esforços generalizados, além de serem autoequilibradas, tenham associados campos de deslocamentos compatíveis. Assim, as dificuldades apontadas para a aplicação de elementos mestres no modelo EA mantêm-se para o modelo EAC.

O artifício para eliminar os integrais de domínio, sugerido no modelo EA, perde a sua utilidade, pois todos os operadores presentes no sistema governativo só dependem de integrações na fronteira.

Estando definidas regras bastante restritivas para a geração das funções de interpolação, estas funções apresentam geralmente alguma complexidade, dificultando a sua integração analítica, como poderá ser verificado no capítulo seguinte.

3 Estudo de Funções de Interpolação

No presente capítulo são testados os modelos descritos no capítulo 2 recorrendo a problemas de elasticidade plana. A utilização deste tipo de problemas permite comparar o comportamento de diferentes famílias de funções de interpolação.

O estudo dos problemas de elasticidade plana inicia-se com a definição dos esforços e deformações generalizados e com a especificação dos operadores de equilíbrio e de compatibilidade, bem como dos operadores de rigidez e flexibilidade.

As funções de interpolação escolhidas são funções sinusoidais para os modelos **EG**, **EA** e **EAC** e ainda polinómios de Legendre para o modelo **EG**.

A utilização de funções trigonométricas na solução de problemas de elasticidade foi uma técnica bastante divulgada por autores como Love²⁷, Fung¹⁷ e Muskhelishvili³⁴. Nos últimos anos, diversos autores, Krahula²³, Chakrabarti⁸, Arantes e Oliveira³⁷, Petrolito⁴², Kusama²⁴, têm retomado a utilização deste tipo de funções como funções de interpolação, quer no método dos elementos finitos, quer no método dos elementos de fronteira.

A escolha de funções de interpolação do tipo sinusoidal justifica-se pela fácil geração deste tipo de funções, mesmo quando sujeitas a restrições como as exigidas nos

modelos EA e EAC. Na realidade as funções sinusoidais permitem que se estabeleçam as definições dos vários operadores intervenientes em função do seu período, o que facilita a geração e a manipulação de um conjunto hierárquico de funções. Acresce ainda o facto de, devido à ortogonalidade destas funções, os operadores intervenientes nos vários sistemas governativos apresentarem altos índices de esparsidade.

Os polinómios de Legendre, sendo também funções ortogonais, permitem uma fácil geração e manipulação dos vários operadores. Contudo já não são tão adequados para a utilização nos modelos EA e EAC devido às dificuldades que apresentam quando se pretende satisfazer as exigências adicionais formuladas nestes modelos.

A utilização de um conjunto de problemas tipo permite comparar as soluções obtidas a partir das diferentes formulações e discutir as vantagens e inconvenientes de cada uma delas.

3.1 - Definição dos operadores intervenientes

Nos problemas de elasticidade plana as variáveis estáticas e cinemáticas habitualmente utilizadas são as tensões e as deformações referidas a um sistema de coordenadas cartesianas. Assim, os vectores dos esforços e das deformações generalizadas podem ser definidos como,

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

em que x e y definem um sistema de coordenadas cartesianas.

Os deslocamentos a ter em conta são os deslocamentos ao longo das duas direcções do plano, x , y . As forças de domínio e as forças de fronteira são também referidas a estas

duas direcções:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

O operador diferencial de equilíbrio \mathbf{D} e a matriz das normais que lhe está associada, \mathbf{N} , são definidos por,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & \cdot & n_y \\ \cdot & n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

em que n_x e n_y representam, respectivamente, as componentes segundo as direcções x e y da normal unitária exterior à fronteira.

O operador de compatibilidade, \mathbf{D}^* , é adjunto do operador de equilíbrio, \mathbf{D} , isto é,

$$d_{ij}^* = \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} = -(-1)^k d_{ji} \quad \text{com } \alpha = x, y \quad (3.4)$$

Ao nível das relações constitutivas, para o caso particular do estado plano de tensão de uma estrutura de material isotrópico, definem-se os seguintes operadores de elasticidade,

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{E}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad (3.5b)$$

onde \mathbf{E} representa o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

3.2 - Modelo EG utilizando funções sinusoidais

3.2.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio

Para o modelo EG utilizando funções sinusoidais, a escolha das funções de interpolação dos esforços, S , recai sobre a família de funções de sinusoidais mais simples de gerar e que corresponde ao desenvolvimento em série de Fourier de cada componente do campo de tensões. Este conjunto de funções pode ser expresso na seguinte forma:

Funções baseadas na função constante			
σ_{xx}	1	0	0
σ_{yy}	0	1	0
σ_{xy}	0	0	1

Funções correspondentes a ondas segundo ξ						
σ_{xx}	S_ξ	0	0	C_ξ	0	0
σ_{yy}	0	S_ξ	0	0	C_ξ	0
σ_{xy}	0	0	S_ξ	0	0	C_ξ

Funções correspondentes a ondas segundo η						
σ_{xx}	S_η	0	0	C_η	0	0
σ_{yy}	0	S_η	0	0	C_η	0
σ_{xy}	0	0	S_η	0	0	C_η

Funções correspondentes a ondas cruzadas $\xi \eta$						
σ_{xx}	$S_\xi S_\eta$	0	0	$C_\xi C_\eta$	0	0
σ_{yy}	0	$S_\xi S_\eta$	0	0	$C_\xi C_\eta$	0
σ_{xy}	0	0	$S_\xi S_\eta$	0	0	$C_\xi C_\eta$
σ_{xx}	$S_\xi C_\eta$	0	0	$C_\xi S_\eta$	0	0
σ_{yy}	0	$S_\xi C_\eta$	0	0	$C_\xi S_\eta$	0
σ_{xy}	0	0	$S_\xi C_\eta$	0	0	$C_\xi S_\eta$

Nestas expressões, utiliza-se a seguinte notação,

$$S_{\xi} = \sin \left[\frac{1}{2} m \pi (1 + \xi) \right], \quad C_{\xi} = \cos \left[\frac{1}{2} m \pi (1 + \xi) \right],$$

$$S_{\eta} = \sin \left[\frac{1}{2} n \pi (1 + \eta) \right], \quad C_{\eta} = \cos \left[\frac{1}{2} n \pi (1 + \eta) \right],$$

em que ξ e η representam as coordenadas locais do elemento, que variam entre -1 e 1 .

Os parâmetros m e n são inteiros positivos que representam o número de semi-ondas de cada função, segundo ξ e η , respectivamente.

No modelo EG utilizando funções trigonométricas, verifica-se que o número de funções de interpolação de tensão a utilizar, n_x , depende do número de termos considerado no desenvolvimento em série, N , de acordo com a seguinte relação:

$$n_x = 3 + 12 N + 12 N^2. \quad (3.6)$$

3.2.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos no domínio

Para funções de interpolação dos deslocamentos no domínio, U , tomam-se as funções resultantes do desenvolvimento em série de Fourier de cada componente do campo de deslocamentos. Estas funções podem ser expressas na seguinte forma:

Funções baseadas na função constante		
u_x	1	0
u_y	0	1

Funções correspondentes a ondas segundo ξ				
u_x	S_{ξ}	0	C_{ξ}	0
u_y	0	S_{ξ}	0	C_{ξ}

Funções correspondentes a ondas segundo η				
u_x	S_η	0	C_η	0
u_y	0	S_η	0	C_η

Funções correspondentes a ondas cruzadas $\xi \eta$				
u_x	$S_\xi S_\eta$	0	$C_\xi C_\eta$	0
u_y	0	$S_\xi S_\eta$	0	$C_\xi C_\eta$
u_x	$S_\xi C_\eta$	0	$C_\xi S_\eta$	0
u_y	0	$S_\xi C_\eta$	0	$C_\xi S_\eta$

Em relação à interpolação dos deslocamentos no domínio, o número de funções a utilizar, n_d , depende do número de termos considerado no desenvolvimento em série, N , através da seguinte expressão:

$$n_d = 2 + 8 N + 8 N^2 . \quad (3.7)$$

3.2.3 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira

Para funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira tomam-se as funções sinusoidais resultantes da expansão em série de Fourier de cada componente do campo de deslocamentos na fronteira, isto é,

	Função constante		Função S_s		Função C_s	
u_x	1	0	S_s	0	C_s	0
u_y	0	1	0	S_s	0	C_s

em que :

$$S_s = \sin \left[\frac{1}{2} i \pi (1 + s) \right], \quad C_s = \cos \left[\frac{1}{2} i \pi (1 + s) \right].$$

A coordenada local, s , varia entre -1 e 1 , sendo i o inteiro positivo que representa o número de semi-ondas de cada função.

Para cada troço de fronteira, e por cada direcção, há a considerar,

$$n_q = 1 + 2 N , \quad (3.8)$$

funções de interpolação em função do número de termos considerado, N.

3.2.4 - Aplicação do modelo desenvolvido

A aplicação do modelo EG utilizando funções trigonométricas é realizada com base na formulação de um modelo semelhante, em alguns aspectos, ao modelo de elementos finitos isoparamétricos. Assim, é possível desenvolver um conjunto de elementos tipo, para os quais, com base na posição espacial dos seus nós, é construída uma mudança de coordenadas entre o referencial global da estrutura e o referencial local do elemento, onde são definidas as funções de interpolação. No anexo A3.1 apresenta-se o desenvolvimento da mudança de coordenadas, bem como da redefinição dos operadores presentes no sistema governativo, (2.27), para o elemento rectangular de 8 nós.

3.3 - Modelo EA utilizando funções sinusoidais

3.3.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio

As funções de interpolação dos esforços generalizados a utilizar no modelo EA são funções autoequilibradas, equação (2.28). Tendo como base funções sinusoidais, é possível gerar um conjunto de funções que têm a particularidade de, para cada valor adoptado para o período, definirem uma família completa de funções autoequilibradas. Estas funções podem ser listadas na seguinte forma:

Funções baseadas na função constante			
σ_{xx}	1	0	0
σ_{yy}	0	1	0
σ_{xy}	0	0	1

	Funções baseadas em S_x			Funções baseadas em C_x		
σ_{xx}	S_x	0	0	C_x	0	0
σ_{yy}	$-1/2 \alpha^2 y^2 S_x$	S_x	$-\alpha y C_x$	$-1/2 \alpha^2 y^2 C_x$	C_x	$\alpha y S_x$
σ_{xy}	$-\alpha y C_x$	0	S_x	$\alpha y S_x$	0	C_x

	Funções baseadas em S_y			Funções baseadas em C_y		
σ_{xx}	S_y	$-1/2 \beta^2 x^2 S_y$	$-\beta x C_y$	C_y	$-1/2 \beta^2 x^2 C_y$	$\beta x S_y$
σ_{yy}	0	S_y	0	0	C_y	0
σ_{xy}	0	$-\beta x C_y$	S_y	0	$\beta x S_y$	C_y

	Funções baseadas nos produtos $(S_x S_y)$ $(C_x C_y)$ $(S_x C_y)$ $(C_x S_y)$			
σ_{xx}	$\beta^2 S_x S_y$	$\beta^2 C_x C_y$	$\beta^2 S_x C_y$	$\beta^2 C_x S_y$
σ_{yy}	$\alpha^2 S_x S_y$	$\alpha^2 C_x C_y$	$\alpha^2 S_x C_y$	$\alpha^2 C_x S_y$
σ_{xy}	$\alpha \beta C_x C_y$	$\alpha \beta S_x S_y$	$-\alpha \beta C_x S_y$	$-\alpha \beta S_x C_y$

Nestas expressões utiliza-se a seguinte notação,

$$\alpha = m \pi, \quad \beta = n \pi,$$

$$S_x = \sin (\alpha x), \quad C_x = \cos (\alpha x),$$

$$S_y = \sin (\beta y), \quad C_y = \cos (\beta y),$$

em que x e y variam entre 0 e 1, sendo m e n inteiros positivos que representam o número de semi-ondas de cada função segundo x e y , respectivamente.

No modelo EA utilizando funções trigonométricas, o número de funções de interpolação das tensões, n_x , depende do número de termos considerado no desenvolvimento em série, N , de acordo com a seguinte relação:

$$n_x = 3 + 12 N + 4 N^2. \quad (3.9)$$

3.3.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira

Para funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira consideram-se funções idênticas às adoptadas para o modelo EG, isto é, funções resultantes da expansão em série de Fourier de cada componente do campo de deslocamentos ao longo de cada um dos troços de fronteira. Estas funções foram já listadas na secção 3.2.3 .

3.4 - Modelo EAC utilizando funções sinusoidais

3.4.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio

A aplicação do modelo EAC pressupõe a geração de campos de tensão que sejam autoequilibrados e para os quais se garanta a existência de um campo de deslocamentos associado. Uma forma sistemática de se proceder à geração destes campos consiste no arbítrio de uma família de funções potenciais de Airy, ϕ :

$$\nabla^4 \phi = 0 . \quad (3.10)$$

O desenvolvimento em série de Fourier da função de Airy é proposto por Mathieu²⁸, tomando a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = & x^2 X_1 + xy X_2 + y^2 X_3 + \\ & + \sum_{n=1}^N \left[\cos(n\pi x) f_n^i(y) + \sin(n\pi x) f_n^j(y) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^N \left[\cos(n\pi y) f_n^i(x) + \sin(n\pi y) f_n^j(x) \right] , \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que:

$$f_n^m(z) = \cosh(n\pi z) (X_{1m} + z X_{2m}) + \sinh(n\pi z) (X_{3m} + z X_{4m}) . \quad (3.12)$$

Saliente-se que este desenvolvimento, utilizado por Freitas¹⁶, não corresponde ao desenvolvimento em série de cada uma das componentes de tensão, as quais são definidas a partir da função potencial por:

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} . \quad (3.13)$$

Além dos três campos de tensão uniforme, a definição (3.12) permite gerar, para cada direcção, oito campos sinusoidais por cada termo do desenvolvimento em série.

As funções de deslocamento associadas a estas funções de interpolação obtêm-se calculando as deformações, com base nas relações constitutivas, (2.5a), procedendo-se em seguida à integração da equação diferencial de compatibilidade, (2.3). No anexo A3.2 estão listadas as diversas funções de tensão bem como as correspondentes funções de deslocamento.

Neste modelo verifica-se que o número de funções de interpolação a utilizar, n_x , depende do número de termos considerado no desenvolvimento em série, N , de acordo com a seguinte relação:

$$n_x = 3 + 16 N. \quad (3.14)$$

3.4.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira

Consideram-se como funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira o desenvolvimento em série de Fourier de cada componente de deslocamento, em cada um dos troços de fronteira, tal como nos modelos analisados anteriormente.

3.5 - Modelo EG utilizando polinómios de Legendre

Os polinómios de Legendre são uma família de polinómios que podem ser expressos na forma,

$$P_n(\xi) = \frac{\lambda_n}{(-2)^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} [(1 - \xi^2)^n], \quad (3.15)$$

em que n representa o grau do polinómio e

$$\lambda_n = \sqrt{1/2 + n} . \quad (3.16)$$

Esta família de polinómios define um conjunto de polinómios ortonormais,

$$\int_{-1}^1 P_i(\xi) P_j(\xi) d\xi = \delta_{ij} , \quad (3.17)$$

onde $P_m(\xi)$ representa o polinómio de Legendre de grau m e δ_{mn} o símbolo de Kronecker.

Para definir os diversos polinómios de Legendre é utilizada a fórmula de recorrência, apresentada por Spiegel⁵²,

$$\frac{n + 1}{\lambda_{n+1}} P_{n+1}(\xi) = \frac{2n + 1}{\lambda_n} \xi P_n(\xi) - \frac{n}{\lambda_{n-1}} P_{n-1}(\xi) , \quad (3.18)$$

em que:

$$P_0(\xi) = \lambda_0 ; \quad P_1(\xi) = \lambda_1 \xi .$$

3.5.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio

Partindo das definições apresentadas para os polinómios de Legendre é possível gerar as seguintes funções de interpolação, para o modelo EG:

Funções baseadas em $(P_\xi P_\eta)$			
σ_{xx}	$P_\xi P_\eta$	0	0
σ_{yy}	0	$P_\xi P_\eta$	0
σ_{xy}	0	0	$P_\xi P_\eta$

Utiliza-se a seguinte notação,

$$P_{\xi} = P_m(\xi) \quad e \quad P_{\eta} = P_n(\eta) ,$$

em que ξ e η representam as coordenadas locais do elemento, variando entre -1 e 1 , e os inteiros m e n definem o grau de cada polinómio segundo ξ e η , respectivamente.

O número de funções de interpolação de tensões a utilizar, n_x , é dado por,

$$n_x = 3 (1 + N)^2 , \quad (3.19)$$

sendo N o grau do polinómio de maior grau utilizado.

3.5.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos no domínio

Para funções de interpolação dos deslocamentos no domínio, U , tomam-se as funções,

		Funções baseadas em $(P_{\xi} P_{\eta})$	
u_x	$P_{\xi} P_{\eta}$	0	
u_y	0	$P_{\xi} P_{\eta}$	

em que P_{ξ} e P_{η} têm o significado já referido anteriormente.

O número de funções de interpolação a utilizar, n_d , depende do grau N , do polinómio de maior grau utilizado, de acordo com a seguinte relação:

$$n_d = 2 (1 + N)^2 . \quad (3.20)$$

3.5.3 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira

Para funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira tomam-se também polinómios de Legendre,

$$P_s = P_i(s),$$

variando s entre -1 e 1 , e sendo i o inteiro que representa o grau do polinómio de Legendre segundo a direcção do troço de fronteira.

	Funções baseadas em P_s	
u_x	P_s	0
u_y	0	P_s

Para cada troço de fronteira, e por cada direcção, há que considerar,

$$n_q = 1 + N, \quad (3.21)$$

funções de interpolação, sendo N o grau do polinómio de maior grau utilizado.

3.6 - Exemplos de aplicação

Por forma a testar o comportamento dos diferentes modelos desenvolvidos, bem como analisar o comportamento dos diferentes tipos de funções de forma, foi realizado um conjunto de simulações com base em três problemas tipo, designadamente, a consola quadrada, a placa em L e o tubo cilíndrico, ilustrados nas figuras 3.1, 3.13 e 3.20, respectivamente.

A escolha destes problemas baseou-se na preocupação de aliar à sua simplicidade uma diversidade de situações que potenciase a manifestação das principais características dos modelos em estudo.

3.6.1 - Consola quadrada

Considere-se o exemplo de uma consola quadrada com as características geométricas e mecânicas descritas na figura 3.1. Nessa figura representa-se a aplicação de dois casos de carga, os quais produzem, predominantemente, a tracção e a flexão da consola. É ainda indicada a posição de um conjunto de pontos de controlo, colocados por forma a permitirem a comparação de resultados entre os diferentes modelos de análise considerados.

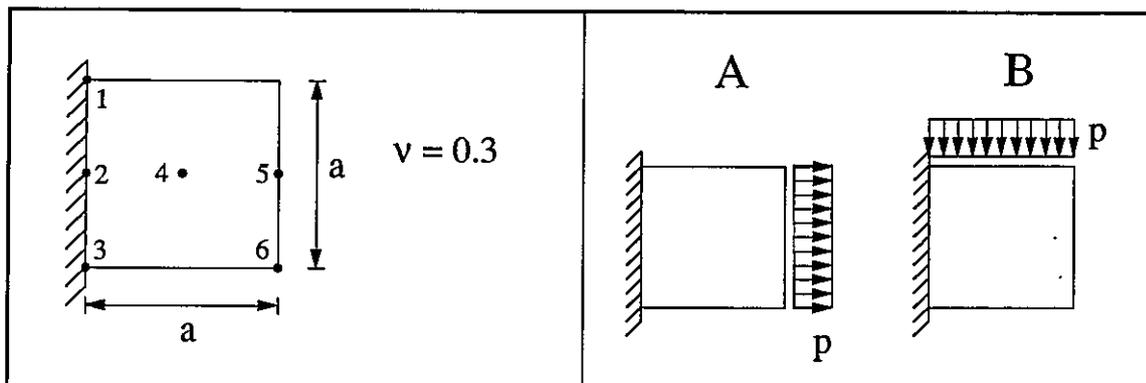


Figura 3.1 - Consola quadrada à tracção (A) e em flexão (B).

A discretização adoptada para os diferentes modelos consiste na utilização de um único elemento finito e de quatro troços de fronteira, como se indica na figura 3.2; os troços de fronteira 1, 2 e 3 constituem a fronteira estática, enquanto o troço 4, ao longo do qual se impõe o anulamento das translações, define a fronteira cinemática.

No caso de carga A consideram-se nulas as tracções aplicadas nos troços de fronteira 1 e 3, enquanto que no troço de fronteira 2 se considera aplicada uma tracção segundo x , uniforme, de valor p . Para o caso de carga B, considera-se o anulamento das tracções nas fronteiras 1 e 2 e a aplicação de uma tracção segundo y , uniforme, de valor igual a $-p$ na fronteira 3.

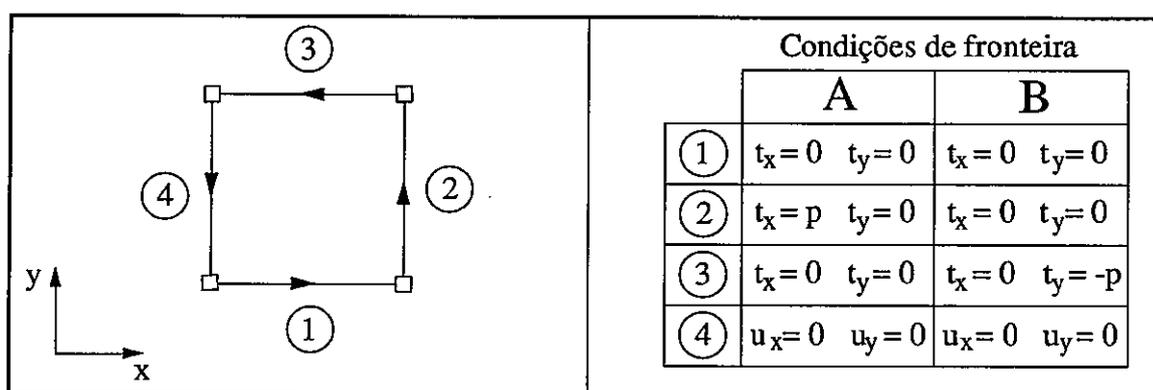


Figura 3.2 - Discretização adoptada na análise da consola quadrada

No quadro 3.1 resumem-se as principais características das várias aproximações de elementos finitos utilizadas para a análise deste problema. Define-se aí não só o tipo de modelo utilizado, (EG, EA ou EAC), bem como o tipo de função interpoladora,

(funções trigonométricas ou polinómios de Legendre). Para cada um dos campos interpolados apresenta-se qual a máxima ordem adoptada, bem como o número de graus de liberdade correspondente e a dimensão do sistema governativo, N . Neste quadro é ainda indicado o índice de esparsidade dos diferentes sistemas governativos, η . Este índice é definido como o quociente entre o número total de elementos não nulos e o número total de elementos da matriz do sistema.

Aproximação	Modelo	Função	Tensões no domínio		Deslocamentos no domínio		Deslocamentos na fronteira		N	η %
			Ordem	n_x	Ordem	n_d	Ordem	n_q		
1	EG	Trig.	7	507	7	338	6	66	911	96.6
2	EG	Pol.	8	192	7	98	8	48	338	99.0
3	EAC	Trig.	8	131	—	—	8	102	233	90.2
4	EA	Trig.	6	219	—	—	6	78	297	93.2

Quadro 3.1 - Características das várias aproximações aplicadas à análise da consola quadrada.

No quadro 3.2 apresentam-se os tempos de cálculo para cada uma das aproximações testadas. Estes tempos referem-se à resolução simultânea dos dois casos de carga e foram obtidos numa estação gráfica IBM RISC 6 000/550.

Aproximação	Modelo	Função	Tempos de execução (s)			
			T_1	T_2	T_3	$\sum T_i$
1	EG	Trig.	0.5	7.2	1.1	8.8
2	EG	Pol.	0.2	0.3	0.8	1.3
3	EAC	Trig.	48.4	0.8	0.9	50.1
4	EA	Trig.	19.1	1.0	0.4	20.5

Quadro 3.2 - Tempos de execução das várias aproximações utilizadas na análise da consola quadrada.

Por forma a salientar os desempenhos relativos de cada um dos modelos, apresentam-se as parcelas correspondentes aos tempos de pré-processamento, T_1 , resolução do sistema governativo, T_2 , e de pós-processamento, T_3 .

Considera-se que o pré-processamento é composto pela leitura de dados, a montagem do sistema governativo e a sua gravação em ficheiro.

A fase de resolução do sistema governativo principia com a leitura do sistema governativo, seguindo-se a sua resolução e gravação da solução em ficheiro. A resolução do sistema de equações é feita utilizando uma adaptação de um algoritmo proposto por Pissanetzky⁴⁴ para a solução de sistemas de equações, baseado na factorização LU de matrizes esparsas. A adaptação efectuada permite tornar o problema da resolução de sistemas indeterminados, decorrentes da existência de modos de deformação espúrios.

A fase de pós-processamento consiste na leitura da solução do sistema e dos dados iniciais do problema, seguida do cálculo e gravação de deslocamentos e tensões.

Para o caso de carga A, consola traccionada, apresentam-se no quadro 3.3 os valores obtidos para as tensões nos pontos 1, 2 e 4 quando se utilizam os diferentes modelos de elementos finitos. As tensões são apresentadas na forma normalizada,

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{p}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{p}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{p}.$$

Ponto		Aprox. 1	Aprox. 2	Aprox. 3	Aprox. 4
1	$\bar{\sigma}_{xx}$	1.812	1.646	1.886	1.848
	$\bar{\sigma}_{yy}$	0.002	0.000	-0.061	-0.004
	$\bar{\sigma}_{xy}$	0.018	0.000	0.022	-0.055
2	$\bar{\sigma}_{xx}$	0.923	0.915	0.915	0.948
	$\bar{\sigma}_{yy}$	0.302	0.276	0.275	0.244
	$\bar{\sigma}_{xy}$	0.000	0.000	0.000	0.000
4	$\bar{\sigma}_{xx}$	1.019	1.021	1.019	1.015
	$\bar{\sigma}_{yy}$	0.016	0.015	0.016	0.014
	$\bar{\sigma}_{xy}$	0.000	0.000	0.000	0.000

Quadro 3.3 - Tensões num conjunto de pontos da consola quadrada traccionada (caso de carga A).

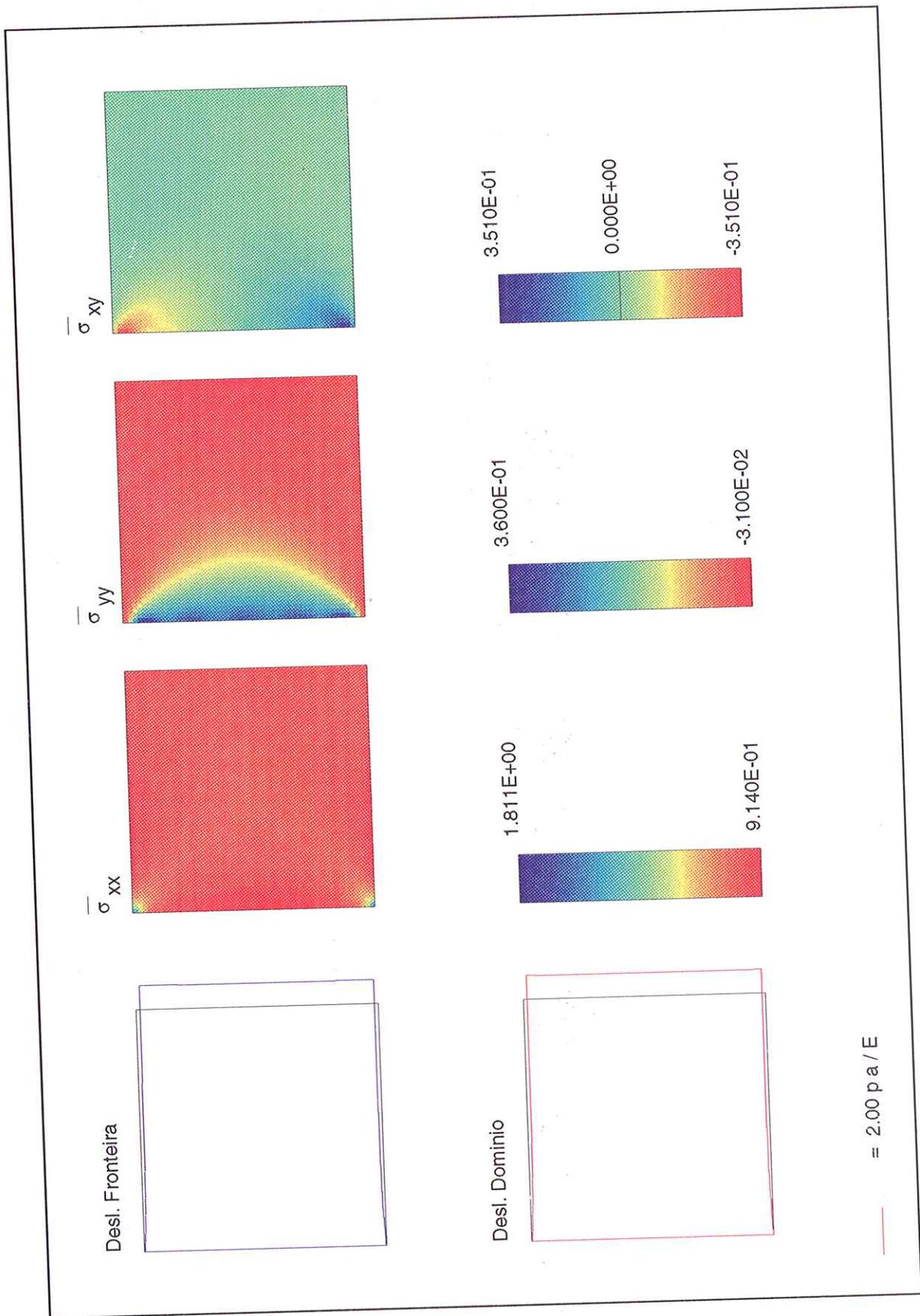


Figura 3.3 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada traccionada utilizando o modelo EG com séries trigonométricas como funções de interpolação.

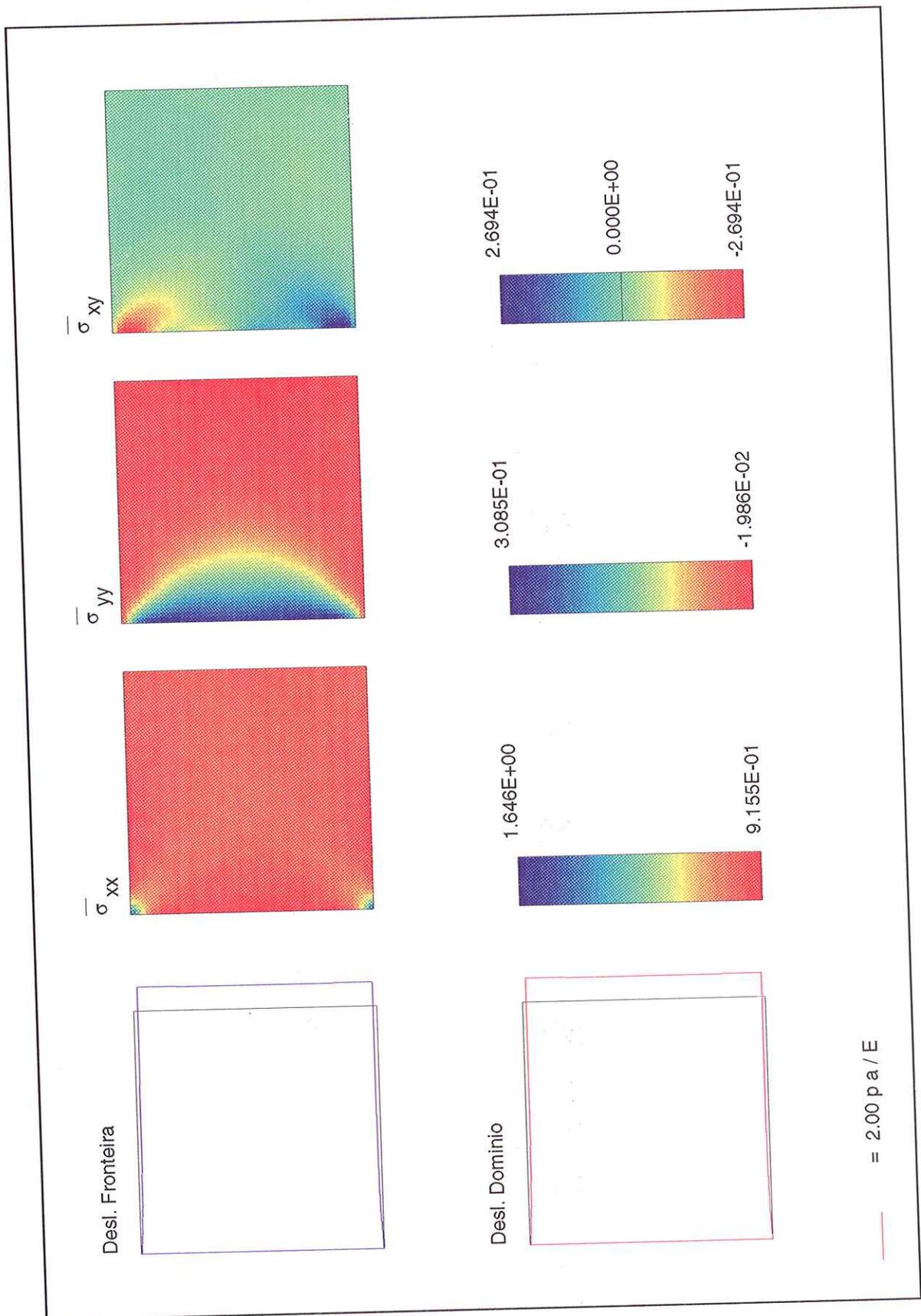


Figura 3.4 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada traccionada utilizando o modelo EG com polinómios de Legendre como funções de interpolação.

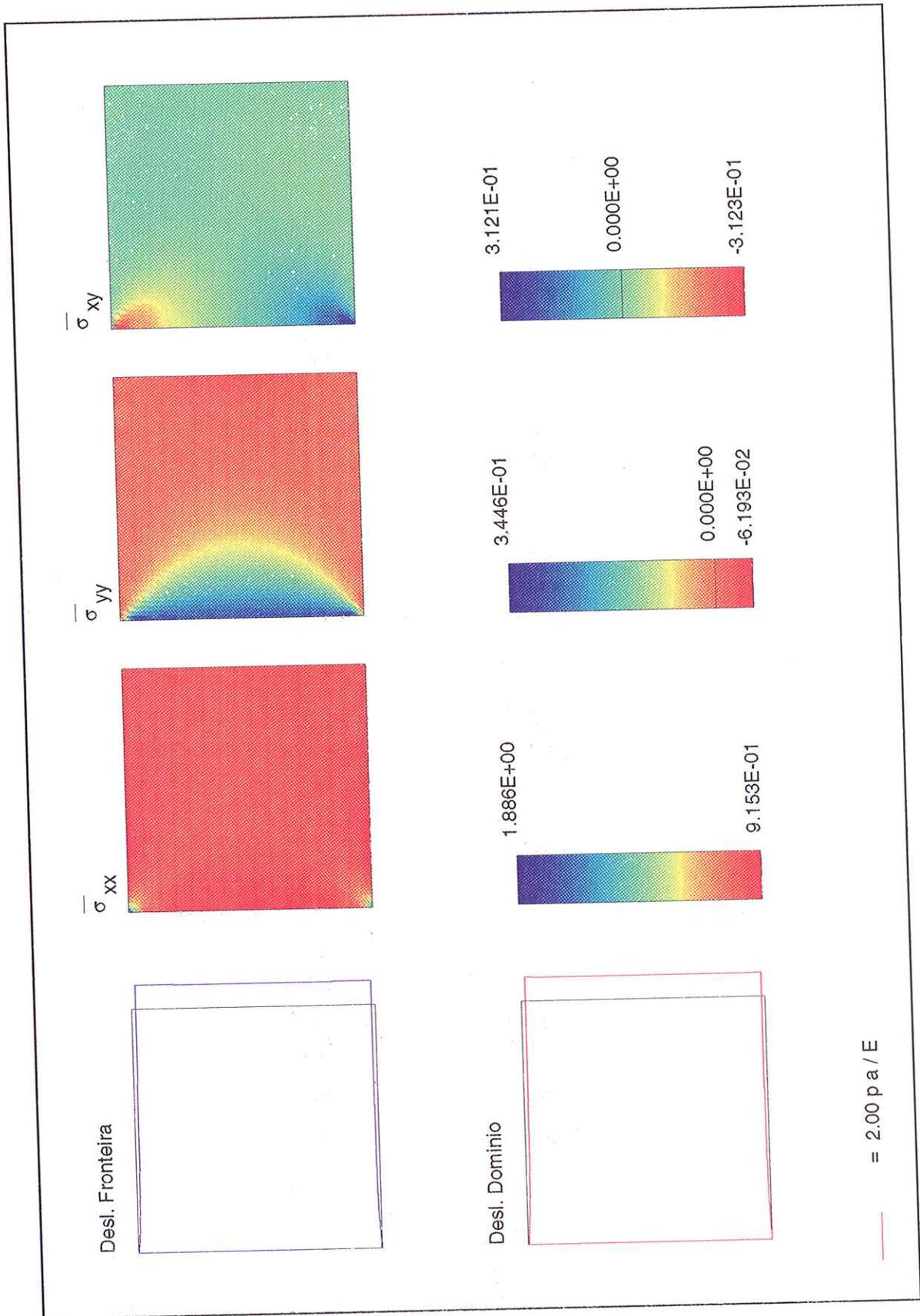


Figura 3.5 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada traccionada utilizando o modelo EAC com séries trigonométricas como funções de interpolação.

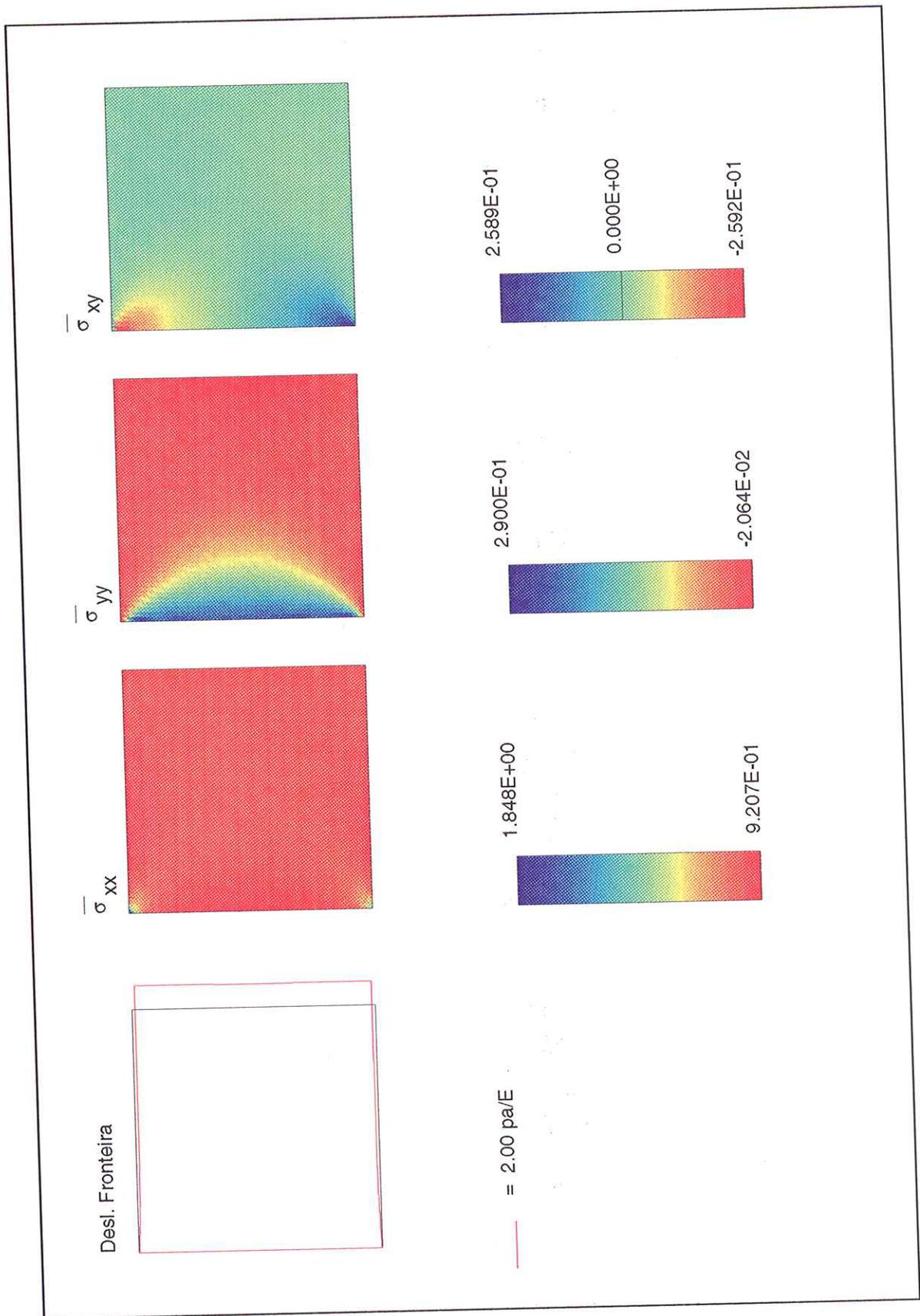


Figura 3.6 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada traccionada utilizando o modelo EA com séries trigonométricas como funções de interpolação.

Nas figuras 3.3 a 3.6 estão representadas as distribuições de tensões para o caso de carga A. Nessas figuras apresentam-se ainda os traçados dos deslocamentos na fronteira, considerando independentemente a interpolação de deslocamentos no domínio e a interpolação de deslocamentos ao longo dos diferentes troços de fronteira. A representação gráfica dos campos de deslocamentos e tensão resulta da utilização da interface gráfica Janela³³.

No quadro 3.4 apresentam-se os deslocamentos obtidos para os pontos 5 e 6. Convém salientar que na generalidade dos modelos utilizados a interpolação de deslocamentos é feita independentemente no domínio e em cada troço de fronteira. Assim no quadro 3.4 são referidos valores para os deslocamentos considerando a interpolação de deslocamentos no domínio (representada pelo número do ponto) e considerando as interpolações na fronteira (representadas pelo número do ponto seguido de um índice indicando o troço de fronteira considerado, de acordo com a discretização apresentada na figura 3.2). Os deslocamentos são apresentados na forma normalizada,

$$\bar{\delta}_x = \frac{E}{p \ a} \delta_x \ , \quad \bar{\delta}_y = \frac{E}{p \ a} \delta_y \ .$$

Ponto		Aprox. 1	Aprox. 2	Aprox. 3	Aprox. 4
5	$\bar{\delta}_x$	0.983	0.984	0.981	-----
	$\bar{\delta}_y$	0.000	0.000	-0.029	-----
5 ₂	$\bar{\delta}_x$	0.984	0.984	0.984	0.988
	$\bar{\delta}_y$	0.000	0.000	0.000	0.000
6	$\bar{\delta}_x$	0.991	0.992	0.991	-----
	$\bar{\delta}_y$	0.154	0.154	0.145	-----
6 ₁	$\bar{\delta}_x$	0.997	1.001	0.977	0.996
	$\bar{\delta}_y$	0.155	0.153	0.157	0.130
6 ₂	$\bar{\delta}_x$	0.994	0.993	0.993	0.996
	$\bar{\delta}_y$	0.159	0.166	0.140	0.129

Quadro 3.4 - Deslocamentos num conjunto de pontos da consola quadrada traccionada (caso de carga A).

A análise dos valores obtidos, tanto para as tensões como para os deslocamentos, mostra que os diferentes modelos produzem resultados muito semelhantes. Esta semelhança não

só é notória quando se comparam as figuras 3.3 a 3.6, mas também é evidenciada pelos valores apresentados nos quadros 3.3 e 3.4.

Convém, no entanto, ter em conta a existência de algumas diferenças as quais são reveladoras das características das diferentes aproximações. Assim, analisando o quadro 3.3, pode verificar-se que no ponto 1, canto encastrado da consola onde são elevados os gradientes de tensão, o valor da tensão σ_{xx} apresenta valores mais elevados nas soluções baseadas em funções de interpolação sinusoidais. Esta característica está ligada ao facto das famílias de funções de interpolação sinusoidais utilizadas, em especial na aproximação 3, apresentarem componentes com elevados gradientes, os quais são mobilizados na simulação deste tipo de singularidade.

Da leitura do quadro 3.3 realça ainda o facto de, com excepção da aproximação 2, todas as aproximações terem alguma dificuldade em garantir localmente a verificação das condições de fronteira estáticas. Este facto pode ser explicado pelo carácter sinusoidal das funções de interpolação utilizadas, o qual dificulta a verificação pontual da condição de equilíbrio, garantindo no entanto a sua satisfação ponderada.

Devido ao facto de nas diferentes aproximações os deslocamentos serem interpolados independentemente no domínio e na fronteira, verifica-se a existência de diferentes valores para um dado deslocamento consoante a interpolação que se considera. No entanto, analisando os valores apresentados no quadro 3.4, verifica-se que estas diferenças não apresentam grande significado.

Para o caso de carga B, consola flectida, são representados nas figuras 3.7 a 3.10 os campos de tensão e de deslocamento.

Por forma a comparar os resultados agora apresentados com os obtidos utilizando métodos tradicionais de elementos finitos de compatibilidade, procedeu-se à análise deste problema utilizando o programa COSMOS/M²⁶, que se baseia nos trabalhos de Bathe⁵ e

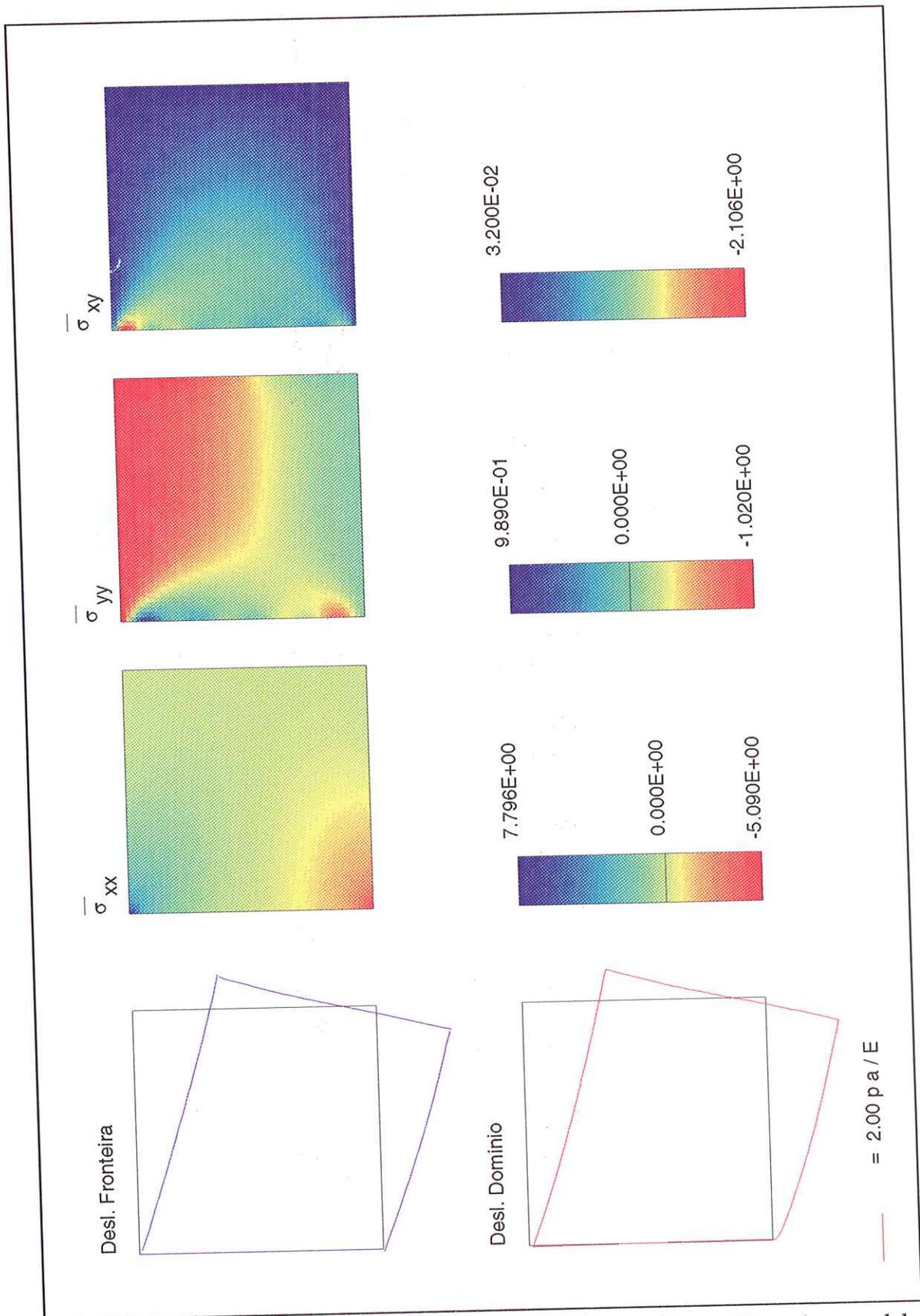


Figura 3.7 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o modelo EG com séries trigonométricas como funções de interpolação.

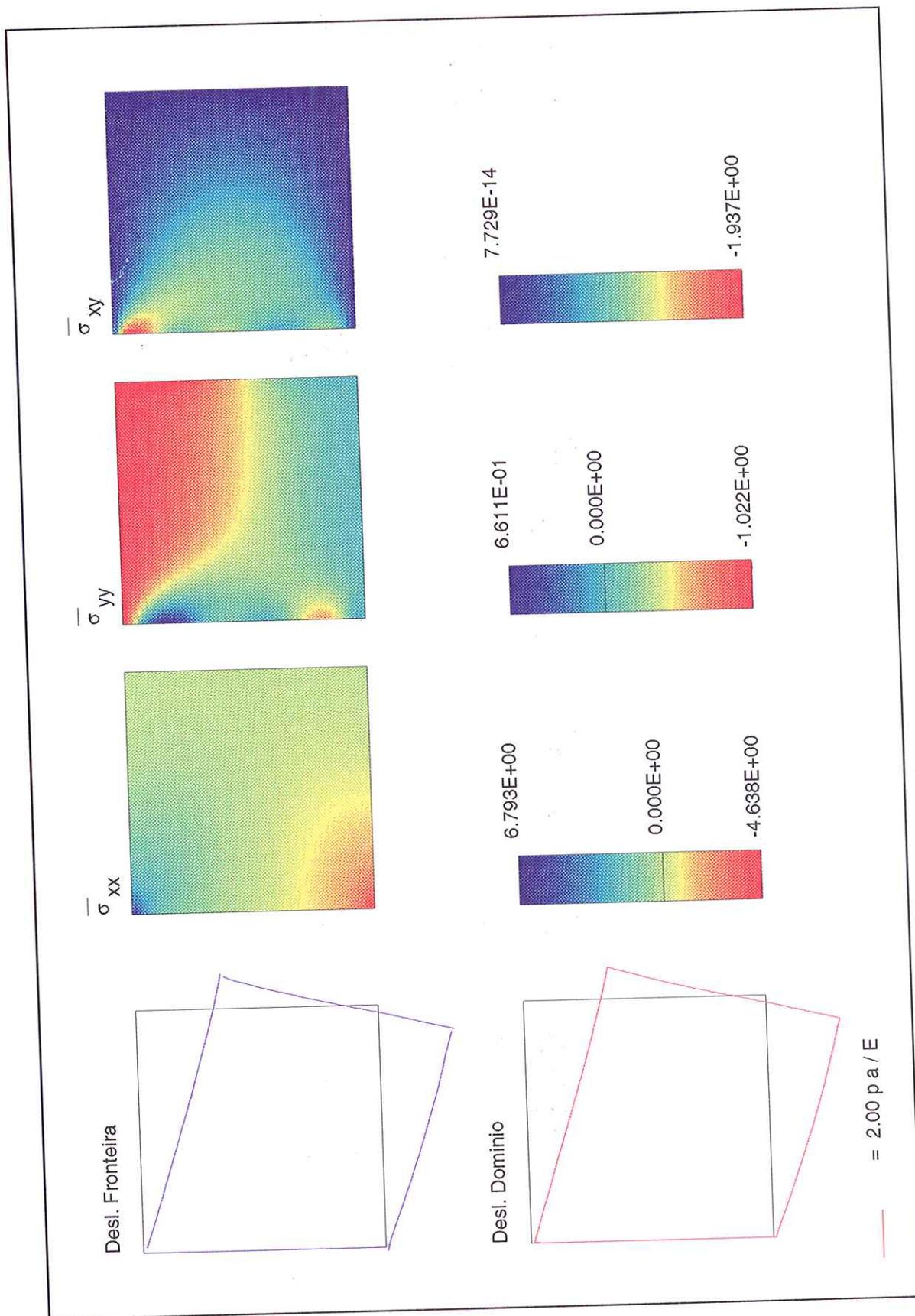


Figura 3.8 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o modelo EG com polinómios de Legendre como funções de interpolação.

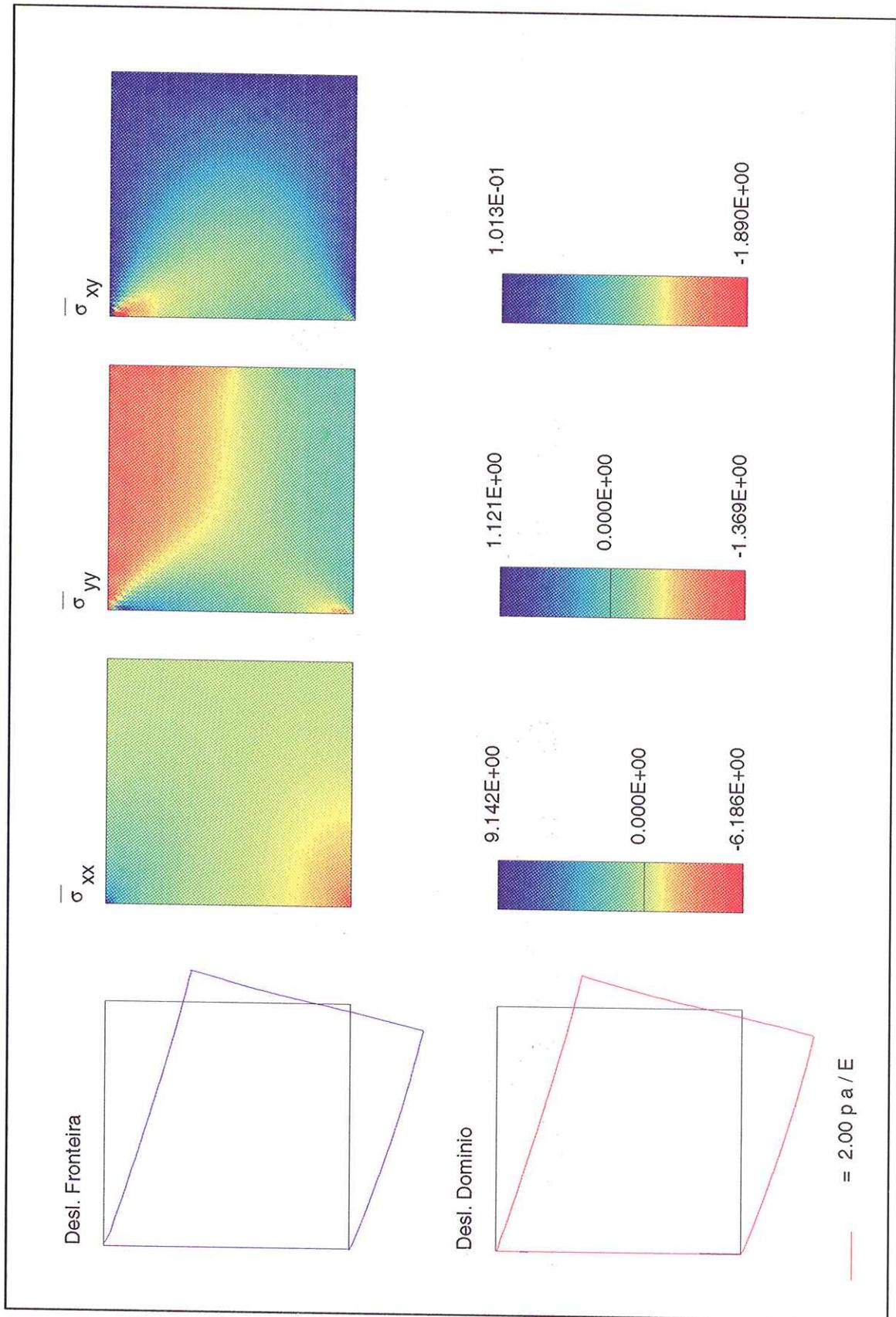


Figura 3.9 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o modelo EAC com séries trigonométricas como funções de interpolação.

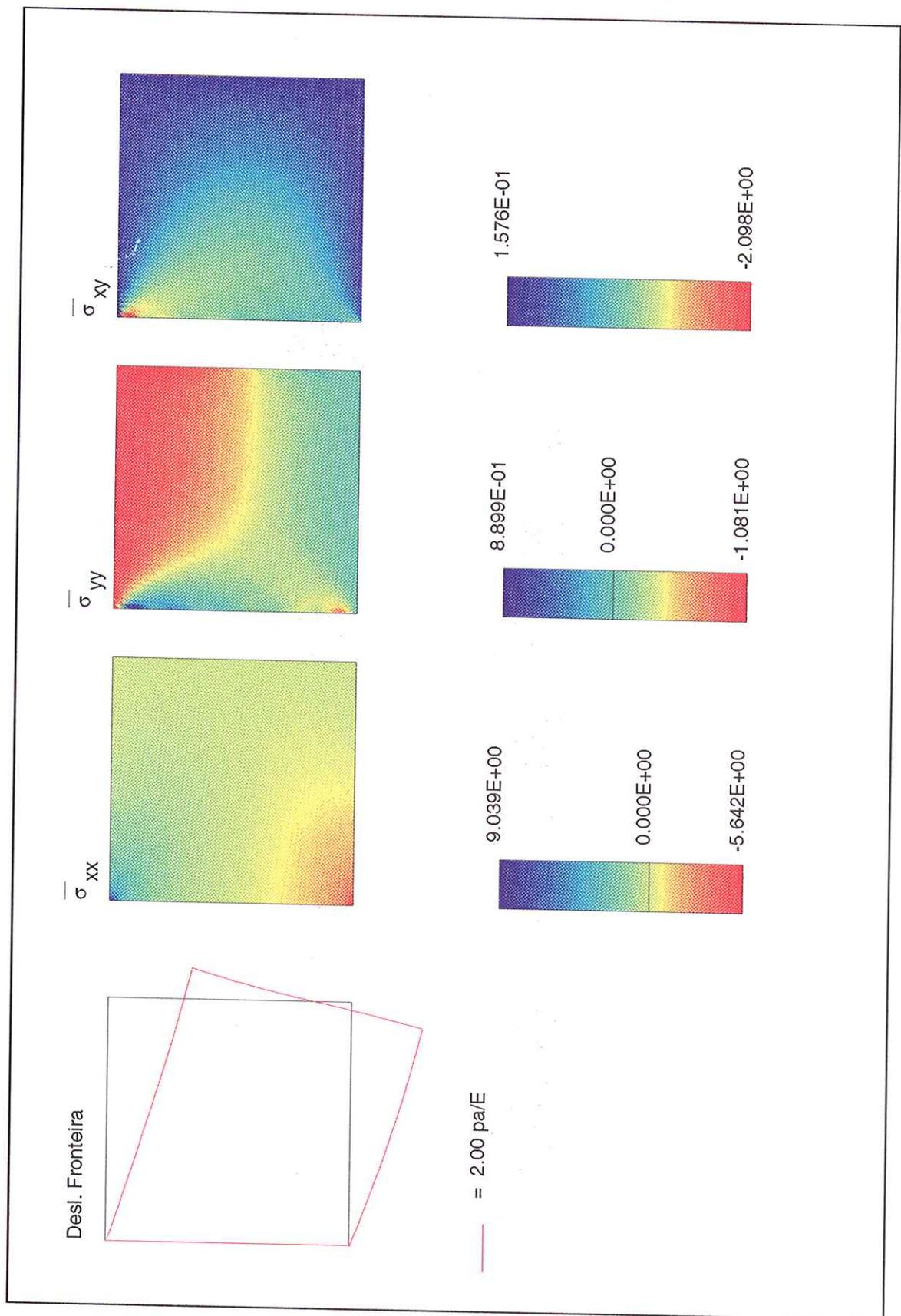


Figura 3.10 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o modelo EA com séries trigonométricas como funções de interpolação.

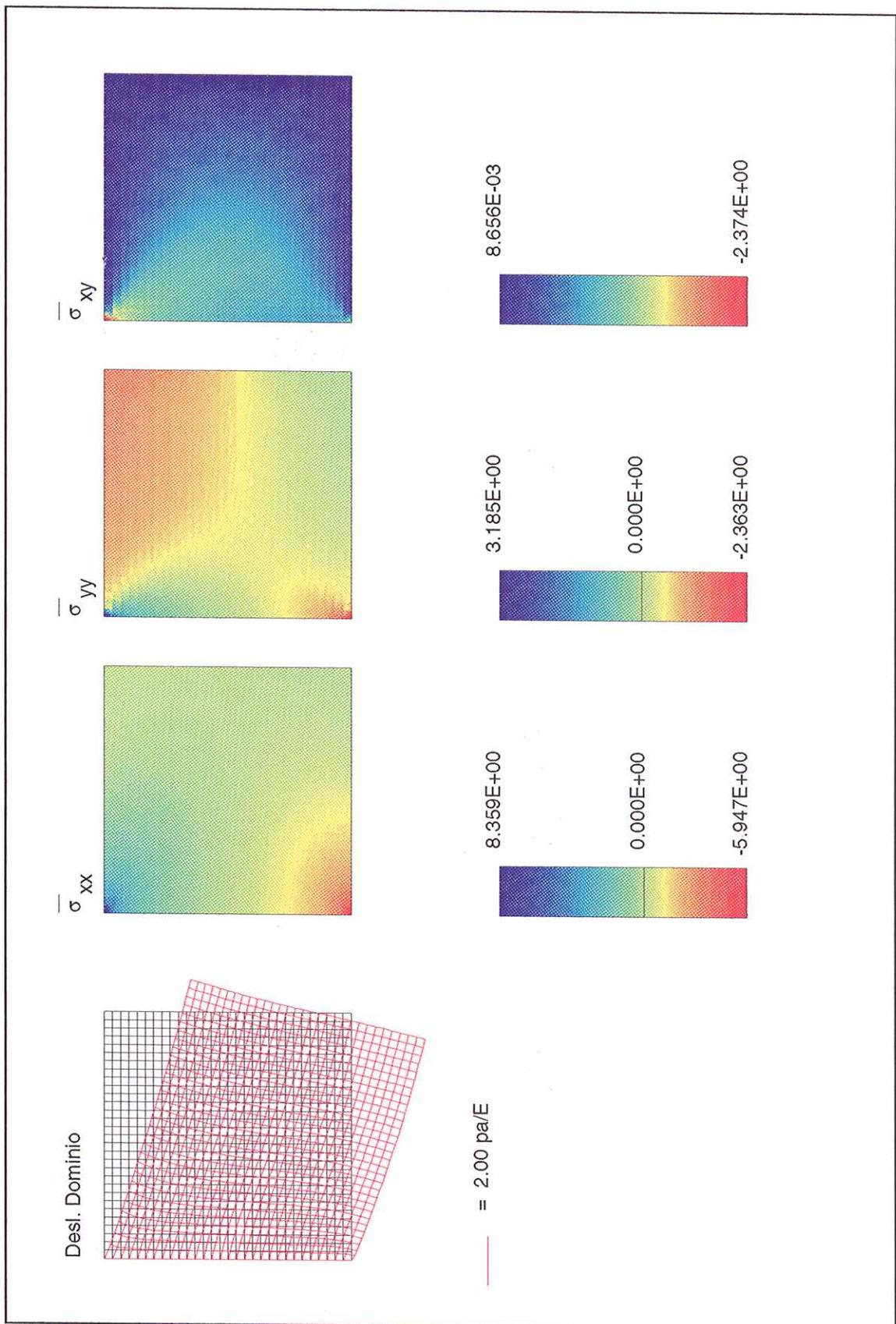


Figura 3.11 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando o programa COSMOS/M²⁶.

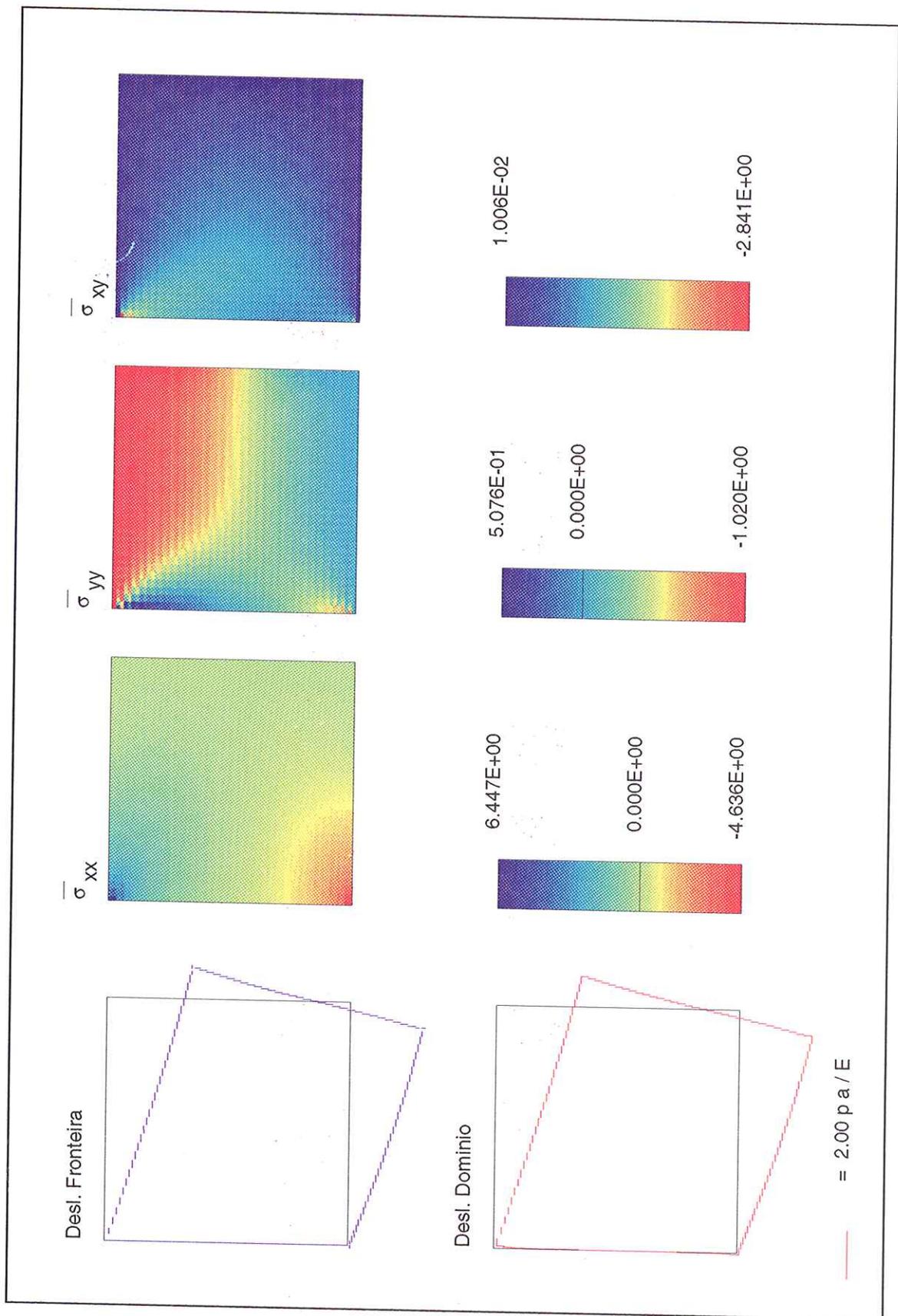


Figura 3.12 - Tensões e deslocamentos na consola quadrada flectida utilizando como funções de interpolação séries digitais de Walsh, Castro ⁷.

Cook¹¹. Para tal considerou-se uma malha regular de 900 elementos isoparamétricos de 4 nós. O sistema governativo obtido para este problema apresenta 1 860 graus de liberdade. Devido a só ter sido possível aceder a uma versão do programa COSMOS/M²⁶ num computador pessoal, não são aqui referidos os tempos de cálculo obtidos visto não serem comparáveis com os obtidos para as restantes soluções. Na figura 3.11 apresenta-se as distribuições de tensões e de deslocamentos obtidas para este caso.

Comparam-se ainda os resultados obtidos com os apresentados por Castro⁷ utilizando uma formulação análoga à utilizada no modelo EG, mas recorrendo a séries digitais de Walsh como funções de interpolação. A dimensão do sistema governativo adoptado nesta solução é de 14 720 graus de liberdade apresentando um índice de esparsidade de 99.89%. Os tempos necessários para a análise deste problema, numa estação gráfica IBM RISC 6 000/550, foram de 84.89 s para a fase de pré-processamento, 498.60 s para a resolução do sistema e de 18.31 s para a fase de pós-processamento, a que corresponde um tempo total de execução da ordem dos 602 s. Na figura 3.12 apresentam-se os resultados obtidos por este método de cálculo.

Ponto		Aprox. 1	Aprox. 2	Aprox. 3	Aprox. 4	Castro ⁷	COSMOS/M ²⁶
1	$\bar{\sigma}_{xx}$	7.797	6.793	9.142	9.039	6.026	7.623
	$\bar{\sigma}_{yy}$	-0.997	-1.000	-1.369	-1.048	-1.000	2.287
	$\bar{\sigma}_{xy}$	-0.034	0.000	-0.359	-0.054	0.000	-1.656
3	$\bar{\sigma}_{xx}$	-5.091	-4.639	-6.186	-5.642	-4.430	-5.281
	$\bar{\sigma}_{yy}$	0.037	0.000	0.162	0.035	0.000	-1.584
	$\bar{\sigma}_{xy}$	0.029	0.000	-0.283	0.158	0.000	-0.814
4	$\bar{\sigma}_{xx}$	0.032	0.034	0.032	0.031	0.031	0.031
	$\bar{\sigma}_{yy}$	-0.474	-0.475	-0.474	-0.472	-0.474	-0.473
	$\bar{\sigma}_{xy}$	-0.746	-0.747	-0.747	-0.747	-0.747	-0.747

Quadro 3.5 - Tensões num conjunto de pontos da consola quadrada flectida (caso de carga B).

Nos quadros 3.5 e 3.6 apresentam-se, respectivamente, os valores obtidos para as tensões nos pontos 1, 3 e 4 e os deslocamentos no ponto 6.

Ponto		Aprox. 1	Aprox. 2	Aprox. 3	Aprox. 4	Castro ⁷	COSMOS/M ²⁶
6	$\bar{\delta}_x$	-1.004	-1.043	-1.030	---	-1.003	-1.039
	$\bar{\delta}_y$	-2.953	-3.002	-2.934	---	-2.958	-2.979
61	$\bar{\delta}_x$	-1.115	-1.149	-1.051	-1.045	-1.142	---
	$\bar{\delta}_y$	-2.993	-3.001	-3.003	-2.918	-2.959	---
62	$\bar{\delta}_x$	-1.042	-1.045	-1.028	-1.043	-1.003	---
	$\bar{\delta}_y$	-3.058	-3.100	-3.002	-2.916	-3.098	---

Quadro 3.6 - Deslocamentos para o ponto 6 da consola quadrada flectida (caso de carga B).

Analogamente ao que sucedia para o caso de carga A, os diferentes modelos considerados apresentam soluções semelhantes. Esta semelhança pode ser verificada, não só pela comparação dos andamentos dos campos de tensão e deslocamentos, representados nas figuras 3.7 a 3.12, mas também pela análise dos valores dos quadros 3.5 e 3.6.

A análise do quadro 3.5 mais uma vez salienta a capacidade das aproximações baseadas em famílias de funções trigonométricas, em especial a aproximação 3, de modularem campos de tensão com elevados gradientes. Constata-se ainda no quadro 3.5 a dificuldade de satisfazer localmente as condições de fronteira estáticas quando se utiliza um modelo de elementos finitos clássico, como o adoptado no programa COSMOS/M²⁶.

Não é de estranhar a semelhança de comportamento existente entre as aproximações 1 e 2 e a solução obtida por Castro⁷, visto partirem de formulações análogas, diferindo essencialmente no tipo de funções de interpolação utilizadas.

Por fim convirá ter em atenção os tempos de cálculo correspondentes às diferentes aproximações, apresentados no quadro 3.2. Assim, verifica-se que as aproximações 3 e 4, utilizando funções de interpolação com alguma complexidade, que exigem a utilização de métodos de integração numérica, apresentam tempos de pré-processamento elevados.

Tendo em conta o processo seguido para a resolução dos sistemas governativos, os tempos gastos na sua resolução estão não só associados à dimensão dos sistemas, mas também ao seu índice de esparsidade. Assim, não é de estranhar que a aproximação 1,

que tem o maior número de graus de liberdade, seja a que mais tempo de resolução necessita. Contudo, a aproximação 2, apesar de dispôr de um número de graus de liberdade superior às aproximações 3 e 4, exige um tempo de resolução inferior, visto apresentar um elevado índice de esparsidade.

3.6.2 - Placa em L

O problema da determinação dos valores das tensões na vizinhança do vértice reentrante de uma placa em L traccionada, figura 3.13, foi objecto de estudo por autores como Parreira³⁸ e Moitinho de Almeida³². Moitinho de Almeida³² apresenta estimativas para o valor da tensão num ponto colocado junto ao canto reentrante (Ponto B), quando são utilizados diferentes modelos de cálculo, nomeadamente quando se utiliza um programa de elementos de fronteira, MABEM³⁹ e quando, no programa SAP IV⁴, se utiliza uma malha regular de 7 500 elementos rectangulares não conformes.

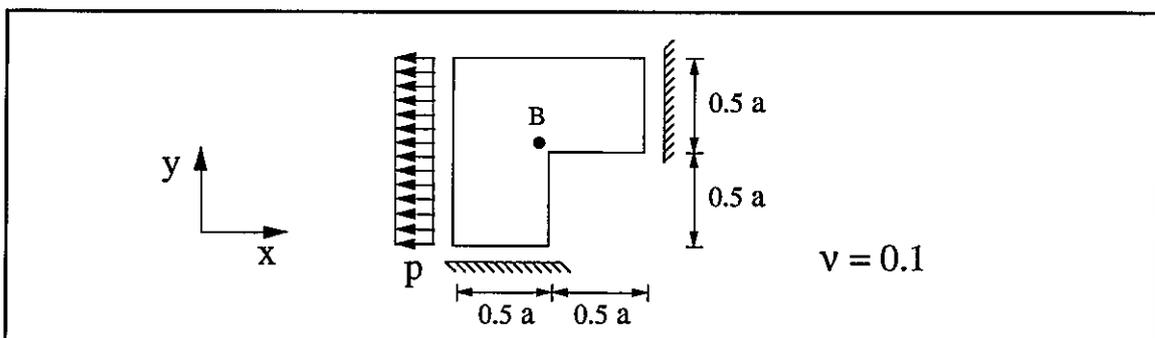


Figura 3.13 - Placa em L submetida à tracção.

O ponto onde são determinadas as tensões, ponto B, encontra-se colocado a uma distância de $0.05 a$ segundo cada uma das direcções x e y, em relação ao canto reentrante.

No quadro 3.7 listam-se as características dos modelos utilizados na análise deste problema, onde são consideradas as duas discretizações ilustradas na figura 3.14. Estas duas discretizações, apesar de baseadas em elementos quadrangulares de quatro nós,

diferem no número e forma dos elementos considerados. Enquanto na discretização A se divide o domínio em dois elementos trapezoidais, na discretização B considera-se o domínio dividido em três elementos quadrados.

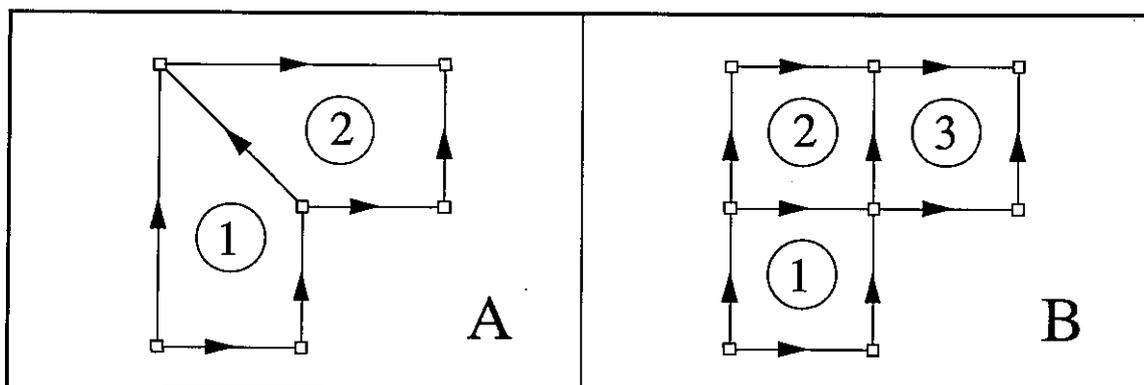


Figura 3.14 - Discretizações adoptadas para a placa em L.

Aprox.	Disc.	Modelo	Função	Tensão no domínio		Deslocamento no domínio		Deslocamento na fronteira		N	η %
				Ordem	n_X	Ordem	n_d	Ordem	n_q		
1	A	EG	Trig.	6	726	4	196	4	84	1006	94.4
2	B	EG	Trig.	6	1089	4	294	4	126	1509	98.4
3	A	EG	Pol.	10	600	9	324	9	108	1032	99.2
4	B	EG	Pol.	10	900	9	486	9	162	1548	99.7

Quadro 3.7 - Características das várias aproximações utilizadas na análise da placa em L traccionada.

No quadro 3.8 apresentam-se os tempos de execução obtidos para cada uma das aproximações consideradas. Estes tempos, analogamente ao que sucedia no exemplo anterior, referem-se a um computador IBM RISC 6000/550 e estão divididos nas parcelas de pré-processamento, resolução do sistema e pós-processamento.

Aproximação	Função	Disc.	Tempos de execução (s)			
			T_1	T_2	T_3	$\sum T_i$
1	Trig.	A	0.9	10.5	0.8	12.2
2	Trig.	B	0.7	4.0	1.0	5.7
3	Pol.	A	0.3	6.2	0.7	7.2
4	Pol.	B	0.4	1.7	0.9	3.0

Quadro 3.8 - Tempos de execução para as várias aproximações utilizadas na análise da placa em L.

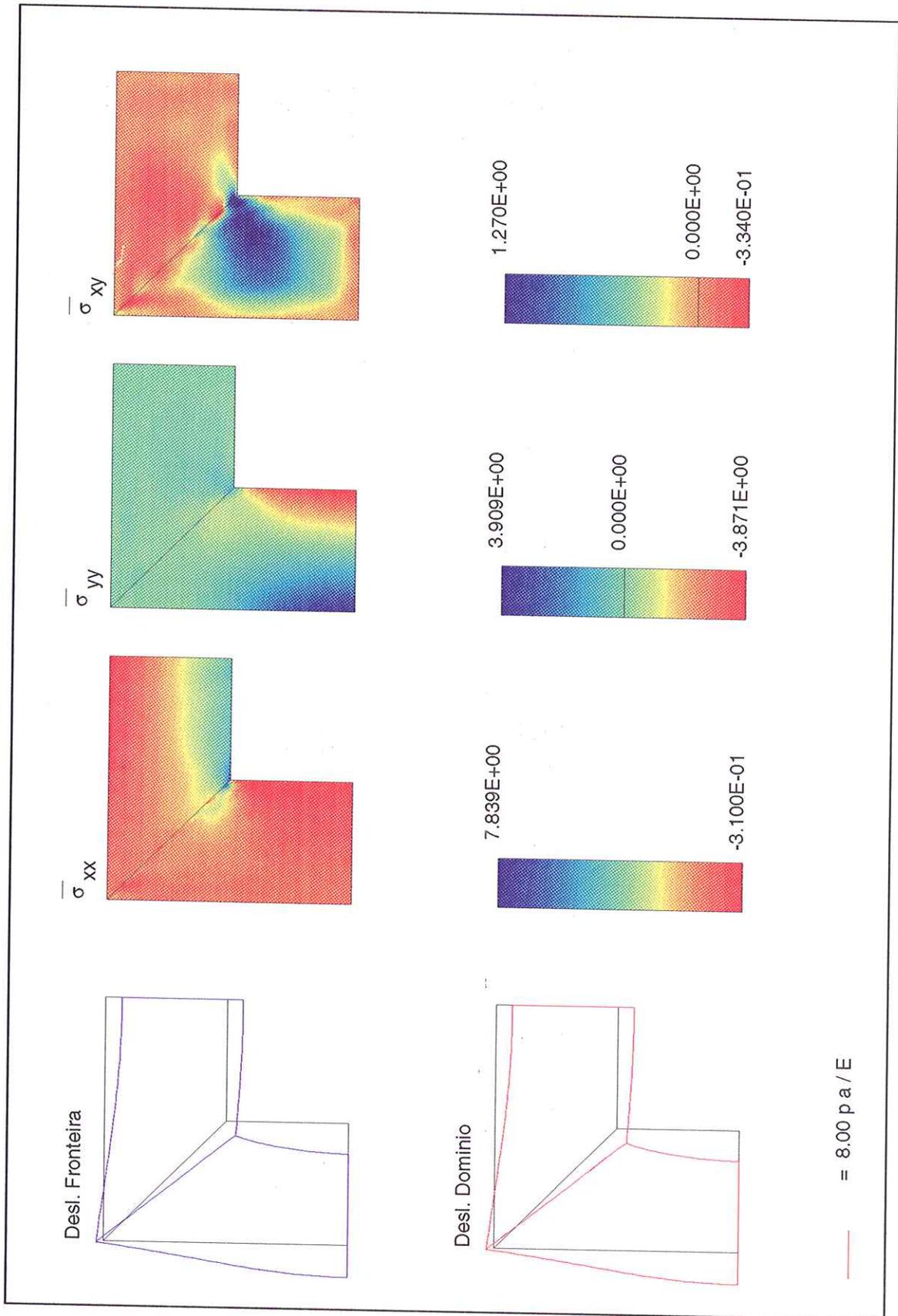


Figura 3.15 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando 2 elementos e o modelo EG com séries trigonométricas como funções de interpolação.

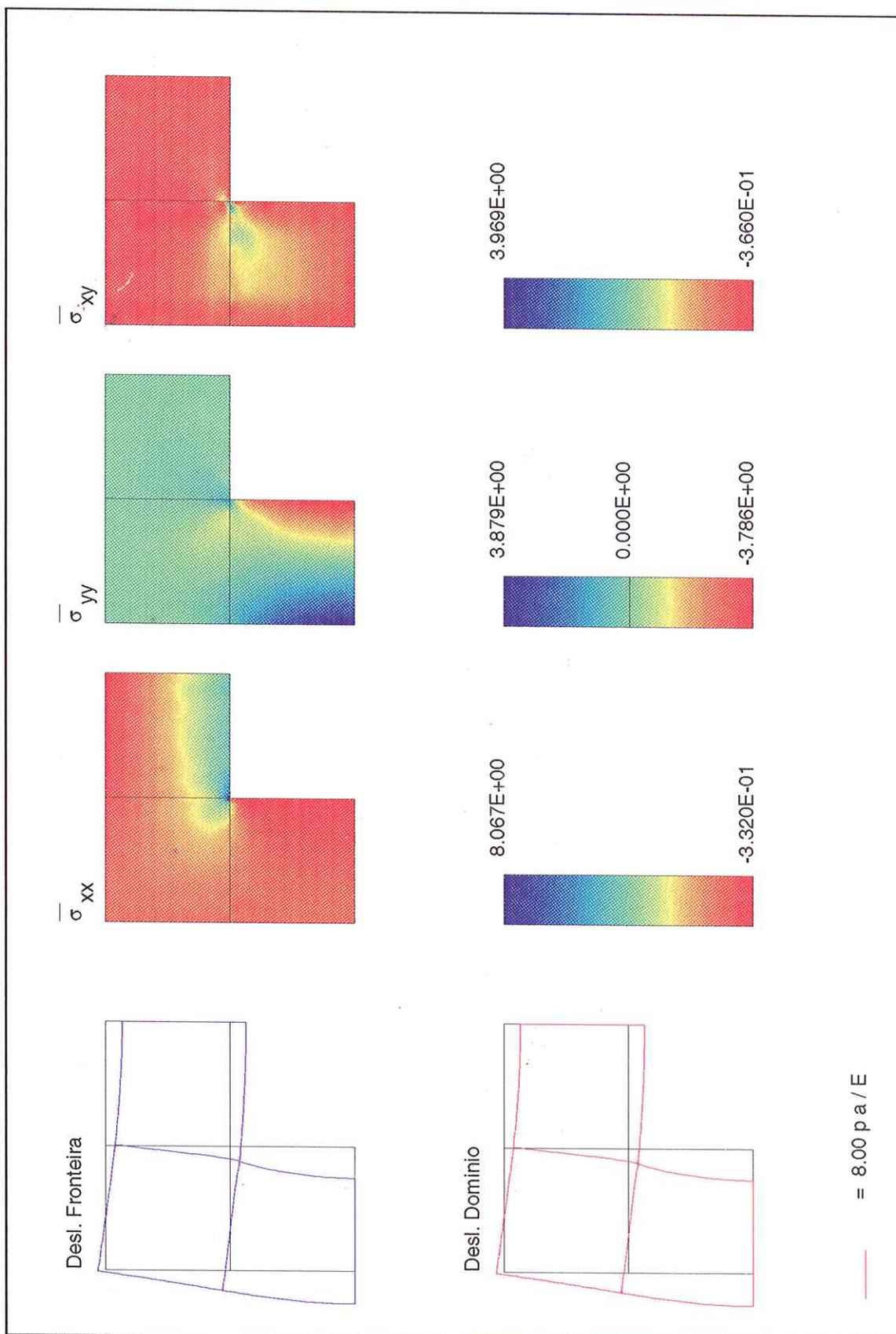


Figura 3.16 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando 3 elementos e o modelo EG com séries trigonométricas como funções de interpolação.

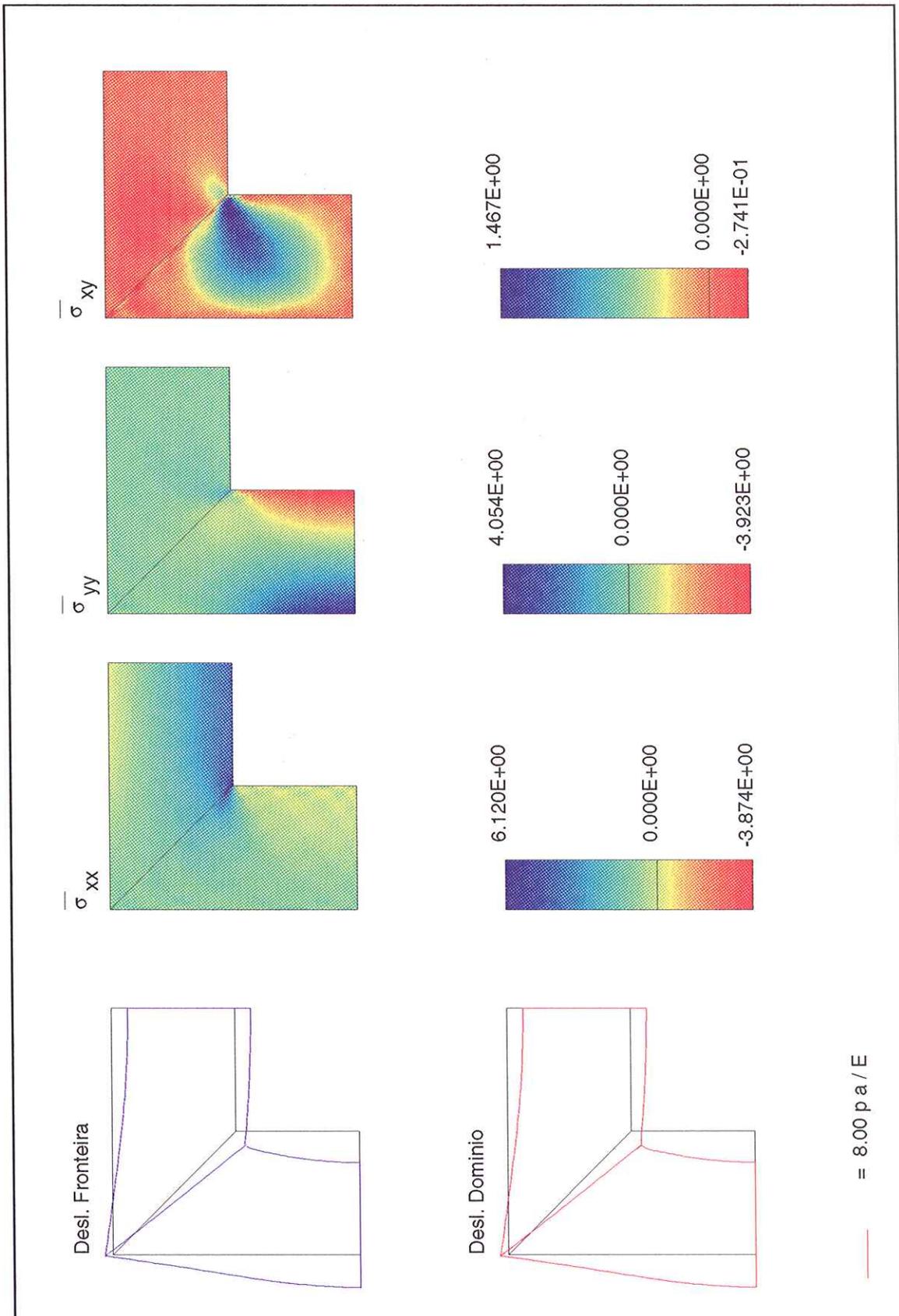


Figura 3.17 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando 2 elementos e o modelo EG com polinômios de Legendre como funções de interpolação.

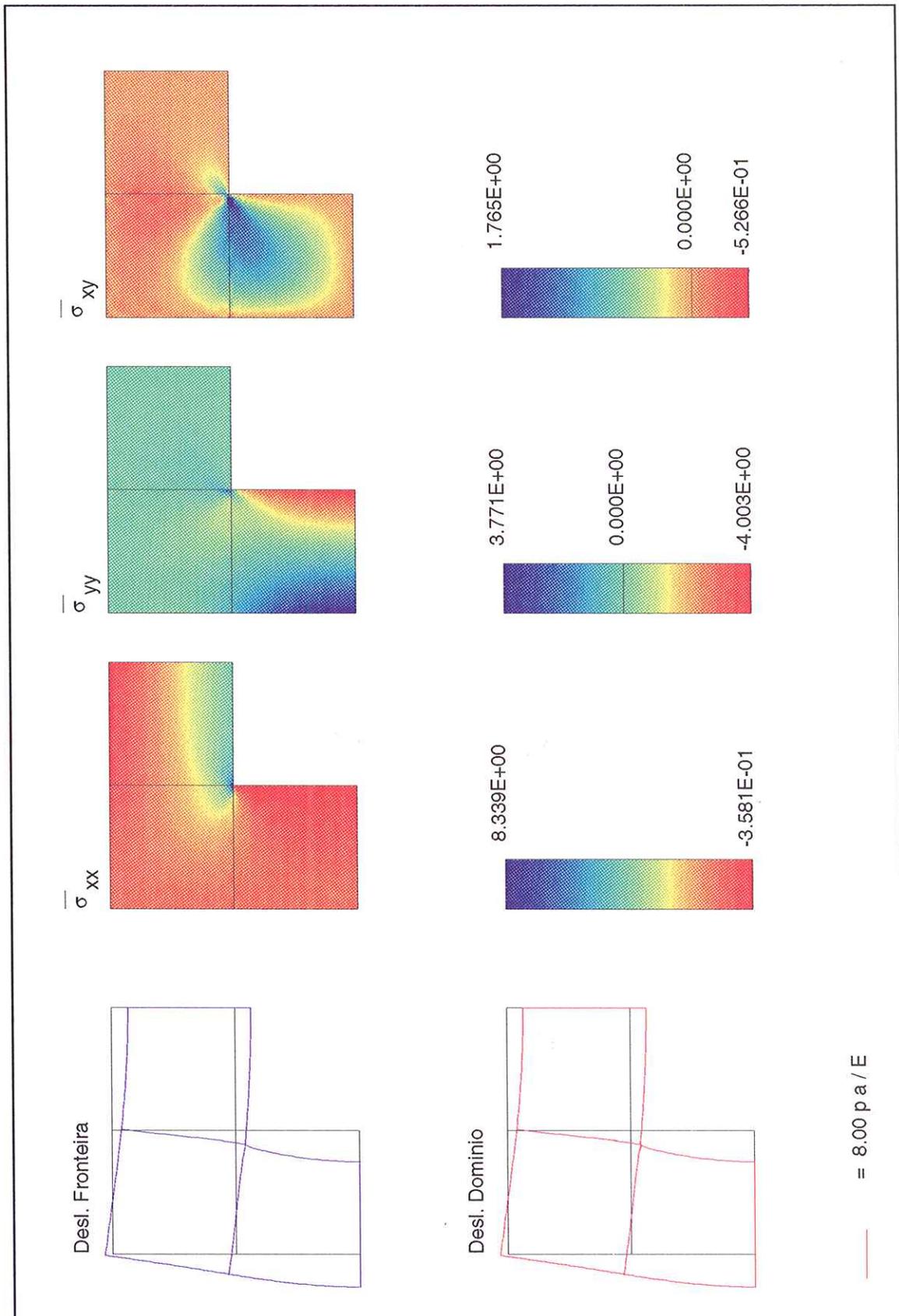


Figura 3.18 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando 3 elementos e o modelo EG com polinômios de Legendre como funções de interpolação.

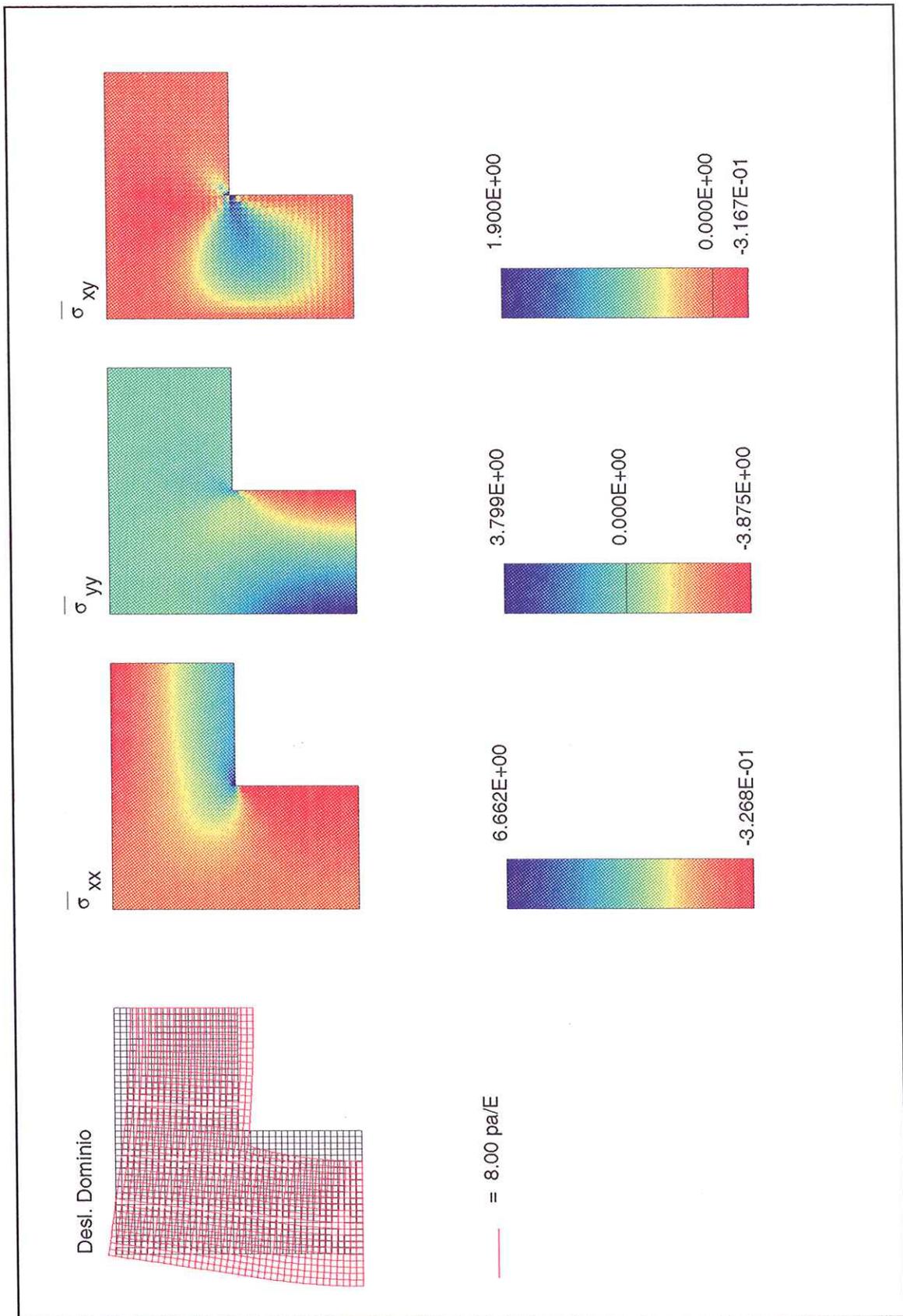


Figura 3.19 - Tensões e deslocamentos na placa em L utilizando o programa COSMOS/M²⁶ e uma discretização composta por 1200 elementos.

Convém salientar que, ao contrário do que seria previsível, os exemplos referentes à discretização A apresentam tempos de cálculo superiores aos referentes à discretização B. Esta situação deve-se a que os sistemas associados à discretização B, apesar de apresentarem maior dimensão, são mais esparsos do que os associados à discretização A. Acresce ainda que na discretização A, devido à geometria dos elementos gera-se um maior número de coeficientes não nulos, durante o processo de resolução dos sistemas. Sendo o processo de resolução dos sistemas especialmente adaptado à resolução de sistemas esparsos, a geração de um grande número de coeficientes não nulos durante o processo de resolução (fill-in) provoca maiores gastos de tempo de CPU.

Nas figuras 3.15 a 3.18 apresentam-se as distribuições de tensões obtidas para as várias aproximações utilizadas. Nessas figuras apresenta-se ainda o traçado dos deslocamentos na fronteira considerando independentemente a interpolação de deslocamentos no domínio e a interpolação de deslocamentos ao longo dos diferentes troços de fronteira. Na figura 3.19 representam-se os resultados obtidos utilizando o programa de elementos finitos COSMOS/M²⁶ com uma malha regular de 1 200 elementos isoparamétricos de 4 nós e 2 520 graus de liberdade. Estas representações gráficas foram obtidas por meio da interface gráfica Janela³³.

No quadro 3.9 listam-se os resultados obtidos, para as componentes de tensão no ponto B, em cada uma das aproximações analisadas. Nesse quadro apresentam-se ainda os resultados obtidos com a utilização do programa de elementos finitos COSMOS/M²⁶, bem como as apresentadas por Moitinho de Almeida³² para a análise com base na utilização do programa de elementos de fronteira MABEM³⁹ e no programa de elementos finitos SAP IV⁴.

Da análise dos resultados apresentados nas figuras 3.15 a 3.18 verifica-se a semelhança das soluções obtidas para a placa em L. Contudo, a análise das tensões num ponto junto ao canto reentrante, apresentada no quadro 3.9, revela algumas diferenças que interessará

ter em atenção. Assim, verifica-se que os valores obtidos nas aproximações baseadas na utilização da discretização B se adaptam melhor aos resultados apresentados por Moitinho de Almeida³² do que as aproximadas com base na discretização A. Este desvio nos valores das tensões quando se utiliza a discretização A está associado à perturbação provocada pela presença de uma interface entre elementos sobre o ponto em análise.

	Elem.	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$
Aprox. 1	1	3.285	-0.402	0.350
	2	3.052	-0.281	0.300
Aprox. 2	2	3.323	-0.396	0.401
Aprox. 3	1	3.695	-0.025	-0.049
	2	3.894	-0.270	0.183
Aprox. 4	2	3.436	-0.325	0.304
COSMOS/M ²⁶	438	3.135	-0.606	0.626
	439	3.362	-0.583	0.374
	458	3.160	-0.352	0.298
	459	3.380	-0.329	0.129
MABEM ³⁹	---	3.305	-0.423	0.330
SAP IV ⁴	---	3.322	-0.410	0.327

Quadro 3.9 - Tensões obtidas para o ponto B da placa em L.

Saliente-se que, analogamente ao que sucedia nos exemplos anteriores, as aproximações baseadas em funções sinusoidais, apresentam maiores tempos de cálculo, mas têm uma maior capacidade para reproduzir os comportamentos associados a elevados gradientes de tensão.

3.6.3 - Tubo cilíndrico de comprimento infinito

O problema do tubo cilíndrico de parede espessa e comprimento infinito sujeito a pressão externa uniforme é um problema que se pode considerar no âmbito dos estados planos de deformação e para o qual é possível encontrar uma solução analítica. Na figura 3.20 apresenta-se um esquema do modelo adoptado para o estudo deste problema.

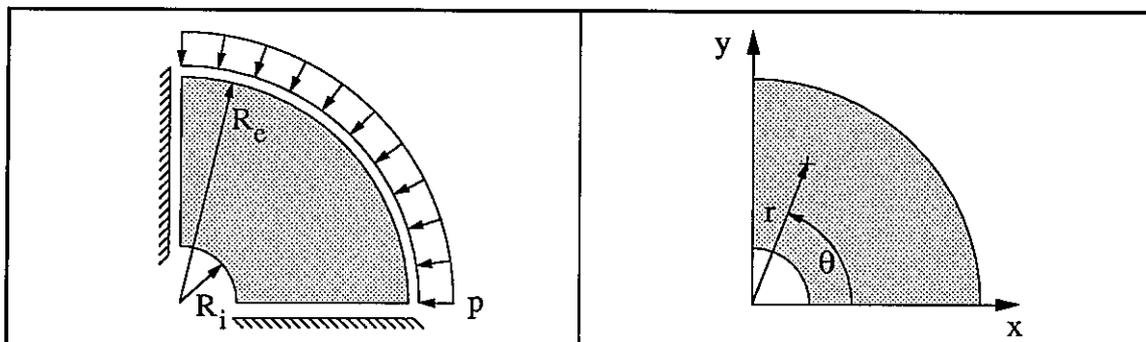


Figura 3.20 - Tubo cilíndrico de comprimento infinito sujeito a pressão externa .

Neste modelo considera-se apenas um quarto da secção transversal do tubo com as condições de fronteira necessárias para simular a simetria do problema. Na figura 3.20 apresentam-se ainda os sistemas de referência cartesiano e polar em relação aos quais são expressos os campos de tensão e de deslocamentos.

A solução analítica deste problema foi obtida por Lamé²⁵ em 1852, estando apresentada em Timoshenko⁵³, em termos dos campos de tensões e deslocamentos em coordenadas polares (r, θ) , na forma:

$$\sigma_r = \frac{R_e^2 p}{R_e^2 - R_i^2} \left(\frac{R_i^2}{r^2} - 1 \right) ; \quad (3.22a)$$

$$\sigma_\theta = - \frac{R_e^2 p}{R_e^2 - R_i^2} \left(\frac{R_i^2}{r^2} + 1 \right) ; \quad (3.22b)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 ; \quad (3.22c)$$

$$u_r = \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) ; \quad (3.22d)$$

$$u_\theta = 0 . \quad (3.22e)$$

As componentes cartesianas são dadas por:

$$\sigma_{xx} = \sigma_r \cos^2(\theta) + \sigma_\theta \sin^2(\theta) ; \quad (3.23a)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_r \sin^2(\theta) + \sigma_\theta \cos^2(\theta) ; \quad (3.23b)$$

$$\sigma_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) ; \quad (3.23c)$$

$$u_x = u_r \cos(\theta) ; \quad (3.23d)$$

$$u_y = u_r \sin(\theta) . \quad (3.23e)$$

No presente trabalho considerou-se o caso particular de um tubo cilíndrico em que a secção transversal apresenta um raio externo, R_e , e uma espessura igual a 75% do raio externo, $R_i = 0.25 R_e$. Considerou-se ainda um coeficiente de Poisson, ν , igual a 0.25 .

Para se proceder à análise deste problema é utilizada a adaptação do elemento rectangular de 8 nós ao modelo EG, descrita no anexo A3.1, adoptando polinómios de Legendre como funções de interpolação. A utilização das discretizações apresentadas na figura 3.21 permite estudar a sensibilidade das soluções em relação à malha utilizada.

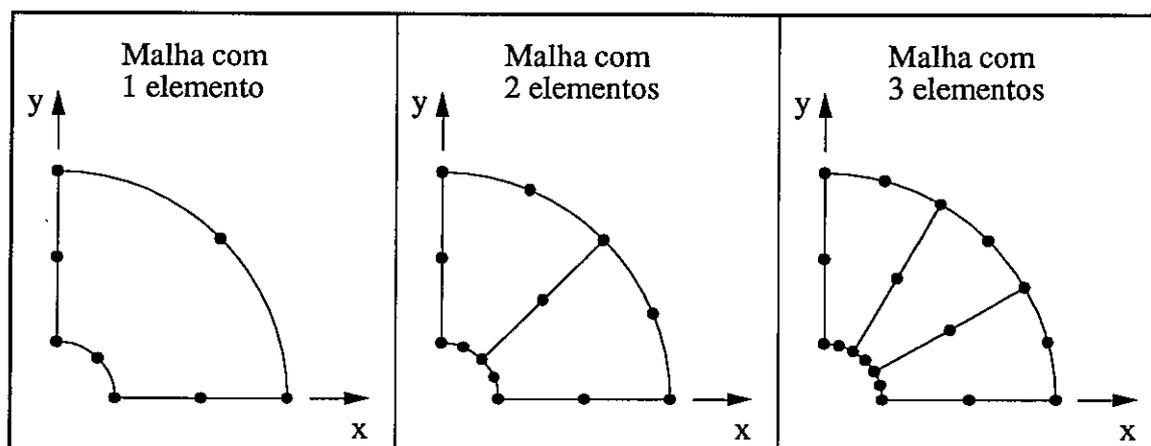


Figura 3.21 - Discretização da secção transversal de um tubo cilíndrico.

Convém desde já salientar que as discretizações apresentadas não representam fielmente a estrutura em estudo, não só em termos de área da secção transversal, mas também em termos de orientações das normais à superfície da estrutura. No quadro 3.10 apresenta-se a título de exemplo os desvios existentes ao nível da área da secção transversal.

	Exacta		1 elemento		2 elementos		3 elementos	
Área	$0.7363 R_e^2$	0%	$0.6629 R_e^2$	10%	$0.7175 R_e^2$	3%	$0.7293 R_e^2$	1%

Quadro 3.10 - Valores obtidos para a área da secção transversal do tubo cilíndrico.

Para cada uma das malhas de elementos finitos adoptada consideraram-se cinco níveis diferentes de aproximação em termos do grau dos polinómios de Legendre utilizados para a interpolação dos campos de tensão e deslocamentos. No quadro 3.11 apresentam-se, para cada uma das aproximações, quais os graus dos polinómios adoptados em cada um dos campos interpolados.

Nível de aproximação	Tensão no domínio	Deslocamento no domínio	Deslocamento na fronteira
2	2	1	1
4	4	3	3
6	6	5	5
8	8	7	7
12	12	11	11

Quadro 3.11 - Grau dos polinómios de Legendre utilizados na interpolação dos diferentes campos.

Uma medida da qualidade das aproximações adoptadas é a comparação dos valores exacto e aproximado da densidade de energia de deformação. Considerando o valor dos campos exactos de tensões e deslocamentos apresentados em (3.22) é possível calcular o valor da densidade de energia de deformação para a solução exacta através da definição:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \sigma^t \varepsilon \, dA = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_{R_i}^{R_e} \sigma^t \varepsilon \, r \, dr \, d\theta . \quad (3.24)$$

Os valores aproximados da densidade de energia de deformação são calculados a partir da integração dos campos de tensões e deslocamentos em cada um dos elementos em que a secção foi discretizada.

No quadro 3.12 apresentam-se os valores obtidos para a densidade de energia de deformação, quer para a solução exacta, quer para cada uma das aproximações. Estes valores apresentam-se escalados na forma:

$$\bar{u} = \frac{E}{R_e^2 p^2} u .$$

Os resultados apresentados exemplificam a influência na convergência das soluções da discretização e do nível da aproximação adoptado para os campos estáticos e cinemáticos. Contudo, há que ter em conta a existência de duas ordens de aproximação em jogo. Por um lado existe a aproximação da geometria da estrutura em análise e por outro a aproximação dos campos estáticos e cinemáticos instalados na estrutura.

\bar{u}	Exacto		1 Elemento		2 Elementos		3 Elementos	
	Exacto	0.5890486	0.00 %	0.5836622	0.91%	0.5886922	0.06%	0.5889770
Nível 2	—	—	0.5835557	0.93%	0.6005646	1.96%	0.6021424	2.22%
Nível 4	—	—	0.5825521	1.10%	0.5889807	0.01%	0.5893445	0.05%
Nível 6	—	—	0.5822600	1.15%	0.5886044	0.08%	0.5889669	0.01%
Nível 8	—	—	0.5821991	1.16%	0.5885934	0.08%	0.5889578	0.02%
Nível 12	—	—	0.5821658	1.17%	0.5885914	0.08%	0.5889573	0.02%

Quadro 3.12 - Comparação entre o valor exacto da densidade de energia de deformação e os valores obtidos nas diferentes aproximações consideradas.

A análise de cada uma das linhas do quadro 3.12 permite concluir que, como seria de esperar, o aumento do número de elementos contribui para a convergência da solução. Contudo, a velocidade de convergência da densidade de energia de deformação é da mesma ordem de grandeza da do valor da área da secção transversal do cilindro, apresentada no quadro 3.10. Simultaneamente verifica-se uma taxa de convergência idêntica para o valor exacto da densidade de energia de deformação calculado com base nas diferentes discretizações, primeira linha do quadro 3.12.

O aumento do grau dos polinómios interpoladores produz uma convergência monotónica para a densidade de energia de deformação de cada uma das discretizações apresentadas.

A análise de cada uma das colunas do quadro 3.12 mostra a convergência para o valor da densidade de energia de deformação do modelo discreto da estrutura e não para o da estrutura real. Na figura 3.22 encontra-se representada, para cada uma das discretizações, a convergência em função do nível da aproximação.

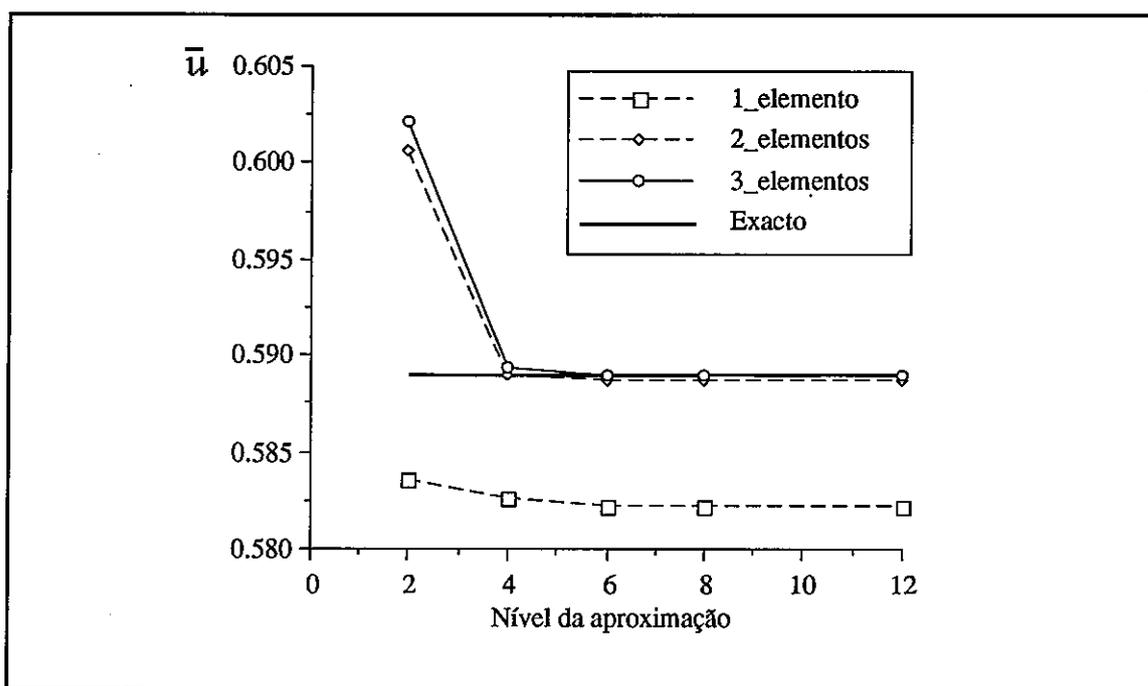


Figura 3.22 - Convergência da densidade de energia de deformação do tubo cilíndrico com pressão externa uniforme.

Para ilustrar as soluções obtidas para o cilindro com pressão externa, apresenta-se na figura 3.23, a comparação entre a solução exacta e a solução correspondente a uma discretização por dois elementos e a um nível de aproximação de oito. Esta comparação é feita por meio da representação dos campos de tensões e deslocamentos das duas soluções e ainda através da representação dos desvios entre a solução aproximada e a solução exacta. A medida de desvio adoptada para os deslocamentos corresponde à diferença entre o deslocamento aproximado e o deslocamento exacto, enquanto que para as tensões se adopta como desvio o valor:

$$\text{Desvio} = \left| \bar{\sigma}_{\text{aprox.}} - \bar{\sigma}_{\text{exacto}} \right| .$$



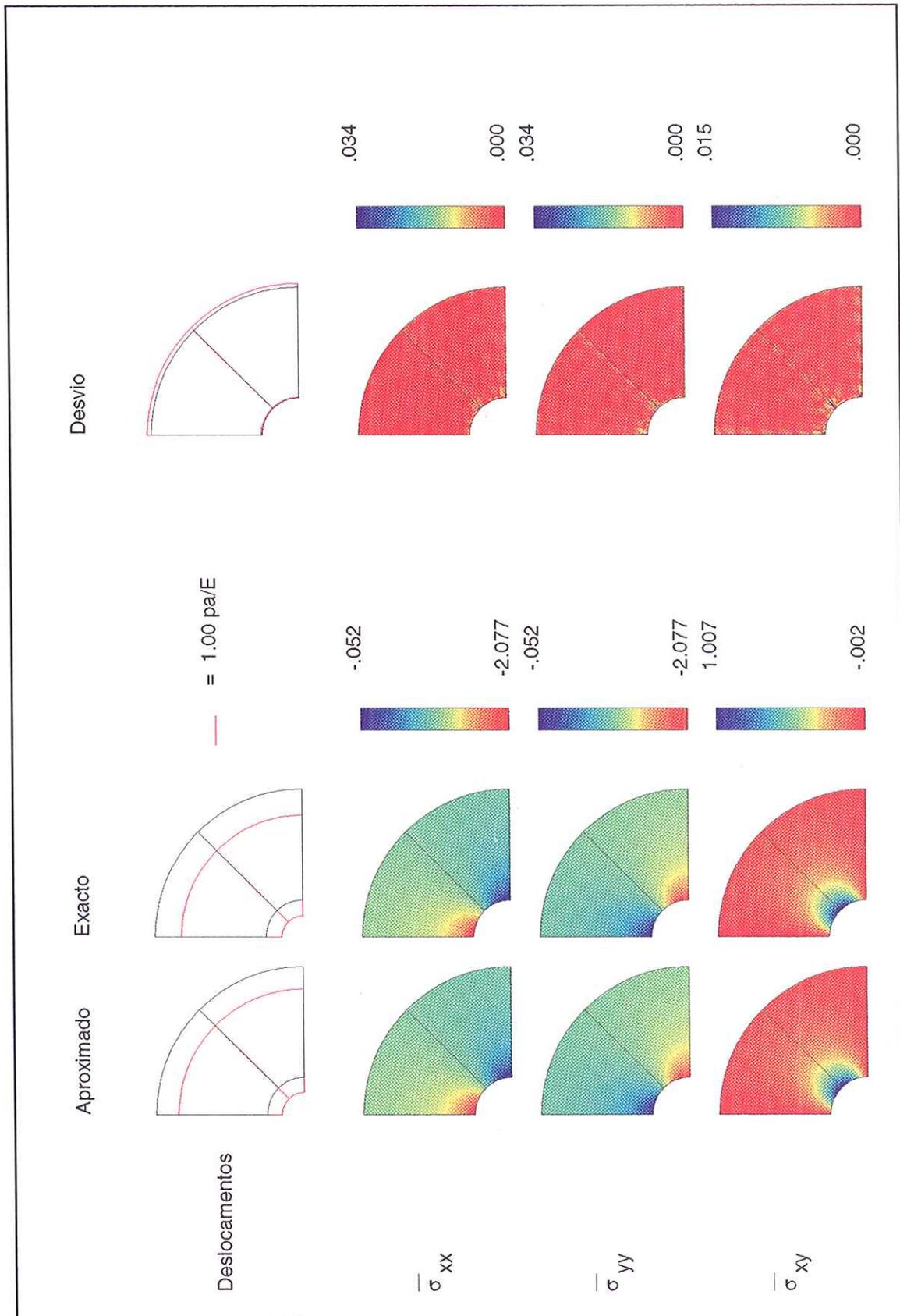


Figura 3.23 - Tubo cilíndrico de comprimento infinito sujeito a pressão externa; comparação entre a solução exacta e uma aproximação baseada numa discretização por dois elementos.

Anexo A3.1

Aplicação do elemento rectangular de 8 nós ao modelo EG

A definição de elementos finitos mestres tem como objectivo estabelecer, para elementos de geometria regular, definições analíticas para os diferentes operadores presentes no seu sistema governativo. Desta forma podem integrar-se analiticamente esses operadores, conseguindo reduzir-se os gastos em tempo de cálculo que as integrações numéricas normalmente acarretam.

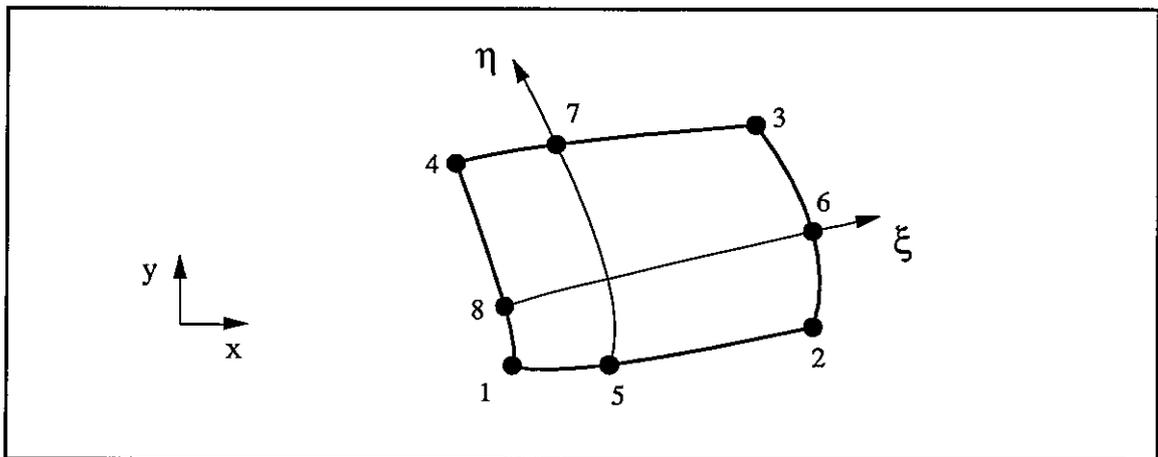


Figura A3.1.1 - Elemento rectangular de 8 nós.

Neste anexo exemplifica-se a forma de desenvolvimento do elemento finito rectangular de 8 nós, bem como, a sua aplicação ao modelo EG. Este elemento mestre, representado na figura A3.1.1, é desenvolvido a partir da especificação das funções de forma apresentadas por Zienkiewicz⁶⁰ para o modelo serendipiano de 8 nós.

$$\Psi_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta), \quad \Psi_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta),$$

$$\Psi_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta), \quad \Psi_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta),$$

$$\Psi_5(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad \Psi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi),$$

$$\Psi_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad \Psi_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi).$$

Com base neste conjunto de funções de forma é possível explicitar a mudança de coordenadas, entre o referencial local, (ξ, η) , e o referencial global, (x_1, x_2) ,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \Psi_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A3.1.1})$$

em que $x_{1,i}$ e $x_{2,i}$ representam as coordenadas do nó i no referencial global.

Desenvolvendo a expressão (A3.1.1) verifica-se que esta mudança de referencial pode ser expressa na forma,

$$x_k = \alpha_k^{00} + \alpha_k^{10} \xi + \alpha_k^{01} \eta + \alpha_k^{20} \xi^2 + \alpha_k^{11} \xi \eta + \alpha_k^{02} \eta^2 + \alpha_k^{21} \xi^2 \eta + \alpha_k^{12} \xi \eta^2 \quad (\text{A3.1.2})$$

com $k=1, 2$ e em que:

$$\alpha_k^{00} = \frac{1}{2} (x_{k,5} + x_{k,6} + x_{k,7} + x_{k,8}) - \frac{1}{4} (x_{k,1} + x_{k,2} + x_{k,3} + x_{k,4});$$

$$\alpha_k^{10} = \frac{1}{2} (x_{k,6} - x_{k,8});$$

$$\alpha_k^{01} = \frac{1}{2} (x_{k,7} - x_{k,5});$$

$$\alpha_k^{20} = \frac{1}{4} (x_{k,1} + x_{k,2} + x_{k,3} + x_{k,4}) - \frac{1}{2} (x_{k,7} + x_{k,5});$$

$$\alpha_k^{11} = \frac{1}{4} (x_{k,1} - x_{k,2} + x_{k,3} - x_{k,4});$$

$$\alpha_k^{02} = \frac{1}{4} (x_{k,1} + x_{k,2} + x_{k,3} + x_{k,4}) - \frac{1}{2} (x_{k,6} + x_{k,8});$$

$$\alpha_k^{21} = \frac{1}{4} (x_{k,3} - x_{k,1} + x_{k,4} - x_{k,2}) - \frac{1}{2} (x_{k,7} - x_{k,5});$$

$$\alpha_k^{12} = \frac{1}{4} (x_{k,3} - x_{k,1} + x_{k,2} - x_{k,4}) - \frac{1}{2} (x_{k,6} - x_{k,8}).$$

Partindo desta transformação de coordenadas é possível referir no referencial local os operadores diferenciais definidos no referencial global. Esta relação é expressa na forma,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A3.1.3})$$

onde,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (\text{A3.1.4})$$

representa a matriz jacobiana da transformação de coordenadas. Os termos presentes nesta matriz podem ser obtidos a partir da relação (A3.1.2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \xi} &= (\alpha_k^{10} + \alpha_k^{11} \eta + \alpha_k^{12} \eta^2) + 2 (\alpha_k^{20} + \alpha_k^{21} \eta) \xi, \\ \frac{\partial x_k}{\partial \eta} &= (\alpha_k^{01} + \alpha_k^{11} \xi + \alpha_k^{21} \xi^2) + 2 (\alpha_k^{02} + \alpha_k^{12} \xi) \eta, \end{aligned}$$

sendo o Jacobiano desta transformação dado por,

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}| &= \mathbf{J}_{00} + \mathbf{J}_{10} \xi + \mathbf{J}_{01} \eta + \mathbf{J}_{20} \xi^2 + \mathbf{J}_{11} \xi \eta + \mathbf{J}_{02} \eta^2 + \\ &+ \mathbf{J}_{30} \xi^3 + \mathbf{J}_{21} \xi^2 \eta + \mathbf{J}_{12} \xi \eta^2 + \mathbf{J}_{03} \eta^3 + \mathbf{J}_{22} \xi^2 \eta^2, \end{aligned} \quad (\text{A3.1.5})$$

em que:

$$\mathbf{J}_{00} = \alpha_1^{10} \alpha_2^{01} - \alpha_1^{01} \alpha_2^{10};$$

$$\mathbf{J}_{10} = \alpha_1^{10} \alpha_2^{11} - \alpha_1^{11} \alpha_2^{10} + 2 (\alpha_1^{20} \alpha_2^{01} - \alpha_1^{01} \alpha_2^{20});$$

$$\mathbf{J}_{01} = \alpha_1^{11} \alpha_2^{01} - \alpha_1^{01} \alpha_2^{11} + 2 (\alpha_1^{10} \alpha_2^{02} - \alpha_1^{02} \alpha_2^{10});$$

$$\mathbf{J}_{20} = \alpha_1^{10} \alpha_2^{21} - \alpha_1^{21} \alpha_2^{10} + 2 (\alpha_1^{20} \alpha_2^{11} - \alpha_1^{11} \alpha_2^{20});$$

$$\mathbf{J}_{11} = 2 \left(\alpha_1^{10} \alpha_2^{12} + \alpha_1^{21} \alpha_2^{01} - \alpha_1^{01} \alpha_2^{21} - \alpha_1^{12} \alpha_2^{10} \right) + 4 \left(\alpha_1^{20} \alpha_2^{02} - \alpha_1^{02} \alpha_2^{20} \right);$$

$$\mathbf{J}_{02} = \alpha_1^{12} \alpha_2^{01} - \alpha_1^{01} \alpha_2^{12} + 2 \left(\alpha_1^{11} \alpha_2^{02} - \alpha_1^{02} \alpha_2^{11} \right);$$

$$\mathbf{J}_{30} = 2 \left(\alpha_1^{20} \alpha_2^{21} - \alpha_1^{21} \alpha_2^{20} \right);$$

$$\mathbf{J}_{21} = \alpha_1^{21} \alpha_2^{11} - \alpha_1^{11} \alpha_2^{21} + 4 \left(\alpha_1^{20} \alpha_2^{12} - \alpha_1^{12} \alpha_2^{20} \right);$$

$$\mathbf{J}_{12} = \alpha_1^{11} \alpha_2^{12} - \alpha_1^{12} \alpha_2^{11} + 4 \left(\alpha_1^{21} \alpha_2^{02} - \alpha_1^{02} \alpha_2^{21} \right);$$

$$\mathbf{J}_{03} = 2 \left(\alpha_1^{12} \alpha_2^{02} - \alpha_1^{02} \alpha_2^{12} \right);$$

$$\mathbf{J}_{22} = 3 \left(\alpha_1^{21} \alpha_2^{12} - \alpha_1^{12} \alpha_2^{21} \right).$$

Com base nesta transformação de coordenadas é possível transformar os integrais definidos no referencial global para integrais referidos ao sistema local,

$$\mathbf{I} = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \, d\mathbf{V} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(\xi, \eta), \mathbf{x}_2(\xi, \eta)) \, |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta, \quad (\text{A3.1.6})$$

bem como obter a definição do operador diferencial de equilíbrio, \mathbf{D} , escrito no referencial local,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{D}', \quad (\text{A3.1.7})$$

em que:

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \xi} & -\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (\text{A3.1.8})$$

Convém ainda definir os vários operadores relativos à fronteira do elemento. Para tal considere-se a fronteira dividida em quatro troços distintos, sendo:

T_I - troço que liga os nós 1, 5 e 2;

T_{II} - troço que liga os nós 2, 6 e 3;

T_{III} - troço que liga os nós 3, 7 e 4;

T_{IV} - troço que liga os nós 4, 8 e 1.

As normais exteriores a estes troços são definidas por,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{n}_{x1} \\ \mathbf{n}_{x2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} |\mathbf{J}| \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_\xi \\ \mathbf{n}_\eta \end{Bmatrix},$$

tomando os seguintes valores,

$$\mathbf{N}_I = \begin{Bmatrix} (\alpha_2^{10} - \alpha_2^{11} + \alpha_2^{12}) + 2(\alpha_2^{20} - \alpha_2^{21}) \xi \\ -(\alpha_1^{10} - \alpha_1^{11} + \alpha_1^{12}) - 2(\alpha_1^{20} - \alpha_1^{21}) \xi \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{II} = \begin{Bmatrix} (\alpha_2^{01} + \alpha_2^{11} + \alpha_2^{21}) + 2(\alpha_2^{02} + \alpha_2^{12}) \eta \\ -(\alpha_1^{01} + \alpha_1^{11} + \alpha_1^{21}) - 2(\alpha_1^{02} + \alpha_1^{12}) \eta \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{III} = \begin{Bmatrix} -(\alpha_2^{10} + \alpha_2^{11} + \alpha_2^{12}) - 2(\alpha_2^{20} + \alpha_2^{21}) \xi \\ (\alpha_1^{10} + \alpha_1^{11} + \alpha_1^{12}) + 2(\alpha_1^{20} + \alpha_1^{21}) \xi \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{IV} = \left\{ \begin{array}{l} - (\alpha_2^{01} - \alpha_2^{11} + \alpha_2^{21}) - 2 (\alpha_2^{02} - \alpha_2^{12}) \eta \\ (\alpha_1^{01} - \alpha_1^{11} + \alpha_1^{21}) + 2 (\alpha_1^{02} - \alpha_1^{12}) \eta \end{array} \right\}.$$

A integração de uma função ao longo de cada um dos troços de fronteira pode ser expressa, em termos das coordenadas locais, na forma:

$$\mathbf{I}_I = \int_{\mathbf{T}_I} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \, d\mathbf{T}_I = \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(\xi, -1), \mathbf{x}_2(\xi, -1)) \, |\mathbf{N}_I| \, d\xi;$$

$$\mathbf{I}_{II} = \int_{\mathbf{T}_{II}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \, d\mathbf{T}_{II} = \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(1, \eta), \mathbf{x}_2(1, \eta)) \, |\mathbf{N}_{II}| \, d\eta;$$

$$\mathbf{I}_{III} = \int_{\mathbf{T}_{III}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \, d\mathbf{T}_{III} = \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(\xi, 1), \mathbf{x}_2(\xi, 1)) \, |\mathbf{N}_{III}| \, d\xi;$$

$$\mathbf{I}_{IV} = \int_{\mathbf{T}_{IV}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \, d\mathbf{T}_{IV} = \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(-1, \eta), \mathbf{x}_2(-1, \eta)) \, |\mathbf{N}_{IV}| \, d\eta.$$

Tendo em conta os resultados atrás expressos é possível reformular os vários operadores presentes no sistema governativo do modelo **EG**, em termos do elemento mestre. Assim, as definições apresentadas para os operadores presentes no sistema governativo, (2.27), podem ser agora expressas na forma:

Integrais no domínio,

$$\mathbf{F} = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{S}^t \mathbf{f} \mathbf{S} \, d\mathbf{V} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{S}^t \mathbf{f} \mathbf{S} \, |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta,$$

$$\mathbf{A} = \int_{\mathbf{V}} (\mathbf{D}\mathbf{S})^t \mathbf{U} \, d\mathbf{V} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{D}'\mathbf{S})^t \mathbf{U} \, d\xi \, d\eta,$$

$$\mathbf{v}_\theta = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{S}^t \mathbf{f} \mathbf{s}_\theta \, d\mathbf{V} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{S}^t \mathbf{f} \mathbf{s}_\theta \, |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta,$$

$$v_0 = \int_V \mathbf{S}^t \mathbf{f} s_0 \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{S}^t \mathbf{f} s_0 |J| \, d\xi \, d\eta ,$$

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{U}^t \mathbf{b} \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{U}^t \mathbf{b} |J| \, d\xi \, d\eta ,$$

$$\mathbf{R}_0 = \int_V \mathbf{U}^t \mathbf{D} s_0 \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{U}^t (\mathbf{D}' s_0) \, d\xi \, d\eta ,$$

Integrais no troço de fronteira I,

$$\mathbf{B} = \int_{T_I} \mathbf{N} \mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, dT_I = \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_I \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\xi ,$$

$$\mathbf{Q}_* = \int_{T_I} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, dT_I = \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* |N_I| \, d\xi ,$$

$$\mathbf{Q}_0 = \int_{T_I} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} s_0 \, dT_I = \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_I s_0 \, d\xi ,$$

$$v_* = \int_{T_I} (\mathbf{N} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, dT_I = \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_I \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\xi ;$$

Integrais no troço de fronteira II,

$$\mathbf{B} = \int_{T_{II}} \mathbf{N} \mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, dT_{II} = \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{II} \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\eta ,$$

$$\mathbf{Q}_* = \int_{T_{II}} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, dT_{II} = \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* |N_{II}| \, d\eta ,$$

$$\mathbf{Q}_0 = \int_{T_{II}} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} s_0 \, dT_{II} = \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_{II} s_0 \, d\eta ,$$

$$v_* = \int_{T_{II}} (\mathbf{N} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, dT_{II} = \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{II} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\eta ;$$

Integrais no troço de fronteira III,

$$\mathbf{B} = \int_{\mathbf{T}_{III}} \mathbf{N} \mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, d\mathbf{T}_{III} = \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{III} \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\xi ,$$

$$\mathbf{Q}_* = \int_{\mathbf{T}_{III}} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, d\mathbf{T}_{III} = \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* |\mathbf{N}_{III}| \, d\xi ,$$

$$\mathbf{Q}_0 = \int_{\mathbf{T}_{III}} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} \, s_0 \, d\mathbf{T}_{III} = \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_{III} s_0 \, d\xi ,$$

$$\mathbf{v}_* = \int_{\mathbf{T}_{III}} (\mathbf{N} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\mathbf{T}_{III} = \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{III} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\xi ;$$

Integrais no troço de fronteira IV,

$$\mathbf{B} = \int_{\mathbf{T}_{IV}} \mathbf{N} \mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, d\mathbf{T}_{IV} = \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{IV} \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\eta ,$$

$$\mathbf{Q}_* = \int_{\mathbf{T}_{IV}} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, d\mathbf{T}_{IV} = \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* |\mathbf{N}_{IV}| \, d\eta ,$$

$$\mathbf{Q}_0 = \int_{\mathbf{T}_{IV}} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} \, s_0 \, d\mathbf{T}_{IV} = \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_{IV} s_0 \, d\eta ,$$

$$\mathbf{v}_* = \int_{\mathbf{T}_{IV}} (\mathbf{N} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\mathbf{T}_{IV} = \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{IV} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\eta ;$$

Anexo A3.2

Funções de interpolação sinusoidais para o modelo EAC

Nos quadros seguintes adopta-se a notação,

$$\alpha = m \pi, \quad \beta = n \pi,$$

$$S_x = \sin(\alpha x), \quad C_x = \cos(\alpha x),$$

$$S_y = \sin(\beta y), \quad C_y = \cos(\beta y),$$

$$Sh_x = \sinh(\beta x), \quad Ch_x = \cosh(\beta x),$$

$$Sh_y = \sinh(\alpha y), \quad Ch_y = \cosh(\alpha y),$$

em que x e y variam entre 0 e 1, sendo m e n inteiros positivos que representam o número de ondas de cada função segundo x e y , respectivamente. As características elásticas do material são expressas por meio do módulo de elasticidade, E , e pelo coeficiente de Poisson, ν .

Funções correspondentes a campos de tensão uniforme

	$\Phi = \frac{1}{2} y^2$	$\Phi = \frac{1}{2} x^2$	$\Phi = -xy$
σ_{xx}	1	0	0
σ_{yy}	0	1	0
σ_{xy}	0	0	1
$E u_x$	x	$-\nu x$	$(1+\nu) y$
$E u_y$	$-\nu y$	y	$(1+\nu) x$

Funções correspondentes a ondas em x

	$\Phi = C_x Ch_y$	$\Phi = C_x Sh_y$	$\Phi = S_x Ch_y$	$\Phi = S_x Sh_y$
σ_{xx}	$\alpha^2 C_x Ch_y$	$\alpha^2 C_x Sh_y$	$\alpha^2 S_x Ch_y$	$\alpha^2 S_x Sh_y$
σ_{yy}	$-\alpha^2 C_x Ch_y$	$-\alpha^2 C_x Sh_y$	$-\alpha^2 S_x Ch_y$	$-\alpha^2 S_x Sh_y$
σ_{xy}	$\alpha^2 S_x Sh_y$	$\alpha^2 S_x Ch_y$	$-\alpha^2 C_x Sh_y$	$-\alpha^2 C_x Ch_y$
$E u_x$	$\alpha(1+\nu) S_x Ch_y$	$\alpha(1+\nu) S_x Sh_y$	$-\alpha(1+\nu) C_x Ch_y$	$-\alpha(1+\nu) C_x Sh_y$
$E u_y$	$-\alpha(1+\nu) C_x Sh_y$	$-\alpha(1+\nu) C_x Ch_y$	$-\alpha(1+\nu) S_x Sh_y$	$-\alpha(1+\nu) S_x Ch_y$

	$\Phi = \alpha y C_x \text{Ch}_y$	$\Phi = \alpha y C_x \text{Sh}_y$
σ_{xx}	$\alpha^2 C_x (\alpha y \text{Ch}_y + 2 \text{Sh}_y)$	$\alpha^2 C_x (\alpha y \text{Sh}_y + 2 \text{Ch}_y)$
σ_{yy}	$-\alpha^3 y C_x \text{Ch}_y$	$-\alpha^3 y C_x \text{Sh}_y$
σ_{xy}	$\alpha^2 S_x (\alpha y \text{Sh}_y + \text{Ch}_y)$	$\alpha^2 S_x (\alpha y \text{Ch}_y + \text{Sh}_y)$
E u_x	$\alpha S_x [\alpha y (1+\nu) \text{Ch}_y + 2 \text{Sh}_y]$	$\alpha S_x [\alpha y (1+\nu) \text{Sh}_y + 2 \text{Ch}_y]$
E u_y	$-\alpha C_x [\alpha y (1+\nu) \text{Sh}_y - (1-\nu) \text{Ch}_y]$	$-\alpha C_x [\alpha y (1+\nu) \text{Ch}_y - (1-\nu) \text{Sh}_y]$

	$\Phi = \alpha y S_x \text{Ch}_y$	$\Phi = \alpha y S_x \text{Sh}_y$
σ_{xx}	$\alpha^2 S_x (\alpha y \text{Ch}_y + 2 \text{Sh}_y)$	$\alpha^2 S_x (\alpha y \text{Sh}_y + 2 \text{Ch}_y)$
σ_{yy}	$-\alpha^3 y S_x \text{Ch}_y$	$-\alpha^3 y S_x \text{Sh}_y$
σ_{xy}	$-\alpha^2 C_x (\alpha y \text{Sh}_y + \text{Ch}_y)$	$-\alpha^2 C_x (\alpha y \text{Ch}_y + \text{Sh}_y)$
E u_x	$-\alpha C_x [\alpha y (1+\nu) \text{Ch}_y + 2 \text{Sh}_y]$	$-\alpha C_x [\alpha y (1+\nu) \text{Sh}_y + 2 \text{Ch}_y]$
E u_y	$-\alpha S_x [\alpha y (1+\nu) \text{Sh}_y - (1-\nu) \text{Ch}_y]$	$-\alpha S_x [\alpha y (1+\nu) \text{Ch}_y - (1-\nu) \text{Sh}_y]$

Funções correspondentes a ondas em y

	$\Phi = C_y \text{Ch}_x$	$\Phi = C_y \text{Sh}_x$	$\Phi = S_y \text{Ch}_x$	$\Phi = S_y \text{Sh}_x$
σ_{xx}	$-\beta^2 C_y \text{Ch}_x$	$-\beta^2 C_y \text{Sh}_x$	$-\beta^2 S_y \text{Ch}_x$	$-\beta^2 S_y \text{Sh}_x$
σ_{yy}	$\beta^2 C_y \text{Ch}_x$	$\beta^2 C_y \text{Sh}_x$	$\beta^2 S_y \text{Ch}_x$	$\beta^2 S_y \text{Sh}_x$
σ_{xy}	$\beta^2 S_y \text{Sh}_x$	$\beta^2 S_y \text{Ch}_x$	$-\beta^2 C_y \text{Sh}_x$	$-\beta^2 C_y \text{Ch}_x$
E u_x	$-\beta (1+\nu) C_y \text{Sh}_x$	$-\beta (1+\nu) C_y \text{Ch}_x$	$\beta (1+\nu) S_y \text{Sh}_x$	$-\beta (1+\nu) S_y \text{Ch}_x$
E u_y	$\beta (1+\nu) S_y \text{Ch}_x$	$\beta (1+\nu) S_y \text{Sh}_x$	$\beta (1+\nu) C_y \text{Ch}_x$	$-\beta (1+\nu) C_y \text{Sh}_x$

	$\Phi = \beta x C_y \text{Ch}_x$	$\Phi = \beta x C_y \text{Sh}_x$
σ_{xx}	$-\beta^3 x C_y \text{Ch}_x$	$-\beta^3 x C_y \text{Sh}_x$
σ_{yy}	$\beta^2 C_y (\beta x \text{Ch}_x + 2 \text{Sh}_x)$	$\beta^2 C_y (\beta x \text{Sh}_x + 2 \text{Ch}_x)$
σ_{xy}	$\beta^2 S_y (\beta x \text{Sh}_x + \text{Ch}_x)$	$\beta^2 S_y (\beta x \text{Ch}_x + \text{Sh}_x)$
E u_x	$-\beta C_y [\beta x (1+\nu) \text{Sh}_x - (1-\nu) \text{Ch}_x]$	$-\beta C_y [\beta x (1+\nu) \text{Ch}_x - (1-\nu) \text{Sh}_x]$
E u_y	$\beta S_y [\beta x (1+\nu) \text{Ch}_x + 2 \text{Sh}_x]$	$\beta S_y [\beta x (1+\nu) \text{Sh}_x + 2 \text{Ch}_x]$

	$\Phi = \beta \times S_y \text{Ch}_x$	$\Phi = \beta \times S_y \text{Sh}_x$
σ_{xx}	$-\beta^3 \times S_y \text{Ch}_x$	$-\beta^3 \times S_y \text{Sh}_x$
σ_{yy}	$\beta^2 S_y (\beta \times \text{Ch}_x + 2 \text{Sh}_x)$	$\beta^2 S_y (\beta \times \text{Sh}_x + 2 \text{Ch}_x)$
σ_{xy}	$-\beta^2 C_y (\beta \times \text{Sh}_x + \text{Ch}_x)$	$-\beta^2 C_y (\beta \times \text{Ch}_x + \text{Sh}_x)$
$E u_x$	$-\beta S_y [\beta \times (1+\nu) \text{Sh}_x - (1-\nu) \text{Ch}_x]$	$-\beta S_y [\beta \times (1+\nu) \text{Ch}_x - (1-\nu) \text{Sh}_x]$
$E u_y$	$-\beta C_y [\beta \times (1+\nu) \text{Ch}_x + 2 \text{Sh}_x]$	$-\beta C_y [\beta \times (1+\nu) \text{Sh}_x + 2 \text{Ch}_x]$



4 Análise de Peças Tridimensionais

No presente capítulo apresenta-se a aplicação do modelo EG à análise de sólidos, utilizando polinómios de Legendre como funções de interpolação.

Após serem definidos os esforços e deformações generalizadas, bem como as relações constitutivas para o caso elástico isotrópico e os operadores de equilíbrio e compatibilidade, são estabelecidas as diferentes equações necessárias à definição do sistema governativo. Em seguida, listam-se as funções de interpolação adoptadas para o campo de esforços generalizados, para o campo de deslocamentos no domínio e para as componentes de deslocamento na fronteira.

Por fim, é apresentado o elemento finito prismático de 16 nós, o qual é utilizado na análise de um exemplo de aplicação.

4.1 - Relações fundamentais

Nos problemas de elasticidade tridimensional, as variáveis estáticas e cinemáticas habitualmente utilizadas são as tensões e as deformações referidas a um sistema de coordenadas cartesiano. Assim, os vectores dos esforços generalizados e das

deformações generalizadas podem ser identificados com os vectores que reúnem as componentes de tensão e de deformação em cada ponto,

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

em que x , y e z definem o sistema de coordenadas.

Os deslocamentos a ter em conta são os deslocamentos ao longo das três direcções ortogonais, x , y e z , sendo as forças de domínio e as forças de fronteira também referidas a estas três direcções:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

O operador diferencial de equilíbrio, \mathbf{D} , e a matriz das componentes da normal exterior unitária correspondente, \mathbf{N} , são definidos por,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{n}_z & \mathbf{n}_y \\ \cdot & \mathbf{n}_y & \cdot & \mathbf{n}_z & \cdot & \mathbf{n}_x \\ \cdot & \cdot & \mathbf{n}_z & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x & \cdot \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

em que \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y e \mathbf{n}_z representam respectivamente as componentes segundo as direcções x , y e z da normal unitária exterior à fronteira.

Com base nestas definições é possível adaptar as relações genéricas, apresentadas no capítulo 2, para o caso das peças tridimensionais. Assim, no que diz respeito à condição

de equilíbrio no domínio, a equação de equilíbrio local, (2.1), estabelece uma relação entre as tensões e as forças de domínio tomando a forma:

$$\mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } V . \quad (4.4)$$

A condição de equilíbrio na fronteira, equação (2.2), é expressa por meio da equação,

$$\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_* \quad \text{em } \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} , \quad (4.5)$$

que relaciona as tensões e as tracções na fronteira.

A condição de compatibilidade no domínio, equação (2.3), é expressa pela relação,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^* \mathbf{u} \quad \text{em } V , \quad (4.6)$$

a qual estabelece uma relação entre as deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$, e os os deslocamentos, \mathbf{u} , sendo \mathbf{D}^* o operador diferencial de compatibilidade adjunto do operador diferencial de equilíbrio, \mathbf{D} , definido de acordo com a relação (3.4).

A condição de compatibilidade na fronteira, equação (2.4), é imposta especificando o valor dos deslocamentos ao longo da fronteira cinemática,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_* \quad \text{em } \Gamma_{\mathbf{u}} . \quad (4.7)$$

No que toca às relações constitutivas, estas estabelecem uma relação elástica e linear entre as tensões e as deformações podendo ser escritas na forma,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta} , \quad (4.8a)$$

se se optar por uma modelação do tipo flexibilidade, ou a forma alternativa,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_{\theta} , \quad (4.8b)$$

no caso de se optar por uma modelação do tipo rigidez.

Admitindo um comportamento isotrópico do material estrutural, os operadores de elasticidade presentes nas equações (4.8) tomam a forma:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nu & 1 & -\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nu & -\nu & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2(1+\nu) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2(1+\nu) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2(1+\nu) \end{bmatrix}; \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu & 1-\nu & \nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu & \nu & 1-\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-2\nu}{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-2\nu}{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.9b)$$

4.2 - Modelo EG utilizando polinómios de Legendre

A utilização do modelo EG no caso das peças tridimensionais baseia-se na aplicação das equações genéricas definidas para o modelo EG, secção 2.1, tendo em conta as definições apresentadas para os esforços e para as deformações generalizadas, bem como para os operadores de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade.

As funções de interpolação a utilizar podem ser definidas estendendo, para o caso tridimensional, as definições apresentadas no capítulo 3 para o caso da elasticidade plana. Neste capítulo, tendo em conta os resultados obtidos no capítulo anterior, só se utilizam polinómios de Legendre como funções de interpolação.

4.2.1 - Funções de interpolação das tensões no domínio

Partindo das definições dos polinómios de Legendre apresentadas no Capítulo 3 é possível gerar as seguintes funções de interpolação para os esforços generalizados:

Funções baseadas em $(P_\xi P_\eta P_\zeta)$						
σ_{xx}	$P_\xi P_\eta P_\zeta$	0	0	0	0	0
σ_{yy}	0	$P_\xi P_\eta P_\zeta$	0	0	0	0
σ_{zz}	0	0	$P_\xi P_\eta P_\zeta$	0	0	0
σ_{yz}	0	0	0	$P_\xi P_\eta P_\zeta$	0	0
σ_{xz}	0	0	0	0	$P_\xi P_\eta P_\zeta$	0
σ_{xy}	0	0	0	0	0	$P_\xi P_\eta P_\zeta$

Nesta definição é utilizada a seguinte notação,

$$P_\xi = P_l(\xi) \quad , \quad P_\eta = P_m(\eta) \quad e \quad P_\zeta = P_n(\zeta) \quad ,$$

em que ξ , η e ζ representam as coordenadas locais do elemento e variam entre -1 e 1 , sendo l , m e n inteiros que representam o grau dos polinómios segundo ξ , η e ζ , respectivamente.

4.2.2 - Funções de interpolação dos deslocamentos no domínio

As funções de interpolação dos deslocamentos no domínio, U , são expressas na forma,

Funções baseadas em $(P_\xi P_\eta P_\zeta)$			
u_x	$P_\xi P_\eta P_\zeta$	0	0
u_y	0	$P_\xi P_\eta P_\zeta$	0
u_z	0	0	$P_\xi P_\eta P_\zeta$

em que P_ξ , P_η e P_ζ têm o significado já referido anteriormente.

4.2.3 - Funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira

Para funções de interpolação dos deslocamentos na fronteira, tomam-se também polinómios de Legendre,

$$P_s = P_i(s),$$

variando s entre -1 e 1 , e sendo i o inteiro que representa o grau do polinómio de Legendre segundo a direcção do troço de fronteira.

Funções baseadas em P_s			
u_x	P_s	0	0
u_y	0	P_s	0
u_z	0	0	P_s

4.3 - Elemento prismático de 16 nós

Para a análise de peças tridimensionais, o elemento rectangular de 8 nós é adaptado por forma a criar um elemento prismático de 16 nós. Este elemento finito, devido à sua geometria, apresenta limitações quanto à forma dos domínios que consegue simular. Contudo, a simplicidade analítica que a sua formulação e utilização envolve torna-o de grande utilidade para teste dos modelos desenvolvidos.

No anexo 4.1 apresenta-se a formulação do elemento prismático de 16 nós, bem como a sua aplicação ao modelo EG. Utilizando um procedimento análogo ao seguido no anexo A3.1 para o elemento rectangular de 8 nós, é possível desenvolver elementos finitos tridimensionais com outras geometrias.

4.4 - Exemplo de aplicação

Consola curta com secção em T

A formulação desenvolvida para a análise de peças tridimensionais é aplicada ao estudo da consola curta com secção em T representada na figura 4.1. Considera-se a consola homogénea com módulo de elasticidade, E , e coeficiente de Poisson igual a 0.25 estando submetida à acção de uma carga uniformemente distribuída actuando apenas em parte do banzo de modo a provocar um efeito combinado de flexão, torção e corte.

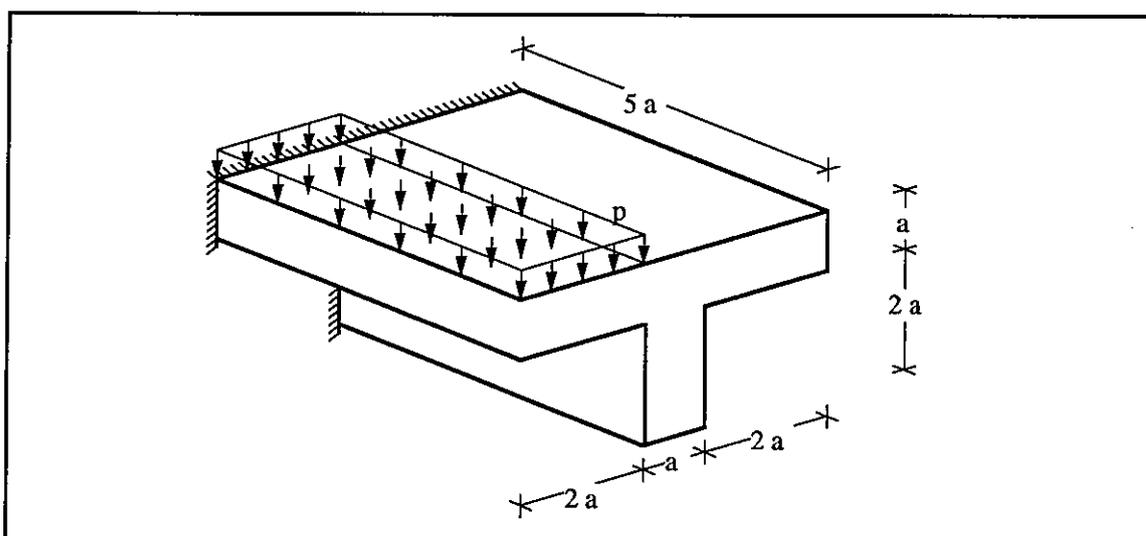


Figura 4.1 - Consola curta com secção em T submetida a um efeito combinado de flexão, torção e corte.

Para se proceder à análise deste problema utilizando o modelo EG aplicado a peças tridimensionais foi utilizada uma discretização composta por 4 elementos prismáticos de 16 nós, a qual é apresentada na figura 4.2. Nesta figura representa-se ainda a posição do referencial utilizado, o qual se encontra centrado na secção de encastramento, na ligação da alma ao banzo.

Na análise deste problema consideraram-se duas aproximações distintas. No quadro 4.1 resumem-se as principais características das aproximações analisadas, apresentando-se qual a ordem das funções de interpolação utilizadas na representação dos diferentes campos, bem como a dimensão, N , e índice de esparsidade, η , dos sistema governativos.

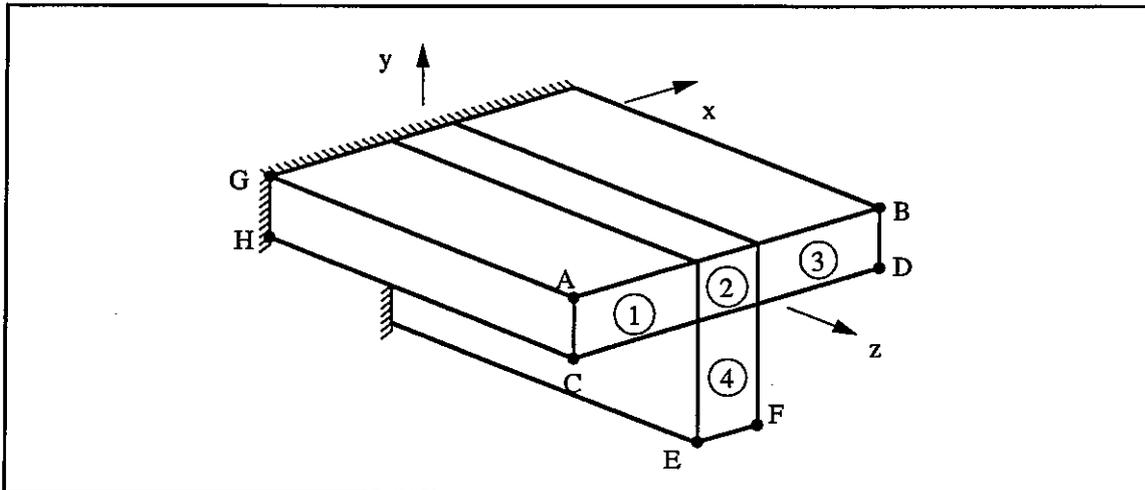


Figura 4.2 - Discretização e referencial utilizados na análise da consola curta com secção em T.

Por forma a comparar os resultados das aproximações apresentadas com os obtidos utilizando métodos tradicionais de elementos finitos de compatibilidade, procedeu-se à análise deste problema utilizando o programa COSMOS/M²⁶, o qual se baseia nos trabalhos de Bathe⁵ e Cook¹¹. Assim, considerou-se a malha de 640 elementos isoparamétricos de 8 nós representada na figura 4.3, à qual correspondem 2 550 graus de liberdade.

Aprox.	Função	Tensão no domínio		Deslocamentos no domínio		Deslocamentos na fronteira		N	η %
		Ordem	n_x	Ordem	n_d	Ordem	n_q		
1	Pol.	3	1 536	2	324	2	459	2 319	99.89
2	Pol.	7	12 288	6	4 116	6	2 499	18 903	99.98

Quadro 4.1 - Características das aproximações utilizadas na análise da consola curta em T.

A comparação de resultados entre as várias aproximações é feita com base nos valores dos deslocamentos obtidos para os pontos A, B, C, D, E e F representados na figura 4.2. Estes valores apresentam-se no quadro 4.2 na forma normalizada,

$$\bar{\delta}_x = \frac{E}{p a} \delta_x, \quad \bar{\delta}_y = \frac{E}{p a} \delta_y, \quad \bar{\delta}_z = \frac{E}{p a} \delta_z.$$

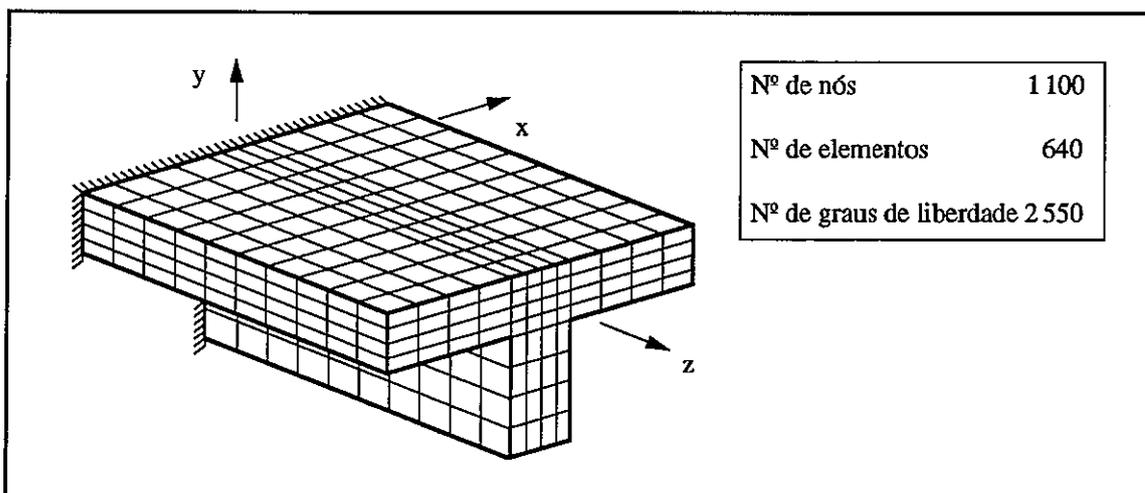


Figura 4.3 - Malha de elementos finitos utilizada pelo programa COSMOS/M²⁶ na análise da consola curta com secção em T quando submetida a uma acção combinada de flexão, torção e corte.

A análise dos valores obtidos para os diferentes deslocamentos apresentados no quadro 4.2 mostra que as diferentes aproximações produzem resultados muito semelhantes. Em todos os modelos é possível observar o efeito combinado de flexão e torção na deformada da consola. Saliente-se que, nas aproximações baseadas no modelo EG, o aumento do número de funções de interpolação produz uma diminuição da deformabilidade da consola. Simultaneamente, a solução obtida por meio de um modelo de elementos finitos de compatibilidade apresenta uma menor deformabilidade do que as aproximações obtidas a partir de modelos estáticos.

Ponto		A	B	C	D	E	F
Aprox. 1	$\bar{\delta}_x$	-24.991	-12.165	16.700	9.5512	59.484	59.256
	$\bar{\delta}_y$	-165.00	4.3374	-164.30	4.3725	-66.023	-44.773
	$\bar{\delta}_z$	11.478	5.7704	-5.4293	-0.57529	-16.326	-21.880
Aprox. 2	$\bar{\delta}_x$	-23.915	-11.702	15.152	8.6222	57.244	57.091
	$\bar{\delta}_y$	-155.75	3.9417	-155.23	3.9153	-63.517	-43.715
	$\bar{\delta}_z$	14.610	5.2192	-8.9943	0.24237	-15.602	-23.397
COSMOS/M	$\bar{\delta}_x$	-22.928	-11.442	13.390	8.0140	55.125	55.089
	$\bar{\delta}_y$	-145.82	3.3617	-145.33	3.3512	-61.293	-41.976
	$\bar{\delta}_z$	13.652	5.0874	-8.3732	0.26073	-14.998	-22.467

Quadro 4.2 - Deslocamentos num conjunto de pontos da consola curta com secção em T.

Por forma a melhor visualizar o efeito da flexão-torção-corte da consola, apresenta-se na figura 4.4, para o caso da aproximação 1, uma perspectiva da sua deformada com ponto de vista (-10; 1; 20). A malha aí traçada é apenas utilizada para auxiliar a visualização do modo de deformação da peça não correspondendo a qualquer discretização da estrutura.

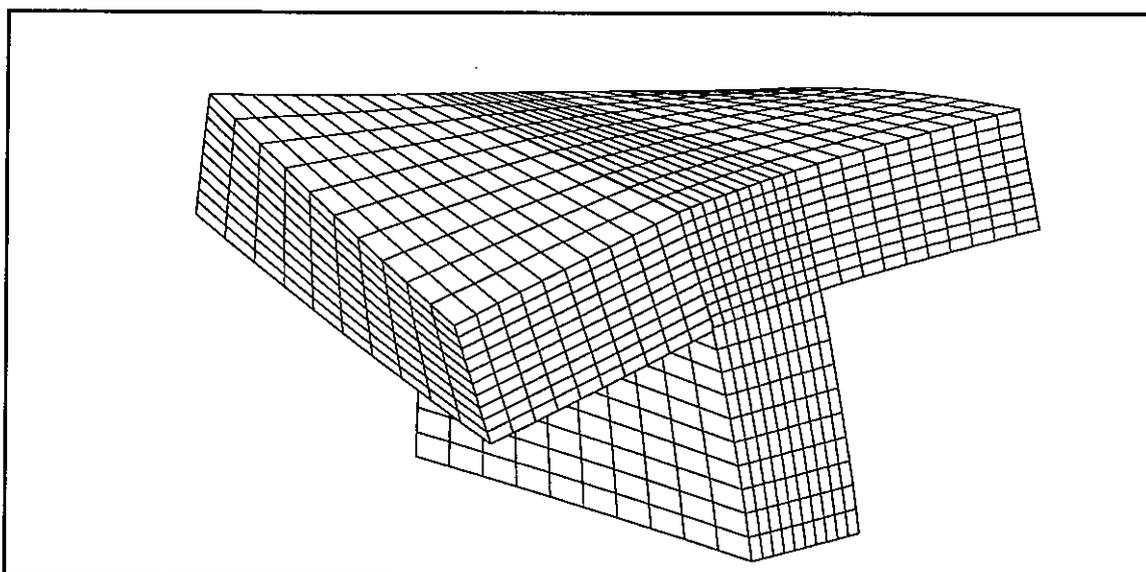


Figura 4.4 - Deformada da consola curta com secção em T quando submetida a uma acção combinada de flexão, torção e corte; ponto de vista em (-10; 1; 20).

O andamento dos campos de tensões nas diferentes soluções é analisado com base nos valores do campo de tensões nos pontos **G** e **H** representados na figura 4.2. No quadro 4.3 apresentam-se os valores das tensões normalizadas na forma:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{p} \quad .$$

Ao contrário do que acontecia com os deslocamentos apresentados no quadro 4.2, as tensões nos pontos **G** e **H** já apresentam grandes variações de modelo para modelo. Assim, pode considerar-se que, em termos genéricos, os campos de tensões obtidos a partir das aproximações 1 e 2 apresentam o mesmo tipo de andamento enquanto que, o campo de tensões obtido a partir do programa COSMOS/M, apresenta um comportamento substancialmente diferente.

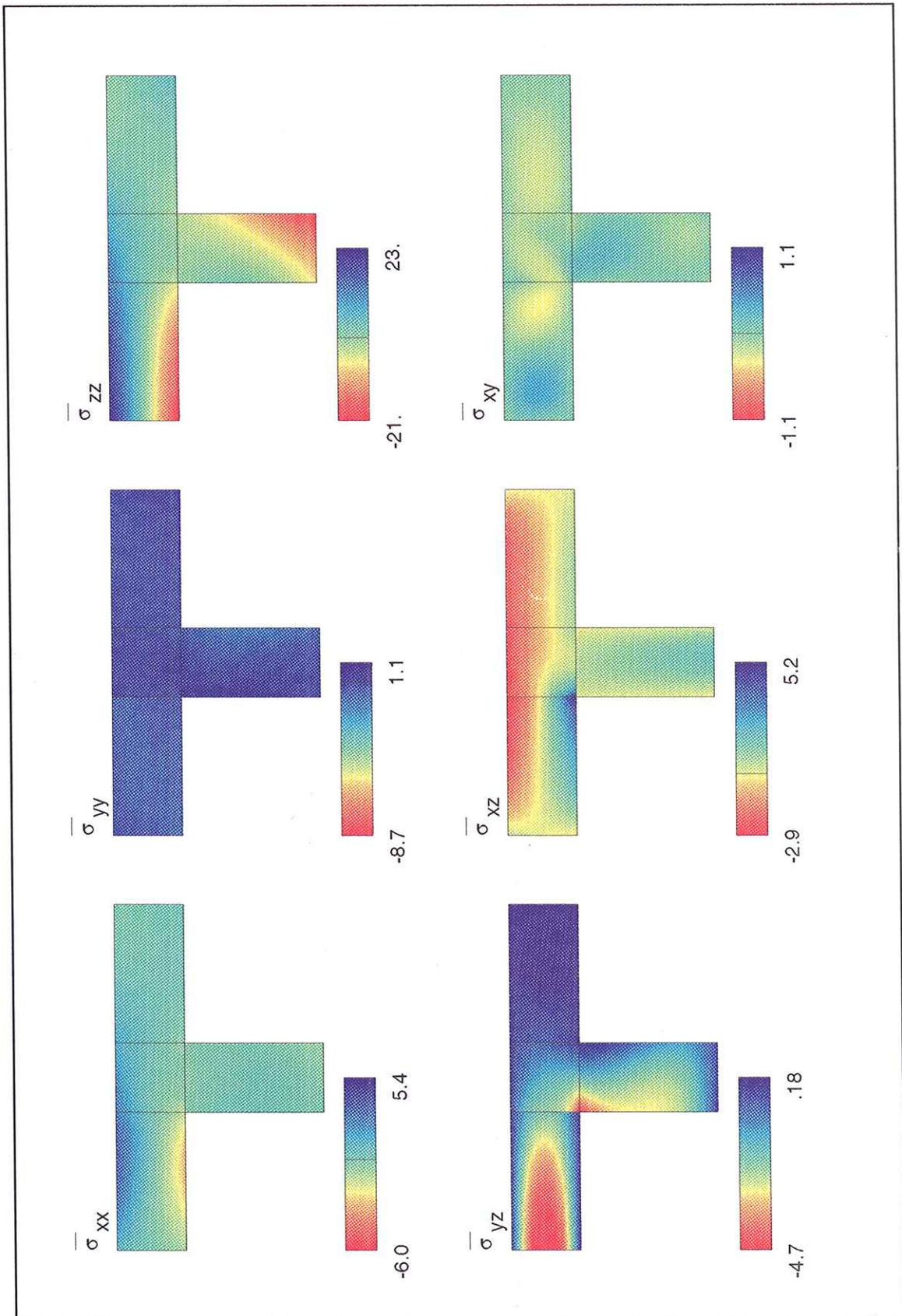


Figura 4.5 - Tensões na secção de encastramento da consola com secção em T sujeita a acção combinada de flexão, torção e corte.

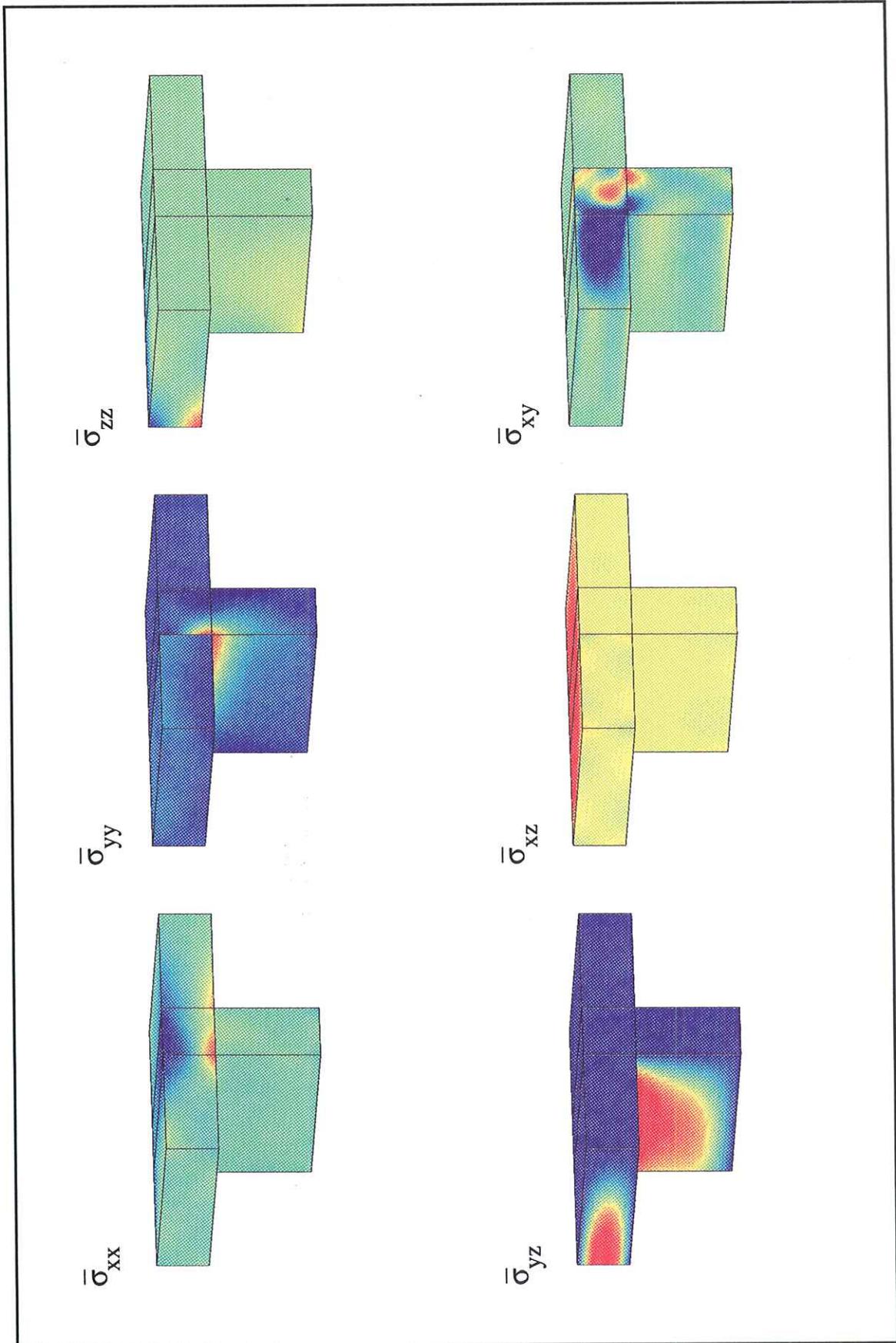


Figura 4.6 - Tensões na consola curta com secção em T sujeita a uma acção combinada de flexão, torção e corte; perspectiva com ponto de vista em $(-10; 1; 20)$.

Verifica-se que um aumento no número de funções de interpolação no modelo EG faz com que se observe um aumento da tensão normal σ_{zz} , a tensão com maior amplitude nos pontos considerados. Em contrapartida, a solução de elementos finitos de compatibilidade apresenta um valor bastante menor para esta tensão.

Analisando o comportamento das restantes tensões verifica-se que nas aproximações referentes a modelos estáticos apresentam valores bastantes reduzidos procurando respeitar as condições de equilíbrio na fronteira. A aproximação obtida pelo programa COSMOS/M apresenta valores para estas tensões que nada têm a ver com a satisfação das condições de fronteira estáticas, mas sim com um efeito de Poisson relativamente à tensão σ_{zz} .

Ponto		Aprox. 1	Aprox. 2	COSMOS/M
G	$\bar{\sigma}_{xx}$	0.95171	1.4961	6.4394
	$\bar{\sigma}_{yy}$	-0.03468	0.57782	6.4394
	$\bar{\sigma}_{zz}$	22.587	33.680	19.318
	$\bar{\sigma}_{yz}$	0.0084779	0.023482	-7.6515
	$\bar{\sigma}_{xz}$	0.39880	0.33190	-0.14109
	$\bar{\sigma}_{xy}$	-0.069311	-0.037359	0.00000
H	$\bar{\sigma}_{xx}$	-0.86621	-1.2137	-6.0330
	$\bar{\sigma}_{yy}$	-0.92805	-1.3266	-6.0330
	$\bar{\sigma}_{zz}$	-20.675	-30.054	-18.099
	$\bar{\sigma}_{yz}$	-0.0084779	-0.023482	-7.5656
	$\bar{\sigma}_{xz}$	-0.38738	-0.25626	0.075920
	$\bar{\sigma}_{xy}$	0.069311	0.037359	0.00000

Quadro 4.3 - Tensões num conjunto de pontos da consola curta com secção em T.

Na figura 4.5 apresentam-se diagramas de tensões na secção de encastramento da consola para o caso da aproximação 1. A análise da distribuição das tensões normais, σ_{zz} , nesta secção demonstra a grande influência do modo de torção na distribuição das tensões normais na peça.

Na figura 4.6 apresenta-se uma perspectiva da consola, com o ponto de vista colocado em $(-10; -1; 20)$, onde estão assinaladas as distribuições das diferentes tensões obtidas a partir da aproximação 1. As escalas de côr adoptadas nesta representação são idênticas às definidas na figura 4.5. Da observação dos diagramas correspondentes às tensões de corte nota-se, como seria de esperar, a presença de uma concentração de tensões na ligação da alma ao banzo carregado. As figuras 4.4, 4.5 e 4.6 foram obtidas utilizando as rotinas gráficas Janela³³.

Anexo A4.1

Aplicação do elemento prismático de 16 nós ao modelo EG

A definição do elemento prismático de 16 nós representado na figura A4.1.1 é feita através da geração de um prisma por meio de uma translação do elemento rectangular de 8 nós segundo o eixo $z \equiv x_3$.

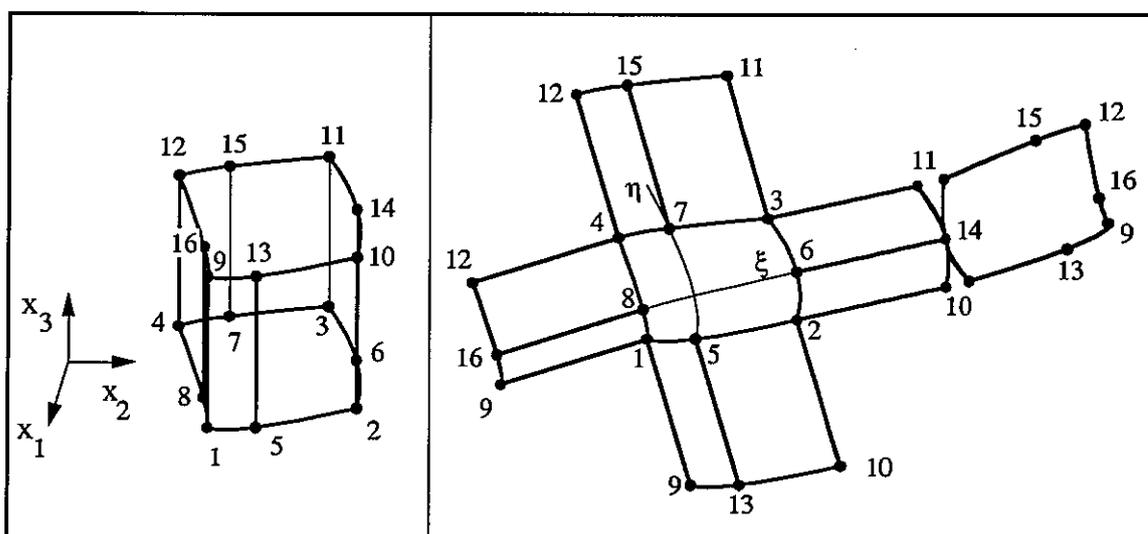


Figura A4.1.1 - Elemento finito prismático de 16 nós.

Estabelece-se assim uma mudança de coordenadas a qual pode ser expressa na forma,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^8 \Psi_i(\xi, \eta) x_{1,i} \\ \sum_{i=1}^8 \Psi_i(\xi, \eta) x_{2,i} \\ \sum_{j=1}^2 Z_j(\zeta) x_{3,j} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A4.1.1})$$

em que as funções Ψ_i são as funções de forma do elemento rectangular de 8 nós, apresentadas no anexo A3.1, e

$$Z_1(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta), \quad Z_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta).$$

Os valores de, $x_{1,i}$, e de, $x_{2,i}$, são as coordenadas dos nós da base do prisma e, $x_{3,1}$ e $x_{3,2}$, as cotas da base e do topo do prisma, respectivamente.

Se, analogamente ao que foi feito no anexo A3.1, se desenvolver a expressão (A4.1.1), facilmente se verifica que esta mudança de referencial pode ser expressa na forma,

$$x_1 = \alpha_1^{00} + \alpha_1^{10} \xi + \alpha_1^{01} \eta + \alpha_1^{20} \xi^2 + \alpha_1^{11} \xi \eta + \alpha_1^{02} \eta^2 + \alpha_1^{21} \xi^2 \eta + \alpha_1^{12} \xi \eta^2,$$

$$x_2 = \alpha_2^{00} + \alpha_2^{10} \xi + \alpha_2^{01} \eta + \alpha_2^{20} \xi^2 + \alpha_2^{11} \xi \eta + \alpha_2^{02} \eta^2 + \alpha_2^{21} \xi^2 \eta + \alpha_2^{12} \xi \eta^2,$$

$$x_3 = \gamma_0 + \gamma_1 \zeta, \quad (\text{A4.1.2})$$

em que os valores dos parâmetros, α_k^{ij} , são iguais aos definidos para o elemento rectangular de 8 nós e,

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} (x_{3,1} + x_{3,2}), \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} (x_{3,2} - x_{3,1}) \quad .$$

Partindo desta transformação de coordenadas, é possível exprimir no referencial local os operadores diferenciais definidos no referencial global. Esta relação é expressa na forma,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A4.1.3})$$

onde,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad (\text{A4.1.4})$$

representa a matriz jacobiana da transformação de coordenadas. Os termos presentes nesta matriz podem ser obtidos a partir da relação (A4.1.2),

$$\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \xi} = (\alpha_k^{10} + \alpha_k^{11} \eta + \alpha_k^{12} \eta^2) + 2 (\alpha_k^{20} + \alpha_k^{21} \eta) \xi \quad \text{com } k=1,2 \quad ,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \xi} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \eta} = (\alpha_k^{01} + \alpha_k^{11} \xi + \alpha_k^{21} \xi^2) + 2 (\alpha_k^{02} + \alpha_k^{12} \xi) \eta \quad \text{com } k=1,2 \quad ,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \eta} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{com } k=1,2 \quad ,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \zeta} = \gamma_1 \quad ,$$

sendo o Jacobiano desta transformação dado por,

$$|J| = [J_{00} + J_{10} \xi + J_{01} \eta + J_{20} \xi^2 + J_{11} \xi \eta + J_{02} \eta^2 + J_{30} \xi^3 + J_{21} \xi^2 \eta + J_{12} \xi \eta^2 + J_{03} \eta^3 + J_{22} \xi^2 \eta^2] \gamma_1 \quad , \quad (\text{A4.1.5})$$

em que os termos J_{ik} correspondem aos já definidos para o elemento rectangular de 8 nós.

Com base nesta transformação de coordenadas, é possível transformar os integrais definidos no referencial global em integrais referidos ao referencial local,

$$\begin{aligned} I &= \int_V \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \, dV = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(\xi, \eta, \zeta), \mathbf{x}_2(\xi, \eta, \zeta), \mathbf{x}_3(\xi, \eta, \zeta)) |J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad , \quad (\text{A4.1.6}) \end{aligned}$$

bem como obter a definição do operador diferencial de equilíbrio, \mathbf{D} , escrito no referencial local,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{|J|} \mathbf{D}' \quad , \quad (\text{A4.1.7})$$

em que:

$$\begin{aligned}
 D' = & \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \cdot & -\frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \cdot \end{bmatrix} \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \xi} - \\
 & \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi} \\ \cdot & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \cdot \end{bmatrix} \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \eta} + \\
 & + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{|J|}{\gamma_1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{|J|}{\gamma_1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{|J|}{\gamma_1} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (A4.1.8)
 \end{aligned}$$

Convém ainda definir os vários operadores relativos à fronteira do elemento. Para tal considere-se a fronteira definida em seis superfícies distintas, sendo:

- S_I - superfície definida pelos nós 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4 e 8;
- S_{II} - superfície definida pelos nós 9, 13, 10, 14, 11, 15, 12 e 16;
- S_{III} - superfície definida pelos nós 1, 5, 2, 10, 13 e 9;
- S_{IV} - superfície definida pelos nós 2, 6, 3, 11, 14 e 10;
- S_V - superfície definida pelos nós 3, 7, 4, 12, 15 e 11;
- S_{VI} - superfície definida pelos nós 4, 8, 1, 9, 16 e 12.

As normais exteriores a estes troços são definidas a partir de,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{n}_{x1} \\ \mathbf{n}_{x2} \\ \mathbf{n}_{x3} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} |\mathbf{J}| \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_\xi \\ \mathbf{n}_\eta \\ \mathbf{n}_\zeta \end{Bmatrix},$$

tomando os seguintes valores:

$$\mathbf{N}_I = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ - \frac{|\mathbf{J}|}{\gamma_1} \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_{II} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \frac{|\mathbf{J}|}{\gamma_1} \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_{III} = \begin{Bmatrix} (\alpha_2^{10} - \alpha_2^{11} + \alpha_2^{12}) + 2(\alpha_2^{20} - \alpha_2^{21}) \xi \\ - (\alpha_1^{10} - \alpha_1^{11} + \alpha_1^{12}) - 2(\alpha_1^{20} - \alpha_1^{21}) \xi \\ \cdot \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_{IV} = \begin{Bmatrix} (\alpha_2^{01} + \alpha_2^{11} + \alpha_2^{21}) + 2(\alpha_2^{02} + \alpha_2^{12}) \eta \\ - (\alpha_1^{01} + \alpha_1^{11} + \alpha_1^{21}) - 2(\alpha_1^{02} + \alpha_1^{12}) \eta \\ \cdot \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_V = \begin{Bmatrix} \cdot \\ - (\alpha_2^{10} + \alpha_2^{11} + \alpha_2^{12}) - 2(\alpha_2^{20} + \alpha_2^{21}) \xi \\ (\alpha_1^{10} + \alpha_1^{11} + \alpha_1^{12}) + 2(\alpha_1^{20} + \alpha_1^{21}) \xi \\ \cdot \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{N}_{VI} = \left\{ \begin{array}{l} - (\alpha_2^{01} - \alpha_2^{11} + \alpha_2^{21}) - 2 (\alpha_2^{02} - \alpha_2^{12}) \eta \\ (\alpha_1^{01} - \alpha_1^{11} + \alpha_1^{21}) + 2 (\alpha_1^{02} - \alpha_1^{12}) \eta \end{array} \right\}.$$

A integração de uma função ao longo de cada uma das superfícies de fronteira pode ser expressa, em termos das coordenadas locais, na forma seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_I &= \int_{S_I} \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) \, dS_I = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(x_1(\xi, \eta, -1), x_2(\xi, \eta, -1), x_3(\xi, \eta, -1)) |N_I| \, d\xi \, d\eta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{II} &= \int_{S_{II}} \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) \, dS_{II} = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(x_1(\xi, \eta, 1), x_2(\xi, \eta, 1), x_3(\xi, \eta, 1)) |N_{II}| \, d\xi \, d\eta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{III} &= \int_{S_{III}} \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) \, dS_{III} = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(x_1(\xi, -1, \zeta), x_2(\xi, -1, \zeta), x_3(\xi, -1, \zeta)) |N_{III}| \, d\xi \, d\zeta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{IV} &= \int_{S_{IV}} \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) \, dS_{IV} = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(x_1(1, \eta, \zeta), x_2(1, \eta, \zeta), x_3(1, \eta, \zeta)) |N_{IV}| \, d\eta \, d\zeta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_V &= \int_{S_V} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \, dS_V = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(\xi, 1, \zeta), \mathbf{x}_2(\xi, 1, \zeta), \mathbf{x}_3(\xi, 1, \zeta)) |N_V| \, d\xi \, d\zeta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{VI} &= \int_{S_{VI}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \, dS_{VI} = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{x}_1(-1, \eta, \zeta), \mathbf{x}_2(-1, \eta, \zeta), \mathbf{x}_3(-1, \eta, \zeta)) |N_{VI}| \, d\eta \, d\zeta ; \end{aligned}$$

Tendo em conta os resultados apresentados, é possível reformular os vários operadores presentes no sistema governativo do modelo EG em termos do elemento mestre. Assim, as definições apresentadas para os operadores presentes no sistema governativo, (2.27), podem ser agora expressas na seguinte forma:

Integrais no volume,

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{S}^t \mathbf{f} \mathbf{S} \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{S}^t \mathbf{f} \mathbf{S} |J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{A} = \int_V (\mathbf{D}\mathbf{S})^t \mathbf{U} \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{D}'\mathbf{S})^t \mathbf{U} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$v_\theta = \int_V \mathbf{S}^t \mathbf{f} s_\theta \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{S}^t \mathbf{f} s_\theta |J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$v_0 = \int_V \mathbf{S}^t \mathbf{f} s_0 \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{S}^t \mathbf{f} s_0 |J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{U}^t \mathbf{b} \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{U}^t \mathbf{b} |J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{R}_0 = \int_V \mathbf{U}^t \mathbf{D} s_0 \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{U}^t (\mathbf{D}' s_0) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta ,$$

Integrais na superfície de fronteira **I**,

$$\mathbf{B} = \int_{\mathbf{S}_I} \mathbf{N} \mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, d\mathbf{S}_I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_I \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\xi \, d\eta ,$$

$$\mathbf{Q}_* = \int_{\mathbf{S}_I} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, d\mathbf{S}_I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* |\mathbf{N}_I| \, d\xi \, d\eta ,$$

$$\mathbf{Q}_0 = \int_{\mathbf{S}_I} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} \, s_0 \, d\mathbf{S}_I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_I s_0 \, d\xi \, d\eta ,$$

$$\mathbf{v}_* = \int_{\mathbf{S}_I} (\mathbf{N} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\mathbf{S}_I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_I \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\xi \, d\eta ;$$

Integrais na superfície de fronteira **II**,

$$\mathbf{B} = \int_{\mathbf{S}_{II}} \mathbf{N} \mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, d\mathbf{S}_{II} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{II} \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\xi \, d\eta ,$$

$$\mathbf{Q}_* = \int_{\mathbf{S}_{II}} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, d\mathbf{S}_{II} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* |\mathbf{N}_{II}| \, d\xi \, d\eta ,$$

$$\mathbf{Q}_0 = \int_{\mathbf{S}_{II}} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} \, s_0 \, d\mathbf{S}_{II} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_{II} s_0 \, d\xi \, d\eta ,$$

$$\mathbf{v}_* = \int_{\mathbf{S}_{II}} (\mathbf{N} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\mathbf{S}_{II} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{II} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\xi \, d\eta ;$$

Integrais na superfície de fronteira **III**,

$$\mathbf{B} = \int_{\mathbf{S}_{III}} \mathbf{N} \mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, d\mathbf{S}_{III} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{III} \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\xi \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{Q}_* = \int_{\mathbf{S}_{III}} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, d\mathbf{S}_{III} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* |\mathbf{N}_{III}| \, d\xi \, d\zeta ,$$

$$Q_0 = \int_{S_{III}} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} s_0 \, dS_{III} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_{III} s_0 \, d\xi \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{v}_* = \int_{S_{III}} (\mathbf{N}\mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, dS_{III} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{III} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\xi \, d\zeta ;$$

Integrais na superfície de fronteira IV,

$$\mathbf{B} = \int_{S_{IV}} \mathbf{N}\mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, dS_{IV} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{IV} \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$Q_* = \int_{S_{IV}} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, dS_{IV} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* | \mathbf{N}_{IV} | \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$Q_0 = \int_{S_{IV}} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} s_0 \, dS_{IV} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_{IV} s_0 \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{v}_* = \int_{S_{IV}} (\mathbf{N}\mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, dS_{IV} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{IV} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\eta \, d\zeta ;$$

Integrais na superfície de fronteira V,

$$\mathbf{B} = \int_{S_V} \mathbf{N}\mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, dS_V = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_V \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\xi \, d\zeta ,$$

$$Q_* = \int_{S_V} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, dS_V = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* | \mathbf{N}_V | \, d\xi \, d\zeta ,$$

$$Q_0 = \int_{S_V} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} s_0 \, dS_V = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_V s_0 \, d\xi \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{v}_* = \int_{S_V} (\mathbf{N}\mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, dS_V = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_V \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\xi \, d\zeta ;$$

Integrais na superfície de fronteira VI,

$$\mathbf{B} = \int_{\mathbf{S}_{VI}} \mathbf{N} \mathbf{S}^t \mathbf{Z} \, d\mathbf{S}_{VI} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{VI} \mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{Q}_* = \int_{\mathbf{S}_{VI}} \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* \, d\mathbf{S}_{VI} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{t}_* |\mathbf{N}_{VI}| \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{Q}_0 = \int_{\mathbf{S}_{VI}} \mathbf{Z}^t \mathbf{N} \, s_0 \, d\mathbf{S}_{VI} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{Z}^t \mathbf{N}_{VI} s_0 \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$\mathbf{v}_* = \int_{\mathbf{S}_{VI}} (\mathbf{N} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\mathbf{S}_{VI} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{VI} \mathbf{S})^t \mathbf{u}_* \, d\eta \, d\zeta .$$

Saliente-se o facto de grande número dos valores expressos nos integrais acima definidos tomarem valores nulos quando se utilizam polinómios de Legendre como funções de interpolação.

5 Análise de Peças Laminares

No presente trabalho e de acordo com o Vocabulário de Teoria das Estruturas³⁵, entende-se como peça laminar um corpo "em que uma das dimensões é muito menor do que as outras duas". Geometricamente, uma peça laminar pode ser definida por meio de uma superfície média a que se associa, ponto a ponto, uma espessura, a qual corresponde à menor dimensão da peça. Assim, a geometria de uma peça laminar pode ser definida por meio da expressão paramétrica da superfície média,

$$x = f(\alpha, \beta) , \quad y = g(\alpha, \beta) , \quad z = h(\alpha, \beta) ,$$

e da espessura,

$$\tau = e(\alpha, \beta) ,$$

em que α e β representam os parâmetros definidores da superfície e x , y e z um sistema cartesiano de coordenadas.

Esta definição é perfeitamente genérica, abrangendo peças laminares curvas, como as cascas e as membranas, e peças laminares planas, como as lajes e as placas. A definição das peças planas pode ser simplificada, passando os parâmetros de definição da superfície α e β a coincidir com duas das coordenadas de referência, x e y por exemplo, sendo a terceira coordenada constante, $z=0$, restando a necessidade de descrever a

variação da espessura na forma:

$$\tau = \tau(x, y) .$$

Centrando a atenção no caso das peças laminares planas, convém desde já introduzir um conjunto de notações que permita uma melhor descrição deste tipo de estruturas. Assim considere-se que a peça laminar ocupa um volume, V , ao qual está associada uma superfície média, \hat{V} , definida no plano (x, y) , perpendicular ao terceiro eixo coordenado, z . A fronteira da peça laminar pode assim ser dividida em duas zonas distintas, uma que corresponda às superfícies que interceptam z , Γ^+ e Γ^- , consoante a componente segundo z da sua normal exterior seja positiva ou negativa, respectivamente, e a restante superfície de fronteira necessariamente paralela a z , Γ^z . Sendo a espessura da peça definida por meio de $\tau(x, y) = \tau^+(x, y) - \tau^-(x, y)$, as fronteiras que interceptam z são descritas na forma:

$$\Gamma^+ : z = \tau^+(x, y) ; \quad \Gamma^- : z = \tau^-(x, y).$$

5.1 - Condições de compatibilidade

Nos problemas que envolvem peças laminares é vantajoso simplificar o modelo de comportamento das peças na direcção da espessura, por forma a que, com poupança de meios de cálculo, se consiga uma boa definição do comportamento segundo as direcções de maior desenvolvimento da peça. Assim, considerando as definições atrás apresentadas, o campo de deslocamentos na peça laminar plana pode ser aproximado na forma,

$$u(x, y, z) = \sum_{k=0}^n [\hat{U}_k(z) \hat{u}_k(x, y)] , \quad (5.1)$$

em que a matriz,

$$\hat{U}_k = \begin{bmatrix} \frac{z^k}{k!} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{z^k}{k!} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \end{bmatrix} \text{ para } k \geq 1, \quad (5.2)$$

reúne as funções de aproximação dos deslocamentos ao longo da coordenada z e o vector,

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{array} \right\}_k \quad \text{para } k \geq 1, \quad (5.3)$$

agrupa os respectivos pesos. Estes pesos são funções das coordenadas de cada ponto no plano médio da estrutura.

A aproximação definida por (5.1) e (5.2) é análoga às efectuadas por Barboni³, Chomkwah¹⁰ e Tseng⁵⁵, dando origem a formulações genericamente designadas como teorias de ordem superior e bastante utilizadas na análise de estruturas laminares de material compósito. Refiram-se ainda os trabalhos de Ciarlet⁹ e de Raoult⁴⁵ nos quais, recorrendo a escalas apropriadas, o problema tridimensional é decomposto numa sequência recursiva de problemas planos. Contudo, estas formulações baseiam-se na expansão dos campos de tensões e de deslocamentos em séries de potências da espessura, τ , e não da ordenada correspondente, z .

Tendo em conta a interpolação dos deslocamentos, (5.1), bem como a equação de compatibilidade definida para as peças tridimensionais, (4.6), é possível definir um conjunto de deformações generalizadas, \mathbf{e}_k , tais que,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{k=0}^n [\mathbf{E}_k(z) \mathbf{e}_k(x,y)] + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}}, \quad (5.4)$$

em que,

$$\mathbf{e}_k = \left\{ \begin{array}{c} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{array} \right\}_k, \quad \mathbf{E}_k = \begin{bmatrix} \frac{z^k}{k!} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{z^k}{k!} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{z^{k-2}}{(k-2)!} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{z^k}{k!} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

e o vector ε_θ agrupa as deformações impostas devidas, por exemplo, à retracção ou a variações de temperatura.

Esta definição para as deformações generalizadas, (5.4), permite escrever a equação de compatibilidade, (4.6), na forma,

$$e_k = \hat{D}^* \hat{u}_k + e_{\theta k} \quad \text{em } \hat{V}, \quad (5.6)$$

em que,

$$\hat{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{1} \\ \cdot & \mathbf{1} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \mathbf{1} & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

representa o novo operador diferencial de compatibilidade e o vector $e_{\theta k}$ agrupa as deformações generalizadas de ordem k associadas às deformações impostas, ε_θ , tais que:

$$\varepsilon_\theta = - \sum_{k=0}^n [E_k(z) e_{\theta k}(x,y)] \quad \text{em } \hat{V}. \quad (5.8)$$

Decompondo o operador diferencial de compatibilidade correspondente às peças tridimensionais, D^* , em três parcelas,

$$D^* = N_x^t \frac{\partial}{\partial x} + N_y^t \frac{\partial}{\partial y} + N_z^t \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.9)$$

em que,

$$N_x = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot \end{bmatrix}, \quad N_y = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} \\ \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot \end{bmatrix}, \quad N_z = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

verifica-se que o operador diferencial de compatibilidade, \hat{D}^* , pode ser definido como,

$$\hat{D}^* = N_x^t \frac{\partial}{\partial x} + N_y^t \frac{\partial}{\partial y} + N_z^t. \quad (5.11)$$

Tendo em conta as definições apresentadas para os operadores diferenciais de compatibilidade, \mathbf{D}^* e $\hat{\mathbf{D}}^*$, e para as matrizes de compatibilidade, $\hat{\mathbf{U}}_k$ e \mathbf{E}_k , conclui-se que estes operadores se relacionam da seguinte forma:

$$\mathbf{D}^* \hat{\mathbf{U}}_k = \mathbf{N}_x^t \hat{\mathbf{U}}_k \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{N}_y^t \hat{\mathbf{U}}_k \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{N}_z^t \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_k}{\partial z} = \mathbf{E}_k \hat{\mathbf{D}}^* . \quad (5.12)$$

Quanto à condição de fronteira cinemática, (4.7), deve ter-se em conta a subdivisão efectuada nessa fronteira, $\Gamma_u = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^- \cup \Gamma_u^z$. Assim ao longo de Γ_u^+ e de Γ_u^- há que respeitar as seguintes condições,

$$\mathbf{u}_* = \sum_{k=0}^n [\hat{\mathbf{U}}_k(\tau^+) \hat{\mathbf{u}}_k(x,y)] \text{ em } \Gamma_u^+ , \quad (5.13a)$$

$$\mathbf{u}_* = \sum_{k=0}^n [\hat{\mathbf{U}}_k(\tau^-) \hat{\mathbf{u}}_k(x,y)] \text{ em } \Gamma_u^- , \quad (5.13b)$$

enquanto que ao longo de Γ_u^z as condições de fronteira devem ser impostas ordem a ordem, isto é,

$$\mathbf{u}_{*k} = \hat{\mathbf{u}}_k(x,y) \text{ em } \omega_u , \quad (5.14)$$

representando ω_u a fronteira cinemática do plano médio da estrutura, ou seja,

$$\omega_u = \hat{\mathbf{V}} \cap \Gamma_u^z .$$

5.2 - Condições de equilíbrio

Em consequência da aproximação feita para os deslocamentos, (5.1), a verificação do equilíbrio local, (4.4), deve agora ser feita de uma forma ponderada em que as funções de peso são as funções de aproximação do campo de deslocamentos. Assim, a equação

de equilíbrio toma a forma,

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \hat{U}_k^t(z) (\mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dz = \mathbf{0} \quad \text{em } \hat{V}, \quad (5.15)$$

sendo \hat{V} a superfície média da peça e sendo as coordenadas em z da superfície inferior e superior da peça definidas respectivamente por $\tau^-(x,y)$ e $\tau^+(x,y)$. Desta imposição da condição de equilíbrio de uma forma ponderada resulta a definição da resultante de ordem k das forças de domínio,

$$\hat{\mathbf{b}}_k = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \hat{U}_k^t(z) \mathbf{b} dz, \quad (5.16)$$

dual dos parâmetros de deslocamento, $\hat{\mathbf{u}}_k$, visto verificar a relação:

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \mathbf{b}^t \mathbf{u} dz = \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{b}}_k^t \hat{\mathbf{u}}_k.$$

Tendo em conta que o operador diferencial de equilíbrio \mathbf{D} é adjunto de \mathbf{D}^* , (3.4), e que se tratam de operadores que apenas envolvem derivadas de ordem ímpar, \mathbf{D} pode ser decomposto na forma,

$$\mathbf{D} = \mathbf{N}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{N}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{N}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.17)$$

representando \mathbf{N}_x , \mathbf{N}_y e \mathbf{N}_z as matrizes definidas em (5.10).

Introduzindo a decomposição (5.17) na equação de equilíbrio (5.15), tendo em conta a definição (5.16), obtém-se a seguinte relação:

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \hat{U}_k^t(z) \left(\mathbf{N}_x \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} + \mathbf{N}_y \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial y} + \mathbf{N}_z \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} \right) dz + \hat{\mathbf{b}}_k = \mathbf{0} \quad \text{em } \hat{V}. \quad (5.18)$$

Se na expressão (5.18) for eliminado o termo $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z}$ por meio de uma integração por

partes, verifica-se que a equação de equilíbrio pode ser escrita na forma,

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \left(\hat{U}_k^t N_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{U}_k^t N_y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \hat{U}_k^t}{\partial z} N_z \right) \sigma dz + \left[\hat{U}_k^t N_z \sigma \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \hat{b}_k = 0.$$

Tendo em conta o resultado (5.12) e a relação existente entre operadores diferenciais adjuntos, (3.4), é agora possível escrever a equação de equilíbrio local na forma,

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \hat{D} E_k^t \sigma dz + \left[\hat{U}_k^t N_z \sigma \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \hat{b}_k = 0, \quad (5.19)$$

em que \hat{D} representa o operador diferencial de equilíbrio.

Considerando a hipótese da peça laminar poder apresentar espessura variável, a equação (5.19) toma a forma,

$$\hat{D} s_k + \left[\hat{U}_k^t \frac{N}{n_z} \sigma \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \hat{b}_k = 0 \quad \text{em } \hat{V}, \quad (5.20)$$

em que N representa a matriz das componentes da normal à fronteira definida em (4.3), n_z a componente dessa normal segundo a direcção z e o vector,

$$s_k = \left\{ \begin{array}{c} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ s_{yz} \\ s_{xz} \\ s_{xy} \end{array} \right\}_k = \int_{\tau^-}^{\tau^+} E_k^t \sigma dz \quad \text{em } \hat{V}, \quad (5.21)$$

agrupa os esforços generalizados de ordem k . A dedução da expressão (5.20) é feita recorrendo à regra de Leibnitz para a derivação de integrais, encontrando-se desenvolvida no anexo A5.1.

Os esforços generalizados definidos em (5.21), são duais das deformações generalizadas de ordem k , e_k , pois verificam a relação:

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \sigma^t (\varepsilon - \varepsilon_\theta) dz = \sum_{k=0}^n s_k^t e_k.$$

Ao impor as condições de fronteira estáticas, deve ter-se em conta a subdivisão efectuada na fronteira, $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^+ \cup \Gamma_\sigma^- \cup \Gamma_\sigma^Z$. Assim, ao longo de Γ_σ^+ e de Γ_σ^- a equação de equilíbrio toma a forma,

$$N \sigma = t_*(\tau^+) \text{ em } \Gamma_\sigma^+, \quad (5.22a)$$

$$N \sigma = t_*(\tau^-) \text{ em } \Gamma_\sigma^-, \quad (5.22b)$$

enquanto que ao longo de Γ_σ^Z a condição de equilíbrio na fronteira é imposta ponderadamente utilizando para funções de peso as funções de interpolação dos deslocamentos, \hat{U}_k^t ,

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \hat{U}_k^t N \sigma \, dz = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \hat{U}_k^t t_* \, dz \quad \text{em } \omega_\sigma, \quad (5.23)$$

representando ω_σ a fronteira estática do plano médio da estrutura, $\omega_\sigma = \hat{V} \cap \Gamma_\sigma^Z$. O resultado (5.23) pode ser escrito na forma,

$$\hat{N} s_k = t_{*k}^Z \quad \text{em } \omega_\sigma, \quad (5.24)$$

em que,

$$t_{*k}^Z = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \hat{U}_k^t t_* \, dz,$$

agrupa as resultantes das tracções aplicadas nas faces laterais da peça e

$$\hat{N} = N_x \mathbf{n}_x + N_y \mathbf{n}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{n}_y \\ \cdot & \mathbf{n}_y & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{n}_x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x & \cdot \end{bmatrix},$$

representa a matriz das normais associada ao operador diferencial de equilíbrio, \hat{D} .

Tendo em conta as equações (5.22) e o facto das fronteiras estáticas Γ^+ e Γ^- serem coincidentes, em termos de coordenadas (x,y) , com o plano médio da estrutura, \hat{V} , a

equação de equilíbrio local, (5.20), pode ser escrita na forma,

$$\hat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_k + \mathbf{t}_{*k}^{\sigma+} + \mathbf{t}_{*k}^{\sigma-} + \mathbf{t}_k^{u+} + \mathbf{t}_k^{u-} + \hat{\mathbf{b}}_k = \mathbf{0} \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}}, \quad (5.25)$$

em que:

$$\mathbf{t}_{*k}^{\sigma+} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_z(\tau^+)} \hat{\mathbf{U}}_k^t(\tau^+) \mathbf{t}_{*k}^t(\tau^+) \quad \text{em } \Gamma_{\sigma}^+; \quad (5.26a)$$

$$\mathbf{t}_{*k}^{\sigma-} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_z(\tau^-)} \hat{\mathbf{U}}_k^t(\tau^-) \mathbf{t}_{*k}^t(\tau^-) \quad \text{em } \Gamma_{\sigma}^-; \quad (5.26b)$$

$$\mathbf{t}_k^{u+} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_z(\tau^+)} \hat{\mathbf{U}}_k^t(\tau^+) \mathbf{t}_k^+ \quad \text{em } \Gamma_u^+; \quad (5.26c)$$

$$\mathbf{t}_k^{u-} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_z(\tau^-)} \hat{\mathbf{U}}_k^t(\tau^-) \mathbf{t}_k^- \quad \text{em } \Gamma_u^-. \quad (5.26d)$$

Convém salientar que as tracções ao longo das fronteiras cinemáticas, Γ_u^+ e Γ_u^- , designadas respectivamente por, \mathbf{t}^+ e \mathbf{t}^- , não são *a priori* conhecidas, podendo ser interpoladas.

5.3 - Relações constitutivas

A formulação rigidez das relações constitutivas é expressa no caso tridimensional elástico e linear pela relação (4.8b). Se se tiver em conta a definição dos esforços generalizados, (5.21), e a relação entre as deformações e as deformações generalizadas, (5.4), a relação constitutiva pode ser reformulada agora em termos de variáveis globais,

$$\mathbf{s}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{k}_{ij} \mathbf{e}_j + \mathbf{s}_{\theta i} \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}}, \quad (5.27)$$

em que \mathbf{s}_i é o vector que agrupa os esforços generalizados de ordem i , \mathbf{e}_j é o vector que agrupa as deformações generalizadas de ordem j , sendo

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \mathbf{E}_i^t \mathbf{k} \mathbf{E}_j \, dz, \quad (5.28)$$

a matriz de rigidez que relaciona os esforços generalizados de ordem i com as

deformações generalizadas de ordem j , e

$$s_{\theta i} = \int_{\tau^-}^{\tau^+} E_i^t (\sigma_{\theta} + k \epsilon_{\theta}) dz, \quad (5.29)$$

o vector dos esforços generalizados de ordem i devidos a tensões residuais e a deformações impostas.

5.4 - Equações fundamentais

Partindo da interpolação expressa em (5.1) para o campo de deslocamentos, é possível rescrever as equações de compatibilidade, equilíbrio e de elasticidade das estruturas laminares planas, tomando agora como domínio de estudo o plano médio da estrutura, \hat{V} .

Assim, a condição de compatibilidade local pode ser expressa na forma:

$$e_k = \hat{D}^* \hat{u}_k \quad \text{em } \hat{V}, \quad (5.30)$$

onde os vectores e_k e \hat{u}_k agrupam, respectivamente, as deformações generalizadas e as funções de deslocamento e \hat{D}^* representa o operador diferencial de compatibilidade definido em (5.7).

A condição de compatibilidade ao longo da fronteira cinemática é expressa na forma:

$$u_{*k} = \hat{u}_k(x, y) \quad \text{em } \omega_u. \quad (5.31)$$

As relações que impõem a condição de compatibilidade em termos dos deslocamentos impostos ao longo das fronteiras cinemáticas, cuja projecção no plano (x, y) coincide com o plano médio da estrutura, são expressas na forma,

$$u_*^+ = \sum_{k=0}^n [\hat{U}_k(\tau^+) \hat{u}_k(x, y)] \quad \text{em } \Gamma_u^+, \quad (5.32a)$$

$$u_*^- = \sum_{k=0}^n [\hat{U}_k(\tau^-) \hat{u}_k(x, y)] \quad \text{em } \Gamma_u^-, \quad (5.32b)$$

onde \hat{U}_k representa a matriz que agrupa as funções de aproximação dos deslocamentos

ao longo da espessura da peça e \mathbf{u}_*^- e \mathbf{u}_*^+ os vectores que agrupam os deslocamentos impostos ao longo das fronteiras cinemáticas Γ_u^- e Γ_u^+ , respectivamente.

A relação de equilíbrio local toma a forma,

$$\hat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_k + \mathbf{b}_k + \mathbf{t}_k^u = \mathbf{0} \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}}, \quad (5.33)$$

equação que impõe a relação entre os esforços generalizados, agrupados no vector \mathbf{s}_k , e as resultantes das forças no plano médio devidas a acções estáticas, \mathbf{b}_k , e devidas a acções cinemáticas, \mathbf{t}_k^u . Estas resultantes são definidas respectivamente por,

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{t}_{*k}^{\sigma^+} + \mathbf{t}_{*k}^{\sigma^-} + \hat{\mathbf{b}}_k, \quad (5.34a)$$

$$\mathbf{t}_k^u = \mathbf{t}_k^{u^+} + \mathbf{t}_k^{u^-}. \quad (5.34b)$$

A equação que exprime a condição de equilíbrio ao longo da fronteira estática relaciona os esforços generalizados com as resultantes das tracções aplicadas na fronteira estática:

$$\hat{\mathbf{N}} \mathbf{s}_k = \mathbf{t}_{*k}^z \quad \text{em } \omega_\sigma. \quad (5.35)$$

As relações constitutivas relacionam os esforços generalizados com as deformações generalizadas, podendo ser descritas na forma,

$$\mathbf{s}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{k}_{ij} \mathbf{e}_j + \mathbf{s}_{\theta i} \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}}, \quad (5.36)$$

com \mathbf{k}_{ij} e $\mathbf{s}_{\theta i}$ definidos de acordo com (5.28) e (5.29) respectivamente. Esta relação constitutiva pode ser invertida, sendo escrita como uma relação de flexibilidade,

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{f}_{ij} (\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_{\theta j}) \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}}, \quad (5.37)$$

em que,

$$[\mathbf{f}_{ij}] = [\mathbf{k}_{ij}]^{-1}.$$

O conjunto de relações agora resumidas permite resolver problemas envolvendo peças laminares tendo em conta o seu comportamento tridimensional, mas utilizando modelos

bidimensionais. Este modelo baseia-se na interpolação do campo de deslocamentos ao longo da espessura, (5.1), na interpolação das tracções ao longo da fronteira cinemática, e na integração por partes da equação de equilíbrio na espessura. Como adiante se verá, esta formulação permite encontrar soluções para o comportamento de peças laminares mais gerais do que as habitualmente conseguidas com as teorias clássicas das placas e das lajes, pois permite aumentar a ordem das interpolações ao longo da espessura das peças. Por outro lado exige um menor esforço de cálculo do que as soluções baseadas em formulações tridimensionais puras.

5.5 - Placas

Analise-se em seguida o caso particular das placas tomando apenas o primeiro termo da formulação atrás apresentada. Isolando o termo de ordem 0 obtém-se a seguinte aproximação para o campo de deslocamentos:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{U}}_0(z) \hat{\mathbf{u}}_0(x,y) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x(x,y) \\ \mathbf{u}_y(x,y) \end{Bmatrix}_0 \quad (5.38)$$

Esta aproximação pressupõe que os deslocamentos segundo as direcções do plano médio da placa são constantes ao longo da sua espessura. Quanto aos deslocamentos normais ao plano da peça laminar, não é feita qualquer hipótese sobre o seu comportamento. Em consequência da interpolação, (5.38), para o campo de deslocamentos, e tendo em conta a equação de compatibilidade, (4.6), obtém-se a seguinte definição para as deformações:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_{x0}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{y0}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{x0}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}_{y0}}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

Apenas são referidas as deformações referentes ao plano da placa visto as restantes serem dependentes dos deslocamentos, \mathbf{u}_z , e estes deslocamentos não terem sido alvo de qualquer hipótese simplificativa.

As deformações generalizadas, \mathbf{e}_0 , são definidas de tal modo que,

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{xx} \\ \mathbf{e}_{yy} \\ \mathbf{e}_{xy} \end{Bmatrix}_0 = \mathbf{E}_0 \mathbf{e}_0, \quad (5.40)$$

em que, $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$, representa as deformações impostas e, \mathbf{E}_0 , a matriz de compatibilidade.

A equação de compatibilidade relaciona as deformações generalizadas, \mathbf{e}_0 , com as funções de deslocamento, $\hat{\mathbf{u}}_0$, sendo escrita na forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_{x0}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{y0}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{x0}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{u}_{y0}}{\partial \mathbf{x}} \end{Bmatrix} + \mathbf{e}_{\theta 0} = \\ &= \hat{\mathbf{D}}^* \hat{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{e}_{\theta 0}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

em que,

$$\hat{\mathbf{D}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

representa o operador diferencial de compatibilidade e, $\mathbf{e}_{\theta 0}$, a componente de ordem 0 das deformações impostas definida de acordo com (5.8).

Analisando a equação de compatibilidade, (5.41), observa-se que esta equação corresponde exactamente à utilizada nas placas, isto é, nos problemas de elasticidade plana.

Ao nível das equações de equilíbrio verifica-se que, quando se considera apenas a primeira ordem na expansão do campo de deslocamentos ao longo da espessura, a equação de equilíbrio local toma a forma:

$$\hat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_0 + \mathbf{b}_0 + \mathbf{t}_0^u = \mathbf{0} \quad (5.43)$$

Os esforços generalizados, \mathbf{s}_0 , duais das deformações generalizadas, \mathbf{e}_0 , são definidos como,

$$\mathbf{s}_0 = \left\{ \begin{array}{c} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{array} \right\}_0 = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \mathbf{E}_0^t \boldsymbol{\sigma} dz, \quad (5.44)$$

e o operador diferencial de equilíbrio, $\hat{\mathbf{D}}$, toma a forma:

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

A resultante das forças no plano médio devidas a acções estáticas,

$$\mathbf{b}_0 = \hat{\mathbf{b}}_0 + \mathbf{t}_{*0}^{\sigma^+} + \mathbf{t}_{*0}^{\sigma^-}, \quad (5.46)$$

é obtida somando a parcela correspondente às forças de domínio, $\hat{\mathbf{b}}_0$, com as resultantes das cargas aplicadas sobre as faces que interceptam z :

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \end{array} \right\} dz,$$

$$\mathbf{t}_{*0}^{\sigma^+} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_z(\tau^+)} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{t}_{x*}^+ \\ \mathbf{t}_{y*}^+ \end{array} \right\}, \quad \mathbf{t}_{*0}^{\sigma^-} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_z(\tau^-)} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{t}_{x*}^- \\ \mathbf{t}_{y*}^- \end{array} \right\}.$$

Na equação (5.43) o termo, \mathbf{t}_0^u , representa a resultante das forças no plano médio devidas à imposição de condições de fronteira cinemáticas, definida de acordo com as equações (5.34b), (5.26c) e (5.26d).

Tem interesse verificar que, analogamente ao que sucedia com a equação de

compatibilidade local, a equação de equilíbrio, (5.43), coincide com a equação de equilíbrio local definida para os problemas de elasticidade plana.

No que diz respeito às relações constitutivas, considere-se a definição dada para a matriz de rigidez, \mathbf{k}_0 , (5.28), e tenha-se em conta a definição de \mathbf{E}_0 , (5.40), e da matriz de rigidez, \mathbf{k} , (4.9b), referente ao comportamento isotrópico. Assim, para que se possa estabelecer a relação constitutiva a ser adoptada para este caso particular, será necessário introduzir algumas hipóteses simplificativas acerca da variação das deformações, ϵ_{zz} , γ_{yz} e γ_{xz} ou das tensões, σ_{zz} , σ_{yz} e σ_{xz} ao longo da peça. Se se admitir o anulamento das deformações e uma relação constitutiva homogénea ao longo da espessura, a relação constitutiva toma a forma,

$$\begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix}_0 = \frac{\mathbf{E} \tau}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \cdot \\ \nu & 1-\nu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix}_0 + \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix}_\theta, \quad (5.47)$$

e $\gamma_{zz} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$ e $\gamma_{xz} = 0$.

Convirá realçar que esta relação constitutiva coincide com a habitualmente utilizada nas placas sujeitas a estados planos de deformação, facto que não é de estranhar se se tiver em conta as hipóteses adoptadas acerca do anulamento das deformações definidas na espessura da placa.

Se em vez do anulamento das deformações se impuser o anulamento das tensões, σ_{zz} , σ_{zx} , σ_{zy} , facilmente se conclui que a equação constitutiva, toma a forma,

$$\begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix}_0 = \frac{\mathbf{E}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \cdot \\ \nu & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix}_0 + \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix}_\theta, \quad (5.48)$$

e $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$ e $\sigma_{xz} = 0$,

a qual corresponde à equação constitutiva das placas sujeitas a estados planos de tensão.

Por forma a simplificar a utilização alternativa das relações constitutivas referentes a estados planos de tensão e a estados planos de deformação, define-se um módulo de elasticidade e um coeficiente de Poisson fictícios por forma a que, quando introduzidos na relação constitutiva (5.47), simulem a relação constitutiva (5.48). A definição destes parâmetros fictícios é expressa por:

$$E' = \frac{1 + 2\nu}{(1 + \nu)^2} ; \quad \nu' = \frac{\nu}{1 + \nu} . \quad (5.49)$$

5.6 - Lajes de Reissner-Mindlin

Considere-se agora o segundo termo da formulação atrás apresentada, isto é, o termo de ordem 1, partindo-se da seguinte interpolação para o campo de deslocamentos:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \hat{U}_1(z) \hat{\mathbf{u}}_1(x,y) = \begin{bmatrix} z & . & . \\ . & z & . \\ . & . & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_x(x,y) \\ \mathbf{u}_y(x,y) \\ \mathbf{u}_z(x,y) \end{array} \right\}_1 . \quad (5.50)$$

Em consequência desta aproximação para o campo de deslocamentos, as deformações podem ser definidas em função das deformações generalizadas como,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \mathbf{E}_1 \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_\theta , \quad (5.51)$$

sendo a equação de compatibilidade, (5.6), escrita na forma,

$$\mathbf{e}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{xx} \\ \mathbf{e}_{yy} \\ \mathbf{e}_{yz} \\ \mathbf{e}_{xz} \\ \mathbf{e}_{xy} \end{array} \right\} = \hat{\mathbf{D}}^* \hat{\mathbf{u}}_1(x,y) + \mathbf{e}_{\theta 1} , \quad (5.52)$$

em que o operador diferencial de compatibilidade, $\hat{\mathbf{D}}^*$, e a matriz que define as

deformações generalizadas, \mathbf{E}_1 , podem ser escritas na forma,

$$\hat{\mathbf{D}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \cdot & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 1 & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} z & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & z & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

sendo a componente de ordem 1 das deformações impostas, $\mathbf{e}_{\theta 1}$, definida em (5.8).

Saliente-se que a deformação ϵ_{zz} não está presente na definição das deformações, (5.51), devido ao facto de não ter sido adoptada nenhuma aproximação para a variação do deslocamento \mathbf{u}_z , ao longo da espessura da laje.

Tendo em conta a definição do operador diferencial de compatibilidade, (5.53), a relação (5.52), corresponde à equação de compatibilidade formulada para o caso das lajes espessas de Reissner-Mindlin^{47,31}.

No que diz respeito às equações de equilíbrio, verifica-se que, quando se considera apenas a segunda ordem na expansão do campo de deslocamentos ao longo da espessura, se encontra a seguinte definição para os esforços generalizados,

$$\mathbf{s}_1 = \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{yz} \\ s_{xz} \\ s_{xy} \end{Bmatrix}_1 = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \begin{Bmatrix} z \sigma_{xx} \\ z \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ z \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz. \quad (5.54)$$

Se se tiver em atenção ao significado físico das várias componentes dos esforços generalizados, facilmente se verifica que estas componentes correspondem, respectivamente, ao momento flector segundo x , ao momento flector segundo y , ao esforço de corte segundo y , ao esforço de corte segundo x e ao momento torsor,

definições estas idênticas às formuladas para a laje de Reissner-Mindlin.

Analogamente ao que sucedia com a ausência da deformação ε_{zz} das relações de compatibilidade, verifica-se agora, como era de esperar, a ausência da tensão σ_{zz} nas relações de equilíbrio.

A equação de equilíbrio local, (5.33), toma a forma,

$$\hat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{t}_1^u = \mathbf{0} \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}}, \quad (5.55)$$

em que, o operador diferencial de equilíbrio, $\hat{\mathbf{D}}$, é definido como,

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot & -1 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

e as resultantes das forças no plano médio devidas a acções estáticas, \mathbf{b}_1 , são expressas por,

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}_{*1}^{\sigma^+} + \mathbf{t}_{*1}^{\sigma^-} + \hat{\mathbf{b}}_1, \quad (5.57)$$

em que,

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \begin{Bmatrix} z \mathbf{b}_x \\ z \mathbf{b}_y \\ \mathbf{b}_z \end{Bmatrix} dz,$$

e,

$$\mathbf{t}_{*1}^{\sigma^+} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_z(\tau^+)} \begin{Bmatrix} \tau^+ \mathbf{t}_{x*}^+ \\ \tau^+ \mathbf{t}_{y*}^+ \\ \mathbf{t}_{z*}^+ \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t}_{*1}^{\sigma^-} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_z(\tau^-)} \begin{Bmatrix} \tau^- \mathbf{t}_{x*}^- \\ \tau^- \mathbf{t}_{y*}^- \\ \mathbf{t}_{z*}^- \end{Bmatrix}.$$

Na equação (5.55) o termo, \mathbf{t}_1^u , representa a resultante das forças no plano médio devidas à imposição de condições de fronteira cinemáticas, definida de acordo com as equações (5.34b), (5.26c) e (5.26d).

Analogamente ao que sucedia com as equações de compatibilidade, as equações de equilíbrio desenvolvidas para a peça laminar de ordem 1 coincidem com as equações de equilíbrio utilizadas nas lajes espessas de Reissner-Mindlin.

No que diz respeito às relações constitutivas, considere-se a definição dada para a matriz de rigidez, \mathbf{k}_{11} , (5.28), e tenha-se em conta a definição de \mathbf{E}_1 , (5.53), e da matriz de rigidez, \mathbf{k} , (4.9b), para o caso do comportamento isotrópico. Devido ao facto de tanto a deformação, ε_{zz} , como a tensão, σ_{zz} , terem estado ausentes das definições das relações de compatibilidade e de equilíbrio, é possível introduzir ao nível das relações constitutivas diferentes hipóteses quanto à sua variação ao longo da espessura da peça.

Considerando, numa primeira hipótese, o anulamento da deformação, ε_{zz} , a relação constitutiva toma a forma,

$$\begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{yz} \\ s_{xz} \\ s_{xy} \end{Bmatrix}_1 = \mathbf{k}_{11} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{yz} \\ s_{xz} \\ s_{xy} \end{Bmatrix}_\theta, \quad (5.58)$$

em que,

$$\mathbf{k}_{11} = \begin{bmatrix} (1-\nu) D' & \nu D' & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu D' & (1-\nu) D' & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & G \tau & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & G \tau & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{G \tau^3}{12} \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

$$\text{e } D' = \frac{E \tau^3}{12 (1 + \nu) (1 - 2\nu)} \text{ com } \tau^+ = \frac{\tau}{2} \text{ e } \tau^- = -\frac{\tau}{2} .$$

Saliente-se que esta relação constitutiva não coincide com a utilizada nas lajes espessas de Reissner-Mindlin. Esta diferença deve-se ao facto de, ao se admitir o anulamento da deformação, ε_{zz} , se impor que o deslocamento segundo a direcção da espessura é

constante ao longo da mesma, $u_{z,z} = 0$, imposição esta não assumida na formulação das lajes de Reissner-Mindlin. Se em contrapartida se considerar a hipótese formulada nas lajes de Reissner-Mindlin, a qual consiste na imposição da condição,

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} z \sigma_{zz} dz = 0 ,$$

aliada a uma diminuição da rigidez de corte, então facilmente se verifica que a matriz de rigidez, k_{11} , presente em (5.58) passará a ser escrita na forma,

$$k_{11} = \begin{bmatrix} D & \nu D & . & . & . \\ \nu D & D & . & . & . \\ . & . & \Psi G \tau & . & . \\ . & . & . & \Psi G \tau & . \\ . & . & . & . & \frac{G \tau^3}{12} \end{bmatrix} , \quad (5.60)$$

em que,

$$D = \frac{E \tau^3}{12 (1 - \nu^2)} ,$$

e Ψ representa um factor minorativo da rigidez de corte habitualmente considerado igual a $5/6$. Como seria de esperar, a matriz de rigidez definida por (5.60) coincide com a formulada para as lajes espessas de Reissner-Mindlin. Analogamente ao que sucedia para os estados planos de tensão e de deformação, a utilização de um módulo de elasticidade e de um coeficiente de Poisson fictícios, (5.49), permite passar da definição (5.59) para a definição (5.60), no que diz respeito aos termos de flexão.

5.7 - Modelo EG em peças laminares

A etapa seguinte na análise das peças laminares consiste na aplicação dos modelos estáticos de elementos finitos, formulados no capítulo 2. Esta aplicação será aqui desenvolvida para o modelo EG, podendo ser generalizada para os restantes modelos.

Na aplicação do modelo EG ao estudo das peças laminares, adopta-se uma metodologia em tudo idêntica à seguida no capítulo 2. Assim considera-se o campo de esforços generalizados decomposto nas seguintes parcelas,

$$s_k = s_{ck} + s_{0k} , \quad (5.61)$$

sendo s_{0k} a parcela particular e s_{ck} a parcela complementar tal que

$$s_{ck} = S X_k , \quad (5.62)$$

onde a matriz S agrupa as funções de interpolação e o vector X_k os pesos que lhes estão associados, designados por esforços independentes.

Tendo em conta esta interpolação para os esforços, as equações de equilíbrio no domínio, (5.33), e de equilíbrio na fronteira estática, (5.35), podem ser escritas do seguinte modo:

$$\hat{D} S X_k + \hat{D} s_{0k} + b_k + t_k^u = 0 \quad \text{em } \hat{V} ; \quad (5.63)$$

$$\hat{N} S X_k + \hat{N} s_{0k} = t_{*k}^z \quad \text{em } \omega_\sigma . \quad (5.64)$$

A equação de compatibilidade local (5.30) pode ser satisfeita de uma forma ponderada, em que as funções de peso coincidem com as funções de interpolação de esforços:

$$\int S^t (e_k - \hat{D}^* \hat{u}_k) d\hat{V} = 0 . \quad (5.65)$$

Definindo-se as deformações independentes, v_k , duais dos esforços independentes, X_k , por meio de,

$$v_k = \int S^t e_k d\hat{V} , \quad (5.66)$$

é possível escrever a equação de compatibilidade (5.65) na forma:

$$v_k = \int S^t \hat{D}^* \hat{u}_k d\hat{V} . \quad (5.67)$$

Saliente-se que a definição apresentada para as deformações independentes, (5.66), faz

com que seja satisfeita a condição:

$$\int s_{ck}^t e_k d\hat{V} = X_k^t v_k .$$

Se forem introduzidas em (5.66) as relações constitutivas expressas na forma (5.37) e tendo em conta a interpolação dos esforços (5.61) e (5.62) obtém-se a seguinte relação entre deformações independentes e esforços independentes:

$$v_i = F_{ij} X_j + v_{0i} - v_{\theta i} \quad (5.68)$$

em que

$$F_{ij} = \int S^t f_{ij} S d\hat{V} , \quad (5.69a)$$

$$v_{0i} = \int S^t f_{ij} s_{0j} d\hat{V} , \quad (5.69b)$$

$$v_{\theta i} = \int S^t f_{ij} s_{\theta j} d\hat{V} . \quad (5.69c)$$

Se por outro lado se proceder à integração por partes do segundo membro da equação (5.67), obtém-se a seguinte relação entre as deformações independentes, v_i , e os deslocamentos, \hat{u}_i :

$$v_i = \int (\hat{N}S)^t \hat{u}_i d\omega - \int (\hat{D}S)^t \hat{u}_i d\hat{V} . \quad (5.70)$$

Combinando as relações (5.68) e (5.70) obtém-se para equação de compatibilidade a expressão:

$$F_{ij} X_j + v_{0i} - v_{\theta i} = \int (\hat{N}S)^t \hat{u}_i d\omega - \int (\hat{D}S)^t \hat{u}_i d\hat{V} . \quad (5.71)$$

Considere-se em seguida uma interpolação para os deslocamentos no domínio definida do seguinte modo,

$$\hat{u}_i = U d_i \quad \text{em } \hat{V} , \quad (5.72)$$

onde a matriz U agrupa as funções de interpolação e o vector d_i os pesos que lhes estão associados.

Considere-se ainda uma interpolação independente do campo de deslocamentos, $\hat{\mathbf{u}}_i$, ao longo da fronteira estática, ω_σ . Essa interpolação pode ser escrita na forma,

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{Z} \mathbf{q}_i \quad \text{em } \omega_\sigma, \quad (5.73)$$

onde a matriz \mathbf{Z} agrupa as funções de interpolação e o vector \mathbf{q}_i os pesos que lhes estão associados.

Tendo em conta as interpolações de deslocamentos definidas, a equação de compatibilidade, (5.71), toma a seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{ij} \mathbf{X}_j + \mathbf{A} \mathbf{d}_i - \mathbf{B} \mathbf{q}_i = \mathbf{v}_{*i} + \mathbf{v}\theta_i - \mathbf{v}0_i, \quad (5.74)$$

em que:

$$\mathbf{A} = \int (\hat{\mathbf{D}}\mathbf{S})^t \mathbf{U} \, d\hat{\mathbf{V}}; \quad (5.75a)$$

$$\mathbf{B} = \int (\hat{\mathbf{N}}\mathbf{S})^t \mathbf{Z} \, d\omega_\sigma; \quad (5.75b)$$

$$\mathbf{v}_{*i} = \int (\hat{\mathbf{N}}\mathbf{S})^t \mathbf{u}_{*i} \, d\omega_u. \quad (5.75c)$$

A condição de equilíbrio no domínio, definida por (5.63), depende do valor das tracções resultantes da imposição das condições de fronteira cinemáticas em Γ_u^+ e Γ_u^- . Não sendo conhecido *a priori* o valor destas tracções, torna-se necessário proceder à sua interpolação,

$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{T}^+ \mathbf{r}^+ \quad \text{em } \Gamma_u^+, \quad (5.76a)$$

$$\mathbf{t}^- = \mathbf{T}^- \mathbf{r}^- \quad \text{em } \Gamma_u^-, \quad (5.76b)$$

em que \mathbf{T}^+ $\{\mathbf{T}^-\}$ é a matriz que agrupa as funções de interpolação das tracções ao longo de Γ_u^+ $\{\Gamma_u^-\}$ e \mathbf{r}^+ $\{\mathbf{r}^-\}$ o vector que agrupa os respectivos pesos.

Tendo em conta a interpolação (5.76) e considerando a satisfação ponderada da condição de equilíbrio,

$$\int \mathbf{U}^t (\hat{\mathbf{D}} \mathbf{S} \mathbf{X}_k + \hat{\mathbf{D}} s_{0k} + \mathbf{b}_k + \mathbf{t}_k^u) \, d\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0}, \quad (5.77)$$

é possível redefinir esta condição na forma,

$$A^t X_j + C_j^+ r^+ + C_j^- r^- = - R_j - R_{0j}, \quad (5.78)$$

em que,

$$C_j^+ = \int U^t \hat{U}_j^t(\tau^+) T^+ d\Gamma_u^+, \quad (5.79a)$$

$$C_j^- = \int U^t \hat{U}_j^t(\tau^-) T^- d\Gamma_u^-, \quad (5.79b)$$

$$R_j = \int U^t b_j d\hat{V}, \quad (5.79c)$$

$$R_{0j} = \int U^t \hat{D} s_{0j} d\hat{V}, \quad (5.79d)$$

e A^t representa a matriz de equilíbrio, transposta da matriz de compatibilidade, A , definida em (5.75a).

As forças de domínio generalizadas de ordem j , R_j , são duais dos parâmetros de deslocamento, d_j , visto verificarem a relação:

$$\int b_j^t \hat{u}_j d\hat{V} = R_j^t d_j.$$

Analogamente, a condição de equilíbrio na fronteira estática paralela a z , (5.64), é imposta ponderadamente, usando as funções de interpolação dos deslocamentos, Z , como funções de ponderação,

$$\int Z^t (\hat{N} S X_k + \hat{N} s_{0k} - t_{*k}^z) d\omega_\sigma = 0. \quad (5.80)$$

A equação de equilíbrio na fronteira estática pode assim ser escrita na forma,

$$B^t X_j = Q_{*j} - Q_{0j}, \quad (5.81)$$

em que,

$$Q_{*j} = \int Z^t t_{*j}^z d\omega_\sigma, \quad (5.82a)$$

$$Q_{0j} = \int Z^t \hat{N} s_{0j} d\omega_\sigma, \quad (5.82b)$$

e \mathbf{B}^t representa a matriz de equilíbrio, transposta da matriz de compatibilidade, \mathbf{B} , definida em (5.75b).

As forças de fronteira generalizadas de ordem j , \mathbf{Q}_{*j} , são duais dos parâmetros de deslocamento, \mathbf{q}_j , visto verificarem a relação:

$$\int \hat{\mathbf{u}}_j^t \mathbf{t}_{*j}^z d\omega_\sigma = \mathbf{q}_j^t \mathbf{Q}_{*j}.$$

A condição de compatibilidade ao longo das fronteiras cinemáticas, coincidentes, em (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , com o plano médio da peça laminar, é imposta por meio das equações (5.32a) e (5.32b). Se for introduzida nestas expressões a interpolação dos deslocamentos no domínio, (5.72), e em seguida for imposta a satisfação destas condições de uma forma ponderada, utilizando para funções de peso as definidas em (5.76a) e (5.76b),

$$\int \mathbf{T}^{+t} \left\{ \sum_{k=0}^n [\hat{\mathbf{U}}_k(\tau^+) \mathbf{U} \mathbf{d}_k] - \mathbf{u}_*^+ \right\} d\Gamma_{\bar{\mathbf{u}}}^+ = \mathbf{0}, \quad (5.83)$$

$$\int \mathbf{T}^{-t} \left\{ \sum_{k=0}^n [\hat{\mathbf{U}}_k(\tau^-) \mathbf{U} \mathbf{d}_k] - \mathbf{u}_*^- \right\} d\Gamma_{\bar{\mathbf{u}}}^- = \mathbf{0}, \quad (5.84)$$

obtêm-se para relações de compatibilidade nas fronteiras cinemáticas coincidentes com o plano médio as equações,

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{C}_j^{+t} \mathbf{d}_j = \mathbf{e}_*^+, \quad \sum_{j=0}^n \mathbf{C}_j^{-t} \mathbf{d}_j = \mathbf{e}_*^-, \quad (5.85)$$

em que,

$$\mathbf{e}_*^+ = \int \mathbf{T}^{+t} \mathbf{u}_*^+ d\Gamma_{\bar{\mathbf{u}}}^+, \quad (5.86a)$$

$$\mathbf{e}_*^- = \int \mathbf{T}^{-t} \mathbf{u}_*^- d\Gamma_{\bar{\mathbf{u}}}^-, \quad (5.86b)$$

e $\mathbf{C}_j^{+t} \{ \mathbf{C}_j^{-t} \}$ é a transposta da matriz de equilíbrio definida em (5.79a) {(5.79b)}.

Os parâmetros de deformação, \mathbf{e}_*^+ e \mathbf{e}_*^- , são duais dos parâmetros de tracção, \mathbf{r}^+ e \mathbf{r}^- ,

respectivamente, visto verificarem as relações:

$$\int t^{+t} u_*^+ d\Gamma_u^+ = r^{+t} e_*^+ ; \quad \int t^{-t} u_*^- d\Gamma_u^- = r^{-t} e_*^- .$$

Estando garantida ponderadamente a condição de equilíbrio no domínio por meio da equação (5.78), a condição de compatibilidade no domínio por meio da equação (5.74), a condição de equilíbrio na fronteira por meio da relação (5.81) e ainda a condição de compatibilidade na fronteira por meio da relação (5.85), tem-se para o modelo EG uma formulação coerente que obedece a todas as relações fundamentais atrás expressas, podendo ser descrita pelo seguinte sistema governativo,

$$\begin{bmatrix} -F & -A & B & \cdot & \cdot \\ -A^t & \cdot & \cdot & -C^+ & -C^- \\ B^t & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -C^{+t} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -C^{-t} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ d \\ q \\ r^+ \\ r^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_0 - v_* - v_\theta \\ R + R_0 \\ Q_* - Q_0 \\ -e^+ \\ -e^- \end{Bmatrix} , \quad (5.87)$$

em que,

$$F = [F_{ij}] , \quad C^+ = [C_j^+] , \quad C^- = [C_j^-] ,$$

$$X = \{X_j\} , \quad d = \{d_j\} , \quad q = \{q_j\} ,$$

$$v_0 = \{v_{0j}\} , \quad v_* = \{v_{*j}\} , \quad v_\theta = \{v_{\theta j}\} ,$$

$$R = \{R_j\} , \quad R_0 = \{R_{0j}\} ,$$

$$Q_* = \{Q_{*j}\} , \quad Q_0 = \{Q_{0j}\} .$$

O modelo desenvolvido introduz interpolações e ponderações nos campos estáticos e cinemáticos ao nível da espessura da peça e, separadamente, ao nível do seu plano médio.

Assim, este modelo começa por, ao longo da espessura da peça bidimensional plana, introduzir uma modelação do tipo cinemática, interpolando os deslocamentos no domínio e as tracções na fronteira cinemática e impondo as condições de equilíbrio no domínio de

uma forma ponderada. Desta forma o problema da análise de um sólido plano é aproximado resultando na análise de um domínio plano representado pela superfície média da estrutura.

A análise do problema plano é realizada com o recurso à utilização de um modelo estático. Este modelo interpola os esforços generalizados referidos à superfície média, os parâmetros de deslocamento na superfície média e os deslocamentos na sua fronteira, impondo as equações de compatibilidade e equilíbrio na superfície média bem como as equações de equilíbrio na sua fronteira estática de uma forma ponderada.

5.8 - Exemplo de aplicação

Laje quadrada encastrada com um bordo livre

A formulação desenvolvida para a análise de peças laminares foi aplicada à determinação do campo de tensões e deslocamentos na laje representada na figura 5.1. Esta laje, quadrada, apresenta um bordo livre sendo encastrada nos três bordos restantes e encontra-se submetida a uma pressão uniforme.

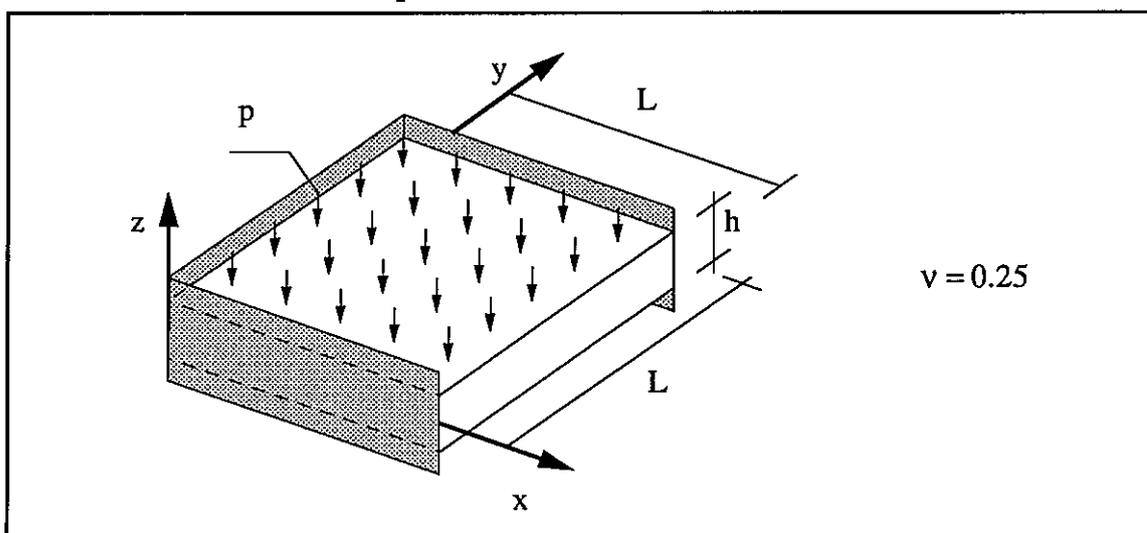


Figura 5.1 - Exemplo de laje quadrada encastrada com um bordo livre.

Na análise deste problema consideraram-se duas configurações distintas uma

correspondendo a uma laje fina, espessura igual a 5% do vão, e outra correspondendo a uma laje espessa, espessura igual a 20% do vão. Tendo em conta a simetria do problema, a laje foi discretizada com apenas um elemento finito sujeito às condições de apoio representadas na figura 5.2.

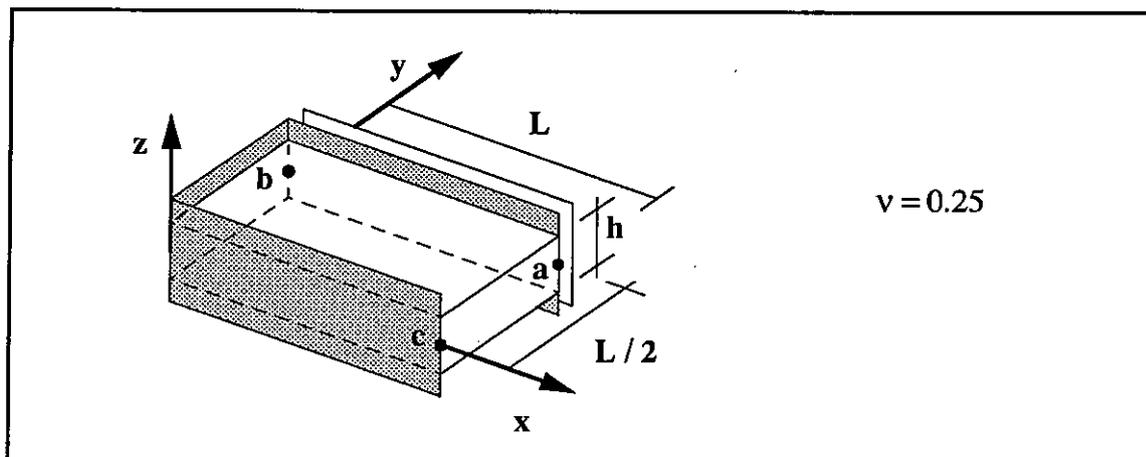


Figura 5.2 - Elemento finito utilizado para a análise da laje quadrada encastrada com um bordo livre.

A análise deste problema foi realizada utilizando três aproximações baseadas na formulação desenvolvida neste capítulo. Assim, na aproximação 1 consideram-se apenas os termos de ordem 0 e 1 da interpolação definida em (5.1) podendo ser classificada como um modelo de primeira ordem. A aproximação 2 introduz, além dos termos considerados anteriormente, os termos de ordem 2 e 3, sendo considerado um modelo de ordem superior. Adicionalmente é ainda considerada a aproximação 1RM, idêntica à aproximação 1, mas que utiliza o operador rigidez definido em (5.60), transformando-se num modelo de laje espessa de Reissner-Mindlin^{47,31}.

No quadro 5.1 listam-se os principais parâmetros definidores das aproximações consideradas. Neste quadro, os parâmetros n_x , n_d e n_q representam, respectivamente, o número de funções de interpolação utilizadas no modelo EG para o campo de esforços, de deslocamentos no domínio e de deslocamentos na fronteira. Os parâmetros N e η representam, respectivamente, a dimensão e o índice de esparsidade do sistema governativo.

Por forma a aferir os resultados obtidos, foi considerada uma aproximação baseada na utilização de um elemento finito tridimensional análogo ao desenvolvido no capítulo anterior. Esta aproximação, designada como aproximação 3, encontra-se descrita no quadro 5.1.

Aprox.	Deslocamentos na espessura	Esforços no domínio		Deslocamentos no domínio		Deslocamento na fronteira		N	η %
	Grau	Grau	n_x	Grau	n_d	Grau	n_d		
1	1	8	648	7	320	8	72	1 040	99.71
2	3	8	1 620	7	704	8	162	2 486	99.86
1 RM	1 Reissner-Mindlin	8	648	7	320	8	72	1 040	99.71
3	Elemento tridimensional	8	4374	7	1 536	8	891	6 849	99.94

Quadro 5.1 - Características das várias aproximações utilizadas na análise da laje quadrada encastrada com um bordo livre.

Paralelamente foi realizada a análise deste problema utilizando o programa de cálculo automático COSMOS/M²⁶, com uma malha de 1 250 elementos rectangulares correspondendo a 7 350 graus de liberdade. Nesta análise foram consideradas duas variantes, uma seguindo uma formulação de Kirchhoff²², na qual não se considera a deformabilidade por corte, e outra uma formulação de Reissner-Mindlin^{47,31}. Os elementos finitos utilizados por este programa de cálculo automático são elementos finitos de compatibilidade e são baseados nos trabalhos de Belytschko⁶ e Allman².

A comparação entre as diversas aproximações é feita com base na distribuição de deslocamentos ao longo da espessura no ponto a, representado na figura 5.2. Assim, na figura 5.3 é apresentada a variação ao longo da espessura do deslocamento transversal para o caso de uma laje fina, $h/L = 5\%$, e para o caso de uma laje espessa, $h/L = 20\%$. Estes deslocamentos são apresentados numa forma adimensional, definindo-se o deslocamento escalado por:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta E}{p L} .$$

Quando se utilizam os modelos de laje de Kirchhoff²² e de Reissner-Mindlin^{47,31}

assume-se que o deslocamento segundo z é constante ao longo da espessura.

Os resultados apresentados na figura 5.3 permitem observar uma boa concordância entre os resultados obtidos por meio da aproximação 2 com os obtidos, quer recorrendo a formulações do tipo Reissner-Mindlin^{47,31}, quer mesmo com os obtidos a partir de uma análise tridimensional, aproximação 3. Nota-se ainda, que a utilização da formulação de Kirchhoff²² ou de uma aproximação de primeira ordem, aproximação 1, conduz a deslocamentos bastante menores.

O comportamento relativo destas duas formulações é contudo diferente no caso de uma laje fina ou de uma laje espessa. Assim, no caso da laje fina a aproximação de primeira ordem, a qual impõe o anulamento das deformações ϵ_{zz} , apresenta deslocamentos menores que a formulação de Kirchhoff²² que não restringe directamente estas deformações. No que diz respeito ao caso da laje espessa, caso em que as deformações por corte assumem maior importância, o comportamento relativo destas duas soluções inverte-se, visto que na aproximação 1 as deformações por corte são tidas em conta enquanto que na formulação de Kirchhoff estas são consideradas nulas.

Convirá ainda referir o facto do aumento de espessura da laje acentuar o carácter não linear da variação dos deslocamentos transversais ao longo da espessura. Este facto é claramente visível quer na aproximação de ordem superior, aproximação 2, quer na análise tridimensional, aproximação 3.

Na figura 5.4 apresenta-se para o ponto a a variação do deslocamento segundo x ao longo da espessura da laje. Analogamente ao que sucedia com os deslocamentos transversais, observa-se uma boa concordância de resultados especialmente no caso da laje fina. Da análise dos resultados obtidos destaca-se o facto de a utilização do modelo de Kirchhoff conduzir a soluções mais rígidas, enquanto que a utilização da aproximação 1 conduzir a uma solução com uma maior deformabilidade longitudinal.

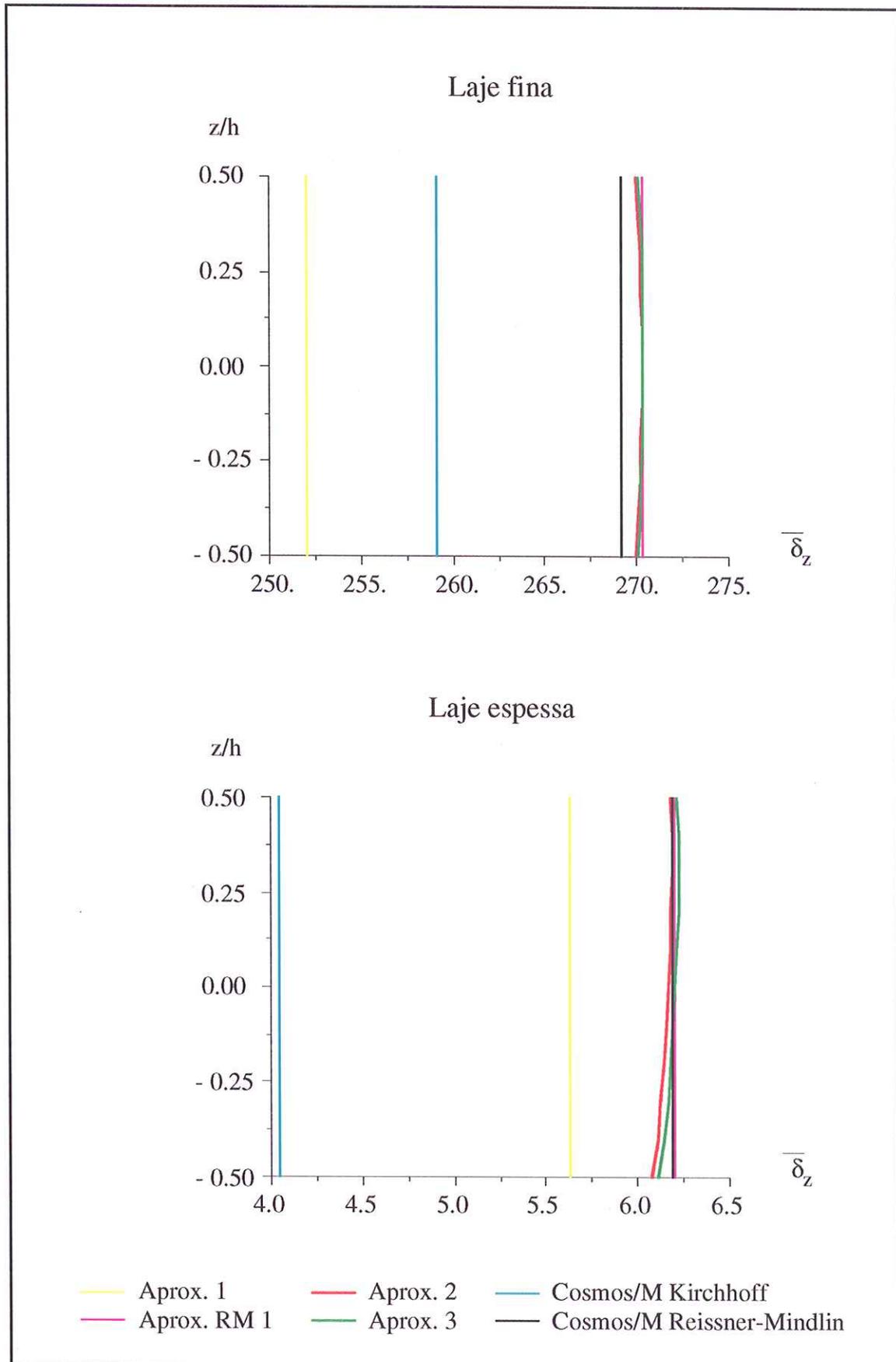


Figura 5.3 - Variação ao longo da espessura do deslocamento transversal do ponto a da laje quadrada encastrada com um bordo livre.

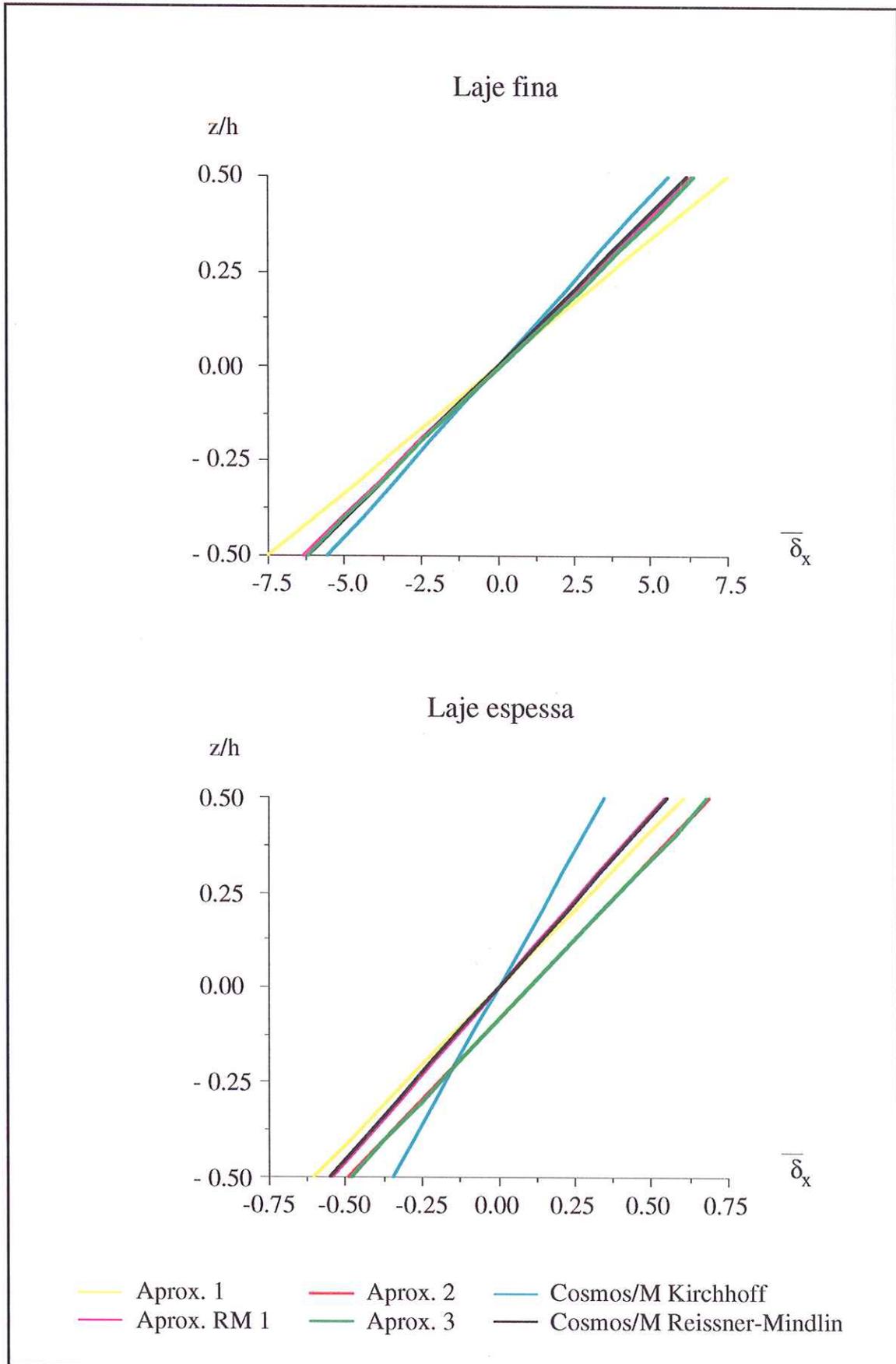


Figura 5.4 - Variação ao longo da espessura do deslocamento longitudinal do ponto **a** da laje quadrada encastrada com um bordo livre.

No caso da laje fina, e analogamente ao que sucedia para o deslocamento transversal, observa-se uma boa concordância entre os resultados obtidos a partir da utilização do modelo de Reissner-Mindlin^{47,31} e os obtidos com base em formulações bidimensionais de ordem superior ou tridimensionais.

Tem interesse referir o facto de, na laje espessa, se tornar significativa a interacção entre o comportamento de flexão e o comportamento de membrana. Esta interacção manifesta-se na existência de deslocamentos longitudinais no plano médio da laje, os quais são visíveis quando se considera ou uma aproximação de ordem superior, aproximação 2, ou um modelo tridimensional, aproximação 3. A principal diferença entre estas duas aproximações e a aproximação 1 reside no facto de nesta aproximação não ser considerada a interacção entre os comportamentos de flexão e de membrana.

Por forma a facilitar a visualização da deformação da laje, apresenta-se na figura 5.5 o traçado da deformada obtida a partir da aproximação 2 para a laje espessa e tendo como ponto de vista o ponto de coordenadas $(1.00; 0.50; 0.25)$.

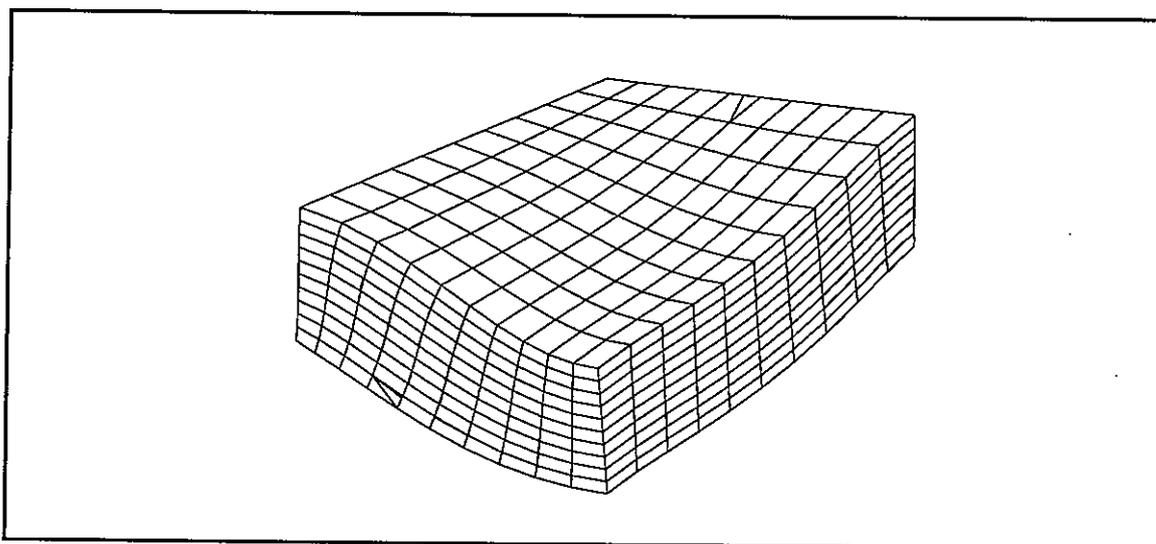


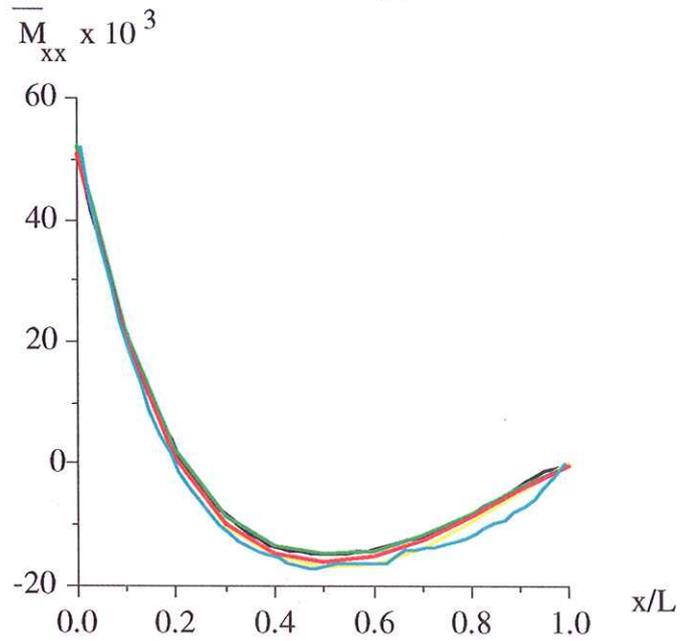
Figura 5.5 - Deformada da laje (espessa) encastrada com bordo livre; ponto de vista em $(1; 0.5; 0.25)$.

Na figura 5.6 apresentam-se, para o caso da laje espessa, as variações de momento flector M_{xx} na secção média da laje, linha **b-a** na figura 5.2, e do momento flector M_{yy} ao longo do bordo livre, linha **c-a** na figura 5.2. Da análise destes resultados verifica-se

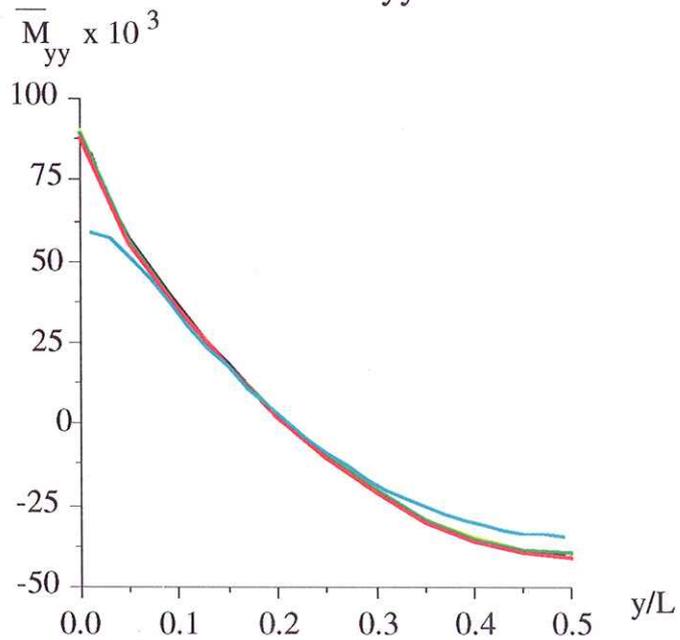
uma boa concordância entre os resultados obtidos a partir das diferentes aproximações utilizadas. Os valores apresentados para os momentos flectores são escalados na forma:

$$\bar{M}_{ii} = \frac{M_{ii}}{p L^2} .$$

Momentos flectores M_{xx} ao longo de b-a



Momentos flectores M_{yy} ao longo de c-a



- | | | |
|--|---|--|
| — Aprox. 1 | — Aprox. 2 | — Cosmos/M Kirchhoff |
| — Aprox. RM 1 | | — Cosmos/M Reissner-Mindlin |

Figura 5.6 - Laje (espessa) quadrada encastrada com um bordo livre; variação do momento flector M_{xx} na secção de meio vão e variação do momento flector M_{yy} ao longo do bordo livre.

Anexo A5.1

Utilização da regra de Leibnitz no desenvolvimento das equações de equilíbrio das peças laminares

A regra de Leibnitz para a derivação de integrais é apresentada por Spiegel⁵² na forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} F(x, \alpha) dx &= \\ &= \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{dF(x, \alpha)}{d\alpha} dx + F(\phi_2, \alpha) \frac{d\phi_2}{d\alpha} - F(\phi_1, \alpha) \frac{d\phi_1}{d\alpha}, \quad (A5.1.1) \end{aligned}$$

a qual é equivalente a,

$$\begin{aligned} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{dF(x, \alpha)}{d\alpha} dx &= \\ \frac{d}{d\alpha} \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} F(x, \alpha) dx - F(\phi_2, \alpha) \frac{d\phi_2}{d\alpha} + F(\phi_1, \alpha) \frac{d\phi_1}{d\alpha}. \quad (A5.1.2) \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação de equilíbrio (5.19),

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \hat{D} E_k^t \sigma dz + \left[\hat{U}_k^t N_z \sigma \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \hat{b}_k = 0, \quad ,$$

tendo em conta a definição do operador diferencial \hat{D} , adjunto do operador diferencial \hat{D}^* , definido em (5.11),

$$\hat{D} = N_x \frac{\partial}{\partial x} + N_y \frac{\partial}{\partial y} - N_z, \quad (A5.1.3)$$

obtem-se o seguinte desenvolvimento para a equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \int_{\tau^-}^{\tau^+} \left(N_x E_k^t \frac{\partial}{\partial x} + N_y E_k^t \frac{\partial}{\partial y} - N_z E_k^t \right) \sigma dz + \\ + \left[\hat{U}_k^t N_z \sigma \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \hat{b}_k = 0. \quad (A5.1.4) \end{aligned}$$

Tendo em conta as derivadas em ordem a x e y existentes na equação (A5.1.4) e a

aplicação da regra de Leibnitz para a derivação de integrais, na forma (A5.1.2), é possível exprimir a equação de equilíbrio em função dos esforços independentes, s_k , definidos em (5.21), na forma:

$$\begin{aligned} \hat{D} s_k + N_x E_k^t(\tau^-) \sigma(\tau^-) \frac{\partial \tau^-}{\partial x} - N_x E_k^t(\tau^+) \sigma(\tau^+) \frac{\partial \tau^+}{\partial x} + \\ + N_y E_k^t(\tau^-) \sigma(\tau^-) \frac{\partial \tau^-}{\partial y} - N_y E_k^t(\tau^+) \sigma(\tau^+) \frac{\partial \tau^+}{\partial y} + \\ + \left[\hat{U}_k^t N_z \sigma \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \hat{b}_k = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A5.1.5})$$

Atendendo às definições dos operadores \hat{U}_k , E_k , N_x e N_y , apresentadas, respectivamente, em (5.2), (5.5) e (5.10) conclui-se que,

$$N_x E_k^t = \hat{U}_k^t N_x , \quad (\text{A5.1.6a})$$

$$N_y E_k^t = \hat{U}_k^t N_y . \quad (\text{A5.1.6b})$$

Representando o volume em que se encontra definida a peça laminar pela função, $\Phi(x,y,z) = 0$, então as componentes da normal exterior ao volume são definidas como,

$$N = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A5.1.7})$$

em que,

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} , \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} , \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} . \quad (\text{A5.1.8})$$

Para o caso particular das superfícies $z = \tau^+(x,y)$ e $z = \tau^-(x,y)$ é possível escrever as seguintes expressões que relacionam as várias componentes da normal:

$$v_x = -v_z \frac{\partial \tau^+}{\partial x} , \quad v_y = -v_z \frac{\partial \tau^+}{\partial y} \quad \text{para } z = \tau^+(x,y) ; \quad (\text{A5.1.9a})$$

$$v_x = -v_z \frac{\partial \tau^-}{\partial x} , \quad v_y = -v_z \frac{\partial \tau^-}{\partial y} \quad \text{para } z = \tau^-(x,y) . \quad (\text{A5.1.9b})$$

Tendo em conta os resultados (A5.1.6) e (A5.1.9), a equação de equilíbrio (A5.1.5) pode ser escrita na forma,

$$\hat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_k + \left[\hat{\mathbf{U}}_k^t \left(\mathbf{N}_x \frac{v_x}{v_z} + \mathbf{N}_y \frac{v_y}{v_z} + \mathbf{N}_z \right) \sigma \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \hat{\mathbf{b}}_k = \mathbf{0} \quad , \quad (\text{A5.1.10})$$

que é equivalente à equação (5.20),

$$\hat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_k + \left[\hat{\mathbf{U}}_k^t \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}_z} \sigma \right]_{\tau^-}^{\tau^+} + \hat{\mathbf{b}}_k = \mathbf{0} \quad ,$$

se se tiver em conta a definição do vector das normais, \mathbf{N} , e da sua componente, \mathbf{n}_z , apresentada em (A5.1.7).

1

2

6 Estruturas Laminares de Material Compósito

Nas últimas décadas, com o desenvolvimento das indústrias automóvel, aeronáutica e aeroespacial, tornou-se necessária a utilização de novos materiais que aliassem altas resistências com baixas densidades. Sendo a resistência mecânica uma propriedade tensorial, surge a necessidade de criar materiais que possam dispor de altas resistências ao longo das principais direcções de solicitação. É neste contexto que surgem os materiais compósitos laminados, materiais formados pela sobreposição de sucessivas camadas de material compósito.

Estas camadas são constituídas pela associação de dois componentes: a matriz e as fibras. À matriz, que apresenta geralmente baixos módulos de elasticidade, mas uma elevada ductilidade, cabe o papel de dar forma ao conjunto bem como de proceder à transferência de tensões entre as fibras. As fibras, em contrapartida, apresentam elevados módulos de elasticidade longitudinais aliados a um comportamento frágil, necessitando de um meio de suporte para que possam mobilizar as suas elevadas capacidades de carga. Consoante a distribuição das fibras na matriz, e tendo em conta o comportamento bidimensional das camadas, podem obter-se diversos tipos de comportamento do conjunto. Se a uma distribuição aleatória de fibras corresponde a isotropia transversal do material, ao alinhamento das fibras ao longo de uma direcção (ou duas direcções ortogonais) corresponde um comportamento ortotrópico, sendo ainda possível obter um

comportamento monoclínico para um alinhamento das fibras ao longo de duas direcções arbitrárias.

O presente trabalho centra-se no estudo de compósitos laminados constituídos por camadas com fibras orientadas segundo uma direcção preferencial. A sobreposição de camadas com diferentes orientações de fibra dá origem a um material heterogéneo com direcções preferenciais de resistência. Devido a esta heterogeneidade do material, o comportamento de estruturas bidimensionais, como sejam cascas, placas e lajes, de material compósito laminado toma um carácter tridimensional. Este facto, que é salientado por diversos autores, Jones²¹, Gaudenzi¹⁸, deve-se à geração de tensões interlaminares nas interfaces entre camadas. Assim, a utilização das teorias clássicas de análise de peças bidimensionais torna-se ineficiente quando se pretende ter uma visão mais detalhada do comportamento deste tipo de estrutura.

Neste contexto, a análise dos compósitos laminados utilizando modelos tridimensionais puros é bastante mais adequada. Contudo, devido ao grande número de graus de liberdade a ter em conta, este método conduz a sistemas governativos de grandes dimensões com os consequentes custos em meios de cálculo. O recurso a modelos tridimensionais simplificados ganha assim grande importância na análise deste tipo de estruturas. Nomeadamente, o modelo desenvolvido no capítulo anterior tem grande interesse, pois permite considerar as estruturas de compósito laminado como constituídas por um conjunto de camadas ortotrópicas, de comportamento essencialmente bidimensional, mas considera simultaneamente a existência das tensões interlaminares.

Por forma a simplificar a descrição dos laminados de material compósito, é habitual a utilização de uma notação abreviada no caso dos laminados constituídos por camadas idênticas. Assim, quando um laminado é constituído por camadas do mesmo material, mas dispostas com diferentes orientações, como o apresentada na figura 6.1, o laminado é designado por um conjunto de índices que descrevem a sequência de empilhamento no laminado. Por exemplo, o laminado representado na figura 6.1 pode ser descrito por

$[30^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ]$ devido ao facto de resultar do empilhamento de quatro camadas idênticas em que as fibras estão orientadas respectivamente a 30° , 90° , 45° e 0° em relação a um dos eixos de referência do laminado. No caso da espessura das várias camadas não ser constante, a notação deve ser alterada por forma a incluir a espessura de cada camada, por exemplo, $[30^\circ@t / 90^\circ@2t / 45^\circ@t / 0^\circ@3t]$. Para os laminados simétricos, esta notação pode ser condensada referindo apenas metade do empilhamento; assim, o laminado simétrico $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/45^\circ/90^\circ/0^\circ]$ pode ser alternativamente referenciado por $[0^\circ/90^\circ/45^\circ]_s$.

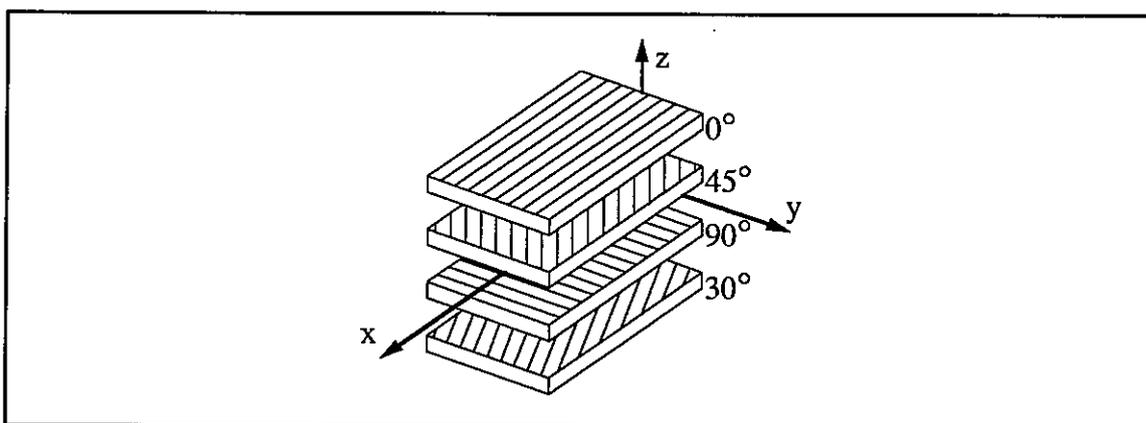


Figura 6.1 - Exemplo de um laminado com a sequência de empilhamento $[30^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ]$.

Convirá ainda referir os laminados designados habitualmente por *cross-ply*, laminados de camadas cruzadas, os quais resultam do empilhamento alternado de camadas orientadas a 0° ou 90° em relação ao eixo principal do laminado. Neste tipo de laminados tem grande interesse o estudo das tensões interlaminares pelo que, ainda neste capítulo, será feita uma análise acerca destas tensões no laminado *cross-ply* simétrico apresentado na figura 6.3.

6.1 - Relações constitutivas para materiais ortotrópicos

A adaptação do modelo desenvolvido para a análise de estruturas laminares ao caso de laminados de material compósito faz-se considerando cada camada como um elemento finito com comportamento ortotrópico. Assim, torna-se necessário analisar quais as

principais características dos materiais ortotrópicos e generalizar os operadores de flexibilidade e rigidez presentes nas relações constitutivas, (4.8a) e (4.8b), do caso isotrópico, considerado até aqui, para o caso ortotrópico.

Os materiais ortotrópicos caracterizam-se pela existência de três planos ortogonais de simetria das propriedades mecânicas. O alinhamento das fibras ao longo de duas direcções ortogonais garante a existência de dois planos ortogonais de simetria material. Esta condição é suficiente para que se defina um terceiro plano de simetria ortogonal aos dois primeiros. A intercepção dos vários planos de simetria define um sistema de eixos designado como referencial principal de ortotropia.

Quando referida ao referencial principal de ortotropia (x_1, x_2, x_3) representado na figura 6.2, a relação tensões-deformações toma a forma,

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{f}} \bar{\mathbf{s}} \quad , \quad (6.1)$$

em que,

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{11} & \bar{f}_{12} & \bar{f}_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{f}_{12} & \bar{f}_{22} & \bar{f}_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{f}_{13} & \bar{f}_{23} & \bar{f}_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bar{f}_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{f}_{55} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{f}_{66} \end{bmatrix} \quad , \quad (6.2)$$

representando \bar{f}_{ij} o conjunto de nove constantes de flexibilidade que quantificam o comportamento do material e

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad e \quad \bar{\mathbf{s}} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad ,$$

respectivamente as deformações e as tensões referidas aos eixos principais de ortotropia.

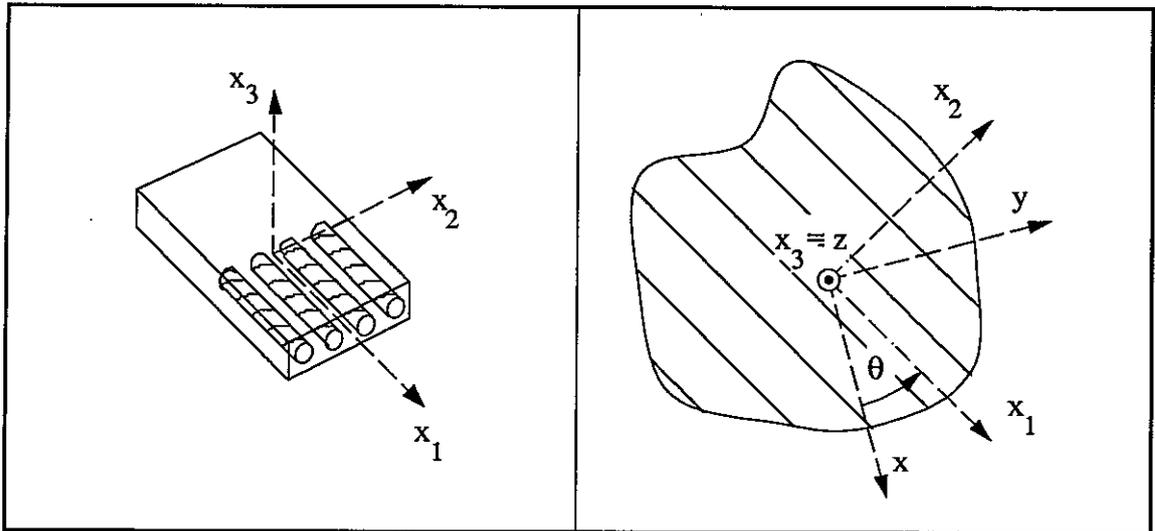


Figura 6.2 - Referencial principal de ortotropia numa camada de um laminado de material compósito.

Saliente-se a particularidade de não haver qualquer interacção entre as deformações normais ($\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$) e as tensões de corte ($\sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}$) bem como entre as deformações por corte ($\gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$) e as tensões normais ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$). Os modos de corte referentes a cada plano de simetria também são independentes entre si.

As constantes de flexibilidade \bar{F}_{ij} podem ser expressas em função das constantes elásticas habitualmente utilizadas, módulos de elasticidade, módulos de distorção e coeficientes de Poisson. Assim, a matriz de flexibilidade \bar{F} , pode ser escrita na forma,

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{G_{23}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{G_{13}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

onde E_1, E_2 e E_3 representam respectivamente os módulos de elasticidade referidos às direcções x_1, x_2 e x_3 , G_{12}, G_{13} e G_{23} representam os módulos de distorção nos planos x_1 - x_2, x_1 - x_3 e x_2 - x_3 , respectivamente, e ν_{ij} os coeficientes de Poisson.

Os coeficientes de Poisson são definidos por,

$$\nu_{ij} = - \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_{jj}} \quad (6.4)$$

para $\sigma_{ii} = \sigma$ e as restantes tensões normais nulas. Devido ao facto de $\bar{f}_{ij} = \bar{f}_{ji}$, só 3 dos 6 coeficientes de Poisson são independentes, podendo ser expressa a dependência dos restantes por meio da relação:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{e } i \neq j . \quad (6.5)$$

Partindo da definição do operador de flexibilidade \bar{f} , (6.3), é possível definir o operador de rigidez \bar{k} , tal que,

$$\bar{k} = \bar{f}^{-1} \quad , \quad (6.6)$$

e

$$\bar{s} = \bar{k} \bar{e} \quad . \quad (6.7)$$

Em Jones²¹ é apresentada a definição da matriz de rigidez \bar{k} .

Considerando o carácter tensorial das tensões e das deformações, é possível obter a matriz de flexibilidade presente na relação constitutiva genérica, (4.8a), f , referida a um referencial genérico (x, y, z) a partir da matriz de flexibilidade, \bar{f} , escrita no referencial principal (x_1, x_2, x_3) . No Anexo 6.1 é analisado o caso particular, mas de maior interesse no caso de laminados de material compósito, em que $z \equiv x_3$ e o referencial (x_1, x_2) resulta de uma rotação Θ de (x, y) em torno de z , como representado na figura 6.2. Para este caso, as relações (A6.1.9), exprimem os termos da matriz de flexibilidade, f , referidos a (x, y) , em função dos termos da matriz de flexibilidade \bar{f} , referidos a (x_1, x_2) . Para obter a matriz de rigidez k , presente nas equações (5.28) e (5.29) basta ter em conta que,

$$k = f^{-1} \quad . \quad (6.8)$$

6.2 - Exemplo de aplicação

Tensões interlaminares num laminado *Cross-ply*

A formulação desenvolvida no capítulo anterior para a análise de peças laminares é em seguida aplicada à determinação das tensões interlaminares num laminado *cross-ply*. Este exemplo, utilizado por diversos autores como sejam Rybicki⁵⁰, Wang⁵⁸, Ghiringhelli¹⁹, Gaudenzi¹⁸, Barboni³ e Wei⁵⁹ consiste na análise de uma placa de material compósito laminado *cross-ply* com um empilhamento do tipo $[90^\circ/0^\circ]_s$. Este laminado, simétrico em relação ao seu plano médio é constituído por um conjunto de quatro camadas de espessura h , idênticas, mas dispostas com os seus referênciais principais de ortotropia orientados em relação ao eixo principal de sollicitação, x , na sequência $90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ$. A placa apresenta um comprimento de $2L$, dimensão segundo x , e uma largura igual a $2b$, dimensão segundo y . Apenas é analisado o caso em que $b = 8h$.

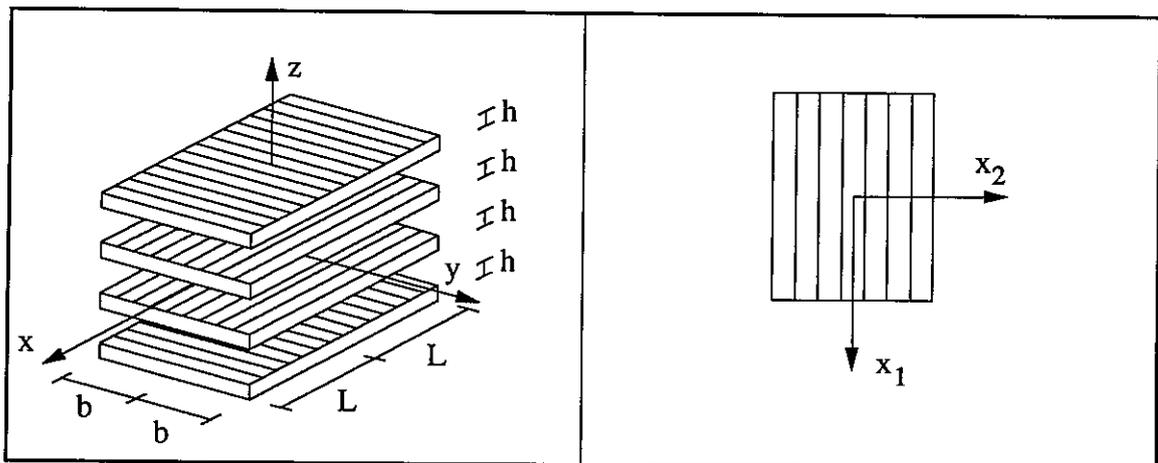


Figura 6.3 - Representação do laminado *cross-ply* com empilhamento $[90^\circ/0^\circ]_s$ e dos eixos principais de ortotropia das camadas.

Tendo em consideração o referencial principal de ortotropia das camadas apresentado na figura 6.3, as características mecânicas das camadas podem ser definidas pelos seguintes valores:

$$E_1 = 20 \cdot 10^6 \text{ psi} = 137.90 \text{ GPa} ; \quad E_2 = E_3 = 2.1 \cdot 10^6 \text{ psi} = 14.48 \text{ GPa} ;$$
$$G_{13} = G_{12} = G_{23} = 0.85 \cdot 10^6 \text{ psi} = 5.86 \text{ GPa} ; \quad \nu_{13} = \nu_{12} = \nu_{23} = 0.21 .$$

A solicitação considerada consiste na imposição de um deslocamento com a direcção do eixo coordenado x nas faces perpendiculares a esse eixo, por forma a produzir no laminado uma deformação média, ϵ_{xx} , unitária. Verifica-se que a placa sujeita a esta acção apresenta um comportamento essencialmente unidimensional visto os campos de tensões instalados só variarem com as coordenadas y e z , sendo constantes segundo a coordenada x . Assim, o refinamento a introduzir nas diferentes aproximações consideradas incide essencialmente no grau dos polinómios em y a serem utilizados como funções de interpolação.

Devido à simetria do problema, só é considerada a análise de um oitavo do laminado sujeito às condições de apoio representadas na figura 6.4. O estudo do comportamento do laminado é feito com base na variação da tensão σ_{zz} ao longo da superfície média, coordenada z igual a 0 , e da tensão interlaminar σ_{yz} na interface entre as camadas com diferentes orientações, coordenada z igual a h .

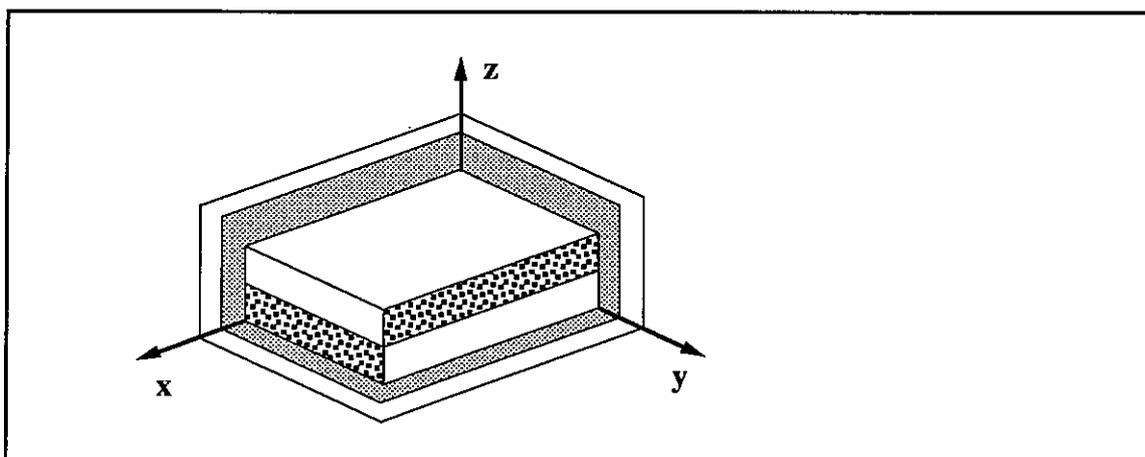


Figura 6.4 - Discretização adoptada para o estudo do laminado *cross-ply* com empilhamento $[90^{\circ}/0^{\circ}]_s$.

O estudo deste problema é utilizado para ilustrar os tipos de convergência que se obtêm quando se procede ao refinamento quer no número de esforços independentes considerados quer no grau das interpolação dos campos de esforços e de deslocamentos no modelo bidimensional. Assim, apresentam-se no quadro 6.1 as principais características das diferentes aproximações analisadas. Por forma a facilitar a identificação das diferentes aproximações utiliza-se uma notação composta por dois

índices tal que, E_B , representa uma aproximação em que se utiliza uma interpolação dos deslocamentos na espessura de grau E ao mesmo tempo que se utiliza uma interpolação para os campos bidimensionais de grau B .

Aprox.	Desloc. na espessura	Esforços no domínio		Deslocamentos no domínio		Tracções na fronteira		Deslocamentos na fronteira		N	η %
	Grau	Grau	n_x	Grau	n_d	Grau	n_t	Grau	n_q		
1_13	1	13	672	11	240	11	96	13	216	1 224	99.76
3_13	3	13	1 680	11	528	11	96	13	500	2 804	99.88
5_3	5	3	768	1	136	1	16	3	344	1 264	99.74
5_5	5	5	1 152	3	272	3	32	5	432	1 888	99.80
5_7	5	7	1 536	5	408	5	48	7	520	2 512	99.84
5_9	5	9	1 920	7	544	7	64	9	608	3 136	99.87
5_13	5	13	2 688	11	816	11	96	13	784	4 384	99.90
5_29	5	29	5 760	27	1 904	27	224	29	1 488	9 376	99.94
7_3	7	3	1 056	1	184	1	16	3	468	1 724	99.74
7_5	7	5	1 584	3	368	3	32	5	588	2 572	99.82
7_7	7	7	2 112	5	552	5	48	7	708	3 420	99.86
7_9	7	9	2 640	7	736	7	64	9	828	4 268	99.88
7_13	7	13	3 696	11	1 104	11	96	13	1 068	5 964	99.91

Quadro 6.1 - Características das várias aproximações utilizadas na análise do laminado *cross-ply* com empilhamento $[90^\circ/0^\circ]_s$

Saliente-se que os graus apresentados no quadro 6.1 para a interpolação das diferentes variáveis dos modelos bidimensionais correspondem ao máximo grau da interpolação segundo a direcção y , visto que segundo a direcção x se adopta o menor grau possível devido ao carácter unidimensional do problema em análise. Para além desta diferença, todos os parâmetros têm o mesmo significado que os anteriormente apresentados no quadro 5.1, excepto o parâmetro n_t , o qual representa o número total de funções de interpolação de tracções. A interpolação das tracções é realizada nas fronteiras cinemáticas ou inter-elementos que se sobrepõem com o plano médio dos elementos.

Por forma a melhor compreender o tipo de convergência que se obtém por meio do refinamento das interpolações na espessura ou no plano do laminado, apresentam-se nos

quadros 6.2 e 6.3 os valores obtidos para a densidade de energia de deformação devida à interacção entre as camadas. Esta densidade de energia é definida por,

$$u = \frac{1}{V} \left(\frac{1}{2} \int_V \sigma^t \varepsilon \, dV - \frac{1}{2} E_1 V_1 - \frac{1}{2} E_2 V_2 \right),$$

em que, V , V_1 e V_2 representam respectivamente o volume do laminado e os volumes de cada uma das camadas, e E_1 e E_2 os módulos de elasticidade das camadas segundo, respectivamente, a direcção paralela e perpendicular às fibras.

Aproximação	u (GPa)
1_13	484.6250 10^{-3}
3_13	96.0625 10^{-3}
5_13	95.9063 10^{-3}
7_13	95.8906 10^{-3}

Quadro 6.2 - Densidade de energia de deformação devida à interacção entre camadas.

Os valores apresentados no quadro 6.2 mostram que, para um mesmo grau de interpolação dos campos bidimensionais, um refinamento ao nível das funções de interpolação dos deslocamentos ao longo da espessura produz uma convergência para um mínimo da energia de deformação. Este resultado é análogo ao obtido no caso dos modelos cinmáticos de elementos finitos para os quais, quando a acção considerada é um deslocamento imposto, a solução exacta corresponde a um mínimo da energia de deformação.

Aproximação	u (GPa)	Aproximação	u (GPa)
5_3	100.9844 10^{-3}	7_3	100.9844 10^{-3}
5_5	97.0625 10^{-3}	7_5	96.9688 10^{-3}
5_7	95.7656 10^{-3}	7_7	95.7656 10^{-3}
5_9	95.8438 10^{-3}	7_9	95.8281 10^{-3}
5_13	95.9063 10^{-3}	7_13	95.8906 10^{-3}
5_29	95.9531 10^{-3}		

Quadro 6.3 - Densidade de energia de deformação devida à interacção entre camadas.

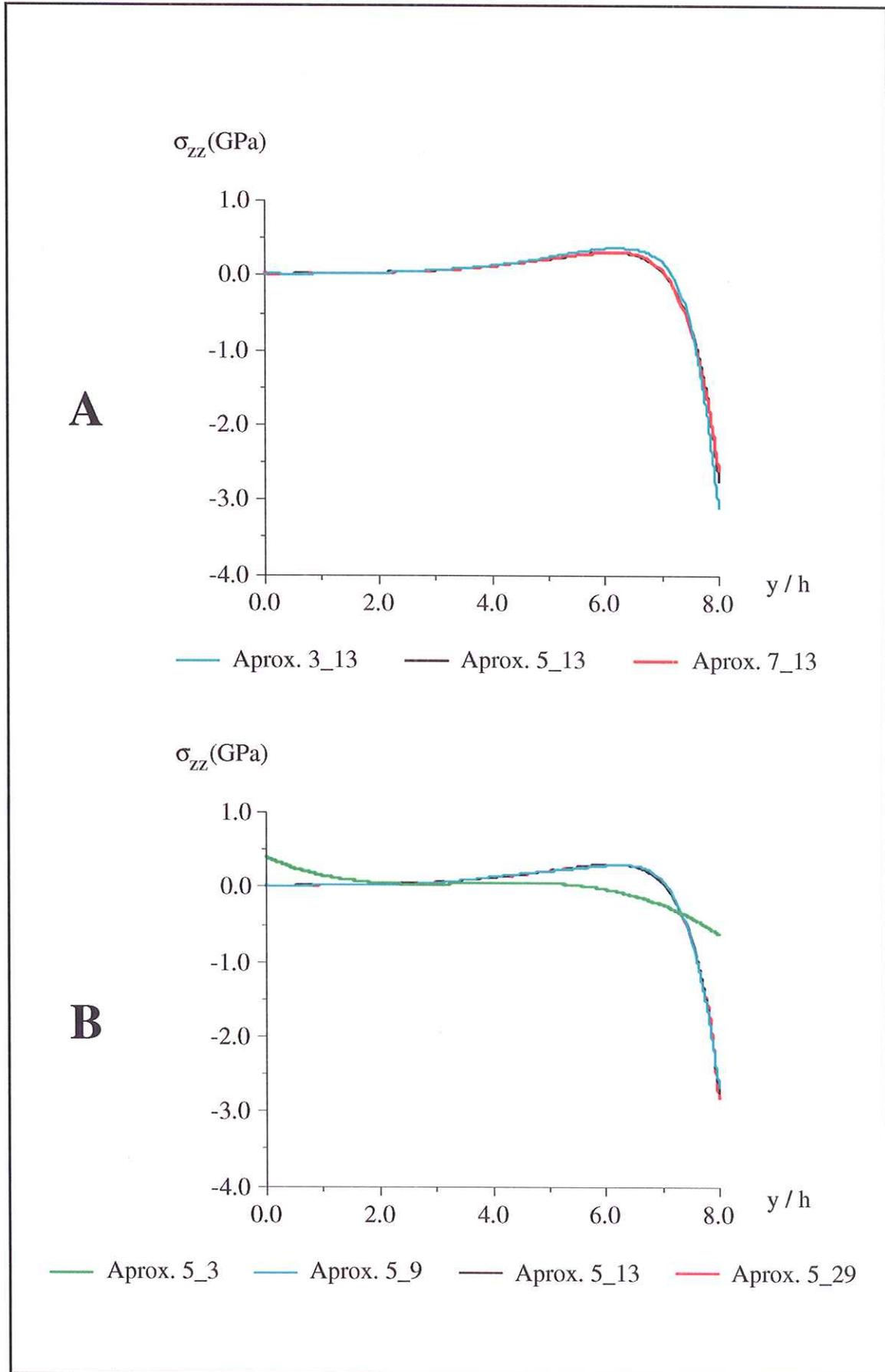


Figura 6.5 - Variação da tensão σ_{zz} na superfície média do laminado *cross-ply* $[90^\circ/0^\circ]_s$.

No quadro 6.3 procura-se analisar o efeito do refinamento ao nível do modelo bidimensional, quando se mantém a mesma aproximação ao nível das funções de interpolação dos deslocamentos ao longo da espessura. Nestes casos verifica-se que com o aumento do grau da interpolação dos campos bidimensionais, se dá inicialmente uma diminuição na densidade de energia de deformação à qual se segue, numa segunda fase, um aumento da mesma.

Quando se utilizam modelos equilibrados de elementos finitos e a acção considerada é um deslocamento imposto, a solução exacta corresponde a um máximo da energia de deformação. Assim, compreende-se o aumento da energia de deformação com o refinamento da aproximação dos campos bidimensionais. Contudo, a diminuição inicial só poderá ser justificada pelo facto de se estar em presença de aproximações distorcidas, isto é, aproximações para as quais um grande refinamento dos deslocamentos na espessura não é acompanhado por um refinamento adequado ao nível da aproximação no plano da estrutura.

O comportamento das aproximações analisadas é ilustrado na figura 6.5 através da representação da variação da tensão σ_{zz} para $z=0$. Na realidade, é a este nível, nível médio da camada orientada a 0° , que as tensões σ_{zz} atingem o seu valor máximo. No gráfico **A** apresentam-se para um mesmo grau de aproximação do modelo bidimensional diferentes soluções ao nível da aproximação em espessura. Da observação desta figura verifica-se que a solução estabiliza a partir de um grau de aproximação na espessura igual a 5. Em contrapartida, no gráfico **B** apresentam-se, para um grau de aproximação em espessura igual a 5, diferentes aproximações ao nível do modelo bidimensional.

Por forma a comparar os resultados obtidos com a presente formulação e os apresentados por outros autores, na figura 6.6 representa-se a variação da tensão σ_{zz} para $z=0$ correspondente à aproximação 5_13 e às aproximações desenvolvidas por Wang⁵⁸ e Gaudenzi¹⁸. Da análise desta figura verifica-se que existe uma boa concordância entre os resultados obtidos com a presente formulação e os apresentados pelos referidos autores.

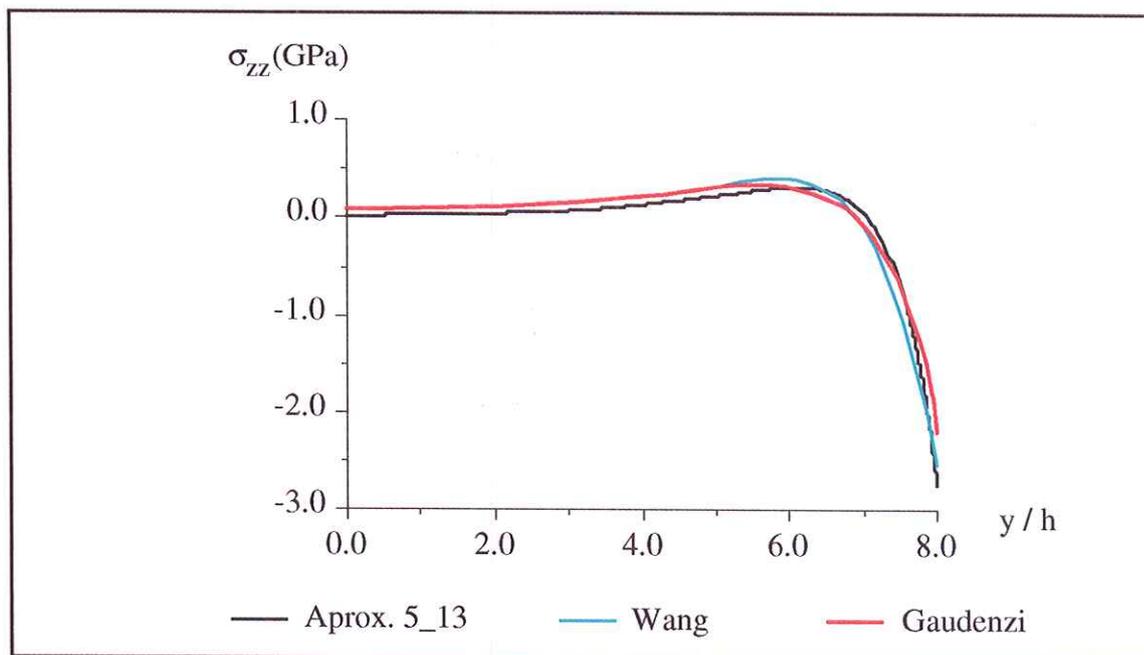


Figura 6.6 - Variação da tensão σ_{zz} ao longo da superfície média do laminado *cross-ply* $[90^{\circ}/0^{\circ}]_s$.

Nas figuras 6.7 e 6.8 podem observar-se os resultados obtidos para a variação das tensões interlaminares σ_{yz} e σ_{zz} ao longo da superfície de contacto entre a camada orientada a 0° e a camada orientada a 90° , isto é $z=h$. Os valores das tensões aqui representados resultam da média dos valores obtidos em cada uma das camadas. Analogamente ao que anteriormente foi feito para a variação da tensão σ_{zz} ao longo de $z=0$, a representação da variação das tensões interlaminares é feita considerando separadamente um refinamento crescente nas funções de interpolação ao longo da espessura, gráficos **A**, e um refinamento crescente nas funções de interpolação no plano da peça laminar, gráficos **B**.

No caso das tensões interlaminares verifica-se uma maior dificuldade na convergência, a qual pode ser justificada pelo carácter singular do andamento destas tensões. Assim, enquanto o aumento do grau da interpolação ao longo da espessura das camadas para valores superiores a 5 não introduz grandes variações na solução obtida, o aumento do refinamento das soluções ao longo do plano da estrutura conduz a variações apreciáveis nas soluções. Os resultados obtidos para a aproximação 5_29 parecem ser

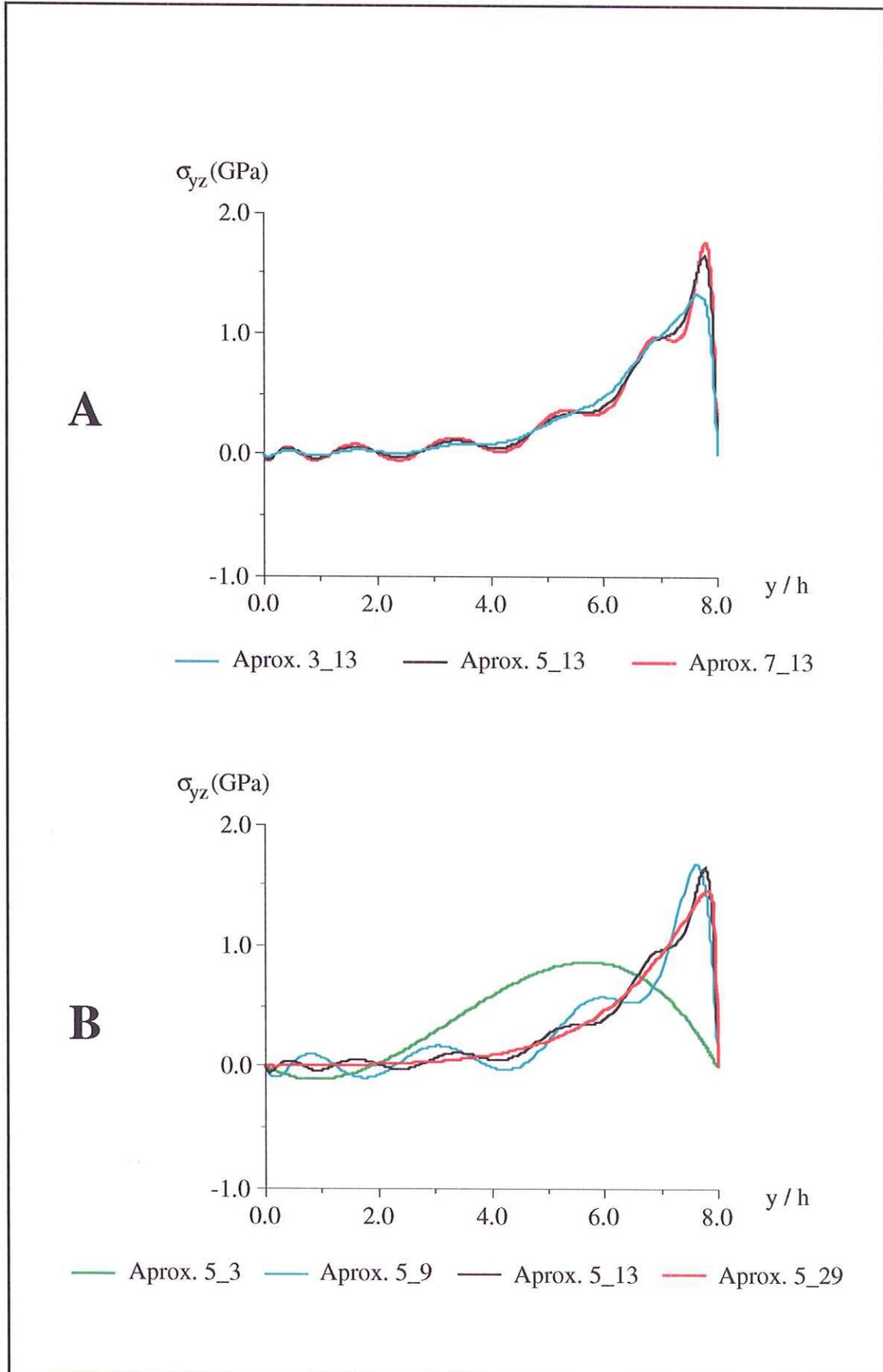


Figura 6.7 - Variação da tensão σ_{yz} na superfície interlaminar do laminado *cross-ply* .

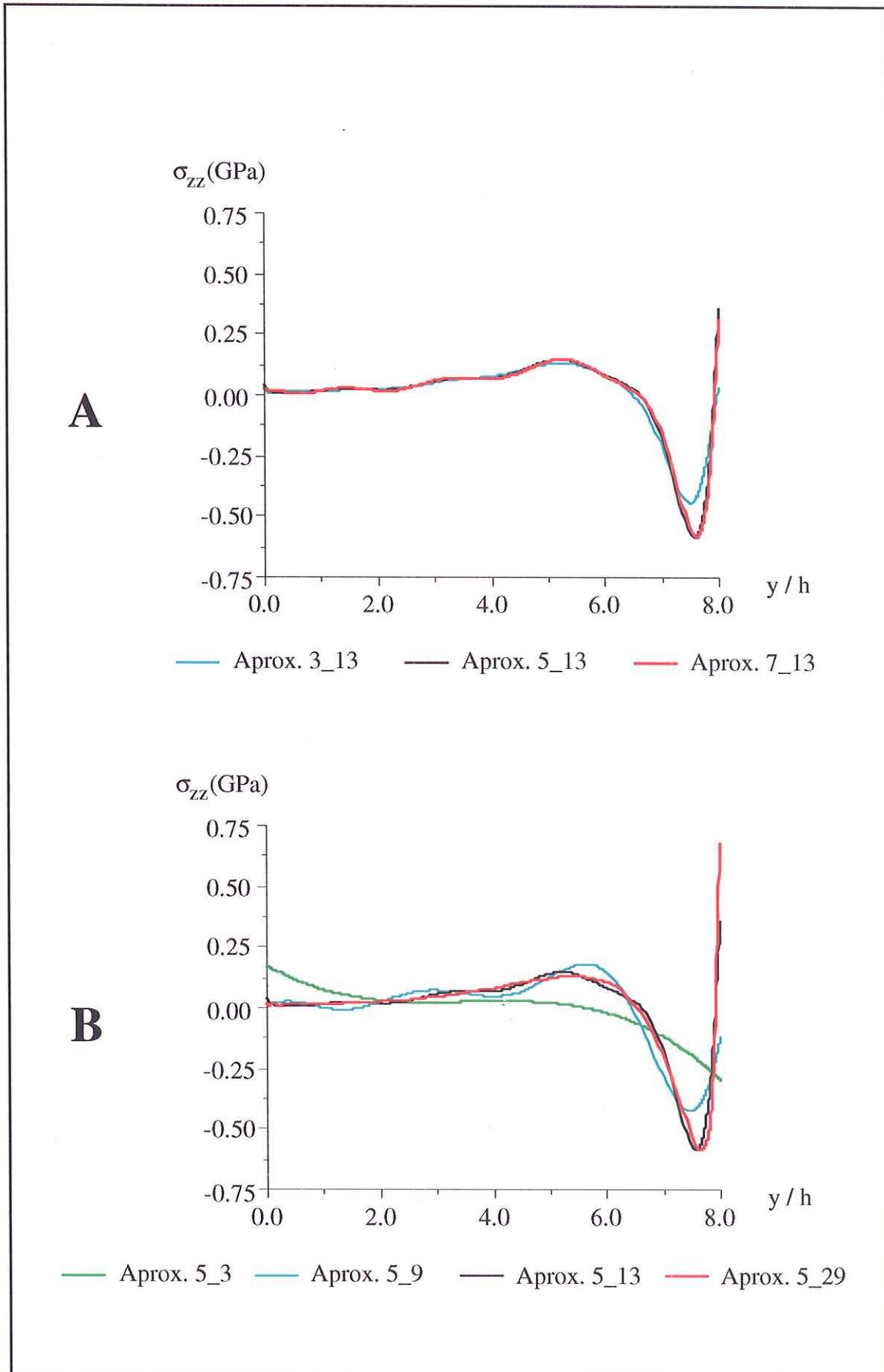


Figura 6.8 - Variação da tensão σ_{zz} na superfície interlaminar do laminado *cross-ply* .

bastante regulares, necessitando contudo de um grau muito elevado para as funções de interpolação. Estando em presença de elevados gradientes de tensão, a utilização de funções não polinomiais para interpolar os campos bidimensionais poderá, no estudo da variação das tensões interlaminares, conduzir a melhores resultados.

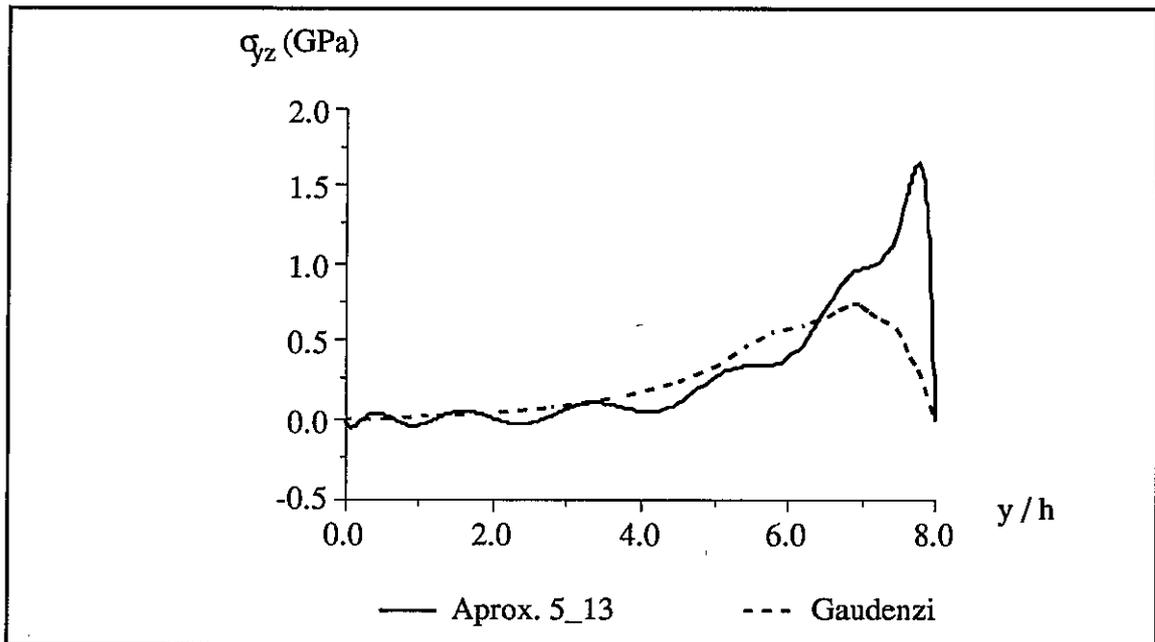


Figura 6.9 - Variação da tensão σ_{yz} ao longo da superfície interlaminar do laminado $[90^0/0^0]_s$.

Na figura 6.9 comparam-se os resultados obtidos com a aproximação 5_13 e os apresentados por Gaudenzi¹⁸ para a tensão interlaminar σ_{yz} . Da análise desta figura verifica-se que o valor máximo das tensões obtido com base na presente formulação apresenta valores superiores aos apresentados por Gaudenzi¹⁸. Este facto, aliado à circunstância do valor máximo da tensão se encontrar mais perto do bordo do laminado, permite supôr que a presente solução simule melhor o comportamento da tensão interlaminar do que a solução apresentada por Gaudenzi¹⁸.

Anexo A6.1

Transformação do operador de flexibilidade em materiais ortotrópicos

Nos materiais ortotrópicos, como se refere em 6.1, pode definir-se um referencial principal para o qual as relações de elasticidade são escritas na forma,

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{f}} \bar{\mathbf{s}} \quad , \quad (\text{A6.1.1})$$

em que,

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{11} & \bar{f}_{12} & \bar{f}_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{f}_{12} & \bar{f}_{22} & \bar{f}_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{f}_{13} & \bar{f}_{23} & \bar{f}_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bar{f}_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{f}_{55} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{f}_{66} \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{A6.1.2})$$

representando \bar{f}_{ij} o conjunto de nove constantes de flexibilidade que quantificam o comportamento do material e

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad e \quad \bar{\mathbf{s}} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad ,$$

respectivamente as deformações e as tensões referidas aos eixos principais (x_1, x_2, x_3).

Pretende-se neste anexo, com base na definição da matriz de flexibilidade, (A6.1.2), obter a definição do operador de flexibilidade presente na equação,

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} \mathbf{s} \quad , \quad (\text{A6.1.3})$$

em que \mathbf{e} e \mathbf{s} representam, respectivamente, os vectores das deformações e das tensões referidas ao referencial (x, y, z) rodado de θ em relação ao referencial principal de ortotropia, conforme se representa na figura 6.2.

Tendo em conta o carácter tensorial dos tensores das tensões e das deformações, é possível relacionar o valor destes tensores no referencial principal com o seu valor no sistema de referência (x,y,z) por meio das relações,

$$\varepsilon_{ij} = a_{im} a_{jn} \bar{\varepsilon}_{mn} , \quad (\text{A6.1.4a})$$

$$\sigma_{ij} = a_{im} a_{jn} \bar{\sigma}_{mn} , \quad (\text{A6.1.4b})$$

$$\bar{\varepsilon}_{op} = a_{ko} a_{lp} \varepsilon_{kl} , \quad (\text{A6.1.4c})$$

$$\bar{\sigma}_{op} = a_{ko} a_{lp} \sigma_{kl} , \quad (\text{A6.1.4d})$$

em que, a_{ij} , representa os elementos da matriz de transformação definida por:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (\text{A6.1.5})$$

Com base na relação de elasticidade escrita para o referencial principal,

$$\bar{\varepsilon}_{mn} = \bar{F}_{mnop} \bar{\sigma}_{op} , \quad (\text{A6.1.6})$$

e tendo em conta as relações (A6.1.4), é possível definir a relação de elasticidade no referencial (x,y,z) na forma,

$$\varepsilon_{ij} = F_{ijkl} \sigma_{kl} , \quad (\text{A6.1.7})$$

em que,

$$F_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} \bar{F}_{mnop} . \quad (\text{A6.1.8})$$

Por forma a obter a matriz de flexibilidade a introduzir na relação de elasticidade, (A6.1.3), deve ter-se em conta a relação, válida em qualquer dos referenciais, existente entre os termos da matriz de flexibilidade e os termos do tensor de flexibilidade,

$$F_{1111} = f_{11} , \quad F_{2222} = f_{22} , \quad F_{3333} = f_{33} ,$$

$$F_{1122} = F_{2211} = f_{12} , \quad F_{1133} = F_{3311} = f_{13} , \quad F_{2233} = F_{3322} = f_{23} ,$$

$$F_{1112} = F_{1121} = F_{1211} = F_{2111} = \frac{1}{2} f_{16} ,$$

$$F_{1113} = F_{1131} = F_{1311} = F_{3111} = \frac{1}{2} f_{15} ,$$

$$F_{1123} = F_{1132} = F_{2311} = F_{3211} = \frac{1}{2} f_{14} ,$$

$$F_{2212} = F_{2221} = F_{1222} = F_{2122} = \frac{1}{2} f_{26} ,$$

$$F_{2213} = F_{2231} = F_{1322} = F_{3122} = \frac{1}{2} f_{25} ,$$

$$F_{2223} = F_{2232} = F_{2322} = F_{3222} = \frac{1}{2} f_{24} ,$$

$$F_{3312} = F_{3321} = F_{1233} = F_{2133} = \frac{1}{2} f_{36} ,$$

$$F_{3313} = F_{3331} = F_{1333} = F_{3133} = \frac{1}{2} f_{35} ,$$

$$F_{3323} = F_{3332} = F_{2333} = F_{3233} = \frac{1}{2} f_{34} ,$$

$$F_{2323} = F_{2332} = F_{3223} = F_{3232} = \frac{1}{4} f_{44} ,$$

$$F_{2313} = F_{2331} = F_{3213} = F_{3231} = F_{1323} = F_{1332} = F_{3123} = F_{3132} = \frac{1}{4} f_{45} ,$$

$$F_{2312} = F_{2321} = F_{3212} = F_{3221} = F_{1223} = F_{1232} = F_{2123} = F_{2132} = \frac{1}{4} f_{46} ,$$

$$F_{1313} = F_{1331} = F_{3113} = F_{3131} = \frac{1}{4} f_{55} ,$$

$$F_{1312} = F_{1321} = F_{3112} = F_{3121} = F_{1213} = F_{1231} = F_{2113} = F_{2131} = \frac{1}{4} f_{56} ,$$

$$F_{1212} = F_{1221} = F_{2112} = F_{2121} = \frac{1}{4} f_{66} .$$

Combinando estas relações com a transformação tensorial (A6.1.8), obtem-se a seguinte definição para os termos da matriz de flexibilidade presente em (A6.1.3),

$$f_{11} = \bar{f}_{11} C^4 + (2\bar{f}_{12} + \bar{f}_{66}) C^2 S^2 + \bar{f}_{22} S^4 , \quad (\text{A6.1.9a})$$

$$f_{12} = \bar{f}_{12} [S^4 + C^4] + (\bar{f}_{11} + \bar{f}_{22} - \bar{f}_{66}) C^2 S^2 , \quad (\text{A6.1.9b})$$

$$f_{13} = \bar{f}_{13} C^2 + \bar{f}_{23} S^2 , \quad (\text{A6.1.9c})$$

$$f_{16} = (2\bar{f}_{11} - 2\bar{f}_{12} - \bar{f}_{66}) C^3 S - (2\bar{f}_{22} - 2\bar{f}_{12} - \bar{f}_{66}) C S^3 \quad , \quad (\text{A6.1.9d})$$

$$f_{22} = \bar{f}_{11} S^4 + (2\bar{f}_{12} + \bar{f}_{66}) C^2 S^2 + \bar{f}_{22} C^4 \quad , \quad (\text{A6.1.9e})$$

$$f_{23} = \bar{f}_{13} S^2 + \bar{f}_{23} C^2 \quad , \quad (\text{A6.1.9f})$$

$$f_{26} = (2\bar{f}_{11} - 2\bar{f}_{12} - \bar{f}_{66}) C S^3 - (2\bar{f}_{22} - 2\bar{f}_{12} - \bar{f}_{66}) C^3 S \quad , \quad (\text{A6.1.9g})$$

$$f_{33} = \bar{f}_{33} \quad , \quad (\text{A6.1.9h})$$

$$f_{36} = 2(\bar{f}_{13} - \bar{f}_{23}) C S \quad , \quad (\text{A6.1.9i})$$

$$f_{44} = \bar{f}_{44} C^2 + \bar{f}_{55} S^2 \quad , \quad (\text{A6.1.9j})$$

$$f_{45} = (\bar{f}_{55} - \bar{f}_{44}) C S \quad , \quad (\text{A6.1.9k})$$

$$f_{55} = \bar{f}_{44} S^2 + \bar{f}_{55} C^2 \quad , \quad (\text{A6.1.9l})$$

$$f_{66} = 4(\bar{f}_{11} + \bar{f}_{12} - 2\bar{f}_{22}) C^2 S^2 + \bar{f}_{66} [C^2 - S^2]^2 \quad , \quad (\text{A6.1.9m})$$

em que:

$$C = \cos(\Theta) \quad ; \quad S = \sin(\Theta) \quad .$$

7 Análise de Peças Lineares

No presente capítulo são aplicadas às peças lineares as definições e formulações atrás apresentadas para as peças laminares. Assim, define-se uma peça linear, de acordo com o Vocabulário de Teoria das Estruturas³⁵, como um "corpo que se pode considerar gerado por uma figura plana, de forma e dimensões não necessariamente constantes, cujo centro de gravidade se desloca ao longo de uma linha de grande raio de curvatura à qual a figura se mantém perpendicular e cujo deslocamento é largamente superior às dimensões da figura". A "trajectória do centro de gravidade da figura geradora da peça linear" designa-se por eixo da peça linear, e a figura geradora da peça por secção transversal. Assim, a geometria de uma peça linear pode ser definida por meio da expressão paramétrica do seu eixo,

$$x = f(\alpha) , \quad y = g(\alpha) , \quad z = h(\alpha) ,$$

e da sua secção transversal,

$$\Omega = S(\alpha) ,$$

em que α representa o parâmetro definidor do eixo da peça e (x,y,z) um sistema cartesiano de coordenadas .

Esta definição é perfeitamente genérica, abrangendo peças lineares de eixo recto ou curvo. Para o caso das peças lineares de eixo recto, o parâmetro de definição da peça, α ,

pode passar a coincidir com a coordenada de referência, z por exemplo, restando a necessidade de descrever a variação da secção transversal ao longo do eixo na forma:

$$\Omega = \Omega (z) .$$

Centrando a atenção no caso das peças lineares de eixo recto, convem adaptar ao caso em estudo a notação introduzida para as peças laminares planas. Assim, considere-se que a peça linear é definida num volume, V , ao qual está associado o seu eixo \hat{V} , sendo a secção transversal da peça função da coordenada do eixo, $\Omega (z)$. A fronteira da peça linear pode assim ser dividida em duas zonas distintas, uma que corresponda às secções extremas da peça, Γ^+ e Γ^- , consoante a sua normal exterior seja segundo z ou segundo $-z$, respectivamente, e a superfície lateral da peça, Γ^z . Sendo o comprimento da peça igual a L , as secções extremas da peça linear, perpendiculares a z , são descritas na forma,

$$\Gamma^- : z = 0 , \quad \Gamma^+ : z = L ,$$

e o eixo da peça é definido como,

$$\hat{V} : 0 \leq z \leq L \wedge x = 0 \wedge y = 0 .$$

7.1 - Condições de compatibilidade

Analogamente ao que sucedia nas peças laminares, é conveniente simplificar a modelação do comportamento das peças lineares ao longo da sua secção transversal por forma a que, com poupança de meios de cálculo, se consiga uma boa definição para o comportamento ao longo do eixo da peça. Assim, o campo de deslocamentos na peça linear de eixo recto pode ser aproximado na forma,

$$u(x, y, z) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J [\hat{U}_{ij}(x,y) \hat{u}_{ij}(z)] , \quad (7.1)$$

em que a matriz,

$$\hat{U}_{ij}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x^{i-1} y^j}{(i-1)! j!} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{x^i y^{j-1}}{i! (j-1)!} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{x^i y^j}{i! j!} \end{bmatrix} \text{ para } i \geq 1 \text{ e } j \geq 1, \quad (7.2)$$

agrupa as funções de interpolação dos deslocamentos ao longo das secções transversais, e o vector,

$$\hat{u}_{ij}(z) = \left\{ \begin{array}{c} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right\}_{ij}, \quad (7.3)$$

agrupa os respectivos pesos. Estes pesos são funções da posição ocupada pela secção no eixo da estrutura, coordenada z .

A aproximação definida por (7.1) e (7.2) é em tudo análoga à efectuada para o caso das peças laminares. Refira-se que autores como Rigolot^{48,49} e Trabucho⁵⁴, recorrendo a escalas apropriadas, reduzem o problema tridimensional a uma sequência recursiva de problemas unidimensionais. Contudo, estas formulações baseiam-se na expansão dos campos de tensões e de deslocamentos em séries de potências da dimensão característica da secção transversal e não das ordenadas correspondentes, x e y .

Introduzindo a aproximação adoptada para o campo dos deslocamentos, (7.1), na equação de compatibilidade definida para os sólidos, (4.6), obtem-se a seguinte expressão para a equação de compatibilidade:

$$\epsilon = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J [D^*(\hat{U}_{ij}(x,y) \hat{u}_{ij}(z))] \quad (7.4)$$

Se se adoptar a decomposição do operador diferencial de compatibilidade, D^* , nas parcelas correspondentes aos diferentes eixos coordenados, (5.9), a equação (7.4) pode

ser expandida na forma:

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(N_x^t \frac{\partial \hat{U}_{ij}}{\partial x} + N_y^t \frac{\partial \hat{U}_{ij}}{\partial y} + N_z^t \hat{U}_{ij} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{u}_{ij} . \quad (7.5)$$

Sendo \hat{U}_{ij} dado por (7.2), verifica-se que as deformações generalizadas de ordem ij , e_{ij} , podem ser definidas por,

$$e_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{array} \right\}_{ij} = \hat{D}^* \hat{u}_{ij} \quad \text{em } \hat{V}, \quad (7.6)$$

em que,

$$\hat{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & 1 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot \end{bmatrix}, \quad (7.7)$$

define o novo operador diferencial de compatibilidade.

Analogamente ao que sucedia para as peças laminares, verifica-se que,

$$N_x^t \frac{\partial \hat{U}_{ij}}{\partial x} + N_y^t \frac{\partial \hat{U}_{ij}}{\partial y} + N_z^t \hat{U}_{ij} \frac{\partial}{\partial z} = E_{ij}(x,y) \hat{D}^*, \quad (7.8)$$

sendo,

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{x^{i-2} y^j}{(i-2)! j!} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{x^i y^{j-2}}{i! (j-2)!} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{x^i y^j}{i! j!} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{x^i y^{j-1}}{i! (j-1)!} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{x^{i-1} y^j}{(i-1)! j!} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{x^{i-1} y^{j-1}}{(i-1)! (j-1)!} \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

para $i \geq 2$ e $j \geq 2$.

Tendo em conta as relações (7.5), (7.6) e (7.8), as deformações são expressas em função das deformações independentes na forma,

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J [E_{ij}(x,y) e_{ij}(z)] \quad (7.10)$$

Para $i=0$, $i=1$, $j=0$ e $j=1$ torna-se necessário fazer alguns ajustamentos nas definições atrás apresentadas pelo que, ainda neste capítulo, serão analisados em detalhe estes casos particulares.

Quanto à condição de fronteira cinemática, (4.7), há que ter em conta a subdivisão efectuada nessa fronteira, $\Gamma_{\bar{u}} = \Gamma_{\bar{u}}^+ \cup \Gamma_{\bar{u}}^- \cup \Gamma_{\bar{u}}^Z$. Assim, ao longo da fronteira cinemática definida na superfície lateral da peça linear, $\Gamma_{\bar{u}}^Z$, há que respeitar a seguinte condição:

$$\mathbf{u}_* = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J [\hat{U}_{ij}(x,y) \hat{\mathbf{u}}_{ij}(z)] \quad \text{em } \Gamma_{\bar{u}}^Z \quad (7.11)$$

Ao longo das fronteiras cinemáticas contidas nas secções extremas da peça linear, $\Gamma_{\bar{u}}^+$ e $\Gamma_{\bar{u}}^-$, há que impor as condições de fronteira ordem a ordem, isto é,

$$\mathbf{u}_{*ij} = \hat{\mathbf{u}}_{ij}(0) \quad \text{para } z = 0, \quad (7.12a)$$

$$\mathbf{u}_{*ij} = \hat{\mathbf{u}}_{ij}(L) \quad \text{para } z = L \quad (7.12b)$$

7.2 - Condições de equilíbrio

Em consequência da interpolação efectuada para os deslocamentos, (7.1), a verificação da condição de equilíbrio, (4.4), deve ser realizada de uma forma ponderada. Assim, utilizando como funções de peso as funções de interpolação do campo de deslocamentos, a condição de equilíbrio toma a forma,

$$\int_{\Omega} \hat{U}_{ij}^t(x,y) (\mathbf{D} \sigma + \mathbf{b}) dx dy = \mathbf{0} \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}}, \quad (7.13)$$

representando Ω a secção transversal variável de ponto para ponto do eixo, $\hat{\mathbf{V}}$, isto é,

$\Omega(z)$. A partir da equação de equilíbrio (7.13) é possível definir as resultantes de ordem ij das forças de domínio na secção, \mathbf{b} , como,

$$\hat{\mathbf{b}}_{ij} = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{U}}_{ij}^t(x,y) \mathbf{b} \, dx \, dy \quad , \quad (7.14)$$

as quais são duais dos parâmetros de deslocamento, $\hat{\mathbf{u}}_{ij}$, visto verificarem a relação:

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}^t \mathbf{u} \, dx \, dy = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \hat{\mathbf{b}}_{ij}^t \hat{\mathbf{u}}_{ij} \quad .$$

Introduzindo a decomposição do operador diferencial de equilíbrio, \mathbf{D} , expressa em (5.17), na equação de equilíbrio (7.13), obtém-se a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{U}}_{ij}^t(x,y) \left(N_x \frac{\partial \sigma}{\partial x} + N_y \frac{\partial \sigma}{\partial y} + N_z \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) dx \, dy + \hat{\mathbf{b}}_{ij} = \mathbf{0} \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}} \quad . \quad (7.15)$$

Se na expressão (7.15) forem eliminados os termos $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ por meio da integração por partes verifica-se que a equação de equilíbrio pode ser escrita na forma,

$$\int_{\Omega} \left(- \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_{ij}^t}{\partial x} N_x - \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_{ij}^t}{\partial y} N_y + \hat{\mathbf{U}}_{ij}^t N_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \sigma \, dx \, dy + \\ + \int_{\omega} \hat{\mathbf{U}}_{ij}^t \frac{n_x N_x + n_y N_y}{\sqrt{1 - n_z^2}} \sigma \, d\omega + \hat{\mathbf{b}}_{ij} = \mathbf{0} \quad ,$$

em que ω representa o contorno da secção transversal podendo ser definido como,

$$\omega = \Omega \cap \Gamma^z \quad .$$

Tendo em conta a expressão (7.8), a relação existente entre operadores diferenciais adjuntos, (3.4), e a generalização da regra de Leibnitz para a derivação de integrais de superfície, é possível escrever a equação de equilíbrio local na forma,

$$\hat{\mathbf{D}} \, s_{ij} + \int_{\omega} \hat{\mathbf{U}}_{ij}^t \frac{N}{\sqrt{1 - n_z^2}} \sigma \, d\omega + \hat{\mathbf{b}}_{ij} = \mathbf{0} \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}} \quad , \quad (7.16)$$

em que,

$$s_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ s_{yz} \\ s_{xz} \\ s_{xy} \end{array} \right\}_{ij} = \int_{\Omega} E_{ij}^t \sigma \, dx \, dy \quad \text{em } \hat{V}, \quad (7.17)$$

define os esforços generalizados de ordem ij e \hat{D} representa o operador diferencial de equilíbrio, adjunto do operador diferencial de compatibilidade, \hat{D}^* .

Os esforços generalizados de ordem ij , tal como são definidos em (7.17), são as variáveis duais das deformações generalizadas de ordem ij , e_{ij} , pois verificam a relação:

$$\int_{\Omega} \sigma^t \varepsilon \, dx \, dy = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J s_{ij}^t e_{ij} .$$

No que diz respeito às condições de fronteira estática, deve ser tida em conta a subdivisão efectuada nesta fronteira, $\Gamma_{\sigma} = \Gamma_{\sigma}^+ \cup \Gamma_{\sigma}^- \cup \Gamma_{\sigma}^z$. Assim, ao longo da fronteira estática correspondente às faces laterais da peça linear, Γ_{σ}^z , a equação de equilíbrio é escrita na forma,

$$N \sigma = t_* \quad \text{em } \Gamma_{\sigma}^z . \quad (7.18)$$

Ao longo das fronteiras estáticas correspondentes às secções extremas da peça, Γ_{σ}^+ , Γ_{σ}^- , a condição de fronteira é estabelecida de uma forma ponderada utilizando como funções de ponderação as funções de interpolação dos deslocamentos:

$$\int_{\Gamma_{\sigma}^+} \hat{U}_{ij}^t N \sigma \, d\Gamma_{\sigma}^+ = \int_{\Gamma_{\sigma}^+} \hat{U}_{ij}^t t_* \, d\Gamma_{\sigma}^+ ; \quad (7.19a)$$

$$\int_{\Gamma_{\sigma}^-} \hat{U}_{ij}^t N \sigma \, d\Gamma_{\sigma}^- = \int_{\Gamma_{\sigma}^-} \hat{U}_{ij}^t t_* \, d\Gamma_{\sigma}^- . \quad (7.19b)$$

Sendo as superfícies Γ_{σ}^- e Γ_{σ}^+ perpendiculares ao eixo z , então as componentes n_x e n_y

da normal são nulas verificando-se que as equações (7.19) podem ser escritas na forma,

$$\hat{N} s_{ij} = t_{*ij}^+ \quad \text{para } z = L , \quad (7.20a)$$

$$\hat{N} s_{ij} = t_{*ij}^- \quad \text{para } z = 0 , \quad (7.20b)$$

em que,

$$t_{*ij}^+ = \int_{\Gamma_\sigma^+} \hat{U}_{ij}^t t_* \, d\Gamma_\sigma^+ , \quad (7.21a)$$

$$t_{*ij}^- = \int_{\Gamma_\sigma^-} \hat{U}_{ij}^t t_* \, d\Gamma_\sigma^- , \quad (7.21b)$$

reúnem as resultantes das tracções aplicadas nos topos da peça linear e,

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{n}_z & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{n}_z & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{n}_z & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} , \quad (7.22)$$

representa a matriz das normais associada ao operador diferencial de equilíbrio, \hat{D} .

Tendo em conta a relação (7.18) e o facto de se poder definir para cada secção transversal a sua fronteira estática como $\omega_\sigma = \omega \cap \Gamma_\sigma^Z$, a equação de equilíbrio (7.16) toma a forma,

$$\hat{D} s_{ij} + t_{*ij}^{\sigma z} + t_{ij}^{uz} + \hat{b}_{ij} = 0 \quad \text{em } \hat{V} , \quad (7.23)$$

em que,

$$t_{*ij}^{\sigma z} = \int_{\omega_\sigma} \hat{U}_{ij}^t \frac{t_*}{\sqrt{1 - n_z^2}} \, d\omega_\sigma , \quad (7.24)$$

e,

$$t_{ij}^{uz} = \int_{\omega_u} \hat{U}_{ij}^t \frac{t}{\sqrt{1 - n_z^2}} \, d\omega_u , \quad (7.25)$$

reunem, respectivamente, as resultantes das tracções existentes ao longo das fronteiras estática e cinemática correspondentes às faces laterais da peça linear.

Convém desde já salientar que as tracções, t , ao longo da fronteira cinemática, Γ_u^Z , não são *a priori* conhecidas, podendo ser interpoladas.

7.3 - Relações constitutivas

As relações constitutivas, formuladas em termos de rigidez, para o caso dos sólidos com comportamento elástico e isotrópico, são descritas pela relação (4.8b), atendendo à definição, (4.9b), para a matriz de rigidez. Se se introduzirem estas relações constitutivas na definição dos esforços generalizados, (7.17), tendo em conta a relação entre deformações e deformações generalizadas, (7.10), obtem-se para relação constitutiva a expressão,

$$s_{ij} = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L (K_{ijkl} e_{kl}) + s_{\theta ij} \quad \text{em } \hat{V}, \quad (7.26)$$

em que s_{ij} é o vector que agrupa os esforços generalizados de ordem ij , e_{kl} é o vector que agrupa as deformações generalizadas de ordem kl , sendo

$$K_{ijkl} = \int_{\Omega} E_{ij}^t k E_{kl} dx dy, \quad (7.27)$$

a matriz de rigidez que relaciona os esforços generalizados de ordem ij com as deformações generalizadas de ordem kl , e

$$s_{\theta ij} = \int_{\Omega} E_{ij}^t \sigma_{\theta} dx dy, \quad (7.28)$$

o vector dos esforços generalizados de ordem ij devidos a tensões residuais.

7.4 - Relações fundamentais

Partindo da interpolação expressa em (7.1) para o campo de deslocamentos, é possível rescrever as equações de compatibilidade, equilíbrio e de elasticidade das peças lineares de eixo recto, tomando agora como domínio de estudo o eixo da peça, \hat{V} .

Assim, a relação de compatibilidade é expressa na forma,

$$e_{kl} = \hat{D}^* \hat{u}_{kl} \quad \text{em } \hat{V}, \quad (7.29)$$

onde o vector e_{kl} agrupa as deformações generalizadas, \hat{u}_{kl} as funções de deslocamento

definidas para o eixo da estrutura, \hat{V} , e \hat{D}^* o operador diferencial de compatibilidade definido em (7.7).

A condição de compatibilidade ao longo da fronteira cinemática é expressa na forma,

$$\mathbf{u}_{*kl} = \hat{\mathbf{u}}_{kl}(0) \quad \text{para } z = 0, \quad (7.30a)$$

$$\mathbf{u}_{*kl} = \hat{\mathbf{u}}_{kl}(L) \quad \text{para } z = L, \quad (7.30b)$$

havendo ainda que ter em conta as relações que exprimem a condição de compatibilidade ao longo das fronteiras cinemáticas nas faces laterais da peça linear, escritas na forma,

$$\mathbf{u}_* = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L [\hat{\mathbf{U}}_{kl}(x,y) \hat{\mathbf{u}}_{kl}(z)] \quad \text{em } \Gamma_{\mathbf{u}}^z, \quad (7.31)$$

em que $\hat{\mathbf{U}}_{kl}$ representa a matriz que agrupa as funções de interpolação dos deslocamentos ao longo da secção transversal da peça e \mathbf{u}_* o vector que reúne os deslocamentos impostos ao longo da fronteira cinemática $\Gamma_{\mathbf{u}}^z$.

A condição de equilíbrio local, toma a forma,

$$\hat{\mathbf{D}} \mathbf{s}_{ij} + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{t}_{ij}^{uz} = 0 \quad \text{em } \hat{V}, \quad (7.32)$$

e impõe uma relação entre os esforços generalizados, agrupados no vector \mathbf{s}_{ij} , as resultantes das forças, reduzidas ao eixo da peça linear, devidas às acções estáticas,

$$\mathbf{b}_{ij} = \hat{\mathbf{b}}_{ij} + \mathbf{t}_{*ij}^{\sigma z}, \quad (7.33)$$

e as resultantes das tracções devidas à imposição de condições de fronteira cinemáticas ao longo das faces laterais da peça, \mathbf{t}_{ij}^{uz} .

A equação de equilíbrio ao longo da fronteira estática relaciona os esforços generalizados com as resultantes das tracções aplicadas na fronteira estática,

$$\hat{\mathbf{N}} \mathbf{s}_{ij} = \mathbf{t}_{*ij}^+ \quad \text{para } z = L, \quad (7.34a)$$

$$\hat{\mathbf{N}} \mathbf{s}_{ij} = \mathbf{t}_{*ij}^- \quad \text{para } z = 0. \quad (7.34b)$$

As relações constitutivas estabelecem a relação de dependência entre os esforços e as deformações generalizadas podendo ser descritas na forma,

$$s_{ij} = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L (k_{ijkl} e_{kl}) + s_{\theta ij} \quad \text{em } \hat{V}, \quad (7.35)$$

com k_{ijkl} e $s_{\theta ij}$ definidos de acordo com (7.27) e (7.28), respectivamente. Esta relação constitutiva pode ser invertida, sendo escrita como uma relação de flexibilidade,

$$e_{kl} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J [f_{klij} (s_{ij} - s_{\theta ij})] \quad \text{em } \hat{V}, \quad (7.36)$$

em que,

$$[f_{ijkl}] = [k_{ijkl}]^{-1} .$$

O conjunto de relações sumariadas permite resolver problemas envolvendo peças lineares de eixo recto tendo em conta o seu comportamento tridimensional, mas utilizando modelos lineares. Este modelo baseia-se na interpolação do campo de deslocamentos ao longo da secção transversal, (7.1), na interpolação das tracções ao longo da fronteira cinemática, e na integração por partes da equação de equilíbrio ao longo das secções transversais. Esta formulação permite encontrar soluções para o comportamento de peças lineares de eixo recto mais refinadas do que as habitualmente conseguidas com as teorias clássicas das vigas. Esta melhoria na qualidade das soluções resulta do aumento do número de modos de deformação admissíveis para as secções transversais, com a consequente consideração de um maior número de esforços. Por outro lado, e em relação a uma formulação tridimensional pura, o presente modelo exige um menor esforço de cálculo.

7.5 - Barra de estrutura articulada

Analise-se em seguida o caso particular das barras de estruturas articuladas, tomando unicamente o primeiro termo da formulação atrás apresentada. Considerando o termo de

ordem 00 obtem-se a seguinte interpolação para o campo de deslocamentos:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \{ \mathbf{u}_z \} = \hat{\mathbf{U}}_{00}(x,y) \hat{\mathbf{u}}_{00}(z) = [\mathbf{1}] \mathbf{u}_{z00}(z) . \quad (7.37)$$

Esta aproximação baseia-se no pressuposto de que o deslocamento segundo a direcção do eixo da barra é constante em cada secção transversal, só variando de secção para secção.

Em consequência da interpolação (7.37), e tendo em conta a equação de compatibilidade, (4.6), obtem-se a seguinte definição para as deformações,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \varepsilon_{zz} \} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_{z00}}{\partial z} \right\} . \quad (7.38)$$

Devido ao facto de não terem sido feitas quaisquer hipóteses acerca dos deslocamentos perpendiculares ao eixo da barra, o valor das restantes deformações não se encontra especificado.

As deformações generalizadas são definidas em função dos parâmetros de deslocamento por,

$$\mathbf{e}_{00} = \{ \mathbf{e}_{zz} \}_{00} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_{z00}}{\partial z} \right\} = \hat{\mathbf{D}}^* \hat{\mathbf{u}}_{00}(z) , \quad (7.39)$$

sendo as deformações escritas em função das deformações generalizadas na forma,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}_{00} \mathbf{e}_{00} , \quad (7.40)$$

em que o operador diferencial, $\hat{\mathbf{D}}^*$, e a matriz de compatibilidade, \mathbf{E}_{00} , são definidos por,

$$\hat{\mathbf{D}}^* = \left[\frac{\partial}{\partial z} \right] , \quad (7.41)$$

$$\mathbf{E}_{00} = [\mathbf{1}] . \quad (7.42)$$

As relações de compatibilidade, (7.39) e (7.40), mostram claramente que para a peça linear de ordem 00 se considera apenas um modo de deformação ao nível da secção transversal, a extensão axial, logo que se está na presença de um modelo idêntico ao que simula o comportamento de uma barra de estrutura articulada.

Ao nível das equações de equilíbrio, verifica-se que, ao definir como esforço generalizado, s_{00} , o dual da deformação generalizada, e_{00} ,

$$s_{00} = \{ s_{zz} \}_{00} = \int_{\Omega} E_{00}^t \sigma \, dx \, dy = \int_{\Omega} \sigma_{zz} \, dx \, dy \quad , \quad (7.43)$$

se obtém para equação de equilíbrio local,

$$\hat{D} s_{00} + b_{00} + t_{00}^{uz} = 0 \quad . \quad (7.44)$$

Nesta equação o operador diferencial de equilíbrio, \hat{D} , apresenta a mesma definição que o seu adjunto, \hat{D}^* e as resultantes das forças das acções estáticas, reduzidas ao eixo da peça, b_{00} ,

$$b_{00} = \hat{b}_{00} + t_{00}^{\sigma z} \quad , \quad (7.45)$$

em que,

$$\hat{b}_{00} = \int_{\Omega} \{ b_z \} \, d\Omega \quad , \quad t_{00}^{\sigma z} = \int_{\omega} \{ t_{z^*} \} \, d\omega \quad . \quad (7.46)$$

Na equação (7.44) o termo, t_{00}^u , representa a resultante das tracções devidas à imposição de condições de fronteira cinemáticas ao longo das faces laterais da peça linear, sendo definida por meio da equação (7.25).

Atendendo à definição (7.43) apresentada para o esforço generalizado, s_{00} , conclui-se que este esforço representa a resultante das tensões axiais na secção transversal, usualmente designado como esforço normal. A equação (7.44) exprime o equilíbrio entre a variação do esforço normal ao longo da peça, as forças de domínio e as tracções aplicadas segundo a direcção do eixo da peça linear.

No que diz respeito às relações constitutivas, considere-se a definição dada para a matriz de rigidez, K_{0000} , (7.27), e tenha-se em conta a definição de E_{00} , (7.42). Não tendo sido introduzidas quaisquer condições para os deslocamentos perpendiculares ao eixo da barra, e consequentemente para as deformações correspondentes, é possível admitir diferentes hipóteses para o valor destas deformações ou para as tensões não envolvidas

até ao momento nesta formulação. Siga-se então uma metodologia análoga à utilizada para os estados planos de deformação e considere-se o anulamento das deformações ϵ_{xx} e ϵ_{yy} . Para o caso de secções transversais homogéneas e representando,

$$S(z) = \int_{\Omega(z)} dx dy ,$$

a área da secção transversal de coordenada z , a relação constitutiva tomará a forma:

$$s_{00} = \frac{E (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} S(z) e_{00} + s_{00\theta} . \quad (7.47)$$

Esta relação constitutiva, corresponde a uma barra resistente a esforço normal que se encontra confinada em todas as direcções excepto na direcção axial, logo onde se impõe o anulamento de todas as extensões excepto a axial. Este elemento de barra, como é óbvio, não representa a barra de estrutura articulada habitual.

Se, analogamente ao que sucedia nos estados planos de tensão, não se impuser o anulamento das deformações ϵ_{xx} e ϵ_{yy} , mas sim o anulamento das tensões σ_{xx} e σ_{yy} então a equação constitutiva, (7.35), tomará a forma,

$$s_{00} = E S(z) e_{00} + s_{00\theta} , \quad (7.48)$$

a qual corresponde à equação constitutiva habitualmente utilizada nas barras de secção isotrópica e homogénea das estruturas articuladas também designada como barra biarticulada ou de treliça.

7.6 - Barra de pórtico

Considere-se agora além do termo $i=0 \ j=0$, todos os termos de ordem 1 da formulação atrás apresentada, obtendo-se a seguinte interpolação para o campo de deslocamentos,

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_{10} + y \mathbf{u}_{11} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_{01} + x \mathbf{v}_{11} \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_{00} + x \mathbf{w}_{10} + y \mathbf{w}_{01} + x y \mathbf{w}_{11} \end{cases} . \quad (7.49)$$

Tendo em conta que as parcelas de deslocamento \mathbf{u}_{11} e \mathbf{v}_{11} estão associadas à rotação e

distorção da secção transversal, proceda-se a uma mudança de variáveis que, não alterando em nada a interpolação adoptada, permite identificar explicitamente estas duas deformações. Assim rescreva-se a aproximação (7.49) na forma,

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_{10} + y \Psi_{11} - y \Theta_{11} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_{01} + x \Psi_{11} + x \Theta_{11} \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_{00} + x \mathbf{w}_{10} + y \mathbf{w}_{01} + x y \mathbf{w}_{11} \end{cases}, \quad (7.50)$$

em que,

$$\Theta_{11} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{11} - \mathbf{u}_{11}) \quad \text{e} \quad \Psi_{11} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{11} + \mathbf{u}_{11}).$$

A aproximação para o campo de deslocamentos pode assim ser expressa em função dos parâmetros de deslocamentos pela relação,

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{U}}(x,y) \hat{\mathbf{u}}(z) \quad (7.51)$$

em que,

$$\hat{\mathbf{U}}(x,y) = \begin{bmatrix} . & \mathbf{1} & . & . & . & -y & y & . \\ . & . & . & \mathbf{1} & . & x & x & . \\ \mathbf{1} & . & x & . & y & . & . & xy \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}(z) = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{00} \\ \mathbf{u}_{10} \\ \mathbf{w}_{10} \\ \mathbf{v}_{01} \\ \mathbf{w}_{01} \\ \Theta_{11} \\ \Psi_{11} \\ \mathbf{w}_{11} \end{Bmatrix}. \quad (7.52)$$

Em consequência desta interpolação para o campo de deslocamentos, as deformações podem ser definidas em função das deformações generalizadas como,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{e}, \quad (7.53)$$

em que,

$$E(x,y) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{1} & \cdot & \mathbf{x} & \cdot & \mathbf{y} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{xy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \quad (7.54)$$

As deformações generalizadas são definidas em termos dos parâmetros de deslocamento pela equação de compatibilidade, (7.6), escrita na forma,

$$e = \hat{D}^* \hat{u} \quad (7.55)$$

em que:

$$e = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\varepsilon} \\ \kappa_x \\ \chi_y \\ \kappa_y \\ \chi_x \\ \chi_z \\ \kappa_{xy} \\ \chi_{xy} \\ \Psi_{xy} \end{array} \right\}; \quad \hat{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{1} & \cdot \end{bmatrix}. \quad (7.56)$$

As definições apresentadas para as deformações generalizadas, (7.55), bem como a relação (7.53), permitem reconhecer como deformações generalizadas a extensão axial média na secção transversal, $\bar{\varepsilon}$, a deformação por esforço transversal segundo a direcção x , κ_x , a curvatura segundo y , χ_y , a deformação por esforço transversal segundo y , κ_y , a curvatura segundo x , χ_x , e a rotação unitária de torção, χ_z . Quanto às restantes deformações generalizadas, a sua identificação deixa de ser óbvia, pelo que, mais adiante, serão objecto de atenção específica.

Ao nível das condições de equilíbrio, verifica-se que, quando se consideram apenas os

termos até à ordem 1 da expansão do campo de deslocamentos ao longo da secção transversal, se encontra a seguinte definição para os esforços generalizados:

$$s = \begin{Bmatrix} N \\ V_x \\ M_y \\ V_y \\ M_x \\ T \\ V_{xy} \\ M_{xy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{\Omega} E^t \sigma \, dx \, dy \quad . \quad (7.57)$$

Analisando o significado físico das várias componentes dos esforços generalizados, verifica-se que estas componentes correspondem ao esforço normal, N , ao esforço transversal segundo x , V_x , ao momento flector segundo y , M_y , ao esforço transversal segundo y , V_y , ao momento flector segundo x , M_x , ao momento torsor, T , e ao bimomento, M_{xy} .

A equação de equilíbrio local, (7.26), toma a forma,

$$\hat{D} s + b + t^{uz} = 0 \quad (7.58)$$

em que, o operador diferencial de equilíbrio, \hat{D} , é o adjunto do operador de compatibilidade, \hat{D}^* , definido em (7.56). As resultantes das forças devidas a acções estáticas, b , resultam da soma das resultantes das forças de domínio com as tracções aplicadas sobre as faces laterais da peça linear,

$$b = \hat{b} + t^{\sigma z} = \int_{\Omega} \hat{U}^t \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\omega_{\sigma}} \hat{U}^t \begin{Bmatrix} t_{x^*} \\ t_{y^*} \\ t_{z^*} \end{Bmatrix} d\omega_{\sigma} \quad . \quad (7.59)$$

Na equação (7.58), o termo t^{uz} representa as resultantes das tracções devidas à imposição das condições de fronteira cinemáticas ao longo das faces laterais da peça linear:

$$t^{uz} = \int_{\omega_u} \hat{U}^t \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} d\omega_u \quad . \quad (7.60)$$

Para uma melhor compreensão do significado de cada uma das componentes de esforço, tem interesse analisar o desenvolvimento da equação de equilíbrio (7.58), a qual pode ser expressa na forma:

$$\frac{\partial N}{\partial z} + \int_{\Omega} b_z \, d\Omega + \int_{\omega_{\sigma}} t_{z*} \, d\omega_{\sigma} + \int_{\omega_u} t_z \, d\omega_u = 0 ; \quad (7.61a)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} + \int_{\Omega} b_x \, d\Omega + \int_{\omega_{\sigma}} t_{x*} \, d\omega_{\sigma} + \int_{\omega_u} t_x \, d\omega_u = 0 ; \quad (7.61b)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial z} - V_x + \int_{\Omega} x \, b_z \, d\Omega + \int_{\omega_{\sigma}} x \, t_{z*} \, d\omega_{\sigma} + \int_{\omega_u} x \, t_z \, d\omega_u = 0 ; \quad (7.61c)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial z} + \int_{\Omega} b_y \, d\Omega + \int_{\omega_{\sigma}} t_{y*} \, d\omega_{\sigma} + \int_{\omega_u} t_y \, d\omega_u = 0 ; \quad (7.61d)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} - V_y + \int_{\Omega} y \, b_z \, d\Omega + \int_{\omega_{\sigma}} y \, t_{z*} \, d\omega_{\sigma} + \int_{\omega_u} y \, t_z \, d\omega_u = 0 ; \quad (7.61e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} + \int_{\Omega} (x \, b_y - y \, b_x) \, d\Omega + \int_{\omega_{\sigma}} (x \, t_{y*} - y \, t_{x*}) \, d\omega_{\sigma} + \\ + \int_{\omega_u} (x \, t_y - y \, t_x) \, d\omega_u = 0 ; \end{aligned} \quad (7.61f)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{xy}}{\partial z} - p_{xy} + \int_{\Omega} (x \, b_y + y \, b_x) \, d\Omega + \int_{\omega_{\sigma}} (x \, t_{y*} + y \, t_{x*}) \, d\omega_{\sigma} + \\ + \int_{\omega_u} (x \, t_y + y \, t_x) \, d\omega_u = 0 ; \end{aligned} \quad (7.61g)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial z} - V_{xy} + \int_{\Omega} x \, y \, b_z \, d\Omega + \int_{\omega_{\sigma}} x \, y \, t_{z*} \, d\omega_{\sigma} + \int_{\omega_u} x \, y \, t_z \, d\omega_u = 0 . \quad (7.61h)$$

As equações de equilíbrio, (7.61a), (7.61b), (7.61c), (7.61d) e (7.61e) são as equações de equilíbrio habitualmente utilizadas na análise de pórticos em flexão composta desviada, estando associadas às definições das deformações, $\bar{\epsilon}$, κ_x , κ_y , χ_x , χ_y . A

equação de equilíbrio (7.61f) exprime o equilíbrio em termos da torção, estando associada à deformação por torção, χ_z .

As equações (7.61g) e (7.61h) exprimem a interacção entre o esforço referente ao empenamento, χ_{xy} , o bimomento, M_{xy} , e os esforços relacionados com a distorção da secção, V_{xy} e p_{xy} . Tendo em conta a analogia existente entre as relações entre os momentos flectores e os esforços transversos, (7.61c) e (7.61e), e a relação (7.61h), o esforço V_{xy} passará a ser designado como esforço transversal de distorção e o esforço p_{xy} como força de distorção, sendo as respectivas deformações generalizadas designadas como deformação por esforço transversal de distorção, κ_{xy} , e taxa de distorção, Ψ_{xy} .

No que diz respeito às relações constitutivas, considere-se a definição dada para a matriz de rigidez, \mathbf{k} , (7.27), e tenha-se em conta a definição de \mathbf{E} , (7.54). A relação constitutiva, (7.26), tomará assim a forma,

$$\mathbf{s} = \mathbf{K} \mathbf{e} + \mathbf{s}_\theta, \quad (7.62)$$

em que a matriz de rigidez \mathbf{K} , para o caso de um comportamento elástico, linear e isotrópico em secções transversais homogéneas, é definida por,

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} E'S & . & E'S_x & . & E'S_y & . & . & E'S_{xy} \\ . & GS & . & . & . & -GS_y & GS_y & . \\ E'S_x & . & E'S_{xx} & . & E'S_{xy} & . & . & E'S_{xxy} \\ . & . & . & GS & . & GS_x & GS_x & . \\ E'S_y & . & E'S_{xy} & . & E'S_{yy} & . & . & E'S_{xyy} \\ . & -GS_y & . & GS_x & . & G(S_{xx} + S_{yy}) & G(S_{xx} - S_{yy}) & . \\ . & GS_y & . & GS_x & . & G(S_{xx} - S_{yy}) & G(S_{xx} + S_{yy}) & . \\ E'S_{xy} & . & E'S_{xxy} & . & E'S_{xyy} & . & . & E'S_{xxyy} \end{vmatrix}$$

em que,

$$S_\varphi = \int_{\Omega} \varphi \, d\Omega,$$

e G representa o módulo de distorção.

O módulo de elasticidade longitudinal, E' , é definido como,

$$E' = E \quad \text{se} \quad \sigma_{xx} = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{yy} = 0 \quad ,$$

$$E' = \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E \quad \text{se} \quad \varepsilon_{xx} = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{yy} = 0 \quad .$$

Os resultados resumidos em (7.55), (7.58) e (7.62) estão de acordo com os modelos habitualmente apresentados na literatura para a análise de vigas de pórticos. Se se impuzer o anulamento das deformações generalizadas, κ_x , κ_y , χ_z , κ_{xy} , χ_{xy} e Ψ_{xy} então o modelo desenvolvido coincide com o utilizado na flexão composta desviada de vigas, teoria de Euler-Bernoulli, tal como é apresentado por Arantes e Oliveira³⁶ ou Veubeke⁵⁶.

Para se obter o caso da viga deformável por esforço transversal, viga de Timoshenko, tal como a apresenta Veubeke⁵⁶, basta impôr, em (7.55), (7.58) e (7.62), o anulamento das deformações referentes à torção, χ_z , ao empenamento, χ_{xy} , e à distorção κ_{xy} e Ψ_{xy} . Usualmente, para corrigir a hipótese das tensões tangenciais serem constantes ao longo da secção, a área da secção transversal, a utilizar na resistência ao corte, é minorada por um factor de corte, análogo ao utilizado no modelo de laje de Reissner-Mindlin. O modelo de viga, definido por (7.55), (7.58) e (7.62) é utilizado por Pereira⁴⁰ na análise fisicamente não linear de pórticos de betão armado, não se considerando os efeitos do empenamento e da distorção e desprezando-se a interacção torção-corte.

O modelo de comportamento de vigas incluindo a flexão composta desviada, a deformabilidade por corte, a torção e o empenamento coincide com o desenvolvido por Vlassov⁵⁷, desde que se considere a secção transversal não deformável no seu plano, logo que se considere nula a taxa de distorção, $\Psi_{xy} = 0$.

7.7 - Modelo EG em peças lineares

A análise de peças lineares com base na formulação apresentada completa-se com o estudo do seu comportamento na direcção do eixo da peça. Para esta análise procede-se à aplicação às peças lineares dos modelos estáticos de elementos finitos, formulados no capítulo 2. Seguindo uma metodologia idêntica à adoptada no caso das peças laminares, esta aplicação será desenvolvida para o modelo EG, podendo ser generalizada para os restantes modelos. A aplicação do modelo estático de elementos finitos com funções de interpolação autoequilibradas, EA, pode ser encontrada em Pereira⁴¹, utilizando um modelo de peças lineares análogo ao anteriormente formulado, e aplicado à análise de pórticos tridimensionais de betão armado.

Com vista à aplicação do modelo EG ao estudo das peças lineares considera-se a decomposição do campo de esforços generalizados nas seguintes parcelas,

$$s_{ij} = s_{cij} + s_{0ij} , \quad (7.63)$$

sendo s_{0ij} a parcela particular e s_{cij} a parcela complementar tal que

$$s_{cij} = S X_{ij} , \quad (7.64)$$

onde a matriz S agrupa as funções de interpolação e o vector X_{ij} os pesos que lhes estão associados, designados como esforços independentes.

Tendo em conta esta interpolação para os esforços, as equações de equilíbrio no domínio, (7.32), e de equilíbrio na fronteira estática, (7.34a) e (7.34b), podem ser escritas do seguinte modo:

$$\hat{D} S X_{ij} + \hat{D} s_{0ij} + t_{ij}^{uz} + b_{ij} = 0 \quad \text{em } \hat{V} , \quad (7.65)$$

$$\hat{N} S X_{ij} + \hat{N} s_{0ij} = t_{*ij}^+ \quad \text{para } z = L , \quad (7.66a)$$

$$\hat{N} S X_{ij} + \hat{N} s_{0ij} = t_{*ij}^- \quad \text{para } z = 0 . \quad (7.66b)$$

A equação de compatibilidade local (7.29) pode ser satisfeita de uma forma ponderada, em que as funções de peso coincidem com as funções de interpolação de esforços,

$$\int S^t (e_{ij} - \hat{D}^* \hat{u}_{ij}) d\hat{V} = 0 , \quad (7.67)$$

tomando assim a forma de uma equação de compatibilidade ponderada,

$$v_{ij} = \int S^t e_{ij} d\hat{V} = \int S^t \hat{D}^* \hat{u}_{ij} d\hat{V} \quad (7.68)$$

agrupando o vector v_{ij} as deformações independentes, duais dos esforços independentes X_{ij} , visto verificarem a relação:

$$\int s_{cij}^t e_{ij} d\hat{V} = X_{ij}^t v_{ij} .$$

Se forem introduzidas em (7.68) as relações constitutivas expressas na forma (7.36) e tendo em conta a interpolação dos esforços (7.63) e (7.64) obtém-se a seguinte relação entre deformações independentes e esforços independentes:

$$v_{ij} = F_{ijkl} X_{kl} + v_{0ij} - v_{\theta ij} \quad (7.69)$$

em que

$$F_{ijkl} = \int S^t f_{ijkl} S d\hat{V} , \quad (7.70a)$$

$$v_{0ij} = \int S^t f_{ijkl} s_{0kl} d\hat{V} , \quad (7.70b)$$

$$v_{\theta ij} = \int S^t f_{ijkl} s_{\theta kl} d\hat{V} . \quad (7.70c)$$

Se, por outro lado, se proceder à integração por partes do segundo membro da equação (7.68), obtém-se a seguinte definição alternativa para as deformações independentes:

$$v_{ij} = \left[(\hat{N} S)^t \hat{u}_{ij} \right]_0^L - \int (\hat{D} S)^t \hat{u}_{ij} d\hat{V} . \quad (7.71)$$

Combinando as relações (7.69) e (7.71) obtém-se para equação de compatibilidade a

relação:

$$\mathbf{F}_{ijkl} \mathbf{X}_{kl} + v_{0ij} - v_{\theta ij} = \left[(\hat{\mathbf{N}} \mathbf{S})^t \hat{\mathbf{u}}_{ij} \right]_0^L - \int (\hat{\mathbf{D}} \mathbf{S})^t \hat{\mathbf{u}}_{ij} d\hat{\mathbf{V}} . \quad (7.72)$$

Considere-se a seguinte interpolação para os deslocamentos no domínio,

$$\hat{\mathbf{u}}_{ij} = \mathbf{U} \mathbf{d}_{ij} \quad \text{em } \hat{\mathbf{V}} , \quad (7.73)$$

onde a matriz \mathbf{U} agrupa as funções de interpolação e o vector \mathbf{d}_{ij} os pesos que lhes estão associados.

Nas extremidades da peça linear, os deslocamentos podem ser escritos na forma,

$$\hat{\mathbf{u}}_{ij} = \mathbf{q}_{ij}^+ \quad \text{para } z = L , \quad (7.74a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{ij} = \mathbf{q}_{ij}^- \quad \text{para } z = 0 , \quad (7.74b)$$

onde os vectores \mathbf{q}_{ij}^+ e \mathbf{q}_{ij}^- agrupam, respectivamente, os deslocamentos nas extremidades $z = L$ e $z = 0$. No caso de existirem condições de fronteira cinemáticas nas extremidades da peça linear, as condições de fronteira (7.30a) e (7.30b) podem ser escritas como:

$$\mathbf{q}_{ij}^+ = \mathbf{u}_{*ij}(L) \quad \text{para } z = L ; \quad (7.75a)$$

$$\mathbf{q}_{ij}^- = \mathbf{u}_{*ij}(0) \quad \text{para } z = 0 . \quad (7.75b)$$

Tendo em conta as interpolações de deslocamentos acima definidas, a equação de compatibilidade, (7.72), pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{F}_{ijkl} \mathbf{X}_{kl} + \mathbf{A} \mathbf{d}_{ij} - \mathbf{B} \mathbf{q}_{ij} = v_{\theta ij} - v_{0ij} , \quad (7.76)$$

em que,

$$\mathbf{A} = \int (\hat{\mathbf{D}} \mathbf{S})^t \mathbf{U} d\hat{\mathbf{V}} , \quad (7.77a)$$

$$\mathbf{B} = \left[(\hat{\mathbf{N}} \mathbf{S})_{z=L}^t \mid (\hat{\mathbf{N}} \mathbf{S})_{z=0}^t \right] , \quad (7.77b)$$

$$\mathbf{q}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{ij}^+ \\ \mathbf{q}_{ij}^- \end{bmatrix} . \quad (7.77c)$$

A condição de equilíbrio no domínio definida por (7.65) não sendo respeitada localmente, visto as funções de interpolação dos esforços generalizados não serem autoequilibradas, deve ser imposta de uma forma ponderada. Esta imposição é feita utilizando como funções de ponderação as funções de interpolação dos deslocamentos no domínio, U .

Simultaneamente as tracções aplicadas ao longo das fronteiras cinemáticas correspondentes à superfície lateral da peça são interpoladas na forma,

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{r} \text{ em } \Gamma_{\mathbf{u}}^Z, \quad (7.78)$$

em que \mathbf{T} é a matriz que agrupa as funções de interpolação das tracções ao longo de $\Gamma_{\mathbf{u}}^Z$ e \mathbf{r} o vector que agrupa os respectivos pesos. Nestas condições a equação de equilíbrio (7.65), tendo em conta a definição (7.25), pode ser escrita como,

$$\mathbf{A}^t \mathbf{X}_{ij} + \mathbf{C}_{ij} \mathbf{r} = - \mathbf{R}_{ij} - \mathbf{R}_{0ij}, \quad (7.79)$$

em que,

$$\mathbf{C}_{ij} = \int U^t \hat{\mathbf{U}}_{ij}^t \mathbf{T} \, d\Gamma_{\mathbf{u}}^Z, \quad (7.80a)$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \int U^t \mathbf{b}_{ij} \, d\Gamma_{\sigma}^Z, \quad (7.80b)$$

$$\mathbf{R}_{0ij} = \int U^t \hat{\mathbf{D}} \, s_{0j} \, d\hat{\mathbf{V}}, \quad (7.80c)$$

sendo a matriz de equilíbrio, \mathbf{A}^t , transposta da matriz de compatibilidade, \mathbf{A} , definida em (7.77a).

As forças de domínio generalizadas de ordem ij , \mathbf{R}_{ij} , são duais dos parâmetros de deslocamento, \mathbf{d}_{ij} , visto verificarem a relação:

$$\int \mathbf{b}_{ij}^t \hat{\mathbf{u}}_{ij} \, d\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{R}_{ij}^t \mathbf{d}_{ij}.$$

Para que se garanta o equilíbrio ao longo da fronteira estática nas extremidades da peça linear torna-se necessário respeitar as equações (7.66a) e (7.66b). Tendo em conta a

definição da matriz de compatibilidade, \mathbf{B} , expressa em (7.77b), o equilíbrio nas secções extremas da peça linear pode assim ser expresso na forma,

$$\mathbf{B}^t \mathbf{X}_{ij} = \mathbf{Q}_{*ij} - \mathbf{Q}_{0ij}, \quad (7.81)$$

em que,

$$\mathbf{Q}_{*ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{*ij}^+ \\ \mathbf{t}_{*ij}^- \end{bmatrix}, \quad (7.82a)$$

$$\mathbf{Q}_{0ij} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}} \mathbf{s}_{0ij}(L) \\ \hat{\mathbf{N}} \mathbf{s}_{0ij}(0) \end{bmatrix}, \quad (7.82b)$$

e \mathbf{B}^t representa a matriz de equilíbrio, transposta da matriz de compatibilidade, \mathbf{B} .

As forças de fronteira generalizadas de ordem ij , \mathbf{Q}_{*ij} , são duais dos parâmetros de deslocamento, \mathbf{q}_{ij} , visto verificarem as relações:

$$\mathbf{t}_{*ij}^+ \hat{\mathbf{u}}_{ij}(L) = \mathbf{Q}_{*ij}^+ \mathbf{q}_{ij}^+ ;$$

$$\mathbf{t}_{*ij}^- \hat{\mathbf{u}}_{ij}(0) = \mathbf{Q}_{*ij}^- \mathbf{q}_{ij}^- .$$

A compatibilidade ao longo da fronteira cinemática ao longo da superfície lateral da peça é imposta por meio da equação (7.31). Proceda-se assim à substituição do campo de deslocamentos pela interpolação definida em (7.73). Se se impuzer a satisfação destas equações de compatibilidade de uma forma ponderada em que as funções de peso coincidem com as funções de interpolação definidas em (7.78), estas tomam a forma,

$$\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \mathbf{C}_{ij}^t \mathbf{d}_{ij} = \mathbf{e}_*, \quad (7.83)$$

em que,

$$\mathbf{e}_* = \int \mathbf{T}^t \mathbf{u}_* \, d\Gamma_u^z . \quad (7.84)$$

Os parâmetros de deformação, e_* , são duais dos parâmetros de tracção, r , visto verificarem a relação:

$$\int u_*^t t \, d\Gamma_u^z = e_*^t r \quad .$$

Estando garantida a condição de equilíbrio no domínio de uma forma ponderada por meio da equação (7.79), a condição de compatibilidade no domínio de uma forma ponderada por meio da equação de compatibilidade (7.76), a condição de equilíbrio na fronteira de uma forma ponderada por meio da relação (7.81) e a condição de compatibilidade na fronteira também de uma forma ponderada por meio da equação (7.83), tem-se para o modelo EG uma formulação coerente que obedece a todas as relações fundamentais atrás expressas, podendo ser descrita pelo seguinte sistema governativo,

$$\begin{bmatrix} -F & -A & B & . \\ -A^t & . & . & -C \\ B^t & . & . & . \\ . & -C^t & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ d \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_0 - v_\theta \\ R + R_0 \\ Q_* - Q_0 \\ -e_* \end{Bmatrix} \quad , \quad (7.85)$$

em que,

$$\begin{aligned} F &= [F_{ijkl}] \quad , \quad C = [C_{ij}] \quad , \\ X &= \{X_{ij}\} \quad , \quad d = \{d_{ij}\} \quad , \quad q = \{q_{ij}\} \quad , \\ v_0 &= \{v_{0ij}\} \quad , \quad v_\theta = \{v_{\theta ij}\} \quad , \\ R &= \{R_{ij}\} \quad , \quad R_0 = \{R_{0ij}\} \quad , \\ Q_* &= \{Q_{*ij}\} \quad , \quad Q_0 = \{Q_{0ij}\} \quad . \end{aligned}$$

7.8 - Exemplo de aplicação

Pórtico tridimensional de betão armado

A formulação desenvolvida por Pereira⁴⁰ pode ser considerada como um caso particular da formulação atrás apresentada. Assim, cada peça linear é considerada como um único elemento finito, o qual se considera como tendo o comportamento apresentado na secção 7.6 para a barra de pórtico. Adicionalmente, considera-se que todas as peças lineares são indeformáveis por corte, não sendo considerados os efeitos da interacção flexão-torção-corte. Nestas condições, o operador de rigidez presente na relação constitutiva (7.62) toma a forma,

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} E' & . & x E' & . & y E' & . & . & . \\ . & \infty & . & . & . & . & . & . \\ x E' & . & x^2 E' & . & x y E' & . & . & . \\ . & . & . & \infty & . & . & . & . \\ y E' & . & x y E' & . & y^2 E' & . & . & . \\ . & . & . & . & . & (x^2 + y^2) G & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \infty & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \infty \end{bmatrix} d\Omega, \quad (7.86)$$

em que, Ω , representa a secção transversal, E' , o módulo de elasticidade longitudinal e, G , o módulo de distorção.

Para o caso da análise de peças de betão armado, é introduzida na definição da matriz de rigidez, (7.86), não só a heterogeneidade do conjunto betão-aço, mas também o comportamento não linear das relações tensões deformações do betão e do aço.

Finalmente, para se obter a formulação apresentada em Pereira⁴⁰, basta utilizar como funções de interpolação dos esforços independentes funções autoequilibradas, isto é, que verificam a equação de equilíbrio, (7.32), na ausência de forças de domínio, obtendo-se

assim uma formulação para o modelo EA aplicada ao estudo de peças lineares de betão armado.

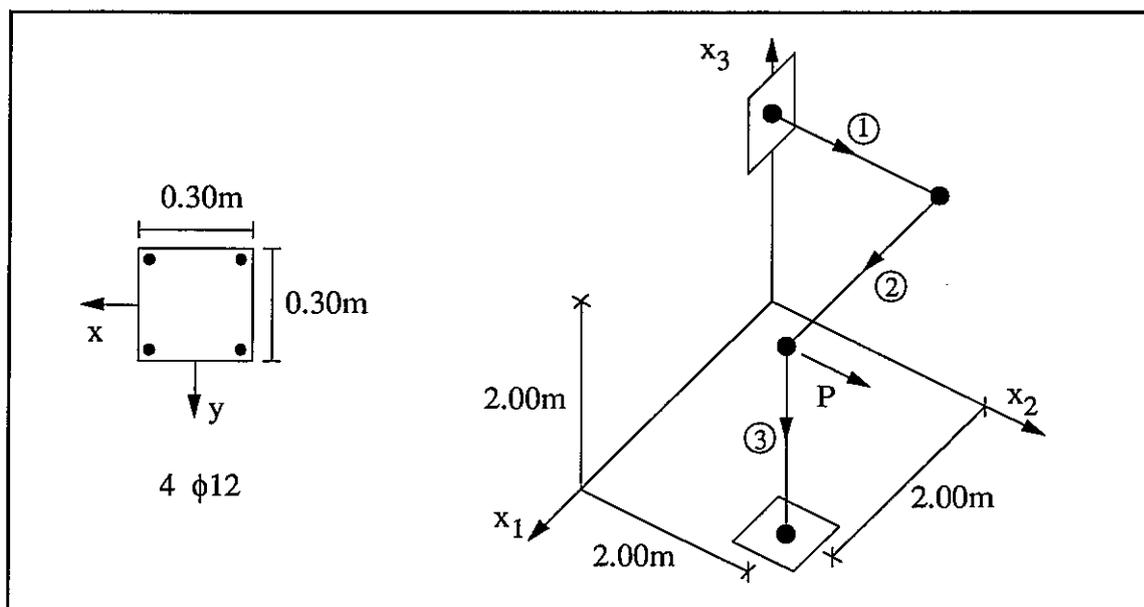


Figura 7.1 - Pórtico tridimensional de betão armado.

Com base nesta formulação, foi analisado o pórtico de betão armado, de secção transversal constante, representado na figura 7.1 sujeito à acção da carga concentrada aí indicada.

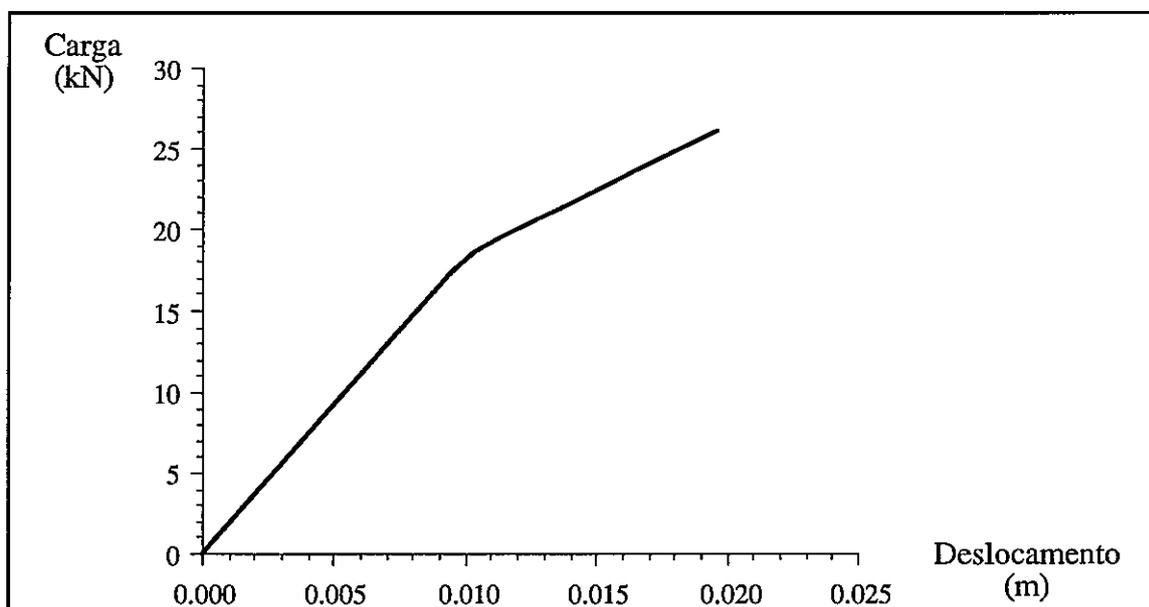


Figura 7.2 - Diagrama carga-deslocamento para o pórtico tridimensional de betão armado.

A secção transversal adoptada para a estrutura é a representada na figura 7.1, e consiste

numa secção quadrada de $0.30 \times 0.30 \text{ m}^2$ tendo uma armadura longitudinal constituída por 4 varões $\phi 12$ colocados em cada um dos vértices, com um recobrimento de 0.03 m .

Para os materiais constituintes foram adoptadas relações constitutivas não lineares. Assim, para o betão foi considerada a relação constitutiva parábola rectângulo proposta no REBAP⁴⁶, tomando-se para tensão máxima de compressão no betão $f_c = 11.305 \text{ MPa}$ e uma extensão de rotura por compressão de $\epsilon_{cu} = 0.35\%$. Para o aço adoptou-se o modelo elastoplástico sem endurecimento com um módulo de elasticidade $E_s = 200 \text{ GPa}$, uma extensão de cedência $\epsilon_y = 0.174\%$ e uma extensão de rotura $\epsilon_{su} = 1\%$. A rigidez de torção, GJ , foi considerada igual a 3262.5 kN m^2 .

Na figura 7.2 apresenta-se a evolução, até à rotura, do deslocamento segundo x_2 do nó carregado em função do valor da carga. A rotura dá-se, para uma carga de 26.12 kN , ao ser atingida na secção de encastramento da barra 3 a extensão última na armadura traccionada.

Na figura 7.3 apresentam-se, para o instante de rotura, os diagramas de esforço normal, de momento flector segundo x , de momento flector segundo y e de momento torsor em cada uma das barras.

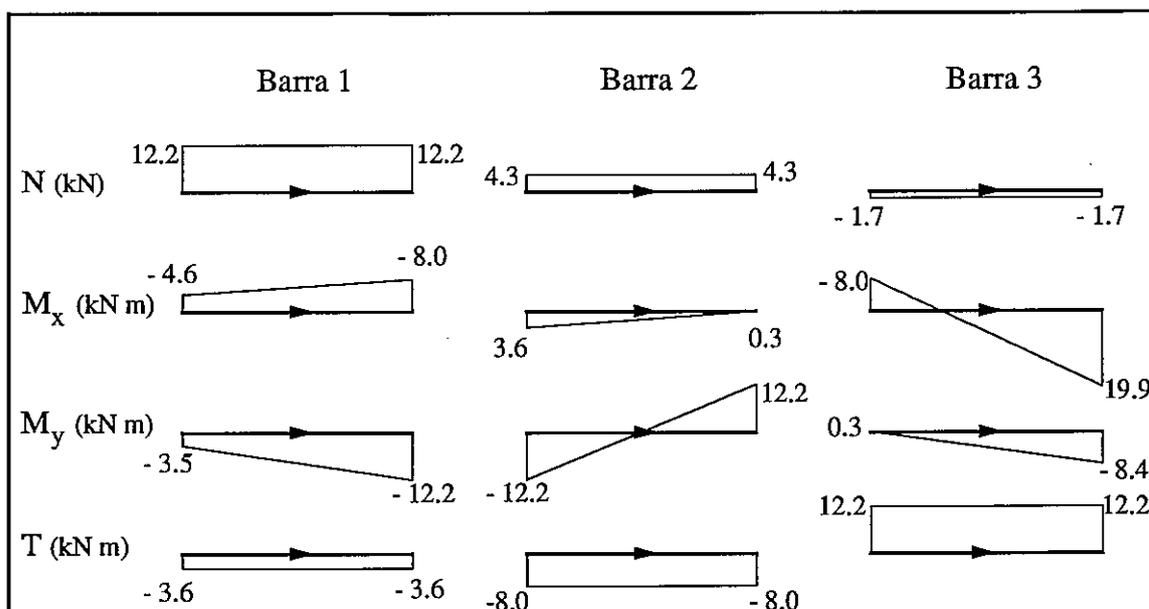


Figura 7.3 - Diagramas de esforços na rotura para o pórtico tridimensional de betão armado.

Na figura 7.4 apresenta-se um esquema da secção de encastramento da barra 3 identificando-se por t_1 e t_2 as armaduras traccionadas, simultaneamente, por forma a exemplificar o modo de variação das tensões instaladas nesta secção transversal com o aumento de carga, apresenta-se a evolução das tensões ao longo da linha a-b aí definida. Para valores da carga de $16.34kN$ e de $18.58kN$ dá-se a plastificação das armaduras t_1 e t_2 , respectivamente. Quando a carga aplicada atinge o valor de $26.12kN$ a armadura t_1 atinge a extensão convencional de rotura, marcando o colapso da estrutura.

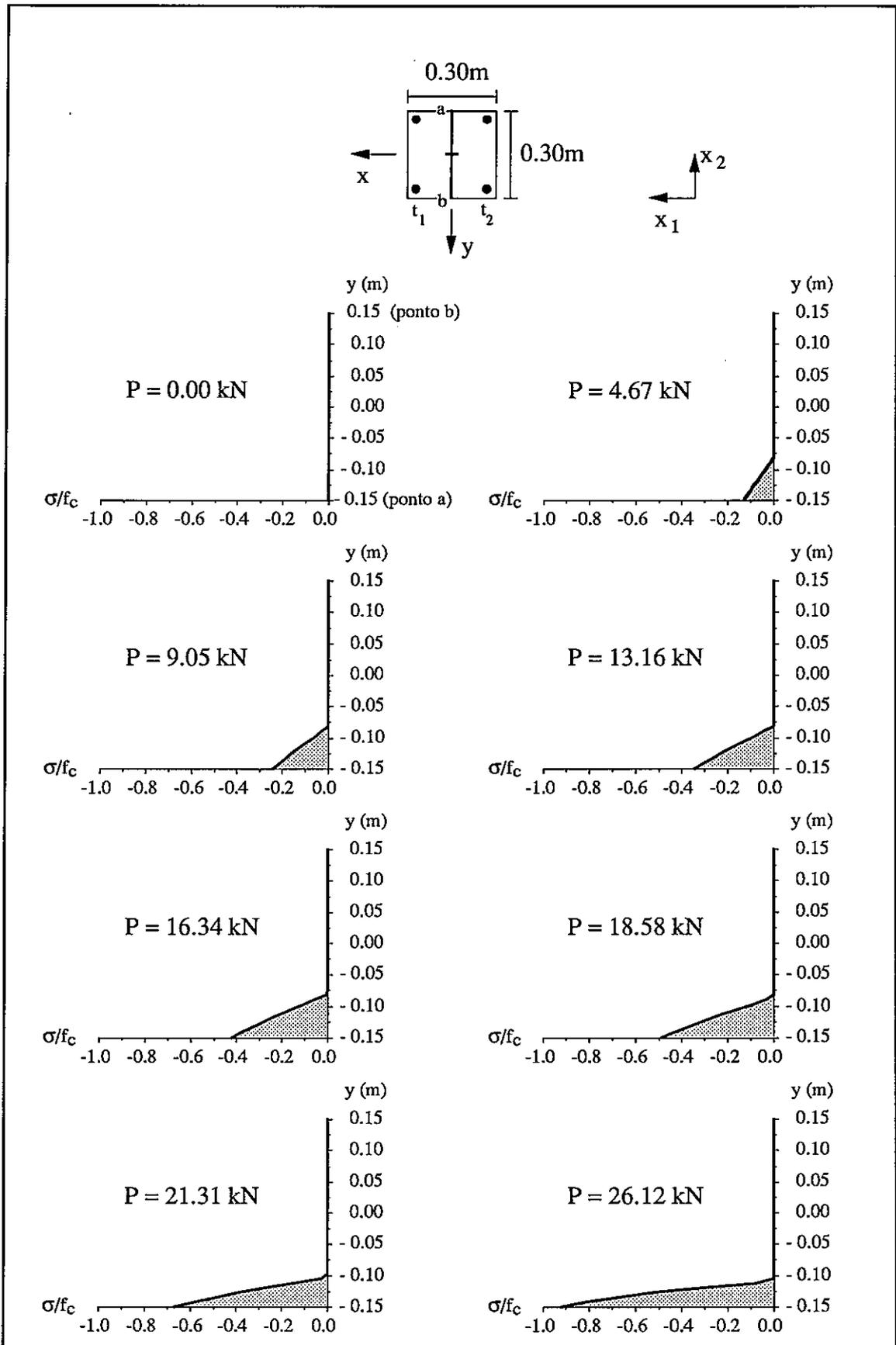


Figura 7.4 - Variação com a carga aplicada da tensão instalada na secção de encastramento da barra 3.

8 Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

O objectivo da presente tese foi a formulação e aplicação de modelos estáticos de elementos finitos no domínio da análise elástica de estruturas. Assim, no capítulo 1 foram enunciadas as principais características dos modelos estáticos de elementos finitos e estabelecidas as equações fundamentais utilizadas na sua formulação.

No capítulo 2, com base em funções de interpolação dos campos estáticos com diferentes características, foram formulados três modelos distintos. No modelo **EG** (estático com funções de interpolação genéricas) as funções de interpolação dos campos estáticos no domínio não obedecem *a priori* a quaisquer condições de equilíbrio local. No modelo **EA** (estático com funções de interpolação autoequilibradas) as funções de interpolação dos campos estáticos no domínio satisfazem *a priori* as condições de equilíbrio local na ausência de forças de domínio. Finalmente, no modelo **EAC** (estático com funções de interpolação autoequilibradas e compatíveis) as funções de interpolação dos campos estáticos no domínio, além de obedecerem às exigências feitas no caso do modelo **EA**, têm campos de deslocamentos compatíveis associados.

O teste ao comportamento dos modelos formulados foi feito recorrendo a conjuntos de funções de interpolação derivadas de séries trigonométricas ou de polinómios de Legendre. No capítulo 3, foram aplicadas funções de interpolação trigonométricas aos

modelos EG, EA e EAC e polinómios de Legendre ao modelo EG; esta aplicação, sem perda de generalidade, teve como domínio problemas de elasticidade plana.

A análise de uma consola curta quadrada quando sujeita à tracção e à flexão foi utilizada para comparar o comportamento dos diferentes modelos desenvolvidos, bem como para aferir as soluções em relação a resultados obtidos por outros autores. A análise deste problema permitiu concluir que todos os modelos apresentam soluções aceitáveis. Contudo a utilização dos modelos EA e EAC com funções trigonométricas permite simular melhor o comportamento das soluções nas zonas de maiores gradientes de tensões. Em contrapartida, estes modelos exigem maior dispêndio em tempo de cálculo e têm maior dificuldade em satisfazer localmente as condições estáticas na fronteira.

O caso de uma placa em L traccionada foi utilizado para comparar o comportamento do modelo EG quando se utilizam diferentes tipos de funções de forma e diferentes discretizações. Concluiu-se, analogamente ao que sucedia para o exemplo da consola quadrada, que os diferentes modelos apresentam bom comportamento. Simultaneamente foram retiradas conclusões acerca do reflexo da discretização no efeito de *fill-in* do sistema governativo e no tempo de resolução do mesmo sistema. Verificou-se ainda que o recurso a funções de interpolação trigonométricas permite simular melhor o comportamento do campo de tensões nas zonas de maiores gradientes, mas apresenta, em geral, tempos de cálculo superiores.

Ainda no capítulo 3 foi estudado o problema do tubo cilíndrico de comprimento infinito sujeito a pressão externa, utilizando elementos hierárquicos de 8 nós aplicados ao modelo EG com polinómios de Legendre como funções de interpolação. Os resultados obtidos foram comparados com a solução exacta. A utilização de diferentes discretizações permitiu detectar qual a sensibilidade da solução em relação à discretização e em relação ao número de funções de interpolação utilizadas.

Na sequência do estudo do comportamento de diferentes funções de interpolação nos

diferentes modelos desenvolvidos, optou-se pela utilização do modelo EG com polinómios de Legendre. Esta escolha baseou-se no facto de este modelo aliar uma grande adaptabilidade a diferentes tipos de problemas com bons desempenhos em tempo de cálculo. A sua principal deficiência será a de apresentar maior dificuldade em simular comportamentos singulares do campo de tensões do que os modelos baseados em funções trigonométricas.

Assim, com base no modelo EG com polinómios de Legendre como funções de interpolação, foi desenvolvido no capítulo 4 um elemento finito prismático de 16 nós destinado à análise de peças tridimensionais. Com base neste elemento hierárquico foi analisado o problema de uma consola curta de secção em T quando submetida a uma acção combinada de flexão, torção e corte. Os resultados obtidos foram comparados com os resultantes de uma análise realizada com elementos finitos de deslocamentos, obtendo-se para os deslocamentos soluções bastante semelhantes. No que diz respeito aos campos de tensões, os resultados obtidos a partir dos modelos estáticos conseguem simular de uma forma bastante satisfatória as condições de fronteira estáticas, as quais os elementos finitos de deslocamentos têm grande dificuldade em satisfazer.

Com vista à construção de um modelo de ordem superior para a análise de estruturas laminares, considerou-se, no capítulo 5, a expansão em série de Taylor ao longo da espessura do campo de deslocamentos neste tipo de estruturas. Com base neste desenvolvimento em série foi possível transformar a análise tridimensional das estruturas laminares na análise de um conjunto de problemas bidimensionais. Provou-se que a partir deste modelo, consoante os termos que se considerem no desenvolvimento em série, é possível recuperar os modelos tradicionais de análise dos estados planos de tensão ou deformação, bem como os modelos de laje de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin.

A aplicação do modelo EG com polinómios de Legendre ao caso de estruturas laminares permitiu a análise do comportamento de uma laje quadrada encastrada com um bordo livre quando sujeita a uma pressão uniforme. Os resultados obtidos permitiram concluir

sobre o bom comportamento do modelo desenvolvido. No caso de uma laje espessa, verificou-se uma muito boa concordância com a solução da elasticidade tridimensional, mesmo quando se utilizam poucos termos do desenvolvimento em série.

A necessidade de consideração de modelos de laje de ordem superior surge com grande acuidade no caso do estudo do comportamento de estruturas laminares de material compósito. A heterogeneidade das estruturas compostas por camadas com diferentes orientações de fibra, aliada ao comportamento ortotrópico do material, obriga a ter em conta o efeito das tensões interlaminares, desprezadas nos modelos clássicos de análise de estruturas laminares. Assim, no capítulo 6 o modelo de análise de estruturas laminares foi adaptado à análise de laminados de material compósito, tendo sido desenvolvidas as relações constitutivas referentes ao comportamento de materiais ortotrópicos. Com base neste modelo foi considerada a análise do problema clássico da determinação das tensões interlaminares num laminado *cross-ply* quando sujeito a uma deformação constante. Os resultados obtidos são concordantes com os apresentados por outros autores, apresentando até um melhor comportamento na simulação dos picos de tensão existentes nas zonas adjacentes aos bordos livres.

A aplicação de modelos estáticos à análise elástica de estruturas foi considerada no capítulo 7 para o caso das estruturas compostas por peças lineares. A metodologia aplicada na análise das peças laminares foi estendida ao caso das peças lineares, considerando-se o desenvolvimento em série de Taylor do campo de deslocamentos na secção transversal das peças lineares. Assim, a análise do comportamento das peças lineares foi decomposta na análise de um conjunto de problemas unidimensionais, aos quais foi aplicado o modelo EG. Analogamente ao que sucedia no caso das peças laminares, provou-se ser possível não só recuperar as formulações tradicionais de análise de barras de estrutura articulada e de pórtico com ou sem deformação por esforço transversal, mas também as formulações de ordem superior propostas por Vlassov.

Para ilustrar as potencialidades do modelo desenvolvido para as peças lineares, foi

considerada a análise fisicamente não linear de um pórtico tridimensional de betão armado utilizando um modelo do tipo EA com polinómios como funções de interpolação.

8.1 - Conclusões

As principais conclusões a extrair deste trabalho podem ser sintetizadas da seguinte forma:

- a partir de uma formulação estática de elementos finitos é possível obter um conjunto de modelos coerentes, com sistema governativo simétrico, os quais diferem nas características das funções de interpolação, em termos de satisfação *a priori* de condições de equilíbrio ou de equilíbrio e compatibilidade;
- o recurso a técnicas de programação simbólica para a definição analítica dos diferentes operadores, presentes no sistema governativo, permite reduzir substancialmente o tempo de cálculo na fase de pré-processamento;
- a aplicação de famílias de funções de interpolação ortogonais permite obter para os modelos estáticos de elementos finitos operadores com elevados índices de esparsidade, o que facilita grandemente as operações de montagem e resolução do sistema governativo;
- com base em modelos estáticos de elementos finitos é possível obter um conjunto de formulações adaptadas à análise elástica de estruturas compostas por peças tridimensionais, laminares ou lineares;
- o desenvolvimento em série de Taylor do campo de deslocamentos em relação a um conjunto de direcções pré-determinadas permite obter modelos consistentes de ordem superior para a análise de peças laminares e lineares;
- os modelos tradicionais de análise de estruturas laminares e lineares podem ser considerados como casos particulares dos modelos de ordem superior desenvolvidos;
- os modelos de ordem superior desenvolvidos para a análise de estruturas laminares e lineares são convergentes para a solução da elasticidade tridimensional correspondente;

- os modelos de ordem superior desenvolvidos para a análise de estruturas laminares e lineares são facilmente refinados por meio da introdução de termos sucessivos ou alternados do desenvolvimento em série;
- o modelo de análise de estruturas laminares de material compósito apresenta um bom comportamento na análise das concentrações de tensões existentes nas interfaces entre camadas.

8.2 - Desenvolvimentos futuros

Como seria de esperar, o tema tratado nesta tese de doutoramento não se encontra esgotado. Por cada resposta que foi possível conhecer ao longo deste trabalho novas questões se colocaram. Assim, é possível enunciar um conjunto de tópicos que necessitarão de ser tratados em trabalhos futuros.

A identificação *a priori* dos modos espúrios é um tópico que necessita de algum investimento futuro. É necessário compreender melhor qual a origem destes mecanismos para que se conheça qual a melhor forma de evitar o seu aparecimento. No presente trabalho, os modos de deformação espúrios foram eliminados durante o processo de cálculo. Esta metodologia pode não ser a mais apropriada. Contudo, a utilização de métodos sofisticados de detecção de modos espúrios após a montagem do sistema governativo, como por exemplo a utilização da *Singular Value Decomposition (SVD)*, é de utilidade duvidosa, pois, em geral, acarreta maiores custos em tempo de cálculo do que a metodologia aqui adoptada.

A análise do problema das tensões interlaminares nos laminados de material compósito permitiu sentir as limitações da utilização de polinómios de Legendre como funções de interpolação. Nestes casos, em que se verificam grandes gradientes nos campos de tensão, haverá que estudar a utilização de funções de interpolação singulares ou quase singulares por forma a melhor modular os gradientes de tensão presentes. Contudo, a escolha destas funções deve ser feita com grande cuidado por forma a não se perderem os

elevados índices de esparsidade que facilitam grandemente o processo de resolução do sistema governativo.

Em relação ao tipo de estruturas consideradas, há um grande trabalho ainda a desenvolver, não só no tipo de relações constitutivas a modular (plasticidade e elasticidade não linear), mas também na extensão dos modelos desenvolvidos para o caso de estruturas não planas (cascas e arcos), bem como para a análise geometricamente não linear.

Um desenvolvimento que terá grande interesse será generalizar o elemento finito hierárquico de 16 nós para um elemento tridimensional de 20 nós, não obrigatoriamente prismático. Esta extensão só não foi possível no presente trabalho por dificuldade na obtenção de meios mais potentes para a realização dos cálculos simbólicos necessários.

Referências

- 1 - A. M. Adão da Fonseca, *Plastic analysis and synthesis of plates and shells by mathematical programming*, PhD Thesis, Imperial College of Science and Technology, University of London, (1980);
- 2 - D. J. Allman, *A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis*, *Computers & Structures*, vol 9, nº 1-2, pp 1-8, (1984);
- 3 - R. Barboni; P. Gaudenzi; S. Carlini, *A Three-Dimensional Analysis of Edge Effects in Composite Laminates with Circular Holes*, *Composite Structures*, vol 15, pp 115-136, (1990);
- 4 - K. J. Bathe; E. L. Wilson; W. Peterson, *SAP IV - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems*, EERC Report Nº 73-11, University of California, Berkeley (1973);
- 5 - K. J. Bathe; E. L. Wilson; R. Iding, *NONSAP - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems*, SESM Report Nº 74-3, University of California, Berkeley (1974);
- 6 - T. Belytschko; H. Stolarski; N. Carpenter, *A C^0 Triangular Plate Element With One-point Quadrature*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 20, pp 787-802, (1984);
- 7 - L. M. S. S. Castro, *Interpolação de Walsh em Problemas de Elasticidade Plana*, Dissertação de Mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, (1992);
- 8 - S. Chakrabarti; *Trigonometric Function representations for Rectangular Plate Bending Elements*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 3, pp 261-273, (1971);
- 9 - G. Ciarlet, *Derivation of Nonlinear Plate Models from Three-Dimensional Elasticity*, *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*, Edited by J. T. Oden, Chapter 6, North-Holland Publishing Company, (1980);

- 10 - V. Chomkwah; X. J. R. Avula, *A High-Order Theory for Laminated Composite Plates Using Lagrange Multiplier Technique*, Computers & Structures, vol 37, n° 5, pp 845-861, (1990);
- 11 - R. D. Cook, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York (1981);
- 12 - J. A. T. Freitas, *The Elastoplastic Analysis of Planar Frames for Large Displacements by Mathematical Programming*, PhD Thesis, Imperial College of Science and Technology, University of London, (1979);
- 13 - J. A. T. Freitas, *Duality and Symmetry in Mixed Integral Methods of Elastostatics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28, pp 1-19, (1989);
- 14 - J. A. T. Freitas, *Variational Theorems in Elastoplastic Boundary Element Analysis*, BEM XI, Advances in Boundary Elements, vol 3 , pp 65-79, Boston (1989);
- 15 - J. A. T. Freitas, *Mixed and Hybrid Symmetric Formulations for the Boundary Element Method*, European Journal of Mechanics, A/Solids, vol. 9, n°1, pp 1-20, (1990);
- 16 - J. A. T. Freitas; E. M. B. R. Pereira, *Application of the Mathieu Series to the Boundary Integral Method*, Computers & Structures, vol. 40, n° 5, pp 1307-1314, (1991);
- 17 - Y. C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics* , Prentice-Hall, (1965);
- 18 - P. Gaudenzi, *Problemi di Analisi Strutturale di Piastre in Composito: Importanza del Comportamento 3D nei Problemi Statici, Dinamici e Termoelastici*, Dottorato di ricerca in Ingegneria Aerospaziale, Facolta di Ingegneria - Scuola di Ingegneria Aerospaziale, Università di Roma "La Sapienza", (1989);
- 19 - G. L. Ghiringhelli ; G. Sala, *Interlaminar Stress Analysis of Composite Cross-Ply Flat Specimens*, Meccanica, vol 21, pp 151-158, (1986);
- 20 - K. H. Ha, *Finite Elements Analysis of Sandwich Plates: an Overview*, Computers & Structures, vol 37, n° 4, pp 397-403, (1990);

- 21 - R. M. Jones, *Mechanics of composite materials*, International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo (1975);
- 22 - G. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe*, J. Reine und Angewandte Mathematic, vol 40, pp 51-88, (1850);
- 23 - J. Krahula ; J. Polhemus, *Use of Fourier Series in the Finite Element Method*, AIAA Journal , vol 6, pp 726-728, (1968);
- 24 - T. Kusama; T. Ohkami; Y. Mitsui, *Application of the Finite Fourier Series to the Boundary Element Method*, Computers & Structures, vol 32, nº 6, pp 1267-1273, (1989);
- 25 - G. Lamé, *Leçons sur la Théorie de l'Elasticité*, Gauthier-Villars, Paris (1852);
- 26 - M. Lashkari, *COSMOS/M Finite Element System*, Release version 1.52A, Structural Research and Analysis Corporation, Califórnia, (1989);
- 27 - A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth Edition, Dover Publications, New York (1944);
- 28 - E. Mathieu, *Théorie de l'Elasticité des Corps Solids*, Gauthier-Villars, Paris (1890);
- 29 - E. A. W. Maunder, *A direct approach to a flexibility matrix for a triangular equilibrium membrane element*, 'Accuracy, reliability and training in FEM technology' (ed Robinson J.), Robinson & Associates, pp 119-128, UK (1984);
- 30 - E. A. W. Maunder; G. J. Savage, *A Graph-Thoretic Model for Finite Elements with Side Variables*, versão preliminar;
- 31 - R. D. Mindlin, *Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates*, Journal of Applied Mechanics, vol 18, nº 1, pp 31-38, (1951);
- 32 - J. P. B. Moitinho de Almeida, *Modelos de elementos finitos para a análise elastoplástica*, Tese de doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, (1989);

- 33 - J. P. B. Moitinho de Almeida, *Janela Uma Interface Gráfica Destinada a Aplicações de Mecânica Computacional*, versão preliminar, Instituto Superior Técnico, (1992);
- 34 - N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Theory of Elasticity*, P. Noordhoff Ltd, Groningen (1963);
- 35 - Norma Portuguesa NP-761 , *Teoria das Estruturas - Vocabulário*, Port. nº 24317 de 29/9/1969, Lisboa (1969);
- 36 - E. R. A. Oliveira, *Resistência dos Materiais - Livro II : Elementos da Teoria da Elasticidade*, Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico, Lisboa (1969);
- 37 - E. R. A. Oliveira; J. P. S. R. Gago; J. S. Rebelo, *Adaptive Macroelements Using Sinusoidal Shape Functions, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Elements Computations*, Edited by I. Babuška, O. C. Zienkiewicz, J. Gago and E. R. de A. Oliveira, John Wiley & Sons Ltd, (1986);
- 38 - P. G. S. V. Parreira, *Análise do Erro no Método dos Elementos de Fronteira em Elasticidade*, Tese de doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, (1987);
- 39 - A. Paulis; M. Guiggiani, *MABEM Un Programa di Calcolo, Basato sul Metodo Degli Elementi di Frontiera, per l'Analisi Statica di Corpi Piani e Spaciali*, XII Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana per l'Analisi delle Sollecitazioni, Sorrento (1984);
- 40 - E. M. B. R. Pereira, *Análise fisicamente não linear de pórticos tridimensionais de betão armado*, Dissertação de mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, (1989);
- 41 - E. M. B. R. Pereira; J. A. T. Freitas, *Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames in Mini Computers*, EPMESC III - International Conference on Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering Using Small Computers, Macau (1990);
- 42 - J. Petrolito; B. W. Golley, *Plane Stress Analysis Using Macro Elements*, Computers & Structures, vol 31, nº 4, pp 553-565, (1989);

- 43 - T. H. H. Pian, *Reflections and Remarks on Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, Hybrid and Mixed Finite Element Methods, Edited by S.N. Atluri, R.H. Gallagher and O.C. Zienkiewicz, Chapter 29, John Wiley & Sons Ltd, (1983);
- 44 - S. Pissanetzky, *Sparse Matrix Technology*, Academic Press Inc., London (1984);
- 45 - A. Raoult, *Analyse Mathématique de Quelques Modèles de Plaques et de Poutres Élastiques ou Élasto-plastiques*, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1988);
- 46 - REBAP - *Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado*, INCM, Lisboa (1986);
- 47 - E. Reissner, *The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*, Journal of Applied Mechanics, vol 12, n° 2, pp A69-A77, (1945);
- 48 - A. Rigolot, *Sur une Théorie Asymptotique des Poutres*, Journal de Mécanique, vol 11, n° 4, pp 673-703, (1972);
- 49 - A. Rigolot, *Sur la Déformation due a l'Effort Tranchant dans les Poutres Droites Élastiques*, Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, n° 363, pp 34-52, (1978);
- 50 - E. F. Rybicki; *Approximate Three-Dimensional Solutions for Symmetric Laminates Under Inplane Loading*, J. Composite Materials, vol 5, pp 354-360, (1971);
- 51 - D.L. Smith, *Plastic Limit Analysis and Synthesis of Structures by Linear Programming*, PhD Thesis, Imperial College of Science and Technology, University of London, (1974);
- 52 - M. R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Schaum's Outline Series in Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York (1968);
- 53 - S. P. Timoshenko; J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha Ltd, Tokyo (1970);

- 54 - L. Trabucho; J. M. Viaño, *Derivation of Generalized Models for Linear Elastic Beams by Asymptotic Expansion Methods*, Applications of Multiple Scaling in Mechanics, Paris (1986);
- 55 - Y. P. Tseng; T. C. Wu, *Partial Hybrid Stress Method Applied to the Higher-Order Laminated Plates Theory*, Computers & Structures, vol 41, n° 2, pp 313-323, (1991);
- 56 - B. M. F. Veubeke, *A Course in Elasticity*, Springer-Verlag, New York (1979);
- 57 - B. Z. Vlassov, *Pièces longues en voiles minces*; Éditions Eyrolles, Paris (1962);
- 58 - A. S. D. Wang; F. W. Crossman, *Some New Results on Edge Effect in Symmetric Composite Laminates*, J. Composite Materials, vol 11, pp 92-106, (1977);
- 59 - J. Wei; J. H. Zhao, *Three-Dimensional Finite Element Analysis of Interlaminar Stresses of Symmetric Laminates*, Computers & Structures, vol 41, n° 4, pp 561-567, (1991);
- 60 - O. C. Zienkiewicz; R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, vol 1, Fourth Edition, McGraw-Hill Book Company, London (1988).