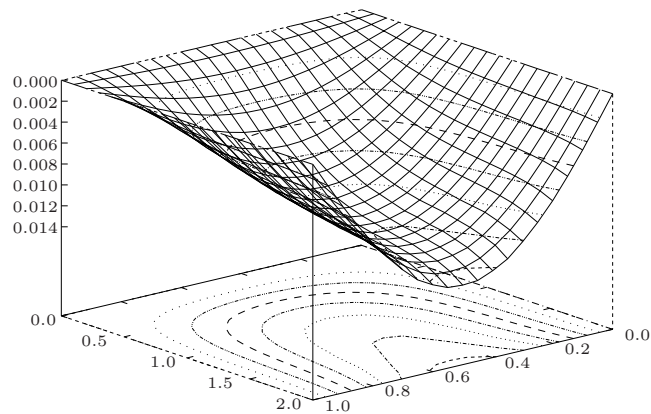


UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



**UTILIZAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE UMA
FORMULAÇÃO INDIRECTA DE TREFFTZ NA ANÁLISE
DE LAJES FINAS**

Carlos Manuel Tiago Tavares Fernandes

(Licenciado)

Dissertação para a obtenção do Grau de

Mestre em Engenharia de Estruturas

Orientador Científico

Doutor Vitor Manuel Azevedo Leitão

Júri

Doutor Francisco Baptista Esteves Virtuoso

Doutor Vitor Manuel Azevedo Leitão

Doutor José Manuel de Almeida César de Sá

Dezembro de 1998

Resumo

A utilização de métodos numéricos na análise de lajes finas tem passado, sobretudo, pelo recurso ao método dos elementos finitos. Especialmente vulgarizados são os modelos de compatibilidade dos elementos de grelha e laje.

Uma técnica alternativa, baseada no método de Trefftz, é apresentada neste trabalho.

O método de Trefftz, o qual tem sido aplicado a diferentes domínios, sob diversas formas, baseia-se na sobreposição de soluções, particular e complementar, da equação governativa do problema.

No presente trabalho uma formulação indirecta do método de Trefftz, baseada na minimização quadrática dos resíduos ao longo da fronteira é aplicada à análise de lajes finas. Duas abordagens são testadas: contínua e discreta.

Diferentes tipos de carregamentos foram implementados. Desde os mais correntes, carga uniformemente distribuída e carga concentrada, a outros mais complexos, carga uniformemente distribuída em zona circular e cargas com variação linear actuantes numa superfície poligonal e de faca. Estas últimas foram desenvolvidas com base na integração de uma solução fundamental na zona de aplicação da carga.

O campo de deslocamentos, para cada região em que o domínio do problema se discretiza, é aproximado por uma série truncada de funções e por convenientes soluções particulares representando o carregamento. Para a análise de casos específicos, como sejam lajes enviesadas e lajes apresentando aberturas circulares, são utilizadas funções apropriadas que garantem, não só a satisfação da equação diferencial homogénea mas também parte das condições de fronteira na vizinhança da zona em que ocorrem concentrações de tensões.

Diversos exemplos são apresentados e os resultados são comparados com outras soluções existentes na literatura.

Partindo da discussão dos casos estudados, conclusões acerca do comportamento do método são extraídas, sendo apontadas as suas vantagens e inconvenientes, bem como sugeridos desenvolvimentos futuros.

Abstract

The use of numerical methods in the analysis of thin plates relies, especially, in the displacement (or standard) formulation of the finite element method with the use of, both, plate and grillage models.

An alternative technique, based on the Trefftz method, is presented in this work.

The Trefftz method, of which several applications to various fields have been made and different formulations have been devised, is based on the superposition of the homogeneous and the particular solutions of the governing equation of the problem.

In this work an indirect formulation of the Trefftz method based on the quadratic minimization of the residuals along the boundary is developed and applied to the analysis of thin plates. Two approaches are tested: continuous and discrete.

Different types of loads were implemented. Starting from the current cases, that is, the uniform distributed load and the concentrated load, to more complex cases, like the uniform load in a circular zone and linearly varying loads acting in a polygonal surface or line. The last two cases were developed by integrating a fundamental solution in the surface where the load is applied.

The displacement field, for each region in which the domain is discretised, is approximated by a truncated serie of functions and by suitable particular solutions representing the load. For the analysis of specific cases, namely skew plates and plates with circular holes, suitable functions are used wich ensure, not only the satisfaction of the homogeneous diferencial equation of the problem but also some of the boundary conditions in the vicinity of the region where stress concentrations occur.

Several examples are presented and the results are compared with other solutions available in the literature.

Based on the cases analysed, conclusions about the performance and the applicability of the method, for the analysis of thin plates, are drawn and future developments are proposed.

Palavras Chave

Lajes finas
Método de Trefftz
Mínimos quadrados
Colocação
Fronteira
Singularidades

Keywords

Thin plates
Trefftz method
Least-squares
Collocation
Boundary
Singularities

Agradecimentos

Este trabalho só foi possível graças à colaboração de instituições, professores, colegas, amigos e familiares.

A investigação realizada foi apoiada pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica através dos projectos *Praxis XXI* BIC J/2244/94 e BM /15231/98.

Ao meu orientador, Professor Vitor Leitão, agradeço por me ter introduzido no grupo de Análise de Estruturas e apresentado a Mecânica Computacional de uma forma clara e precisa ao longo dos últimos três anos. A formação e visão adquiridas moldaram a minha forma de encarar a Engenharia de Estruturas na actualidade. A amizade e empenho demonstrados foram um constante incentivo à investigação realizada.

Aos professores Luís Castro, Eduardo Pereira, Moitinho de Almeida, Orlando Pereira, Teixeira de Freitas e Pedro Mendes pelo agradável convívio e amizade.

À Ildi, Cornel e Marco pelo interesse manifestado pelo meu trabalho, disponibilidade e amizade.

À Professora Anna Vásárhelyi e demais colaboradores do Laboratório de Informática da Universidade Técnica de Budapeste por terem tornado a minha estadia na Hungria um período tão agradável.

Aos colegas do Instituto Superior Técnico pela camaradagem e amizade que sempre mostraram, em especial os Engenheiros Rui Carrilho, Paulo França, Albano Sousa e Sulumine Raúl.

Gostaria, por fim, de agradecer todo o apoio, incentivo e carinho que recebi da minha família, em especial à mãe, aos avós, Vanda e Adelino.

À memória do meu pai, João Tavares da Silva Fernandes

Índice

1	Introdução	1
1.1	Lajes finas	1
1.2	Métodos de análise	2
1.3	Motivação	5
1.4	Objectivo	6
1.5	Organização	7
2	Análise elástica linear de lajes finas	9
2.1	Hipóteses fundamentais	9
2.2	Definições e relações principais	11
2.2.1	Tensões, esforços e equações de equilíbrio	11
2.2.2	Deformações, deslocamentos e equações de compatibilidade . . .	12
2.2.3	Equações constitutivas e relações esforços-deformações generali- zadas	13
2.3	Modelo de análise de lajes	14
2.4	Condições de fronteira	16
2.4.1	Apoio	16
2.4.2	Continuidade	17
2.5	Resumo das relações principais em coordenadas polares	17

3	Formulações baseadas no método de Trefftz	21
3.1	Introdução	21
3.2	Método Indirecto	22
3.2.1	Considerações gerais	22
3.2.2	Método de colocação na Fronteira	25
3.2.3	Colocação utilizando soluções fundamentais	26
3.2.4	Método dos Mínimos quadrados	26
3.2.5	Método de Galerkin	29
3.2.6	Formulação Variacional	30
3.3	Método Directo	30
3.4	Formulações de elementos finitos híbridos-Trefftz	30
4	Formulação do método indirecto de Trefftz	33
4.1	Introdução	33
4.2	CrITÉrio dos mÍnimos quadrados	35
4.2.1	Abordagem contÍnua (integração na fronteira)	35
4.2.2	Abordagem discreta (colocação na fronteira)	37
4.3	Soluções para campos de deslocamento transversal	40
4.3.1	Regulares	40
4.3.2	Lajes enviesadas	50
4.3.3	Abertura circular	52
5	Implementação	55
5.1	Considerações iniciais	55
5.2	Aproximação da geometria	56
5.3	Sistema de coordenadas locais	57

5.4	Sistemas de escalas locais	59
5.5	Sistema global	60
5.5.1	Normais exteriores	60
5.5.2	Condições de fronteira	60
5.5.3	Resolução de equações transcendentess	61
5.5.4	Montagem do sistema	61
5.6	Métodos de resolução de sistemas lineares	62
5.7	Apresentação de resultados	63
6	Exemplos de aplicação	65
6.1	Introdução	65
6.2	Lajes rectangulares	67
6.2.1	Simplemente apoiada	67
6.2.2	Encastrada	100
6.2.3	Encastrada-apoiada-livre-apoiada	107
6.2.4	Vigas de bordadura	112
6.3	Lajes circulares	118
6.3.1	Encastrada	118
6.4	Lajes enviesadas	131
6.4.1	Laje simplesmente apoiada	131
6.4.2	Laje simplesmente apoiada-livre	137
6.4.3	Laje encastrada-livre	145
6.5	Lajes triangulares	155
6.5.1	Carga uniformemente distribuída	155
6.5.2	Momento normal uniformemente distribuído no contorno	162

7	Conclusões e desenvolvimentos futuros	165
7.1	Conclusões	165
7.2	Desenvolvimentos futuros	168
A	Soluções para cantos	169
A.1	Parcela homogénea	169
A.1.1	Encastrado-encastrado	169
A.1.2	Livre-Livre	170
A.1.3	Encastrado-Livre	171
A.1.4	Encastrado-simplesmente apoiado	171
A.1.5	Simplesmente apoiado-livre	172
A.1.6	Simplesmente apoiado-simplesmente apoiado	173
A.2	Parcela particular	173
A.2.1	Encastrado-encastrado	173
A.2.2	Livre-Livre	174
A.2.3	Encastrado-Livre	174
A.2.4	Encastrado-simplesmente apoiado	174
A.2.5	Simplesmente apoiado-livre	175
A.2.6	Simplesmente apoiado-simplesmente apoiado	176
B	Solução para abertura circular	177
B.1	Parcela homogénea	177
B.2	Parcela particular	178
	Bibliografia	179

Lista de Tabelas

4.1	Equações Transcendentes	51
6.1	Definição de grandezas adimensionais.	66
6.2	Valores de $w^{adim A}$, $Q_x^{adim B}$ e $Q_y^{adim C}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme.	70
6.3	Valores de $M_{xx}^{adim A}$, $M_{yy}^{adim A}$ e $M_{xy}^{adim D}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme.	70
6.4	Valores do tempo de CPU (<i>seg</i>) consumido na formação da matriz do sistema.	70
6.5	Valores de $w^{adim A}$ e $M_{xy}^{adim E}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em zona rectangular.	74
6.6	Valores de $M_{xx}^{adim E}$ e $M_{yy}^{adim E}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em zona rectangular.	77
6.7	Valores de $w^{adim A}$, $M_{xx}^{adim A}$, $M_{yy}^{adim A}$, $Q_x^{adim A}$ para a região 1 em laje simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.	80
6.8	Valores de $w^{adim A}$, $M_{xx}^{adim A}$, $M_{yy}^{adim A}$, $Q_x^{adim A}$ para a região 2 em laje simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.	82
6.9	Valores de $10w^{adim A}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga pontual central.	89
6.10	Valores obtidos para $10w^{adim A}$ em laje simplesmente apoiada sujeita a carga pontual central utilizando a série de Navier.	89
6.11	Valores obtidos para $10w^{adim A}$ em laje simplesmente apoiada sujeita a carga pontual central utilizando a série de Lévy e Ref. [86].	90

6.12	Valores de $M_{xx}^{adim A}$ e $M_{yy}^{adim A}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga circular central de raio $c = \frac{a}{1.0 \cdot 10^5}$	91
6.13	Resultados para laje simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos para $\frac{b}{a} = 1.0$	93
6.14	Resultados para laje simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos para $\frac{b}{a} = 1.5$	93
6.15	Resultados para laje simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos para $\frac{b}{a} = 2.0$	94
6.16	Valores de $w^{adim A}$, $M_{xx}^{adim A}$ e $M_{yy}^{adim A}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga bilinear.	99
6.17	Primeiras raízes da equação transcendente para o caso encastrado-encastado para $\theta_0 = 45^\circ$	102
6.18	Resultados para laje quadrada encastrada utilizando funções regulares. . .	103
6.19	Resultados para laje quadrada encastrada utilizando funções singulares. .	103
6.20	Resultados para laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída.	113
6.21	Valores extremos utilizados nos diagramas de momentos M_{xx} (figura 6.33) e M_{xy} (figura 6.34).	113
6.22	Resultados no centro para laje quadrada com apoios elásticos em dois bordos paralelos sujeita a carga uniformemente distribuída.	118
6.23	Resultados para laje circular encastrada sujeita a carga uniformemente distribuída.	123
6.24	Valores de $w^{adim A}$ e $M_\theta^{adim A}$ para laje circular encastrada com abertura circular sujeita a carga uniforme.	125
6.25	Valores de $M_r^{adim B}$ e $M_\theta^{adim B}$ para laje circular encastrada com abertura circular sujeita a carga uniforme.	125
6.26	Valores de $w^{adim A}$ e $Q_r^{adim B}$ para laje circular encastrada sujeita a carga central pontual.	129
6.27	Valores de $M_r^{adim B}$ e $M_\theta^{adim B}$ para laje circular encastrada sujeita a carga central pontual.	129
6.28	Valores de $M_r^{adim A}$ e $M_\theta^{adim A}$ para laje circular encastrada sujeita a carga central distribuída num círculo de raio $c = \frac{a}{1.0 \cdot 10^5}$	129

6.29	Resultados para $1 \cdot 10^3 w^{adim A}$ em laje enviesada simplesmente apoiada. .	132
6.30	Resultados para $10M_{xx}^{adim A}$ em laje enviesada simplesmente apoiada. . . .	132
6.31	Resultados para $10M_{yy}^{adim A}$ em laje enviesada simplesmente apoiada. . . .	132
6.32	Raízes da equação transcendente para o caso simplesmente apoiado-livre para $\theta_0 = 60^\circ$ e $\nu = 0.2$	138
6.33	Resultados para laje enviesada com cantos obtusos simplesmente apoia- dos-livre.	139
6.34	Primeiras raízes da equação transcendente para o caso encastrado-livre com $\theta_0 = 67.5^\circ$ e $\nu = 0.3$	150
6.35	Resultados para laje enviesada com cantos obtusos encastrado-livre. Abordagem discreta.	151
6.36	Resultados para laje enviesada com cantos obtusos encastrado-livre. Abordagem contínua.	151

Lista de Figuras

2.1	Laje fina.	10
3.1	Formulação indirecta do método de Trefftz.	24
3.2	Formulação directa do método de Trefftz.	31
4.1	Domínio da laje repartido em N regiões.	34
4.2	Representação gráfica do termo $\Re(\zeta)^k$ da solução homogénea usando funções regulares.	43
4.3	Representação gráfica do termo $-\Im(\zeta)^k$ da solução homogénea usando funções regulares.	44
4.4	Área poligonal com N lados.	47
4.5	Área triangular i . Referencial e notação.	48
4.6	Laje com canto. Referencial e notação utilizados	51
4.7	Laje com abertura circular. Referencial e notação utilizados	53
5.1	Tipos de lados utilizados.	56
6.1	Laje rectangular simplesmente apoiada.	67
6.2	Laje fina rectangular simplesmente apoiada com dupla simplificação de simetria.	69
6.3	Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme.	72

6.4	Campos de rotações e diagramas de esforço transversal em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme.	73
6.5	Laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída em duas zonas rectangulares.	74
6.6	Laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída em zona rectangular. Notação da expressão (6.4).	74
6.7	Campo de deslocamento e diagramas de momentos em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em superfícies rectangulares.	75
6.8	Campos de rotações e diagramas de esforço transversal em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em superfícies rectangulares.	76
6.9	Direcções principais de flexão em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em superfícies rectangulares.	77
6.10	Laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca.	78
6.11	Discretização utilizada para laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca.	79
6.12	Laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca. Parâmetro de distorção, γ	79
6.13	Efeito da distorção das regiões na solução (ponto A) em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.	81
6.14	Solução de Navier vs Trefftz em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear para $x = \frac{b}{2}$	83
6.15	Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.	84
6.16	Campos de rotações e diagramas de esforço transversal em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.	85
6.17	Modelações utilizadas para a carga central.	86
6.18	Laje simplesmente apoiada sujeita a carga concentrada. Resultados para $x = \frac{b}{2}$	88
6.19	Diagramas de momentos e densidade de energia de deformação em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga circular central uniforme.	92

6.20	Diagramas de momentos para laje rectangular ($\frac{b}{a} = 1.5$) simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos ao longo de dois bordos paralelos.	95
6.21	Diagramas de esforço transversal e densidade de energia de deformação para laje rectangular ($\frac{b}{a} = 1.5$) simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos ao longo de dois bordos paralelos. . . .	96
6.22	Laje rectangular simplesmente apoiada submetida a carga bilinear.	98
6.23	Geometria para laje rectangular encastrada.	100
6.24	Laje rectangular encastrada. Discretizações utilizadas.	101
6.25	Campo de deslocamentos e rotações em laje rectangular encastrada sujeita a carga uniforme.	104
6.26	Diagramas de momentos em laje rectangular encastrada sujeita a carga uniforme.	105
6.27	Diagramas de esforço transversal e densidade de energia de deformação em laje rectangular encastrada sujeita a carga uniforme.	106
6.28	Campo de deslocamento e diagramas de momentos flectores para $x = \frac{b}{2}$ em laje rectangular ($b = 2a$) encastrada com abertura circular central ($c = \frac{a}{10}$) sujeita a carga uniformemente distribuída.	108
6.29	Diagramas de esforço transversal para $x = \frac{b}{2}$ em laje rectangular ($b = 2a$) encastrada com abertura circular central ($c = \frac{a}{10}$) sujeita a carga uniformemente distribuída.	109
6.30	Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje rectangular ($b = 2a$) encastrada com abertura circular central ($c = \frac{3a}{10}$) sujeita a carga uniformemente distribuída.	110
6.31	Campos de rotações e diagramas de esforço transversal em laje rectangular ($b = 2a$) encastrada com abertura circular central ($c = \frac{3a}{10}$) sujeita a carga uniformemente distribuída.	111
6.32	Laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada.	112
6.33	Diagrama de momentos M_{xx} em laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída para diversas relações de vãos $\frac{a}{b}$	114

6.34	Diagrama de momentos M_{xy} em laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída para diversas relações de vãos $\frac{a}{b}$	115
6.35	Direcções principais de flexão em laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída para $\frac{a}{b} = 2$	116
6.36	Deformada em laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída para $\frac{a}{b} = 2$	116
6.37	Laje rectangular com dois bordos simplesmente apoiados e dois bordos apoiados elasticamente.	117
6.38	Resultados no centro para laje quadrada com apoios elásticos em dois bordos paralelos sujeita a carga uniformemente distribuída.	119
6.39	Laje circular encastrada.	120
6.40	Laje circular encastrada. Discretização para carga uniformemente distribuída.	121
6.41	Resultados para laje circular encastrada sujeita a carga uniformemente distribuída.	122
6.42	Discretização para laje circular encastrada com abertura circular.	124
6.43	Resultados para laje circular encastrada sujeita a carga uniformemente distribuída para diferentes valores da relação $\frac{b}{a}$	126
6.44	Campo de deslocamentos, rotações, diagrama de momentos e esforço transverso em laje circular encastrada com abertura circular sujeita a carga uniforme para $\frac{b}{a} = 0.3$	127
6.45	Resultados para laje circular encastrada sujeita a carga central concentrada.	130
6.46	Laje enviesada simplesmente apoiada.	131
6.47	Resultados para $\theta_0 = 75^\circ$ em laje enviesada simplesmente apoiada.	134
6.48	Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje enviesada simplesmente apoiada para $\theta_0 = 75^\circ$	135
6.49	Campo de rotações e diagramas de esforço transverso em laje enviesada simplesmente apoiada para $\theta_0 = 75^\circ$	136
6.50	Laje enviesada apoiada-livre.	137

6.51	Campos de deslocamento e rotações em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiado-livre sujeita a carga uniforme para $y = 0$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.	141
6.52	Diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiado-livre sujeita a carga uniforme para $y = 0$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.	142
6.53	Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga uniforme. . .	143
6.54	Campos de rotações e diagramas de esforço transversal em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga uniforme. . .	144
6.55	Discretização adoptada para laje enviesada apoiada-livre sujeita a carga central concentrada.	145
6.56	Campo de deslocamentos e diagramas de esforço transversal em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga central concentrada para $y = \frac{a}{2}$. Comparação com FEM.	146
6.57	Diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga central concentrada para $y = \frac{a}{2}$. Comparação com FEM.	147
6.58	Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga central concentrada.	148
6.59	Campos de rotações e diagramas de esforço transversal em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga central concentrada.	149
6.60	Laje enviesada encastrada-livre. Geometria e dimensões.	150
6.61	Campos de deslocamento e rotações em laje enviesada com dois cantos encastrado-livre sujeita a carga uniforme para $y = a\frac{\sqrt{2}}{4}$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.	152
6.62	Diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos encastrado-livre sujeita a carga uniforme para $y = a\frac{\sqrt{2}}{4}$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.	153
6.63	Diagramas de esforços transversos em laje enviesada com dois cantos encastrado-livre sujeita a carga uniforme para $y = a\frac{\sqrt{2}}{4}$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.	154

6.64	Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje enviesada com bordos encastrado-livre para $\theta_0 = 67.5^\circ$	156
6.65	Campos de rotações e diagramas de esforço transversal em laje enviesada com bordos encastrado-livre para $\theta_0 = 67.5^\circ$	157
6.66	Laje triangular simplesmente apoiada.	158
6.67	Laje triangular simplesmente apoiada. Discretizações utilizadas.	158
6.68	Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje triangular simplesmente apoiada submetida a carga uniformemente distribuída. . . .	160
6.69	Campo de rotações e diagramas de esforços transversos em laje triangular simplesmente apoiada submetida a carga uniformemente distribuída. . . .	161
6.70	Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje triangular simplesmente apoiada submetida a uma distribuição uniforme de momentos flectores normais ao longo do contorno.	163

Capítulo 1

Introdução

1.1 Lajes finas

Os procedimentos a utilizar ao analisar uma estrutura dependem de diversos factores. Entre estes contam-se a geometria da estrutura, o material que a constitui, a solicitação a que está sujeita e os objectivos a que se destina a análise.

Em geral as estruturas são classificadas de acordo com alguns destes factores. Assim, de acordo com o *Vocabulário da Teoria das Estruturas* [74], uma *laje* é uma *peça laminar* (corpo em que uma das dimensões é muito menor que as outras duas) sujeita principalmente a esforços não existentes no seu *plano médio* (superfície média de uma peça laminar plana).

As lajes não deixam de ser, no entanto, casos particulares de sólidos tridimensionais sujeitos a determinado carregamento e uma análise exacta em termos de tensões apresenta algumas dificuldades.

Para o caso de estruturas usuais em engenharia civil é aconselhável tirar partido da relação entre as suas dimensões para reduzir o custo de análise (em termos de tempo, capacidade de armazenamento e processamento de dados). Sendo a espessura (t) da estrutura pequena quando comparada com as outras dimensões é, em geral, satisfatório utilizar determinadas hipóteses que se vão traduzir numa clara simplificação do problema. Dependendo das hipóteses admitidas, diferentes teorias de lajes são obtidas. Estas hipóteses vão incidir sobre as condições de equilíbrio, elasticidade e compatibilidade.

No domínio da engenharia de estruturas a utilização da *teoria de lajes finas*, baseada nas hipóteses formalizadas por Kirchhoff em 1850 [60], é generalizada. Entre as razões que estão na origem deste facto pode salientar-se:

- a boa aproximação entre os resultados obtidos utilizando a *teoria de lajes finas* e

os experimentais. Este facto é explicado na medida em que as hipóteses de base não introduzem erros significativos para as estruturas com dimensões, materiais e carregamentos habituais em engenharia de estruturas;

- o elevado número de publicações sobre o tema, o que se traduziu num forte incentivo à sua aplicação em problemas de Engenharia;
- a percepção que a *teoria de lajes finas* resulta da generalização da *teoria de vigas de Euler-Bernoulli*.

1.2 Métodos de análise

Diferentes métodos de aplicação generalizada a diversos domínios foram, ao longo dos anos, particularizados aos pressupostos da *teoria de lajes finas*. Entre estes pode destacar-se:

soluções analíticas, apenas utilizáveis em casos simples. Verifica-se que a *expansão em série de Fourier* constitui uma forma adequada para a representação da solução para diversos casos de lajes rectangulares. A *transformada de Mellin* é adequada para lajes com cantos em cunha com quaisquer condições de fronteira homogéneas. No caso de lajes circulares com simetria radial a *integração analítica da equação diferencial* fornece expressões simples para a solução do problema. Estes métodos foram descritos e aplicados a diversas situações por Timoshenko e Woinowsky-Krieger [86];

o método de Rayleigh-Ritz, o qual assume uma determinada expansão para o campo de deslocamentos que satisfaz as condições de fronteira essenciais do problema. A minimização da energia potencial do sistema fornece a solução para os coeficientes indeterminados na expansão [86]. Na sua forma original, tal como as soluções analíticas, a sua utilização é restrita. Os princípios variacionais em que se baseia podem ser aplicados a múltiplos problemas;

o método das diferenças finitas, de emprego mais vasto que os anteriores. A sua aplicação foi feita a lajes de formas e carregamentos diversos [88]. As expressões diferenciais que intervêm nas equações diferenciais e nas condições de fronteira são aproximadas por expressões em que intervêm diferenças entre os valores da função incógnita nos pontos nodais de uma malha previamente estabelecida no domínio de resolução do problema. Este método baseia-se directamente na equação diferencial a resolver (a chamada formulação clássica do problema);

o método das faixas finitas, que é um procedimento híbrido que combina algumas das vantagens das soluções por séries para lajes ortotrópicas com o conceito de elemento finito. A estrutura é dividida em faixas longitudinais ligadas ao longo de linhas. O seu campo de deslocamentos é definido por polinómios e funções

trigonométricas. Aplicações a lajes de tabuleiros e caixões de pontes foram feitas, por exemplo, por Cusens e Pama [19];

o folded plate method, o qual possibilita a análise de lajes ortotrópicas na sua forma original, considerando, por exemplo, que uma viga em caixão é formada por uma série de lajes finas rigidamente ligadas ao longo das arestas comuns [37];

o Método dos Elementos Finitos, (*Finite Element Method* ou *FEM*), o mais utilizado na prática, pois permite a consideração de geometria e solicitações variadas. Análises dinâmica, geometricamente e/ou fisicamente não lineares são possíveis. Este método baseia-se, na sua forma mais usual, na formulação variacional do problema. O meio contínuo é discretizado num número finito de partes (elementos), sendo o comportamento de cada um destes descrito por um número finito de parâmetros. Uma descrição global do método é feita por Zienkiewicz e Taylor [100, 101]. Os elementos finitos de compatibilidade têm tido mais receptividade por parte da generalidade dos projectistas que os de equilíbrio e híbridos/mistos, apesar de algumas vantagens que estes podem apresentar [10, 20, 76];

o Método dos Elementos de Fronteira, (*Boundary Element Method* ou *BEM*), que tem como principal característica o facto do problema ser formulado apenas em termos de equações integrais na fronteira recorrendo, para tal, ao uso de soluções fundamentais da equação diferencial como funções de ponderação dos campos a aproximar na fronteira [8].

Os resultados obtidos empregando os métodos referidos anteriormente podem ser confrontados com os observados por outros métodos, cujas hipóteses em que se baseiam e as técnicas a que recorrem são significativamente diferentes dos primeiros. Entre estes pode apontar-se:

os métodos baseados nos teoremas da Análise Limite, os quais são aplicáveis à generalidade das estruturas. Uma análise em termos de tensões, baseada no comportamento elástico linear, não fornece a *real* capacidade de carga da estrutura. Esta pode ser determinada recorrendo à análise limite. A aplicação mais simples do *teorema estático* em lajes é o *método das bandas* [39], que procura simular o comportamento de laje adoptando caminhos de carga pré-definidos. Os recursos necessários à sua utilização são reduzidos. A utilização do método dos elementos finitos (de grelha) [19] também é válida devido a este teorema. Do ponto de vista prático é bastante útil, visto que a forma sob a qual os resultados são obtidos facilita o dimensionamento das secções de laje. Dado que apenas utiliza elementos unidimensionais é mais simples conceber o modelo de cálculo que com elementos bidimensionais. Outro método de análise limite é o *método das linhas de rotura* [75, 84], o qual se baseia no *teorema cinemático*. Este só pode ser utilizado desde que o material possa deformar plasticamente e a relação tensão-deformação possa ser aproximada pelo critério rígido-plástico de Johansen. A sua aplicação para fins de dimensionamento é limitada pois este método apenas fornece majorantes da carga última da laje;

os métodos experimentais são uma técnica fundamental na aferição dos métodos analíticos e numéricos. A construção de *modelos estruturais* permite obter os correspondentes valores no protótipo utilizando a Teoria da Se-me-lhan-ça. A análise de tensões pode ser feita utilizando, por exemplo, a *Extensometria Eléctrica de Resistência*. Outras possibilidades são a *fotoelasticidade* e a *luz reflectida*, por exemplo.

Em consequência do desenvolvimento e aplicação das técnicas citadas, o recurso a tabelas e ábacos para a análise de lajes tornou-se generalizado. As condições de fronteira são vulgarmente assemelhadas a determinados casos ideais. Como exemplos destes trabalhos podem citar-se:

Bareš [4], onde são apresentados diversos resultados para lajes rectangulares, enviesadas e circulares com diversas condições de fronteira sujeitas a variações de temperatura, cargas concentradas e distribuídas (uniforme e linearmente). São ainda tratados alguns exemplos de lajes com rigidez de flexão variável, lajes com aberturas e lajes apoiadas em pilares;

Pucher [81], o qual apresenta uma série de superfícies de influência de grande utilidade na análise de esforços em lajes de tabuleiros de pontes sujeitas à acção de cargas concentradas;

Cusens e Pama [19], os quais publicaram ábacos para o cálculo de linhas de influência de distribuição transversal de cargas em tabuleiros de pontes. Estes são considerados como se de lajes ortotrópicas se tratasse. Os primeiros trabalhos neste campo foram publicados por Guyon [35] e Massonnet [71]. O método foi desenvolvido por Bareš e Massonnet [82];

Hambly [37], que publicou ábacos para calcular a repartição transversal de cargas em tabuleiros de pontes. As linhas de influência respectivas foram determinadas utilizando o *folded plate method*.

Quando as aproximações relativas às condições de fronteira, geometria, materiais constituintes ou carregamento da laje não são realistas, ou ainda, se um outro tipo de análise é requerido (análises dinâmica, geométrica ou fisicamente não linear) modelos de compatibilidade, ou deslocamento, do *Método dos Elementos Finitos* são normalmente escolhidos. Diversas razões contribuem para este facto:

1. a implementação deste método em programas *de cálculo automático* permitiu dotar a generalidade dos projectistas de uma ferramenta para a resolução de problemas com geometria e solicitações complexas;
2. a integração de elementos de laje com *outros tipos de elementos* é imediata;
3. a *qualidade dos resultados* obtidos é, desde que a discretização seja adequada, aceitável para o dimensionamento de estruturas.

Algumas desvantagens inerentes a este método podem ser apontadas:

1. dado que na formulação correspondente os deslocamentos são as incógnitas principais, a *teoria de lajes finas* exige continuidade para as derivadas dos deslocamentos através das interfaces entre elementos adjacentes, ou seja, exige continuidade de classe C^1 às funções de aproximação do campo de deslocamentos. Dada a dificuldade em construir interpolações multi-dimensionais de classe C^1 , é habitual o recurso a elementos não conformes, isto é, que violam a condição de continuidade. A convergência deste tipo de elementos não é, em geral, monotónica;
2. as singularidades (de geometria da peça ou devidas a cargas concentradas) não são devidamente tomadas em consideração, podendo originar que em alguns casos, mesmo utilizando malhas refinadas nestas zonas, os resultados obtidos sejam insatisfatórios;
3. a necessidade de discretizar o domínio e, conseqüentemente, um elevado dispêndio de recursos em termos de capacidade de *armazenamento e processamento de dados*;
4. a quantidade de informação a ser tratada limita a detecção de eventuais erros;
5. a diferença de precisão obtida para os campos de grandezas estáticas e cinemáticas;
6. a forte dependência que existe entre a geometria da malha a utilizar na análise e a acção a que o modelo vai ser submetido.

A aplicação do *FEM* à resolução de lajes finas tem recebido a atenção de numerosos investigadores, tendo sido investigadas várias abordagens com elementos híbridos e/ou mistos e elementos de equilíbrio. De referir a publicação em 1984 de um artigo [40] contendo um catálogo com 88 elementos de laje fina ou moderadamente espessa.

1.3 Motivação

Na tentativa de melhorar a performance dos elementos na resolução de problemas de valores na fronteira, a utilização da metodologia de Trefftz [87] tem sido investigada e resultados positivos têm sido obtidos nos mais diversos domínios.

Este método foi apresentado em 1926 como uma alternativa ao método de Rayleigh-Ritz, tendo como ideia básica a utilização de funções de teste que satisfaçam *a priori* a equação governativa do problema. Este procedimento conduz à eliminação dos termos que envolvem o domínio do problema, e conseqüentemente a uma significativa redução da dimensão do mesmo.

A primeira tentativa para gerar um elemento finito baseado no método de Trefftz foi realizada em 1977 por Jiroušek e Leon [48], que apresentaram um elemento de laje fina com 24 graus de liberdade e ilustraram a sua precisão em diversos exemplos. Aplicações subsequentes à análise de outros problemas foram realizadas: elasticidade plana [51], lajes finas [51, 47, 49], cascas finas [90], lajes moderadamente espessas de Reissner-Mindlin [77, 57], lajes espessas [79], mecânica de sólidos 3-D [78] e axissimétricos [95, 94], equação de Poisson [98] e condução de calor [50].

As opções cruciais na formulação de técnicas baseadas no método de Trefftz são o modo através do qual as condições de fronteira são impostas e os resíduos são calculados.

Duas abordagens têm sido discutidas: uma que passa pela criação de elementos finitos híbridos de elevada qualidade, destacando-se as contribuições de Jiroušek [54] e Freitas [22] e outra que entende que a formulação do problema deve ser feita em termos de fronteira, logo realçando as semelhanças com as técnicas de fronteira, particularmente com o *BEM*, como foi feito por Cheung *et al* [44].

As formulações indirectas do método, nas quais se considera a sobreposição de funções que satisfazem *a priori* a equação governativa do problema encontram-se inseridas neste último grupo.

Dado que os resultados obtidos na aplicação destas formulações à resolução de problemas de potencial e elasticidade plana são encorajadores, a sua aplicação a lajes finas reveste-se, naturalmente, de um redobrado interesse.

1.4 Objectivo

O objectivo principal deste trabalho consiste na utilização e desenvolvimento de uma técnica de fronteira baseada no método indirecto de Trefftz para a análise elástica de lajes finas.

A avaliação das possibilidades do *Método dos Mínimos Quadrados* (na designação inglesa, *Least-Squares Method-LSM*) para impôr as condições de fronteira (CF), em lugar dos tradicionais teoremas energéticos e dos trabalhos virtuais, reveste-se de elevado interesse. O *LSM* insere-se no contexto dos *Weighted Residual Methods (WRM)*. Duas alternativas são possíveis: *contínua* e *discreta*, dependendo da forma como são impostas as CF.

Para o tratamento de singularidades devidas à geometria do domínio, nomeadamente casos de lajes em viés e lajes com aberturas circulares, a utilização de soluções apropriadas da equação diferencial de equilíbrio e simultâneamente satisfazendo CF específicas é fundamental.

A obtenção de soluções particulares para determinadas solicitações contribui, por um

lado, para uma redução da dependência entre a carga aplicada e a discretização adoptada e para um aumento da precisão nos campos de tensões.

Uma eficiente implementação em programa de cálculo automático é fundamental pois permite a análise de variadíssimos casos de uma forma sistemática.

1.5 Organização

O presente trabalho está organizado em sete capítulos.

Um resumo da formulação clássica da teoria de lajes finas é apresentado no capítulo 2. Este inclui as hipóteses em que se baseia, as limitações subjacentes, as grandezas intervenientes e as relações principais. As expressões das grandezas que definem o comportamento da laje no domínio, bem como as condições de fronteira, são definidas em termos do deslocamento transversal, w , o qual é, na presente abordagem, o campo a aproximar. Para o tratamento de singularidades é desejável o recurso a coordenadas polares, pelo que as expressões principais são, também, exibidas neste sistema.

No capítulo 3 são apontados as principais formulações desenvolvidas a partir do método de Trefftz. Relevância especial é dada aos métodos indirectos, no qual o presente trabalho se insere. Uma resenha das aplicações anteriores é elaborada, destacando-se os trabalhos em mecânica dos sólidos.

A formulação baseada na minimização do quadrado dos resíduos na fronteira, que serve de base ao presente trabalho, é aplicada ao problema das lajes finas no capítulo 4. As aproximações efectuadas, os campos de deslocamento (soluções homogéneas e particulares) a utilizar nos casos regulares e singulares e as diferentes alternativas de imposição das condições de fronteira (discreta e contínua) são apresentados.

O método numérico apresentado neste trabalho é aplicável à resolução da generalidade dos problemas de lajes finas. A eficácia do procedimento depende das ferramentas utilizadas. A implementação em programa de cálculo automático é a melhor solução para o tipo de análises a efectuar. No capítulo 5 é feita uma descrição sumária do programa de cálculo automático desenvolvido para o efeito e especificidades deste tipo de abordagem são destacadas.

Exemplos de aplicação a diversos casos são feitos no capítulo 6. São analisadas lajes rectangulares, circulares, enviesadas e triangulares. A comparação de resultados do presente método é feita com outras soluções conhecidas incluindo, em alguns casos, soluções obtidas com recurso a programas correntes de análise estrutural.

Conclusões do trabalho e sugestões para futuros desenvolvimentos são apresentadas no capítulo 7.

Capítulo 2

Análise elástica linear de lajes finas

2.1 Hipóteses fundamentais

Considere-se a laje representada na figura 2.1, em que $\vec{n}$ e $\vec{t}$ são vectores unitários com componentes segundo as direcções normal e tangencial, respectivamente, de uma secção normal ao plano médio da laje.

As simplificações a introduzir na teoria tridimensional da elasticidade com vista à obtenção da teoria de lajes finas são essencialmente restrições ao comportamento do material e aos estados de tensão e deformação da peça. As hipóteses a considerar são as seguintes:

- admite-se a *hipótese da linearidade física*: o material constituinte da laje é homogéneo, isotrópico e apresenta comportamento elástico linear;
- admite-se a *hipótese da linearidade geométrica*: por um lado existem no corpo *pequenas deformações* (as componentes da deformação são muito pequenas em face da unidade) e, por outro lado, ocorrem *pequenos deslocamentos* (as derivadas dos deslocamentos são muito pequenas face à unidade). Como consequência podem desprezar-se as grandezas de 2^a ordem e superiores, face às de 1^a ordem. Assim, pode tomar-se a configuração inicial como não distinta da configuração deformada, apresentando-se as equações de equilíbrio e relações deformações-deslocamentos como lineares;
- admite-se que a laje é constituída por subdomínios. O subdomínio i é da forma

$$\Omega_i = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \in \left[-\frac{t_i}{2}, \frac{t_i}{2} \right], (x, y) \in A_i \subset \mathbf{R}^2 \right\};$$

- admitem-se as *hipóteses de Kirchhoff*:

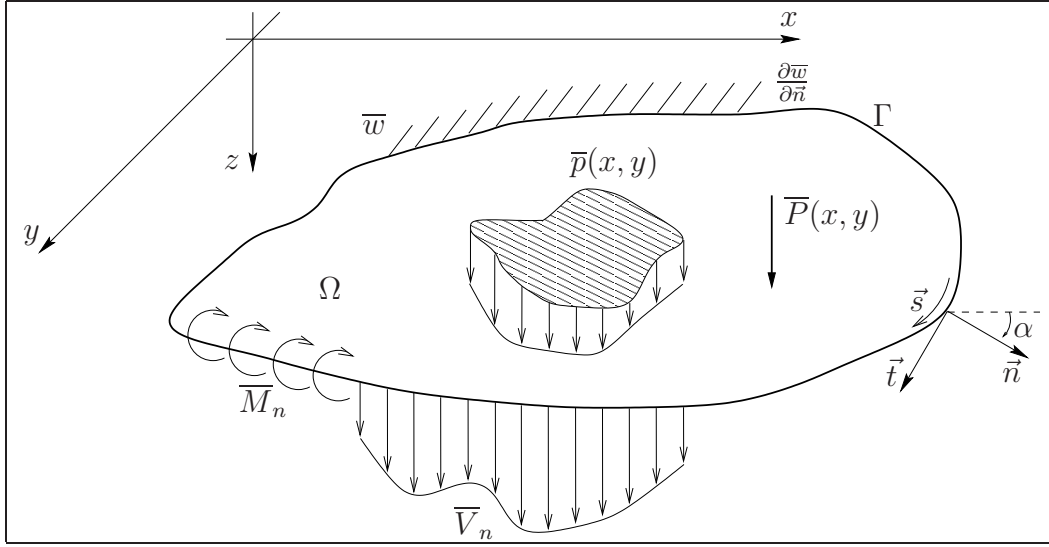


Figura 2.1: Laje fina.

1. fibras normais ao plano médio da peça mantêm-se rectas e ortogonais à superfície média e são inextensíveis. O campo de deslocamentos é então dado por:

$$u_x(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad (2.1a)$$

$$u_y(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \quad (2.1b)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y); \quad (2.1c)$$

2. podem tomar-se como nulas as tensões normais actuantes em planos paralelos ao plano médio, isto é, $\sigma_{zz} \simeq 0$.

Da hipótese da linearidade geométrica atrás referida advém o princípio da sobreposição das deformações, segundo o qual a aplicação sucessiva de duas deformações homogêneas infinitesimais conduz a uma deformação cujas componentes são a soma das componentes correspondentes das deformações aplicadas e é independente da ordem pela qual se faz essa aplicação. As hipóteses de Kirchhoff são aceitáveis a partir de determinados valores da relação vão/espessura, pois a importância da deformação por esforço transversal cresce com a diminuição deste valor. É geralmente aceite ser suficiente $l/t = 10$, no entanto, diferenças substanciais podem ocorrer em certas ocasiões, quando a comparação de resultados é feita com teorias mais elaboradas. Exemplos são dados por O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor [101] em que comparações com soluções obtidas com a teoria tridimensional de elasticidade e com a teoria de Reissner-Mindlin são feitas. De notar que a segunda hipótese de Kirchhoff não é válida na vizinhança do ponto de aplicação de cargas concentradas. Junto a estas as tensões σ_{zz} não são negligenciáveis face às tensões paralelas ao plano médio da laje.

2.2 Definições e relações principais

2.2.1 Tensões, esforços e equações de equilíbrio

Num ponto genérico da peça definem-se os seguintes vectores com as componentes relevantes do tensor das tensões:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix},$$

em que os índices possuem o significado habitual em mecânica dos meios contínuos.

Num ponto do plano médio da laje são definidos os *momentos flectores*, o *momento torsor*

$$M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xx} dz,$$

$$M_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{yy} dz,$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xy} dz,$$

e os *esforços transversos*

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz,$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz.$$

O tensor dos momentos e os esforços transversos são agrupados na seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}.$$

As equações diferenciais de equilíbrio de uma peça laminar plana, tal como acontece na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, podem ser obtidas estabelecendo o equilíbrio de forças e momentos num elemento infinitesimal da peça. Devido à hipótese dos pequenos deslocamentos o equilíbrio é estabelecido na configuração indeformada do elemento. Procedendo deste modo obtém-se:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{M} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (2.2a)$$

$$\nabla^T \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (2.2b)$$

em que

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Deformações, deslocamentos e equações de compatibilidade

Os seguintes vectores contêm as componentes relevantes do tensor das deformações:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}.$$

O campo de deslocamentos é definido através do deslocamento do plano médio da laje, w . As rotações são agrupadas no seguinte vector:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}.$$

As curvaturas são agrupados na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix}.$$

No contexto da análise geometricamente linear, as condições de compatibilidade são transformações conjugadas das condições de equilíbrio (2.2):

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{L}\boldsymbol{\theta}, \quad (2.3a)$$

$$\gamma = \nabla w + \boldsymbol{\theta}. \quad (2.3b)$$

Sendo a deformação por esforço transversal negligenciável tem-se $\gamma = \mathbf{0}$. Substituindo em (2.3b) as rotações são dadas por:

$$\boldsymbol{\theta} = -\nabla w. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3a) obtém-se a seguinte relação curvaturas-deslocamento:

$$\boldsymbol{\chi} = -(\mathbf{L}\nabla)w, \quad (2.5)$$

onde

$$(\mathbf{L}\nabla)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}.$$

Sendo válida a hipótese dos pequenos deslocamentos, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (2.6)$$

Substituindo as equações que definem o campo de deslocamentos (2.1a) e (2.1b) em (2.6) obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} \end{Bmatrix},$$

que, atendendo a (2.5), pode ser escrita na forma

$$\varepsilon = z\chi.$$

2.2.3 Equações constitutivas e relações esforços-deformações generalizadas

A relação constitutiva, atendendo a que cada lâmina se encontra em estado plano de tensão, é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

Integrando (2.7) na espessura obtém-se a seguinte relação momento-curvatura

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\chi, \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{D} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

e $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ é a rigidez de flexão da laje.

2.3 Modelo de análise de lajes

Substituindo a equação de compatibilidade (2.5) na relação de elasticidade (2.8) e esta na equação de equilíbrio (2.2b) obtém-se a equação governativa do problema¹,

$$\nabla^4 w = \frac{\bar{p}}{D}, \quad (2.9)$$

onde $\nabla^4 = \nabla^2 (\nabla^2)$ é o operador biarmónico. O operador harmónico, ∇^2 , é definido por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Neste formato, a formulação apresentada é *irredutível*. O estado de deformação da peça pode ser determinado a partir de apenas uma quantidade, w . A obtenção de teorias mais elaboradas passa pela introdução de variáveis adicionais [101].

É conveniente exprimir os esforços em função do campo de deslocamentos. Substituindo (2.3a) em (2.8) obtém-se

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.10a)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.10b)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (2.10c)$$

Substituindo as expressões anteriores (2.10) nas equações de equilíbrio de momentos (2.2a) vem

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad (2.11a)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (2.11b)$$

Note-se que as componentes de $\mathbf{M}$ e χ formam tensores simétricos, de 2ª ordem bidimensionais, e como tal, é possível proceder a transformações de coordenadas na forma habitual.

A diferença no deslocamento transversal entre dois pontos adjacentes segundo a direcção $\vec{n}$ é:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy,$$

e a inclinação do plano médio naquela direcção é

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dn} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha. \quad (2.12)$$

¹Esta equação foi obtida por Lagrange em 1811 quando este examinava a memória apresentada à Academia Francesa das Ciências por Sophie Germain.

Efectuando a substituição de α por $(\alpha + \frac{\pi}{2})$ em (2.12) obtém-se

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}(-\sin \alpha) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \alpha. \quad (2.13)$$

As equações (2.12) e (2.13) podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{Bmatrix}. \quad (2.14)$$

Utilizando sucessivamente os operadores de diferenciação expressos por (2.14) conclui-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \end{Bmatrix}. \quad (2.15)$$

Da mesma forma é obtida a relação para os operadores de terceira e quarta ordem.

Os momentos flector e torsor normais, M_n e M_{nt} , são dados por

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right),$$

$$M_{nt} = -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \right).$$

Utilizando (2.15) e (2.10) conclui-se

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.16a)$$

$$M_{nt} = (M_y - M_x) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (2.16b)$$

Semelhante conclusão seria obtida por integração na espessura das tensões que se geram num bordo de normal $\vec{n}$ num elemento infinitesimal de placa sujeito a tensões segundo os eixos coordenados:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau_{nt} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

O esforço transversal normal, Q_n , é dado por

$$Q_n = -D \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 w.$$

Utilizando (2.14) e (2.11) conclui-se

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha. \quad (2.17)$$

Este resultado, tal como para os momentos flectores, poderia ser obtido por equilíbrio num elemento infinitesimal.

Por último, densidade de energia de deformação para lajes finas é dada pela expressão (2.18).

$$dU = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.18)$$

2.4 Condições de fronteira

2.4.1 Apoio

Designa-se por condições de fronteira *de apoio* aquelas que são impostas ao longo do contorno da laje. No caso das condições de fronteira estáticas considera-se a possibilidade de apoios elásticos distribuídos na fronteira, ou seja, a existência de vigas com rigidez de torção e/ou flexão.

Assim, ao longo de um bordo de normal exterior $\vec{n}$ duas condições de apoio são impostas: deslocamento transversal (w) ou esforço transversal efectivo normal (V_n) e rotação normal ($\frac{\partial w}{\partial n}$) ou momento flector normal (M_n).

O momento flector normal obtém-se substituindo (2.10) em (2.16a) vem

$$M_n = -D \left\{ \nu \nabla^2 w + (1 - \nu) \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\}. \quad (2.19)$$

Num bordo de normal $\vec{n}$ em que apenas se impõem condições de fronteira estáticas existem três esforços: momentos flector e torsor, M_n e M_{nt} e esforço transversal, Q_n , ou seja, existe uma restrição a mais do que aquelas que são requeridas sob o ponto de vista matemático. Kirchhoff provou em 1850, a partir de considerações variacionais, que as condições de fronteira que envolvem M_{nt} e Q_n devem ser substituídas por uma única. A nova grandeza, numa face de normal $\vec{n}$, é denominada por *esforço transversal efectivo normal*, V_n . Na base desta substituição está a primeira hipótese de Kirchhoff, a qual assume que a laje seja rígida à deformação por esforço transversal. O esforço transversal efectivo normal é obtido a partir de Q_n pela adição da parcela adicional

$$Q'_n = \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}. \quad (2.20)$$

O seu significado físico foi explicado em 1883 por Kelvin e Tait: a flexão da laje não é alterada se o momento torsor que actua num elemento de comprimento ds , $M_{nt} ds$, for substituído por um par de forças de corte verticais de valor M_{nt} . Fazendo um raciocínio idêntico para o elemento adjacente, onde actua o momento $(M_{nt} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} ds) ds$, e adicionando vectorialmente as forças entre elementos a expressão (2.20) é obtida. Assim,

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.17) e (2.16b) em (2.21) obtém-se o esforço transversal efectivo normal em termos do campo de deslocamentos:

$$V_n = -D \left\{ \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial t} \left[\cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right\}, \quad (2.22)$$

em que o operador $\frac{\partial}{\partial t} = -\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y}$. As relações entre o campo de deslocamentos e as grandezas que definem as condições de fronteira ($\overline{w}$, $\frac{\partial \overline{w}}{\partial n}$, $\overline{M}_n$ e $\overline{V}_n$), para o subdomínio j , são:

$$w^j = \overline{w}^j \quad t \in \Gamma_w^j, \quad (2.23a)$$

$$\frac{\partial w^j}{\partial n} = \frac{\partial \overline{w}^j}{\partial n} \quad t \in \Gamma_{\frac{\partial w}{\partial n}}^j, \quad (2.23b)$$

$$M_n^j + GJ \frac{\partial^3 w^j}{\partial t^2 \partial n} = \overline{M}_n^j \quad t \in \Gamma_{M_n}^j, \quad (2.23c)$$

$$V_n^j + EI \frac{\partial^4 w^j}{\partial t^4} = \overline{V}_n^j \quad t \in \Gamma_{V_n}^j. \quad (2.23d)$$

Todas as características geométricas e materiais das vigas estão contidas na *rigidez de flexão*, EI , e na *rigidez de torção*, GJ .

2.4.2 Continuidade

Em certos casos pode ser vantajoso discretizar o domínio original, Ω , em n subdomínios, $\Omega^1, \dots, \Omega^j, \Omega^{j+1}, \dots, \Omega^n$. Estes podem ter características distintas, mas cada um deles é regido por (2.9). As condições de fronteira impostas entre os subdomínios designam-se por condições de fronteira de *continuidade*. As *quatro* condições de fronteira que asseguram a continuidade ao longo da interface, $\Gamma_I = \Omega^j \cap \Omega^{j+1}$, entre dois subdomínios Ω^j e Ω^{j+1} , são:

$$w^j - w^{j+1} = 0, \quad (2.24a)$$

$$\frac{\partial w^j}{\partial n} + \frac{\partial w^{j+1}}{\partial n} = 0, \quad (2.24b)$$

$$M_n^j + GJ \frac{\partial^3 w^j}{\partial t^2 \partial n} - M_n^{j+1} = 0, \quad (2.24c)$$

$$V_n^j + EI \frac{\partial^4 w^j}{\partial t^4} + V_n^{j+1} = 0. \quad (2.24d)$$

2.5 Resumo das relações principais em coordenadas polares

Em certos casos é vantajosa a utilização do sistema de coordenadas polares. Considere-se um sistema de coordenadas polares (r, θ) centrado no ponto O . A relação entre coordenadas polares e cartesianas é dada pelas equações:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

A matriz jacobiana da transformação, $\mathbf{J}$, é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix}.$$

A inclinação na direcção x é dada por

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta. \quad (2.25)$$

Para a direcção y tem-se

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \theta. \quad (2.26)$$

Utilizando sucessivamente os operadores diferenciais (2.25) e (2.26) as derivadas de ordem superior podem ser obtidas. Substituindo estes resultados em (2.10) e (2.11) obtêm-se as expressões dos momentos flector e tursor e esforços transversos, em coordenadas polares:

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad (2.27a)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \quad (2.27b)$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = -(1 - \nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (2.27c)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w, \quad (2.28a)$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w, \quad (2.28b)$$

onde ∇^2 é o operador harmónico em coordenadas polares, dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2.29)$$

A equação diferencial governativa do problema (2.9) mantém-se, sendo o operador harmónico o definido por (2.29).

Ao longo de um bordo de normal exterior $\vec{n}$, para a rotação normal, momentos flector e tursor normais e esforço transversal normal tem-se, respectivamente,

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \cos \phi \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (2.30)$$

$$M_n = M_r \cos^2 \phi + M_\theta \sin^2 \phi + 2M_{r\theta} \sin \phi \cos \phi, \quad (2.31)$$

$$M_{nt} = M_{r\theta}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + (M_\theta - M_r) \sin \phi \cos \phi, \quad (2.32)$$

$$Q_n = \cos \phi Q_r + \sin \phi Q_\theta, \quad (2.33)$$

onde $\phi = \alpha - \theta$.

O esforço transverso efectivo normal, V_n , é dado por:

$$\begin{aligned}
 V_n = -D \Bigg\{ & \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right) \cos \phi \\
 & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) \sin \phi + (1 - \nu) \left[\left(\left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right. \right. \right. \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \Bigg) \sin \phi \cos \phi \\
 & + \left(-\frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \Bigg) (-\sin \phi) \\
 & + \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} \right) \sin \phi \cos \phi \right. \\
 & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \\
 & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w^3}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\
 & \left. \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) 4 \cos \phi \sin \phi \right) \frac{\cos \phi}{r} \right] \Bigg\}. \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Formulações baseadas no método de Trefftz

3.1 Introdução

A formulação clássica do método de Trefftz foi proposta em 1926 por Erich Trefftz (1888-1937) [87] para a resolução de problemas de potencial em domínios bidimensionais. O facto de a solução ser dada através da sobreposição de funções que satisfazem a equação diferencial governativa do problema *a priori* seria a principal novidade.

Para ilustrar a formulação do problema considere-se o problema do equilíbrio interno de um meio elástico contínuo ocupando a região Ω e confinado por $\Gamma = \partial\Omega$. Este pode ser expresso em termos de deslocamentos pelo sistema de equações diferenciais

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{em } \Omega, \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{L}$ é uma matriz de operadores diferenciais lineares, $\mathbf{u}$ é um vector de deslocamentos generalizados e $\bar{\mathbf{f}}$ é o vector conjugado de forças generalizadas de massa. O vector conjugado de tracções generalizadas é $\mathbf{t}$.

As condições de fronteira são especificadas em termos de deslocamentos generalizados na fronteira e/ou tracções generalizadas conjugadas,

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_t, \quad (3.2b)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ são as quantidades prescritas em $\Gamma_u + \Gamma_t = \partial\Omega$.

Divida-se o domínio Ω em subdomínios Ω^i , $i = 1, \dots, n_{\text{regiões}}$. A solução para o

subdomínio i é aproximada por

$$\mathbf{u}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}) = \overset{\circ}{\mathbf{u}}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m^i} \mathbf{N}_j^i(\mathbf{x}) c_j^i = \overset{\circ}{\mathbf{u}}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}) + \mathbf{N}^i(\mathbf{x}) \mathbf{c}^i \quad \mathbf{x} \in \Omega^i, \quad (3.3)$$

em que m^i é o grau máximo das funções utilizadas na expansão, $\mathbf{c}^i$ é um vector de coeficientes indeterminados e $\overset{\circ}{\mathbf{u}}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x})$ e $\mathbf{N}^i(\mathbf{x})$ são funções de teste que satisfazem em Ω^i

$$\mathbf{L} \overset{\circ}{\mathbf{u}}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}), \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{L} \mathbf{N}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.4b)$$

Estas funções, doravante denominadas funções-T, fazem parte de um conjunto completo de soluções homogêneas da equação governativa do problema, logo verificando localmente, e simultâneamente, as condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade.

A partir de (3.3) pode ser determinado o vector conjugado de tracções

$$\mathbf{t}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}) = \overset{\circ}{\mathbf{t}}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}) + \mathbf{T}^i(\mathbf{x}) \mathbf{c}^i.$$

A solução obtida satizfaz *a priori* a equação diferencial governativa do problema. A imposição das condições de fronteira permite obter os coeficientes indeterminados $\mathbf{c}^i$.

A forma como as condições de fronteira são impostas origina diferentes formulações. Estas podem, em geral, ser classificadas em *directas* e *indirectas*. Na primeira as variáveis introduzidas são quantidades às quais se pode atribuir um significado físico (como deslocamentos ou tracções) activas na fronteira, enquanto que na segunda são parâmetros multiplicativos de funções de teste apropriadas, não possuindo significado físico. Esta classificação é habitual no método dos elementos de fronteira (BEM).

Em seguida é apresentado um breve resumo das diversas formulações, dando especial ênfase aos métodos indirectos, nos quais se pode incluir o presente trabalho. É feita referência a algumas técnicas que foram desenvolvidas independentemente do método de Trefftz, mas que pelas suas características podem ser consideradas aplicações particulares do mesmo.

3.2 Método Indirecto

3.2.1 Considerações gerais

Esta formulação é, no seu essencial, a originalmente apresentada por Trefftz.

A formulação fraca do problema definido por (3.1) e (3.2) pode ser expressa através da seguinte forma de resíduos pesados:

$$\sum_{i=1}^{n_{regiões}} \left\{ \int_{\Omega^i} \mathbf{W}_{\Omega}^T \mathbf{R}_{\Omega}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}^i) d\Omega^i + \int_{\Gamma_u^i} \mathbf{W}_u^T \mathbf{R}_u^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}^i) d\Gamma_u^i + \int_{\Gamma_t^i} \mathbf{W}_t^T \mathbf{R}_t^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}^i) d\Gamma_t^i + \int_{\Gamma_I^i} \mathbf{W}_u^T \mathbf{R}_{Iu}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}^i) + \mathbf{W}_t^T \mathbf{R}_{It}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}^i) d\Gamma_I^i \right\} = 0, \quad (3.5)$$

em que:

- Ω^i é a região i ;
- Γ_u^i é a fronteira cinemática da região i ,
- Γ_t^i é a fronteira estática da região i ,
- Γ_I^i é a interface entre as regiões i e j ,
- $\mathbf{R}_{\Omega}^i = \mathbf{L}\mathbf{u}^i - \bar{\mathbf{f}}$ é o resíduo no interior da região i ,
- $\mathbf{R}_u^i = \mathbf{u}^i - \bar{\mathbf{u}}^i$ é o resíduo na fronteira cinemática da região i ,
- $\mathbf{R}_t^i = \mathbf{t}^i - \bar{\mathbf{t}}^i$ é o resíduo na fronteira estática da região i ,
- $\mathbf{R}_{Iu}^i = \mathbf{u}^i - \mathbf{u}^j$ é o resíduo na interface cinemática das regiões i e j ,
- $\mathbf{R}_{It}^i = \mathbf{t}^i + \mathbf{t}^j$ é o resíduo na interface estática das regiões i e j ,
- $\mathbf{W}_{\Omega}$ é um vector de funções de peso no interior,
- $\mathbf{W}_u$ é um vector de funções de peso na fronteira cinemática da região i ,
- $\mathbf{W}_t$ é um vector de funções de peso na fronteira estática da região i .

Dependendo do tipo de aproximação utilizado para $\mathbf{u}$, obtêm-se métodos de *interior*, *fronteira* ou *mistos*.

Atendendo a (3.4) o termo respeitante ao domínio em (3.5) é nulo. Por este facto o método é classificado como sendo de *fronteira*.

A forma da solução é *local*, pois é válida para cada subdomínio. A solução nas interfaces é feita impondo, aproximadamente, as CF. Em certos casos particulares, de geometria simples, esta classificação é incorrecta, pois é possível utilizar uma aproximação *global*, em que uma única expansão representa todo o domínio.

Na figura 3.1 é apresentada a sequência de passos que esta técnica utiliza. Dependendo das funções de peso, $\mathbf{W}_u$ e $\mathbf{W}_t$, diferentes variantes do método indirecto de Trefftz são obtidas. Nas secções seguintes admite-se, por simplicidade, que o domínio é discretizado numa única região, omitindo-se assim o índice i e os termos respeitantes à interface entre regiões.

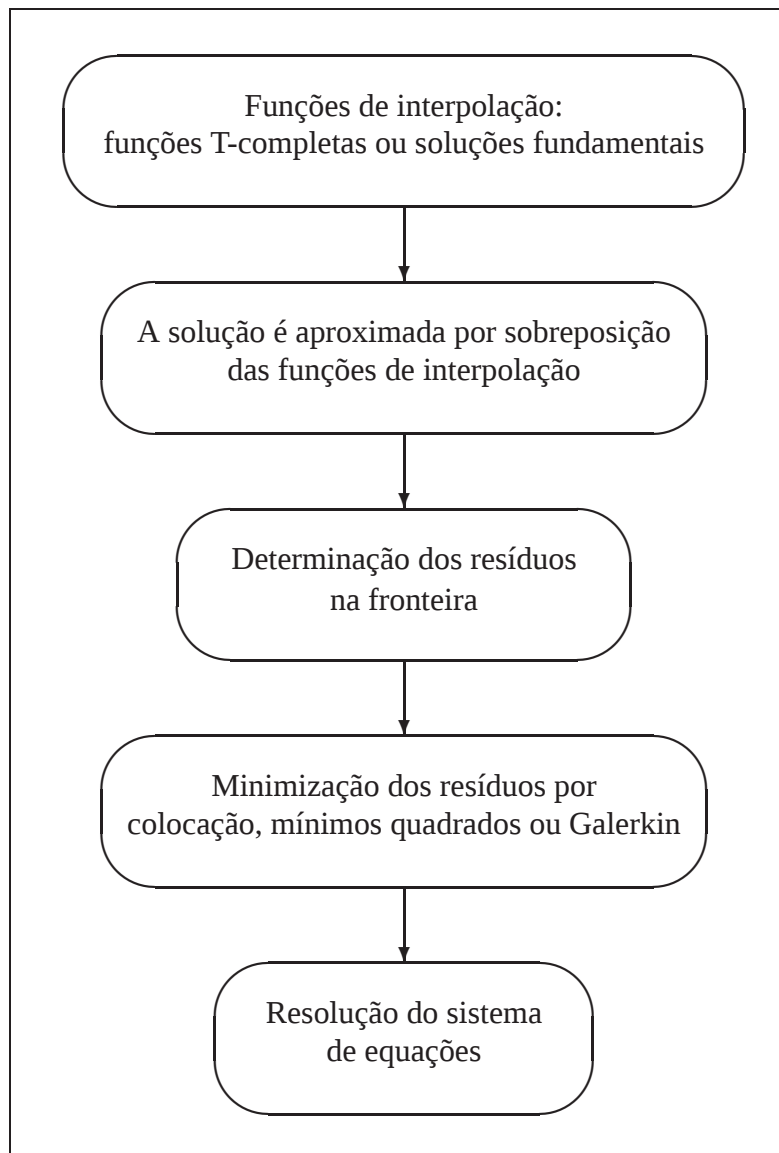


Figura 3.1: Formulação indirecta do método de Trefftz.

3.2.2 Método de colocação na Fronteira

O *Boundary Collocation Method (BCM)* é um método simples, tanto conceptualmente como de implementação.

Adoptando para funções de peso

$$\mathbf{W}_u = \delta(\mathbf{P}_j), \quad \mathbf{P}_j \in \Gamma_u, j = 1, \dots, m_1, \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{W}_t = \delta(\mathbf{Q}_j), \quad \mathbf{Q}_j \in \Gamma_t, j = 1, \dots, m_2, \quad (3.6b)$$

onde $\mathbf{P}_j$ e $\mathbf{Q}_j$ são vectores que agrupam os pontos onde as CF são impostas, ou seja, os pontos de colocação (PC), $\delta(\mathbf{P}_j)$ e $\delta(\mathbf{Q}_j)$ são vectores que agrupam funções de Dirac e $m_1 + m_2 = n$ é o número de funções utilizadas na expansão (3.3).

Substituindo (3.6a) e (3.6b) em (3.5) um sistema linear, não simétrico, de equações é obtido para o vector de incógnitas $\mathbf{c}$.

Um estimador do erro da aproximação encontrada é dado pela observação dos erros na fronteira.

O método foi aplicado por Barta [5] em 1937 à flexão de uma laje fina encastrada, submetida a carga uniforme e distribuída. Em 1952 Thorne [85] resolveu o mesmo problema utilizando uma escolha diferente para a aproximação da solução.

A extensão a CF arbitrárias foi feita em 1955 por Sekiya [83]. O trabalho de Conway [14] datado de 1960 considera aplicações a lajes triangulares equiláteras e hexágonos regulares. Comentando este trabalho, Deverall [26] apontou uma das deficiências do método: quando dois PC se aproximam, as respectivas equações escritas com base nas suas coordenadas têm praticamente os mesmos coeficientes, o que pode conduzir a matrizes mal condicionadas. Em 1961 Conway [15] estendeu o seu trabalho a problemas de encurvadura e vibração de lajes.

Leissa *et al* [66, 67, 68] consideraram alguns problemas de flexão de lajes quadradas e em forma de polígono regular em 1962, 1963 e 1965, respectivamente.

Em 1967 Conway *et al* [16] e Leissa *et al* [65] trataram casos de lajes circulares com CF mistas.

Este procedimento foi utilizado para a análise de outros problemas. Kita *et al* [61] resolveram um problema bidimensional de transferência de calor numa placa rectangular. Conway e Leissa [17] aplicaram-no à análise de cascas esféricas e Hutchinson e Houmat a cascas espessas [41, 42]. Uma extensa lista de aplicações do BCM a problemas de mecânica dos meios contínuos foi elaborada por Kolodziej [63].

3.2.3 Colocação utilizando soluções fundamentais

Em 1979 Wu e Altiero [96] aplicaram o método indirecto de integração na fronteira à resolução de lajes rectangulares sujeitas a carga uniformemente distribuída. A solução fundamental, a qual foi integrada numericamente, é a de uma laje circular encastrada submetida a uma carga concentrada. A imposição das CF é levada a cabo por integrações no contorno de uma fronteira fictícia situada fora da laje real. Este conceito foi utilizado pelos mesmos autores em 1981 [97] à análise de lajes finas anisotrópicas, utilizando a colocação na fronteira fictícia.

Em 1981 Burgess [43] utilizou soluções fundamentais para cargas pontuais para resolver problemas de elasticidade plana. Em 1985 Burgess e Mahajerin [9] estenderam o procedimento a lajes finas, denominando-o de *Fundamental Collocation Method (FCM)*. Cargas pontuais generalizadas fictícias situados no plano da laje, mas fora do seu domínio, são determinadas via colocação. O tratamento de cargas uniformes é possível através da integração analítica da solução fundamental. Os exemplos que ilustram este trabalho demonstram a boa qualidade dos resultados obtidos.

Uma variante ao método anterior é usada por Johnson [59], onde são apresentados exemplos de lajes sectoriais e triangulares sujeitas, também, a cargas uniformemente distribuídas.

3.2.4 Método dos Mínimos quadrados

Considerações gerais

O *Least-Squares Method (LSM)* foi, provavelmente, utilizado pela primeira vez por Karl Friedrich Gauss em 1794, mas descoberto independentemente por A. M. Legendre em França (1805) e R. Adrian nos Estados Unidos (1808).

Durante o século XIX foi utilizado para o tratamento de dados estatísticos. No início do século XX discutiu-se pela primeira vez a possibilidade de aplicar o método a problemas de valores na fronteira.

O contínuo desenvolvimento que se seguiu permitiu a implementação do método a problemas lineares, não lineares, de valores próprios, de valor inicial, etc.

Entre as aplicações testadas pode mencionar-se a física atómica, elasticidade (concentração de tensões, solicitações térmicas, materiais homogéneos e compósitos), electromagnetismo, escoamento de fluídos e transferência de calor. Uma lista extensiva destes trabalhos foi publicada por Eason [27] em 1976.

O LSM pode ser dividido nos casos *contínuo* e *discreto*.

Caso contínuo

O quadrado dos resíduos é integrado no domínio

$$I_c = W_\Omega^2 \int_\Omega \mathbf{R}_\Omega^T(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \mathbf{R}_\Omega(\mathbf{c}, \mathbf{x}) d\Omega + W_u^2 \int_{\Gamma_u} \mathbf{R}_u^T(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \mathbf{R}_u(\mathbf{c}, \mathbf{x}) d\Gamma_u + W_t^2 \int_{\Gamma_t} \mathbf{R}_t^T(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \mathbf{R}_t(\mathbf{c}, \mathbf{x}) d\Gamma_t. \quad (3.7)$$

Os factores W_Ω^2 , W_u^2 e W_t^2 são pesos relativos dos resíduos, respectivamente, no interior e nas fronteiras estática e cinemática.

Note-se que a utilização de funções-T elimina o primeiro termo da equação (3.7). Para mostrar a generalidade do *LSM* este termo é mantido no que se segue.

Uma função local de peso, $w_u(\mathbf{x})$, pode também ser utilizada, forçando um menor resíduo numa determinada parte do domínio. Por exemplo, $\mathbf{R}_u^T(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \mathbf{R}_u(\mathbf{c}, \mathbf{x})$ na equação (3.7) pode ser substituído por $w_u(\mathbf{x}) \mathbf{R}_u^T(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \mathbf{R}_u(\mathbf{c}, \mathbf{x})$. Ambos os termos W_u^2 e $w_u(\mathbf{x})$ podem existir na mesma formulação.

A equação (3.7) é minimizada em relação a $\mathbf{c}$. Os resíduos das equações (3.1) e (3.2) são diferenciados analiticamente em ordem a cada parâmetro de $\mathbf{c}$. Então, somatórios ponderados dos produtos são formados e integrados no domínio e na fronteira e o resultado é igualado a zero.

$$\left\{ \begin{array}{l} W_\Omega^2 \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{R}_\Omega^T(\mathbf{c}, \mathbf{x})}{\partial c_1} \mathbf{R}_\Omega(\mathbf{c}, \mathbf{x}) d\Omega + W_u^2 \int_{\Gamma_u} \frac{\partial \mathbf{R}_u^T(\mathbf{c}, \mathbf{x})}{\partial c_1} \mathbf{R}_u(\mathbf{c}, \mathbf{x}) d\Gamma_u \\ + W_t^2 \int_{\Gamma_t} \frac{\partial \mathbf{R}_t^T(\mathbf{c}, \mathbf{x})}{\partial c_1} \mathbf{R}_t(\mathbf{c}, \mathbf{x}) d\Gamma_t \\ \vdots \\ W_\Omega^2 \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{R}_\Omega^T(\mathbf{c}, \mathbf{x})}{\partial c_m} \mathbf{R}_\Omega(\mathbf{c}, \mathbf{x}) d\Omega + W_u^2 \int_{\Gamma_u} \frac{\partial \mathbf{R}_u^T(\mathbf{c}, \mathbf{x})}{\partial c_m} \mathbf{R}_u(\mathbf{c}, \mathbf{x}) d\Gamma_u \\ + W_t^2 \int_{\Gamma_t} \frac{\partial \mathbf{R}_t^T(\mathbf{c}, \mathbf{x})}{\partial c_m} \mathbf{R}_t(\mathbf{c}, \mathbf{x}) d\Gamma_t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (3.8)$$

Integrando em seguida e após alguma manipulação algébrica, a equação (3.8) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{K}$ é uma matriz simétrica e positiva definida.

Jiroušek e Wróblewski [52] aplicaram o método a um problema de elasticidade plana. Kolodziej e Uściłowska utilizaram-no [62] para problemas regidos pela equação de Laplace.

Caso discreto

O quadrado dos resíduos é avaliado e somado num número finito, m , de pontos $\mathbf{x}_i$ escolhidos em Ω e Γ .

$$I_d = W_\Omega^2 \sum_{i=1}^k \mathbf{R}_\Omega^T(\mathbf{c}, \mathbf{x}_i) \mathbf{R}_\Omega(\mathbf{c}, \mathbf{x}_i) + W_u^2 \sum_{i=k+1}^l \mathbf{R}_u^T(\mathbf{c}, \mathbf{x}_i) \mathbf{R}_u(\mathbf{c}, \mathbf{x}_i) + W_t^2 \sum_{i=l+1}^m \mathbf{R}_t^T(\mathbf{c}, \mathbf{x}_i) \mathbf{R}_t(\mathbf{c}, \mathbf{x}_i). \quad (3.10)$$

Tal como anteriormente, o primeiro termo da equação (3.10) é mantido.

Como alternativa à utilização de uma função local de peso, neste caso pode-se, também, aumentar o número de PC junto à zona em que se pretende uma melhor verificação das CF.

A equação (3.10) é minimizada em relação a $\mathbf{c}$, embora o processo seja diferente do utilizado anteriormente. Uma selecção é feita de um conjunto de pontos $\mathbf{x}_i$ no interior, Ω , e na fronteira, Γ . Após substituição das coordenadas destes nas equações (3.1) e (3.2) um vector de resíduos pesados é obtido,

$$\left\{ \begin{array}{c} W_\Omega \mathbf{R}_\Omega(\mathbf{c}, \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ W_\Omega \mathbf{R}_\Omega(\mathbf{c}, \mathbf{x}_k) \\ W_u \mathbf{R}_u(\mathbf{c}, \mathbf{x}_{k+1}) \\ \vdots \\ W_u \mathbf{R}_u(\mathbf{c}, \mathbf{x}_l) \\ W_t \mathbf{R}_t(\mathbf{c}, \mathbf{x}_{l+1}) \\ \vdots \\ W_t \mathbf{R}_t(\mathbf{c}, \mathbf{x}_m) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} W_\Omega [\mathbf{L}\mathbf{u}(\mathbf{c}, \mathbf{x}_1) - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1)] \\ \vdots \\ W_\Omega [\mathbf{L}\mathbf{u}(\mathbf{c}, \mathbf{x}_k) - \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_k)] \\ W_u [\mathbf{u}(\mathbf{c}, \mathbf{x}_{k+1}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{k+1})] \\ \vdots \\ W_u [\mathbf{u}(\mathbf{c}, \mathbf{x}_l) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_l)] \\ W_t [\mathbf{t}(\mathbf{c}, \mathbf{x}_{l+1}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_{l+1})] \\ \vdots \\ W_t [\mathbf{t}(\mathbf{c}, \mathbf{x}_m) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_m)] \end{array} \right\},$$

ou

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \mathbf{c} - \mathbf{b}, \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{C}$ é uma matriz $m \times n$ com $m \geq n$. A solução discreta por mínimos quadrados (que minimiza $I_d = \mathbf{r}^T \mathbf{r}$) é dada por

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{c} = \mathbf{C}^T \mathbf{b}, \quad (3.12)$$

que tem a mesma forma e as mesmas características que a equação (3.9).

Esta formulação também é conhecida por colocação sobredeterminada.

O BCM pode ser interpretado como o caso particular do caso discreto em que se tem $n = m$ e os pesos W_Ω^2 , W_u^2 e W_t^2 são unitários.

A vantagem, em relação ao *BCM*, reside na maior dispersão do erro ao longo do domínio e/ou fronteira do problema.

Aplicações foram feitas, por exemplo, por Leitão a problemas de mecânica da fratura [70] e a vários problemas bidimensionais de potencial (condução de calor, torção elástica de barras e problema singular de Dirichlet) [69]. Neste último a eficiência de outras técnicas alternativas à utilização de (3.12) é discutida para um problema de condução de calor. A análise de lajes finas foi realizada pelo autor e Leitão [31, 29, 30].

Comentários

A distinção entre formulações *contínua* e *discreta* é, por vezes, difícil de fazer. Quando as integrações na primeira são feitas numericamente, o resultado é equivalente a utilizar a segunda com uma função particular de peso, $w(\mathbf{x})$, e uma distribuição dos PC criteriosa.

O *LSM* pode ser interpretado como um caso particular do método dos resíduos pesados. No caso da formulação contínua, comparando (3.8) com (3.5) conclui-se que os pesos são dados pelo produto de um escalar pelas derivadas dos resíduos em ordem aos parâmetros c_i . No caso da formulação discreta os pesos são funções de Dirac.

É por vezes desejável condensar a informação contida num dado conjunto de observações ajustando-a a um *modelo* que depende de parâmetros. O emprego do *LSM*, neste caso, conduz ao *sistema de equações normais*. Sendo a equação (3.12) da mesma forma que este sistema, a analogia é evidente.

O *sistema de equações normais* tende a ser mal condicionado para valores elevados de m . O problema pode ser atenuado usando escalas apropriadas ou evitando os algoritmos usuais de eliminação em favor de outros mais sofisticados baseados nas transformações de ortonormalização de Gram-Schmidt ou ortogonalização de Householder [91].

Outras interpretações [27] podem ser dadas, como por exemplo, o recurso a princípios variacionais.

3.2.5 Método de Galerkin

Este método tem sido utilizado exaustivamente no contexto dos elementos finitos [100] e dos elementos de fronteira [7].

Adoptando para funções de peso

$$\mathbf{W}_u = -\mathbf{T}, \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{W}_t = \mathbf{N}, \quad (3.13b)$$

e substituindo (3.13) em (3.5) um sistema linear, simétrico, de equações da forma (3.9) é obtido para o vector de incógnitas $\mathbf{c}$, onde

$$\mathbf{K} = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{T}^T \mathbf{N} \, d\Gamma_u + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{T} \, d\Gamma_t,$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{T}^T (\mathring{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma_u - \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T (\mathring{\mathbf{t}} - \bar{\mathbf{t}}) \, d\Gamma_t.$$

A aplicação deste método a problemas regidos pela equação de Laplace foi realizada, por exemplo, por Kolodziej e Uściłowska [62].

3.2.6 Formulação Variacional

Esta formulação é baseada na estacionarização de um funcional da energia [99]. A relação obtida para os coeficientes indeterminados é idêntica à do método de Galerkin.

3.3 Método Directo

Este método foi desenvolvido mais recentemente e resultou do grande crescimento que as formulações de fronteira tiveram no passado recente, com a diferença de usarem soluções regulares, funções T , ao invés de soluções singulares. Neste, são tomadas para funções de peso na expressão de resíduos pesados funções regulares satisfazendo a equação governativa do problema. A equação integral na fronteira é obtida aplicando duas vezes o teorema de Gauss-Green. Tal como no *BEM*, esta equação é discretizada e resolvida para as incógnitas na fronteira.

Na figura 3.2 é apresentada a sequência de passos que esta técnica utiliza. Aplicações a lajes finas [46], elasticidade plana [44], propagação de ondas [45] e problemas de potencial [11] foram concretizadas por Cheung *et al.*

3.4 Formulações de elementos finitos híbridos-Trefftz

A procura de elementos de superior rendimento conduziu ao aparecimento de formulações não convencionais de elementos finitos. Actualmente modelos de equilíbrio e compatibilidade para elementos híbridos-mistos e híbridos encontram-se solidamente implantados junto da comunidade científica.

Tendo como base os pressupostos do método de Trefftz, elementos híbridos-Trefftz foram desenvolvidos. Nestes, o campo a aproximar no domínio é representado por

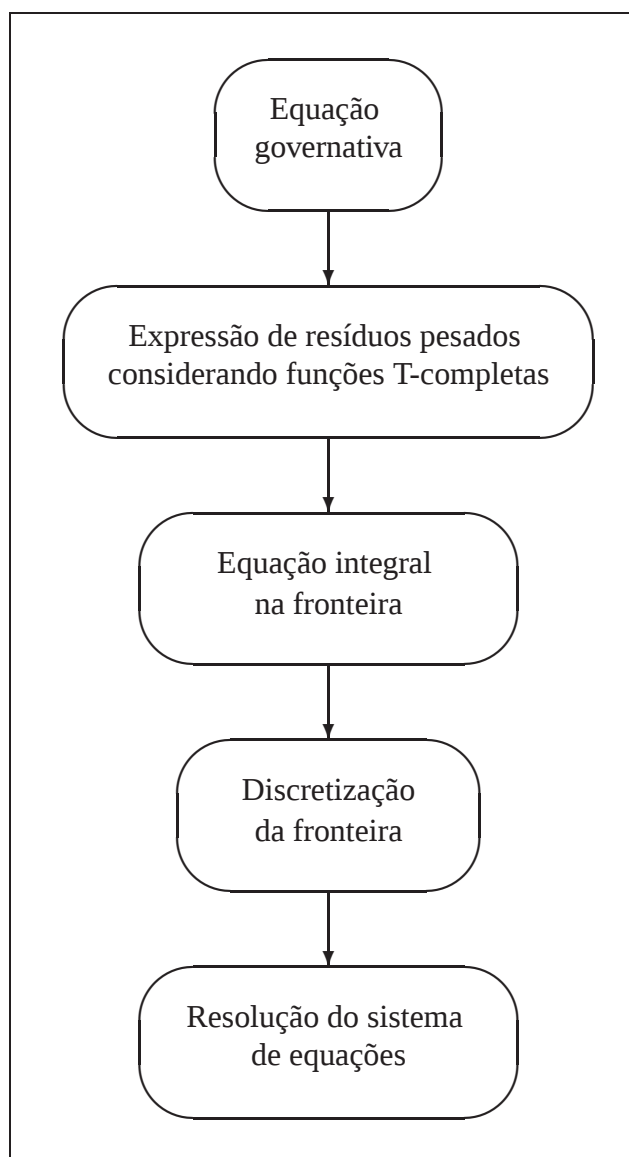


Figura 3.2: Formulação directa do método de Trefftz.

funções T . Destacam-se as contribuições de Freitas [21, 22] e Jiroušek e Wróblewski [54]. No trabalho destes últimos os elementos são ligados através de um campo de deslocamentos ou esforços generalizados auxiliar definido apenas na fronteira. Estes elementos têm uma aparência semelhante ao dos elementos finitos tradicionais.

Existem, também, formulações de elementos híbridos baseadas no *LSM* [54, 58].

Aplicações a problemas singulares de elasticidade plana [24, 23], elastodinâmica [12, 32], elastoplasticidade [34], otimização de forma [33], lajes finas [47], lajes finas ortótropas [49], potencial e elasticidade plana [53] e lajes espessas [57, 55, 77] foram realizadas com sucesso.

Capítulo 4

Formulação do método indirecto de Trefftz utilizando o critério dos mínimos quadrados

4.1 Introdução

A figura 4.1 mostra o domínio, Ω , repartido em N subdomínios, doravante designados por regiões, Ω^i ($i = 1, 2, \dots, N$). Para cada uma destas o campo de deslocamentos é dado por (4.1).

$$w^i = \overset{\circ}{w}^i + w_h^i, \quad (4.1)$$

onde $\overset{\circ}{w}^i$ e w_h^i são as parcelas particular e homogénea da solução, e como tal satisfazem as seguintes condições:

$$\nabla^4 \overset{\circ}{w}^i = \frac{\bar{p}^i}{D^i} \quad \text{e} \quad \nabla^4 w_h^i = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega^i$$

A solução homogénea pode ser escrita na forma

$$w_h^i = \sum_{j=1}^{m^i} N_j^i c_j^i = \mathbf{N}_w^i \mathbf{c}^i, \quad (4.2)$$

em que $\mathbf{N}_w^i$ é uma matriz contendo uma série truncada de funções conhecidas e $\mathbf{c}^i$ são coeficientes indeterminados.

Enquanto as funções $\overset{\circ}{w}$ e $\mathbf{N}_w$ foram escolhidas de modo a satisfazer *a priori* todas as condições no domínio da laje, as condições de *continuidade* entre regiões e de *apoio* no contorno foram ignoradas. Os coeficientes $\mathbf{c}^i$ vão ser escolhidos de modo a minimizar o quadrado dos erros dessas condições.

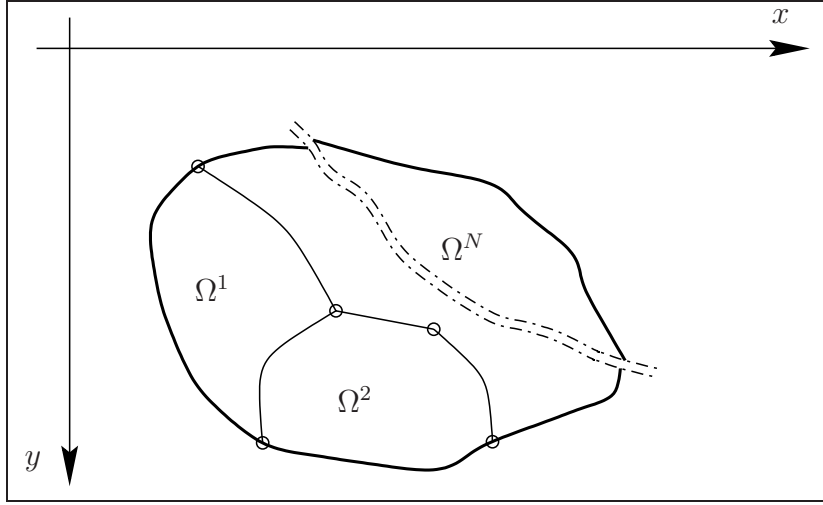


Figura 4.1: Domínio da laje repartido em N regiões.

Ao contrário do que acontece na formulação directa do *BEM*, em que as soluções usadas (soluções fundamentais) são sempre singulares, as funções N_w podem ser regulares.

Por vezes é desejável utilizar certas funções singulares. A possibilidade de satisfazer *a priori*, além da equação governativa do problema, algumas das condições de fronteira, torna atractiva este tipo de aproximação. Por exemplo, permite analisar concentrações de esforços devidas a uma abertura na laje utilizando alguns termos da solução exacta desse caso para um domínio infinito. A partir de uma certa vizinhança, em que os efeitos singulares sejam desprezáveis, utilizam-se as funções regulares, sendo as condições de continuidade impostas segundo um determinado critério, no presente caso, o dos mínimos quadrados.

Substituindo a solução homogénea (4.2) no campo de deslocamentos (4.1), e o resultado nas definições de rotação (2.12), momento flector (2.16a) e esforço transversal efectivo (2.22) normais, vem

$$\begin{aligned} w^i &= \overset{\circ}{w}^i + N_w^i \mathbf{c}^i, \\ \frac{\partial w^i}{\partial n} &= \frac{\partial \overset{\circ}{w}^i}{\partial n} + N_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i \mathbf{c}^i, \\ M_n^i &= \overset{\circ}{M}_n^i + N_{M_n}^i \mathbf{c}^i, \\ V_n^i &= \overset{\circ}{V}_n^i + N_{V_n}^i \mathbf{c}^i, \end{aligned}$$

em que $N_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i$, $N_{M_n}^i$ e $N_{V_n}^i$ são determinados com recurso a manipulação simbólica. Note-se que é necessário determinar todas as derivadas até à quarta ordem. Neste trabalho recorreu-se ao pacote de manipulação matemática simbólica Mathematica [93].

Note-se que, se o campo de deslocamentos estiver expresso em coordenadas polares as expressões a utilizar são (2.30), (2.31) e (2.34) para a rotação, momento flector e

esforço transversal efectivo normais, respectivamente.

4.2 Critério dos mínimos quadrados

4.2.1 Abordagem contínua (integração na fronteira)

Tendo como critério para a determinação dos coeficientes indeterminados c^i da região i a minimização do quadrado dos erros ao longo de *toda* a fronteira obtém-se o seguinte problema de optimização não restrigida:

Minimizar $I(c^i)$ onde

$$\begin{aligned}
 I(c) = & W_w^2 \int_{\Gamma_w^i} (w^i - \bar{w}^i)^2 d\Gamma_w^i \\
 & + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \int_{\Gamma_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i} \left(\frac{\partial w^i}{\partial n} - \bar{\frac{\partial w}{\partial n}}^i \right)^2 d\Gamma_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i + W_{M_n}^2 \int_{\Gamma_{M_n}^i} \left(M_n^i + GJ \frac{\partial^3 w^i}{\partial t^2 \partial n} - \bar{M}_n^i \right)^2 d\Gamma_{M_n}^i \\
 & + W_{V_n}^2 \int_{\Gamma_{V_n}^i} \left(V_n^i + EI \frac{\partial^4 w^i}{\partial t^4} - \bar{V}_n^i \right)^2 d\Gamma_{V_n}^i + W_w^2 \int_{\Gamma_I} (w^i - w^j)^2 d\Gamma_I \\
 & + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \int_{\Gamma_I} \left(\frac{\partial w^i}{\partial n} + \frac{\partial w^j}{\partial n} \right)^2 d\Gamma_I + W_{M_n}^2 \int_{\Gamma_I} \left(M_n^i + GJ \frac{\partial^3 w^i}{\partial t^2 \partial n} - M_n^j \right)^2 d\Gamma_I \\
 & + W_{V_n}^2 \int_{\Gamma_I} \left(V_n^i + EI \frac{\partial^4 w^i}{\partial t^4} + V_n^j \right)^2 d\Gamma_I,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

em que $d\Gamma_I = \Omega^i \cap \Omega^j$ e $W_w, W_{\frac{\partial w}{\partial n}}, W_{M_n}$ e W_{V_n} são pesos. Estes têm como função estabelecer a homogeneidade dimensional e numérica entre as diversas parcelas. No presente trabalho considerou-se que são constantes ao longo da fronteira, e iguais em todas as regiões.

Admite-se que estes pesos são conhecidos, logo a minimização de (4.3) reduz-se à anulação da derivada de I em ordem a c^i .

Ao realizar esta minimização para todas as regiões e agrupando as equações resultantes, obtém-se uma relação linear do tipo (3.9), ou seja

$$Kc = f.$$

A contribuição da região i para este sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c}_i \\ \mathbf{c}_j \end{Bmatrix} = \{f_i\},$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ii} = & W_w^2 \int_{\Gamma_w^i} \mathbf{N}_w^{iT} \mathbf{N}_w^i d\Gamma_w^i + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \int_{\Gamma_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i d\Gamma_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i \\ & + W_{M_n}^2 \int_{\Gamma_{M_n}^i} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right) d\Gamma_{M_n}^i \\ & + W_{V_n}^2 \int_{\Gamma_{V_n}^i} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right) d\Gamma_{V_n}^i \\ & + W_w^2 \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_w^{iT} \mathbf{N}_w^i d\Gamma_I + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i d\Gamma_I \\ & + W_{M_n}^2 \int_{\Gamma_I} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right) d\Gamma_I \\ & + W_{V_n}^2 \int_{\Gamma_I} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right) d\Gamma_I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} = & -W_w^2 \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_w^{iT} \mathbf{N}_w^j d\Gamma_I + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^j d\Gamma_I \\ & - W_{M_n}^2 \int_{\Gamma_I} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{M_n}^j + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^j \right) d\Gamma_I \\ & + W_{V_n}^2 \int_{\Gamma_I} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{V_n}^j + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^j \right) d\Gamma_I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_i = & W_w^2 \int_{\Gamma_w^i} \mathbf{N}_w^{iT} \left(\dot{w}^i - \bar{w}^i \right) d\Gamma_w^i + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \int_{\Gamma_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \left(\frac{\partial \dot{w}^i}{\partial n} - \overline{\frac{\partial w^i}{\partial n}} \right) d\Gamma_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i \\
& + W_{M_n}^2 \int_{\Gamma_{M_n}^i} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left(\dot{M}_n^i + GJ \frac{\partial^3 \dot{w}^i}{\partial t^2 \partial n} - \bar{M}_n^i \right) d\Gamma_{M_n}^i \\
& + W_{V_n}^2 \int_{\Gamma_{V_n}^i} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left(\dot{V}_n^i + EI \frac{\partial^4 \dot{w}^i}{\partial t^4} - \bar{V}_n^i \right) d\Gamma_{V_n}^i \\
& + W_w^2 \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_w^{iT} \left(\dot{w}^i - \dot{w}^j \right) d\Gamma_I + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \left(\frac{\partial \dot{w}^i}{\partial n} + \frac{\partial \dot{w}^j}{\partial n} \right) d\Gamma_I \\
& + W_{M_n}^2 \int_{\Gamma_I} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left[\dot{M}_n^i + GJ \frac{\partial^3 \dot{w}^i}{\partial t^2 \partial n} - \left(\dot{M}_n^j + GJ \frac{\partial^3 \dot{w}^j}{\partial t^2 \partial n} \right) \right] d\Gamma_I \\
& + W_{V_n}^2 \int_{\Gamma_I} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left[\dot{V}_n^i + EI \frac{\partial^4 \dot{w}^i}{\partial t^4} - \left(\dot{V}_n^j + EI \frac{\partial^4 \dot{w}^j}{\partial t^4} \right) \right] d\Gamma_I.
\end{aligned}$$

Note-se que $\mathbf{K}$ é uma matriz simétrica.

4.2.2 Abordagem discreta (colocação na fronteira)

Tal como foi visto no capítulo 3, em alternativa à integração na fronteira apresentada anteriormente, pode utilizar-se a colocação.

Substituindo em (4.3) as integrações ao longo da fronteira por somatórios aos pontos de colocação, novamente uma relação do tipo (3.9) é obtida, sendo as definições para as

matrizes e vector dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ii} = & W_w^2 \sum_{j=1}^{n_w^i} \mathbf{N}_w^{iT} \mathbf{N}_w^i + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \sum_{j=1}^{n_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i \\
& + W_{M_n}^2 \sum_{j=1}^{n_{M_n}^i} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right) \\
& + W_{V_n}^2 \sum_{j=1}^{n_{V_n}^i} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + E I \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + E I \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right) \\
& + W_w^2 \sum_{j=1}^{n_I} \mathbf{N}_w^{iT} \mathbf{N}_w^i + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \sum_{j=1}^{n_I} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i \\
& + W_{M_n}^2 \sum_{j=1}^{n_I} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right) \\
& + W_{V_n}^2 \sum_{j=1}^{n_I} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + E I \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + E I \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ij} = & -W_w^2 \sum_{j=1}^{n_I} \mathbf{N}_w^{iT} \mathbf{N}_w^j + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \sum_{j=1}^{n_I} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^j \\
& - W_{M_n}^2 \sum_{j=1}^{n_I} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{M_n}^j + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^j \right) \\
& + W_{V_n}^2 \sum_{j=1}^{n_I} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + E I \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left(\mathbf{N}_{V_n}^j + E I \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^j \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_i = & W_w^2 \sum_{j=1}^{n_w^i} \mathbf{N}_w^{iT} \left(\dot{w}^i - \bar{w}^i \right) + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \sum_{j=1}^{n_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \left(\frac{\partial \dot{w}^i}{\partial n} - \overline{\frac{\partial w}{\partial n}}^i \right) \\
& + W_{M_n}^2 \sum_{j=1}^{n_{M_n}^i} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left(\dot{M}_n^i + GJ \frac{\partial^3 \dot{w}^i}{\partial t^2 \partial n} - \bar{M}_n^i \right) \\
& + W_{V_n}^2 \sum_{j=1}^{n_{V_n}^i} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left(\dot{V}_n^i + EI \frac{\partial^4 \dot{w}^i}{\partial t^4} - \bar{V}_n^i \right) \\
& + W_w^2 \sum_{j=1}^{n_I} \mathbf{N}_w^{iT} \left(\dot{w}^i - \dot{w}^j \right) + W_{\frac{\partial w}{\partial n}}^2 \sum_{j=1}^{n_I} \mathbf{N}_{\frac{\partial w}{\partial n}}^{iT} \left(\frac{\partial \dot{w}^i}{\partial n} + \frac{\partial \dot{w}^j}{\partial n} \right) \\
& + W_{M_n}^2 \sum_{j=1}^{n_I} \left(\mathbf{N}_{M_n}^i + GJ \mathbf{N}_{\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial n}}^i \right)^T \left[\dot{M}_n^i + GJ \frac{\partial^3 \dot{w}^i}{\partial t^2 \partial n} - \left(\dot{M}_n^j + GJ \frac{\partial^3 \dot{w}^j}{\partial t^2 \partial n} \right) \right] \\
& + W_{V_n}^2 \sum_{j=1}^{n_I} \left(\mathbf{N}_{V_n}^i + EI \mathbf{N}_{\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}^i \right)^T \left[\dot{V}_n^i + EI \frac{\partial^4 \dot{w}^i}{\partial t^4} - \left(\dot{V}_n^j + EI \frac{\partial^4 \dot{w}^j}{\partial t^4} \right) \right],
\end{aligned}$$

em que n_w^i , $n_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i$, $n_{M_n}^i$, $n_{V_n}^i$ e n_I representam, respectivamente, o número de pontos de colocação em que são impostas condições de deslocamento, rotação normal, momento flector normal, esforço transversal efectivo normal e condições de continuidade na região i . Por simplicidade foi omitido o índice j nas expressões anteriores.

Note-se que as expressões anteriores podem ser escritas na forma (3.12). A relação (3.11) para o caso das lajes finas escreve-se (omitindo, por simplicidade, os termos

de interface entre as regiões i e j)

$$\left\{ \begin{array}{c} W_w R_w^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i) \\ \vdots \\ W_w R_w^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_w^i}^i) \\ W_{\frac{\partial w}{\partial n}} R_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i) \\ \vdots \\ W_{\frac{\partial w}{\partial n}} R_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i}^i) \\ W_{M_n} R_{M_n}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i) \\ \vdots \\ W_{M_n} R_{M_n}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_{M_n}^i}^i) \\ W_{V_n} R_{V_n}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i) \\ \vdots \\ W_{V_n} R_{V_n}^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_{V_n}^i}^i) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} W_w [w^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i) - \bar{w}^i(\mathbf{x}_1^i)] \\ \vdots \\ W_w [w_w^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_w^i}^i) - \bar{w}^i(\mathbf{x}_{n_w^i}^i)] \\ W_{\frac{\partial w}{\partial n}} \left[\frac{\partial w^i}{\partial n}(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i) - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(\mathbf{x}_1^i) \right] \\ \vdots \\ W_{\frac{\partial w}{\partial n}} \left[\frac{\partial w^i}{\partial n}(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i}^i) - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(\mathbf{x}_{n_{\frac{\partial w}{\partial n}}^i}^i) \right] \\ W_{M_n} \left[M_n^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i) + GJ \frac{\partial^3 w(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i)}{\partial t^2 \partial n} - \bar{M}_n^i(\mathbf{x}_1^i) \right] \\ \vdots \\ W_{M_n} \left[M_n^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_{M_n}^i}^i) + GJ \frac{\partial^3 w(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_{M_n}^i}^i)}{\partial t^2 \partial n} - \bar{M}_n^i(\mathbf{x}_{n_{M_n}^i}^i) \right] \\ W_{V_n} \left[V_n^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i) + EI \frac{\partial^4 w(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_1^i)}{\partial t^4} - \bar{V}_n^i(\mathbf{x}_1^i) \right] \\ \vdots \\ W_{V_n} \left[V_n^i(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_{V_n}^i}^i) + EI \frac{\partial^4 w(\mathbf{c}^i, \mathbf{x}_{n_{V_n}^i}^i)}{\partial t^4} - \bar{V}_n^i(\mathbf{x}_{n_{V_n}^i}^i) \right] \end{array} \right\},$$

em que $\mathbf{x} = (x, y)$.

4.3 Soluções para campos de deslocamento transversal

No que segue são descritas as funções de aproximação utilizadas neste trabalho.

Os campos de deslocamento transversal regulares são formados por funções polinomiais e podem ser empregues para a generalidade das situações, pois são constituídos por soluções da equação governativa do problema.

Por fim são apresentados campos específicos, que satisfazem, também, algumas das condições de fronteira do problema *a priori*. Os casos de lajes enviesadas e lajes com aberturas circulares são discutidos.

4.3.1 Regulares

Solução homogénea

Em problemas que envolvem as equações de Laplace, biarmónica ou Helmholtz a utilização de funções de variável complexa é muito útil para a obtenção de um conjunto

infinito linearmente independente de funções de teste. Exemplos destas representações são dados por Muskhelishvili [73] (problemas bidimensionais de elasticidade) e Piltner (análise de lajes espessas [80] e problemas 3D de elasticidade [78]). A vantagem da utilização desta representação é que para qualquer escolha de funções complexas (como por exemplo séries complexas e funções exponenciais complexas) a equação diferencial governativa é satisfeita *a priori*.

Uma solução para laje espessa que envolve empenamento e termos de variação da espessura pode ser escrita na forma [80]:

$$\begin{aligned}
2\mu u_h &= -z\Re[\Phi + \zeta\bar{\Phi}' + \bar{\chi}'] - \frac{1}{1-\nu} \left[h^2 z - 2(2-\nu) \frac{z^3}{3} \right] \Re[\Phi''], \\
2\mu v_h &= -z\Im[\Phi + \zeta\bar{\Phi}' + \bar{\chi}'] + \frac{1}{1-\nu} \left[h^2 z - 2(2-\nu) \frac{z^3}{3} \right] \Im[\Phi''], \\
2\mu w_h &= \Re[\bar{\zeta}\Phi + \chi] + \frac{2\nu}{1-\nu} z^2 \Re[\Phi'], \\
\sigma_{xx} &= -\frac{1}{1-\nu} z\Re[2(1+\nu)\Phi' + (1-\nu)(\zeta\bar{\Phi}'' + \bar{\chi}'')] \\
&\quad - \frac{1}{1-\nu} \left[h^2 z - 2(2-\nu) \frac{z^3}{3} \right] \Re[\Phi'''], \\
\sigma_{yy} &= -\frac{1}{1-\nu} z\Re[2(1+\nu)\Phi' - (1-\nu)(\zeta\bar{\Phi}'' + \bar{\chi}'')] \\
&\quad + \frac{1}{1-\nu} \left[h^2 z - 2(2-\nu) \frac{z^3}{3} \right] \Re[\Phi'''], \\
\sigma_{zz} &= 0, \\
\tau_{xy} &= -z\Im[\zeta\bar{\Phi}'' + \bar{\chi}''] + \frac{1}{1-\nu} \left[h^2 z - 2(2-\nu) \frac{z^3}{3} \right] \Im[\Phi'''], \\
\tau_{xz} &= \frac{2}{1-\nu} \left[z^2 - \frac{h^2}{4} \right] \Re[\Phi''], \\
\tau_{yz} &= -\frac{2}{1-\nu} \left[z^2 - \frac{h^2}{4} \right] \Im[\Phi''],
\end{aligned}$$

onde $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$, $\zeta = x + iy$, $\bar{\zeta} = x - iy$, $\Phi = \Phi(\zeta)$ e $\chi = \chi(\zeta)$. Desprezando os termos que envolvem h^2 , z^2 e z^3 obtém-se uma solução para o problema das lajes finas. A parcela homogênea do campo de deslocamentos, w_h , é dada por

$$w_h = \frac{1}{2\mu} \Re[\bar{\zeta}\Phi + \chi]. \quad (4.4)$$

Para as funções Φ e χ foram escolhidas as seguintes séries de potências complexas:

$$\begin{aligned}
\Phi(\zeta) &= \sum_{j=1}^m a_j(\zeta)^j, \\
\chi(\zeta) &= \sum_{j=2}^m b_j(\zeta)^j,
\end{aligned}$$

onde $a_1 = \alpha_1$, $a_j = \alpha_j + i\beta_j$ e $b_j = \gamma_j + i\delta_j$. O termo δ_0 é excluído porque o seu coeficiente na expansão (4.4) é nulo. Os termos γ_1 e δ_1 são, também, excluídos pois representam termos de corpo rígido que já são tidos em consideração através dos termos α_0 e β_0 .

A expressão (4.4) pode assumir a forma matricial (4.2) com

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_w &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & \mathbf{N}_1 & \cdots & \mathbf{N}_m \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 & \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_m \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_0 &= \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_1 = \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} r^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_k &= \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} r^2 \Re(\zeta)^{k-1} & -r^2 \Im(\zeta)^{k-1} & \Re(\zeta)^k & -\Im(\zeta)^k \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_0 &= \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_k &= \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k & \gamma_k & \delta_k \end{bmatrix}, \text{ onde } r^2 = x^2 + y^2 \text{ e } k = 2, 3 \dots m. \end{aligned}$$

O número de termos em $\mathbf{c}$ é igual a $4m$.

Os primeiros termos da expansão da solução homogénea serão

$$\begin{aligned} w_h &= x\alpha_0 + y\beta_0 + \gamma_0 + (x^2 + y^2)\alpha_1 + x(x^2 + y^2)\alpha_2 \\ &\quad - y(x^2 + y^2)\beta_2 + (x^2 - y^2)\gamma_2 - 2xy\delta_2 + (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)\alpha_3 \\ &\quad - 2xy(x^2 + y^2)\beta_3 + (x^3 - 3xy^2)\gamma_3 + (y^3 - 3x^2y)\delta_3 \\ &\quad + (x^2 + y^2)(x^3 - 3xy^2)\alpha_4 + (x^2 + y^2)(y^3 - 3x^2y)\beta_4 \\ &\quad + (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\gamma_4 + (4xy^3 - 4x^3y)\delta_4 \\ &\quad + (x^2 + y^2)(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\alpha_5 + (x^2 + y^2)(4xy^3 - 4x^3y)\beta_5 \\ &\quad + (x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4)\gamma_5 + (10x^2y^3 - 5x^4y - y^5)\delta_5 + \dots \end{aligned}$$

Representações de superfície dos termos $\Re(\zeta)^k$ e $-\Im(\zeta)^k$ para $k = 2, 3 \dots 5$ encontram-se nas figuras 4.2 e 4.3, respectivamente.

As derivadas necessárias para a implementação do método constam do anexo ??.

Soluções particulares

A solução particular para uma *carga uniformemente distribuída*, $\bar{p}$, é:

$$\overset{\circ}{w} = \frac{\bar{p}r^4}{64D}. \quad (4.5)$$

Para uma *carga concentrada*, $\bar{P}$, aplicada em (x_P, y_P) , tem-se

$$\overset{\circ}{w} = \frac{\bar{P}}{8\pi D} r_P^2 \ln r_P, \quad (4.6)$$

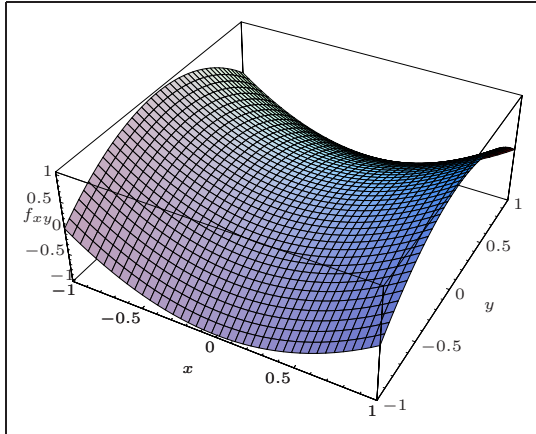
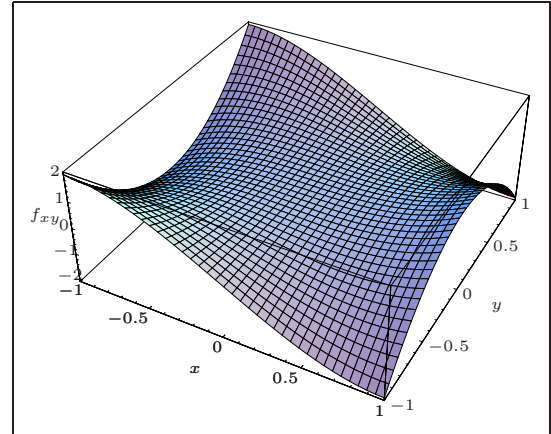
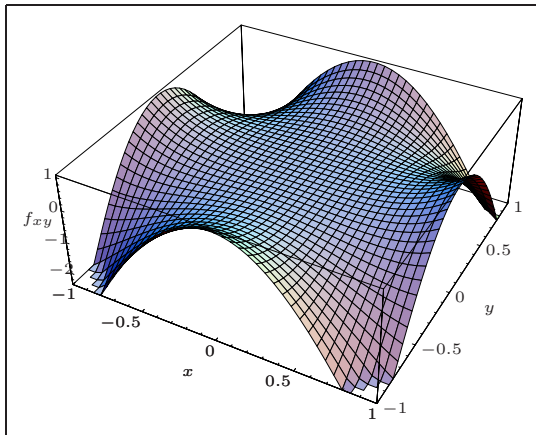
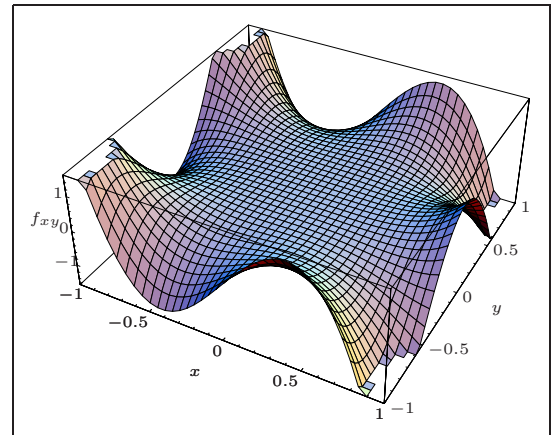
(a) $f_{xy} = (x^2 - y^2)$ ($k = 2$)(b) $f_{xy} = (x^3 - 3xy^2)$ ($k = 3$)(c) $f_{xy} = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ($k = 4$)(d) $f_{xy} = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ ($k = 5$)

Figura 4.2: Representação gráfica do termo $\Re(\zeta)^k$ da solução homogénea usando funções regulares.

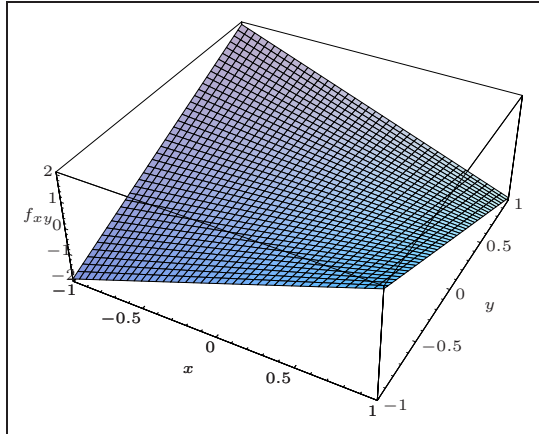
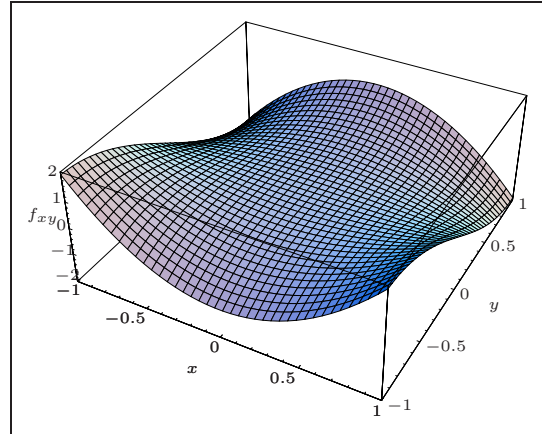
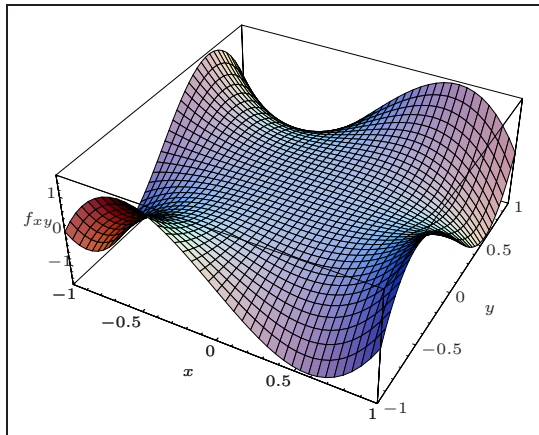
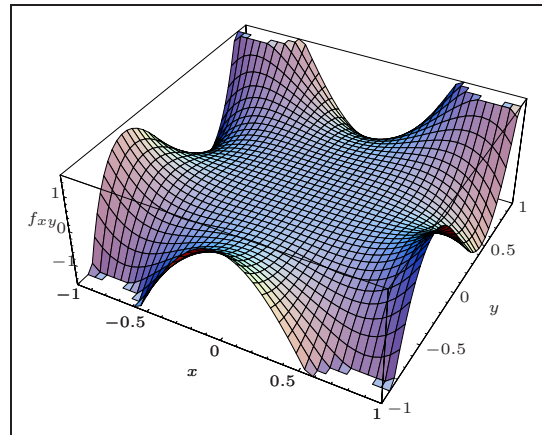
(a) $f_{xy} = -2xy$ ($k = 2$)(b) $f_{xy} = (y^3 - 3x^2y)$ ($k = 3$)(c) $f_{xy} = 4xy^3 - 4x^3y$ ($k = 4$)(d) $f_{xy} = -5x^4y + 10x^2y^3 - y^5$ ($k = 5$)

Figura 4.3: Representação gráfica do termo $-\Im(\zeta)^k$ da solução homogénea usando funções regulares.

onde $r_P^2 = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2$.

No ponto de aplicação da carga tem-se:

$$\lim_{r_P \rightarrow 0} \overset{\circ}{w} = 0$$

A desvantagem de (4.6), que representa a conhecida solução da teoria da elasticidade para uma laje infinita, é o facto daquela solução ser inconsistente com a teoria de lajes finas na vizinhança de $\bar{P}$. De facto, quando $x \rightarrow x_P$ e $y \rightarrow y_P$ as deformações e consequentemente os momentos na laje tendem para infinito. Dado que as tensões σ_{zz} são da ordem de grandeza das tensões normais, a segunda hipótese de Kirchhoff não é aceitável.

Na prática, uma carga concentrada é aplicada numa pequena superfície da laje. Uma abordagem mais realista consiste em assumir que $\bar{P}$ está distribuída sobre um círculo de raio b . Sendo d uma constante opcional, $\rho = \frac{r}{d}$ e $\beta = \frac{b}{d}$, a solução para a laje infinita sujeita a uma *carga uniformemente distribuída em zona circular* cuja resultante é $\bar{P}$, é:

para $\rho \leq \beta$

$$\overset{\circ}{w} = \left[\frac{\beta^2}{64} (4 \ln \beta - 3) + \frac{1}{16} + \frac{\rho^2}{32} (4 \ln \beta - \beta^2) + \frac{\rho^4}{64\beta^2} \right] \frac{\bar{P}d^2}{\pi D}, \quad (4.7a)$$

para $\rho \geq \beta$

$$\overset{\circ}{w} = \left[\frac{1}{32} (2 + \beta^2) (1 - \rho^2) + \frac{1}{16} (\beta^2 + 2\rho^2) \ln \rho \right] \frac{\bar{P}d^2}{\pi D}. \quad (4.7b)$$

As soluções particulares para *carga constante e linearmente variável distribuídas em superfícies de forma poligonal e em segmentos de recta* foram obtidas por integração analítica (sobre a respectiva zona de aplicação da carga) da função de carga e da solução fundamental para uma laje infinita submetida a uma carga pontual unitária.

Alguns trabalhos foram realizados neste domínio, mas, porque inseridos em contextos diferentes e serem desprovidos da generalidade pretendida, não foi possível utilizar os resultados publicados. Destacam-se as seguintes contribuições:

- Costa e Brebbia [18] e Hartmann [38] apresentam resultados sob a forma de equações integrais, visto que os seus trabalhos são direccionados para o *BEM*;
- Burgess e Mahajerin [9] apenas consideram cargas uniformemente distribuídas em superfícies de forma poligonal;
- Abdel-Akher e Hartley [1] apenas consideram cargas uniformemente distribuídas em superfícies de forma poligonal, além de não ser possível calcular V_n com a informação apresentada;
- Venkatesh e Jiroušek [89] não consideram cargas linearmente variáveis e o vector de tracções generalizadas do elemento híbrido-Trefftz contém apenas Q_n , M_n e M_{ns} .

Tendo em conta as limitações dos trabalhos acima referidos foi necessário proceder ao desenvolvimento de uma metodologia para a determinação das soluções particulares pretendidas. Este procedimento segue de perto o sugerido por Abdel-Akher e Hartley [1].

Para determinar o efeito no ponto P de uma carga distribuída que actua sobre uma superfície de forma poligonal é necessário avaliar integrais da forma:

$$\overset{\circ}{w} = \iint_A \bar{p} G dA, \quad (4.8)$$

em que $\bar{p}$ é a carga por unidade de área aplicada na superfície A , e G é a solução fundamental.

A utilização de um pacote de manipulação de matemática simbólica, neste caso o Mathematica [93], sistematiza o processo de cálculo.

A integração numérica não foi utilizada por duas razões:

1. a integração de funções singulares poderia dar origem a erros inaceitáveis;
2. a avaliação das expressões que resultam da integração analítica é computacionalmente mais rápida que a integração numérica.

Admite-se que a *carga aplicada*, $\bar{p}(x, y)$, pode ser representada algebricamente por

$$\bar{p}(x, y) = a^0 + a^1 x + a^2 y, \quad (4.9)$$

onde as constantes a^0 , a^1 e a^2 são dadas por

$$\begin{Bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{Bmatrix},$$

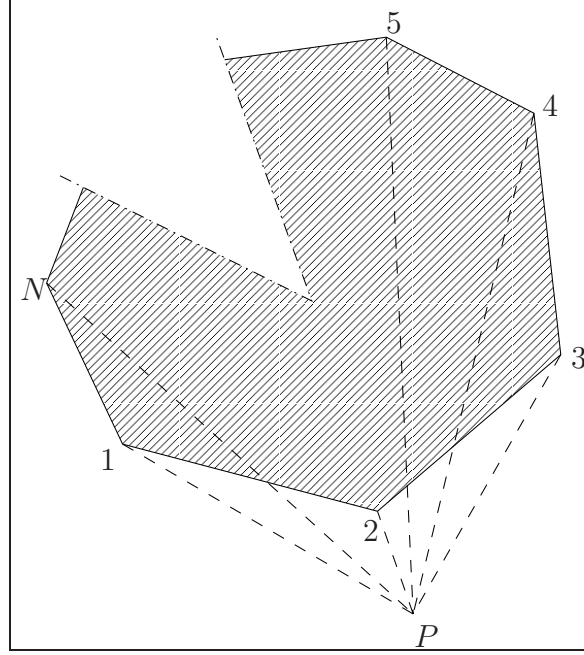
em que os subscritos identificam as coordenadas e o valor da carga em três pontos não colineares.

A integração sobre o polígono com N lados representado na figura 4.4 é expressa como a soma sobre N triângulos com o vértice comum no ponto P . Cada triângulo tem neste ponto um vértice, fazendo os restantes dois parte de um lado do polígono.

Assim, o integral na equação (4.8) é dado por

$$\overset{\circ}{w}_{123\dots N} = \overset{\circ}{w}_{P12} + \overset{\circ}{w}_{P23} + \overset{\circ}{w}_{P34} + \dots + \overset{\circ}{w}_{PN2}. \quad (4.10)$$

Se aos vértices da área poligonal carregada for atribuída uma numeração num determinado sentido, por exemplo, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, e se os vértices de cada triângulo forem numerados de modo a que o lado do polígono continue a ser

Figura 4.4: Área poligonal com N lados.

direccionado no sentido anti-horário, então alguns termos de (4.10) vão assumir valores negativos.

Considere-se o sistema de coordenadas representado na figura 4.5 cujos eixos (n_i, t_i) são, respectivamente, normal e perpendicular à base do triângulo i .

Atendendo a (4.10), a expressão (4.8) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \circ w &= \iint_A \bar{p}(x, y) G(x, y) dA \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{n_{iP}}^{n_{iP}+E_i} \int_{C_{i1}(n_i-n_{iP})+t_{iP}}^{C_{i2}(n_i-n_{iP})+t_{iP}} \bar{p}(n_i, t_i) G(n_i, t_i) dt_i dn_i, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde

n_{iP} e t_{iP} são as coordenadas do ponto P no referencial (n_i, t_i)
 C_{i1} e C_{i2} são iguais a $\frac{Z_{i1}}{E_i}$ e $\frac{Z_{i2}}{E_i}$, respectivamente, e
 $Z_{i1} = t_{i1} - t_{iP}$,
 $Z_{i2} = t_{i2} - t_{iP}$,
 $E_i = n_{i2} - n_{iP} = n_{i1} - n_{iP}$.

Nas definições anteriores os subscritos 1 e 2 referem-se aos nós J_1 e J_2 , respectivamente.

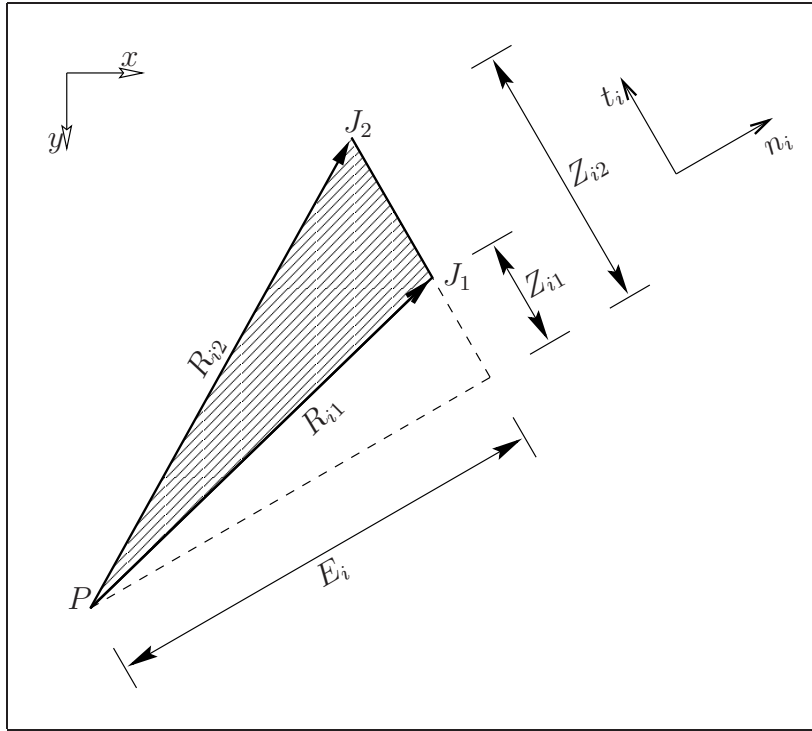


Figura 4.5: Área triangular i . Referencial e notação.

Colocando a origem do sistema local em P , (4.11) vem

$$\dot{w} = \sum_{i=1}^N \int_0^{E_i} \int_{C_{i1}n_i}^{C_{i2}n_i} \bar{p}(n_i, t_i) G(n_i, t_i) dt_i dn_i. \quad (4.12)$$

Note-se que a carga $\bar{p}$ e a função fundamental G estão igualmente expressas no sistema de coordenadas local do triângulo i . A expressão da carga $\bar{p}$ neste referencial é obtida através de uma translacção e de uma rotação de coordenadas do eixo global para o local. Assim

$$\bar{p}(n_i, t_i) = b^0 + b^1 n_i + b^2 t_i, \quad (4.13)$$

com

$$\begin{aligned} b^0 &= a^0 + a^1 x_P + a^2 y_P, \\ b^1 &= a^1 a_{x n_i} - a^2 a_{x t_i}, \\ b^2 &= a^1 a_{x t_i} + a^2 a_{x n_i}. \end{aligned}$$

em que $a_{x n_i}$, $a_{x t_i}$ são os cossenos dos ângulos formados pelos eixos em subscrito e (x_P, y_P) são as coordenadas de P no referencial (x, y) .

Substituindo (4.13) em (4.12) vem

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \sum_{i=1}^N \int_0^{E_i} \int_{C_{i1}n_i}^{C_{i2}n_i} [b_i^0 G(n_i, t_i) + b_i^1 n_i G(n_i, t_i) + b_i^2 t_i G(n_i, t_i)] dt_i dn_i \\ &= \sum_{i=1}^N (b_i^0 I_i^0 + b_i^1 I_i^n + b_i^2 I_i^t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

A solução fundamental para uma laje infinita submetida a uma carga pontual unitária é

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi D} r_i^2 \ln r_i, \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} r_i^2 &= (n_i - n_{iP})^2 + (t_i - t_{iP})^2 \\ &= (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2. \end{aligned}$$

A determinação de rotações, momentos, esforços transversos e os termos correspondentes à flexão das vigas de bordadura envolve a integração das respectivas derivadas da solução fundamental.

Para *cargas linearmente variáveis ao longo de segmentos de recta* o raciocínio é análogo. A integração é feita ao longo de cada segmento, e os resultados são adicionados. Admite-se que a *carga aplicada no segmento de recta i , $\bar{p}(t_i)$* , pode ser representada algebricamente por

$$\bar{p}(t_i) = b^0 + b^1 t_i, \quad (4.16)$$

onde as constantes a^0 e a^1 são dadas por

$$\begin{Bmatrix} b^0 \\ b^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 - \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}_1}{Z_{i2} - Z_{i1}} Z_{i1} \\ \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}_1}{Z_{i2} - Z_{i1}} \end{Bmatrix},$$

em que os subscritos identificam as coordenadas e o valor da carga nos dois pontos extremos do segmento de recta.

A influência da carga em N segmentos no ponto P é dada por

$$\dot{w} = \int_L \bar{p}(x, y) G(x, y) dL. \quad (4.17)$$

Atendendo à figura 4.5 tem-se

$$\dot{w} = \sum_{i=1}^N \int_{Z_{i1}}^{Z_{i2}} (b_i^0 + b_i^1 t_i) G(t_i) dt_i = \sum_{i=1}^N (b_i^0 I_i^0 + b_i^1 I_i^t). \quad (4.18)$$

Os resultados obtidos para o deslocamento, as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem para as duas solicitações descritas anteriormente constam do anexo ???. Note-se que as rotações, momentos e esforços transversos obtidos com base nestes resultados estão expressos no referencial local do triângulo. Apenas para a carga aplicada em segmento de recta foi possível determinar expressões analíticas para as integrações das derivadas de quarta ordem, úteis para o caso da existência de vigas de bordadura no contorno da laje.

As representações de carga (4.9) e (4.16) são lineares. Um processo idêntico ao seguido poderia ser utilizado para determinar a solução particular para outros casos de carga (eventualmente não polinomiais). No entanto, para funções de carga mais complicadas a área {segmento de recta} em que actua o carregamento pode ser dividida em subregiões {segmentos}, nas quais a carga pode ser considerada como variando linearmente.

4.3.2 Lajes enviesadas

Na análise de lajes enviesadas as condições de fronteira junto aos cantos são satisfeitas localmente. Um resumo do modo como estas soluções são obtidas é apresentado.

Solução homogénea

Assume-se que os bordos 1 e 2 (ver figura 4.6) são rectos e as que as suas CF são homogéneas.

As tensões junto ao canto são, essencialmente, determinadas pelas CF dos bordos 1 e 2. Os restantes lados têm uma reduzida influência no comportamento junto ao ponto O desde que o comprimento total dos primeiros seja superior a várias vezes a espessura da laje. A solução homogénea, w_h pode então assumir a forma [92]

$$w = r^{\lambda+1} \{ C_1 \sin(\lambda + 1)\theta + C_2 \cos(\lambda + 1)\theta + C_3 \sin(\lambda - 1)\theta + C_4 \cos(\lambda - 1)\theta \}, \quad (4.19)$$

em que C_1, C_2, C_3, C_4 e λ são constantes que dependem unicamente das *quatro* CF dos bordos junto ao canto. Da substituição de (4.19) nestas resulta um sistema de quatro equações às quatro constantes C_1 a C_4 .

Soluções diferentes da trivial são obtidas através do anulamento do determinante do sistema, ou seja, quando λ é raiz da equação transcendente para o caso em estudo. As equações transcendentais que são obtidas para os seis casos possíveis constam da tabela 4.1.

Para cada caso os vectores próprios associados a cada raiz constituem a base que irá formar o conjunto de funções próprias, ou seja, as soluções a empregar para modelar o

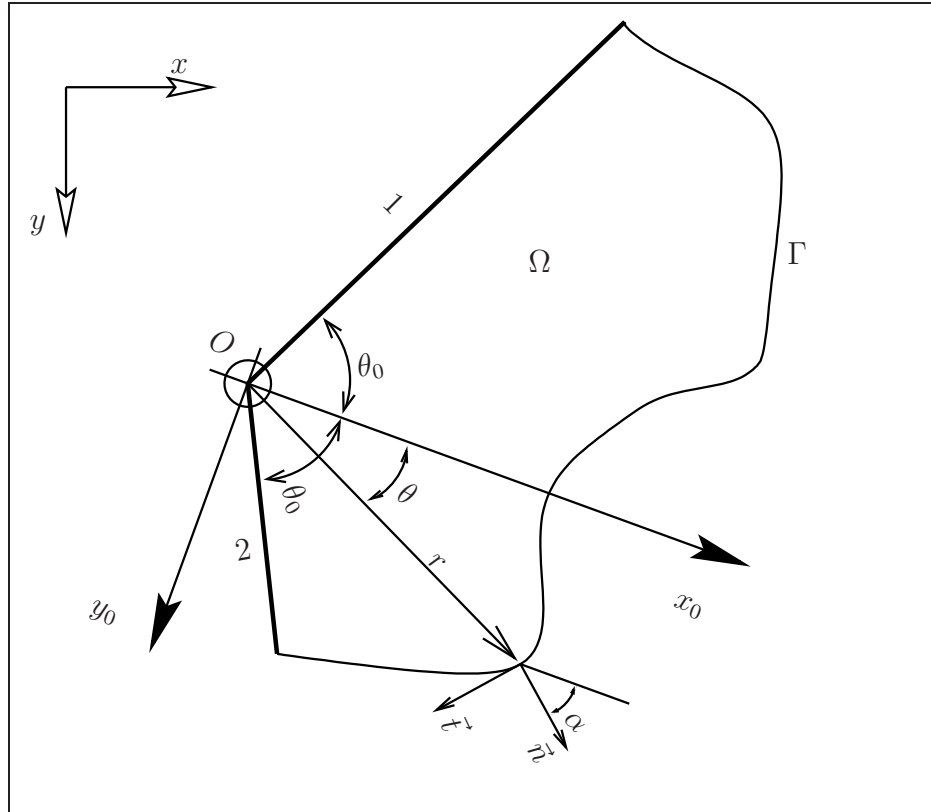


Figura 4.6: Laje com canto. Referencial e notação utilizados

Caso	Condições de Fronteira		Equação Transcendente
	$\theta = -\theta_0$	$\theta = \theta_0$	
1	Encastrado	Encastrado	$\sin^2 2\lambda\theta_0 = \lambda^2 \sin^2 2\theta_0$
2	Livre	Livre	$(3 + \nu)^2 \sin^2 2\lambda\theta_0 = (1 - \nu)^2 \lambda^2 \sin^2 2\theta_0$
3	Encastrado	Livre	$(3 + \nu)(1 - \nu) \sin^2 2\lambda\theta_0 = 4 - (1 - \nu)^2 \lambda^2 \sin^2 2\theta_0$
4	Encastrado	Simp Ap.	$\sin 4\lambda\theta_0 = \lambda \sin 4\theta_0$
5	Simp Ap.	Livre	$(3 + \nu) \sin 4\lambda\theta_0 = -(1 - \nu) \lambda \sin 4\theta_0$
6	Simp Ap.	Simp Ap.	$\sin^2 2\lambda\theta_0 = \sin^2 2\theta_0$

Tabela 4.1: Equações Transcendentes

campo de deslocamentos transversal. Dado que o número de raízes associadas a cada equação transcendente é infinito, este conjunto de funções também é infinito. Tal como para a solução regular, a série é truncada.

A natureza das raízes λ depende não só das CF, mas também do ângulo θ_0 . Três situações são possíveis para as soluções: complexas, reais e reais e complexas. No caso das soluções complexas a função própria é decomposta nas partes real e imaginária, sendo as suas raízes ordenadas por ordem crescente da respectiva parte real.

A definição das funções trigonométricas e exponencial de variável complexa é [64]:

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ a^z &= e^{z \ln a},\end{aligned}$$

onde a pode ser complexo. Nos casos 2 e 5 é necessário acrescentar à solução homogénea os deslocamentos de corpo rígido que são possíveis. No caso 2 trata-se de um deslocamento e duas rotações e no caso 5 de uma rotação (em torno do bordo simplesmente apoiado), dada por $r \sin(\theta + \theta_0) \alpha_0$.

Solução particular

As soluções particulares, para uma *carga uniformemente distribuída*, $\bar{p}$, são obtidas impondo as CF na expressão

$$\begin{aligned}\ddot{w} = \frac{\bar{p}r^4}{64D} \{ & A_1 \cos 4(\theta + \theta_0) + A_2 \sin 4(\theta + \theta_0) \\ & + A_3 \cos 2(\theta + \theta_0) + A_4 \sin 2(\theta + \theta_0) + 1 \}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

As funções próprias e as soluções particulares para uma carga uniformemente distribuída encontram-se no apêndice A.

Assim, o campo de deslocamentos obtido satisfaz exactamente as CF nos bordos 1 e 2, bem como a equação diferencial do problema.

4.3.3 Abertura circular

Em lajes com aberturas circulares é possível, tal como para o caso de elasticidade plana, deduzir representações matemáticas precisas para campos de tensões junto a estas zonas.

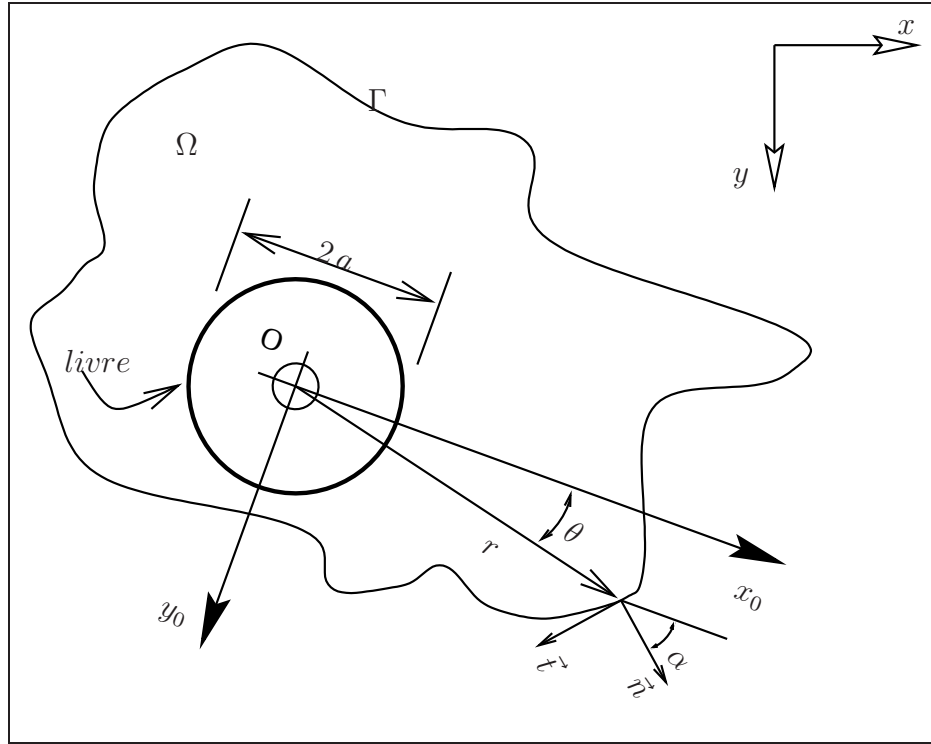


Figura 4.7: Laje com abertura circular. Referencial e notação utilizados

Solução homogénea

A solução para a laje infinita com uma abertura de forma circular representada na figura 4.7 pode assumir a forma [47]

$$w = \overset{\circ}{w} + \sum_k [F_k(r) \sin k\theta + G_k(r) \cos k\theta] \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.21)$$

Substituindo (4.21) na equação governativa do problema vem

$$F_k = \sum_{j=1}^4 A_{kj} f_{kj}(r), \quad G_k = \sum_{j=1}^4 B_{kj} g_{kj}(r),$$

onde f_{kj} , g_{kj} são soluções fundamentais conhecidas e A_{kj} , B_{kj} são constantes indeterminadas das quais metade podem ser eliminadas pois satisfazem (para qualquer k e separadamente para os termos associados com $\sin k\theta$ e $\cos k\theta$) as condições de fronteira homogéneas para $r = a$. As restantes constantes vão fazer parte da expansão assumida para a solução do problema.

A concentração de momentos junto a aberturas sem qualquer suporte reveste-se de interesse particular. Nesta situação as duas condições de fronteira em $r = a$ são estáticas ($V_n = 0$ e $M_n = 0$), logo é necessário acrescentar à soluções homogénea um deslocamento e duas rotações de corpo rígido.

A solução homogénea é apresentada no apêndice B.

Solução particular

A solução particular, $\overset{\circ}{w}$, é determinada expandindo a carga p que actua na laje e/ou eventuais condições de fronteira não homogéneas para $r = a$ em séries trigonométricas de $\sin k\theta$ e $\cos k\theta$.

A solução particular para *carga uniformemente distribuída* encontra-se no anexo B.

Capítulo 5

Implementação

5.1 Considerações iniciais

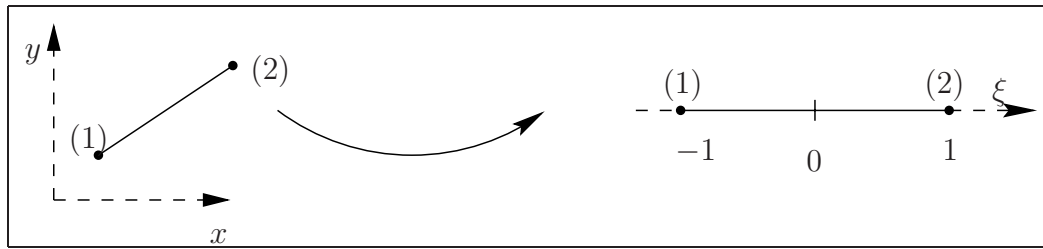
O êxito da aplicação de modelos numéricos na resolução de problemas de Engenharia depende em grande parte das ferramentas de cálculo colocadas à disposição do utilizador. Estas devem ser adequadas às suas necessidades, possuir uma interface simples de utilizar e uma constituição robusta e fiável.

Um programa de cálculo automático foi criado para testar a formulação apresentada no capítulo 4. Este não foi concebido para uma utilização prática, mas sim para analisar de uma forma sistemática diversos casos e, consequentemente, extrair conclusões acerca das possibilidades do método.

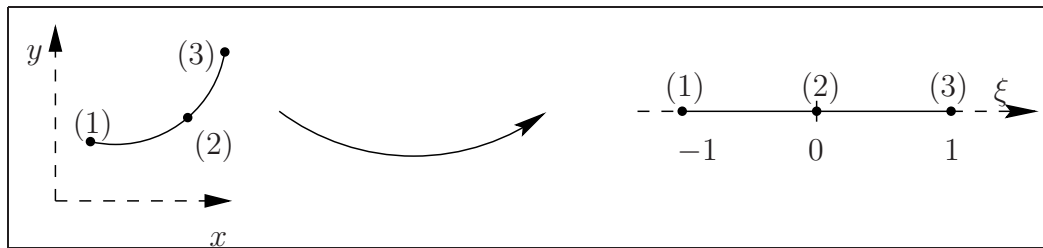
A linguagem de programação empregue foi o *FORTRAN 77* [28].

O objectivo deste capítulo é fazer uma breve referência às principais unidades que constituem o programa, enumerar alguns dos procedimentos utilizados e indicar as limitações existentes.

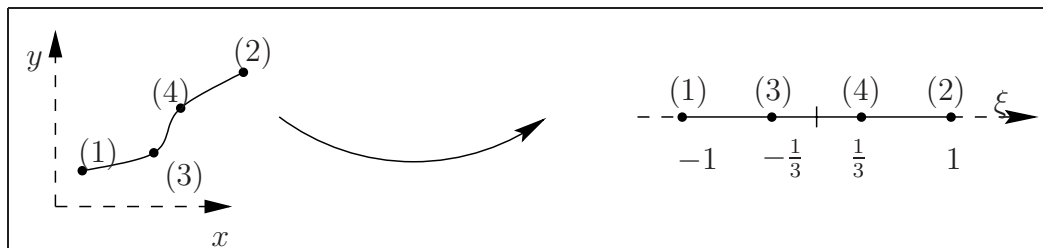
Os dados necessários à resolução de um problema incluem a definição da geometria (nós, lados e regiões), propriedades dos materiais, CF, solicitações, modo de imposição das CF (no caso discreto é necessário indicar o número e o modo de distribuição dos pontos de colocação), pesos (para cada tipo de CF), singularidades, método utilizado para a resolução do sistema de equações e diversas opções para a apresentação de resultados.



(a) linear.



(b) quadrático.



(c) cúbico.

Figura 5.1: Tipos de lados utilizados.

5.2 Aproximação da geometria

As regiões podem ter um número arbitrário de lados. Estes podem ser rectos, quadráticos ou cúbicos. Outras possibilidades poderiam ser consideradas.

A geometria dos lados é definida de forma aproximada, utilizando-se para tal *funções de forma* apropriadas. São definidos os tipos de lados representados na figura 5.1,

O lado i é definido de forma paramétrica por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_{\text{nós}}} \Psi_i(\xi) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

onde x_i e y_i representa a coordenada do nó i segundo a direcção x e y , respectivamente, $N_{\text{nós}}$ indica o número de nós utilizado na definição da geometria do lado e $\Psi_i(\xi)$ é a

função de forma associada ao nó i . As expressões das funções, para lados lineares, quadráticos e cúbicos são apresentadas em seguida.

$$\Psi_1(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

$$\Psi_2(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

$$\Psi_1(\xi) = \frac{1}{2} (\xi - 1) \xi$$

$$\Psi_2(\xi) = (1 + \xi) (1 - \xi)$$

$$\Psi_3(\xi) = \frac{1}{2} (\xi + 1) \xi$$

$$\Psi_1(\xi) = -4.5 \xi^3 + 9 \xi^2 - 5.5 \xi + 1$$

$$\Psi_2(\xi) = 4.5 \xi^3 - 4.5 \xi^2 + \xi$$

$$\Psi_3(\xi) = 13.5 \xi^3 - 22.5 \xi^2 + 9 \xi$$

$$\Psi_4(\xi) = -13.5 \xi^3 + 18 \xi^2 - 4.5 \xi$$

5.3 Sistema de coordenadas locais

A aproximação da solução homogénea para campos regulares é descrita num referencial local da região, localizado no seu centro de gravidade, CG, e orientado segundo os eixos geométricos principais. Deste modo é preservada a invariância desta solução em relação aos eixos globais utilizados.

A utilização do teorema de Green [3] permite que a realização dos cálculos que estão implícitos à determinação da localização e orientação dos eixos locais seja reduzida a integrações no contorno de cada região.

As expressões para a área, A , momentos estáticos em relação a x e y , S_x e S_y , momentos de inércia em relação a x e y , I_x e I_y , e produto de inércia, I_{xy} , podem, então, ser reescritas na forma

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y \, dx + x \, dy; \\
S_x &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -\frac{1}{2} y^2 \, dx + xy \, dy; \\
S_y &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -xy \, dx + \frac{1}{2} x^2 \, dy; \\
I_x &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -\frac{1}{3} y^3 \, dx + xy^2 \, dy; \\
I_y &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -x^2 y \, dx + \frac{x^3}{3} \, dy; \\
I_{xy} &= \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} -xy^2 \, dx + x^2 y \, dy.
\end{aligned}$$

As coordenadas do CG da região em consideração, (x_G, y_G) , e a orientação dos eixos principais da geometria são dados por

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{S_y}{A}; \\
y_G &= \frac{S_x}{A}; \\
\tan 2\theta &= -\frac{2 I_{x_G y_G}}{I_{x_G} - I_{y_G}}.
\end{aligned}$$

onde, usando o teorema dos eixos paralelos,

$$\begin{aligned}
I_{x_G} &= I_x - y_G^2 A; \\
I_{y_G} &= I_y - x_G^2 A; \\
I_{x_G y_G} &= I_{xy} - x_G y_G A.
\end{aligned}$$

Atendendo a que o contorno de cada região é definida por um número arbitrário de lados, N_{lados} , tem-se

$$\oint_{\Gamma} (\dots) = \sum_{i=1}^{N_{lados}} \int_{\Gamma_i} (\dots).$$

Todos os cálculos são efectuados ao nível dos lados representados na figura 5.1. É necessário ter em consideração o jacobiano da transformação de coordenadas que relaciona os referenciais global e local. Assim,

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_i} f(x, y) \, dx &= \int_{-1}^1 f(x(\xi), y(\xi)) \frac{dx(\xi)}{d\xi} \, d\xi; \\
\oint_{\Gamma_i} f(x, y) \, dy &= \int_{-1}^1 f(x(\xi), y(\xi)) \frac{dy(\xi)}{d\xi} \, d\xi.
\end{aligned}$$

Para as integrações nas expressões (5.2) recorreu-se à integração numérica. A regra de quadratura de Gauss-Legendre foi utilizada, ou seja,

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{N_{Gauss}} f(x(\xi_i)) w_i,$$

onde N_{Gauss} é o número de pontos de integração, x_i e w_i são, respectivamente, a coordenada e o peso associados ao ponto de integração i . A geração destes valores é feita com recurso aos polinómios de Legendre [36].

5.4 Sistemas de escalas locais

Para evitar dificuldades numéricas resultantes do valor dos expoentes que estão associados às funções T, duas escalas são utilizadas; uma para coordenadas e outra para forças.

O sistema de coordenadas local é adimensional e dado por:

$$\xi = \frac{x}{d}, \quad \eta = \frac{y}{d},$$

onde d foi tomado como o comprimento do maior lado da região. O comprimento do lado i de uma região é dado por:

$$d = \int_{\Gamma_i} ds = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} d\xi. \quad (5.3)$$

O integral que ocorre na expressão (5.3) também é avaliado numericamente. Note-se que, no caso de lados não lineares, a integração não é exacta pois a expressão integranda não é polinomial.

O factor utilizado para escalar todas as grandezas que envolvem dimensões de força, para cada região, é $E d^2$.

Em consequência da utilização destas escalas, as condições de fronteira (2.23) e (2.24) são reescritas na forma

$$w^j = \frac{\bar{w}^j}{d_j} \quad t \in \Gamma_w^j, \quad (5.4a)$$

$$\frac{\partial w^j}{\partial n} = \frac{\partial \bar{w}^j}{\partial n} \quad t \in \Gamma_{\frac{\partial w}{\partial n}}^j, \quad (5.4b)$$

$$M_n^j + GJ \frac{\partial^3 w^j}{\partial t^2 \partial n} = \frac{\bar{M}_n^j d_j^2}{E_j} \quad t \in \Gamma_{M_n}^j, \quad (5.4c)$$

$$V_n^j + EI \frac{\partial^4 w^j}{\partial t^4} = \frac{\bar{V}_n^j d_j}{E_j} \quad t \in \Gamma_{V_n}^j \quad (5.4d)$$

e

$$w^j d_j - w^{j+1} d_{j+1} = 0, \quad (5.5a)$$

$$\frac{\partial w^j}{\partial n} + \frac{\partial w^{j+1}}{\partial n} = 0, \quad (5.5b)$$

$$\frac{E_j}{d_j^2} \left(M_n^j + GJ \frac{\partial^3 w^j}{\partial t^2 \partial n} \right) - \frac{E_{j+1}}{d_{j+1}^2} M_n^{j+1} = 0, \quad (5.5c)$$

$$\frac{E_j}{d_j} \left(V_n^j + EI \frac{\partial^4 w^j}{\partial t^4} \right) + \frac{E_{j+1}}{d_{j+1}} V_n^{j+1} = 0, \quad (5.5d)$$

respectivamente.

5.5 Sistema global

5.5.1 Normais exteriores

Para a imposição de CF do tipo rotação, momento e esforço transversal efectivo normal é necessário determinar as componentes da normal exterior unitária, $\vec{n}$. Para um lado definido por (5.1), esta é dada por

$$\vec{n}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2}} \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi} \vec{e}_x - \frac{dx(\xi)}{d\xi} \vec{e}_y \right)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dx(\xi)}{d\xi} \\ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{N_{\text{nos}}} \frac{d\Psi_i(\xi)}{d\xi} \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ y_i \end{array} \right\}$$

As expressões das derivadas das funções de forma foram determinadas analiticamente.

5.5.2 Condições de fronteira

Tanto para as CF do tipo estático como cinemático a única restrição imposta para os valores prescritos é que estes possuam uma variação polinomial.

Os valores das CF são dados em n pontos igualmente espaçados ao longo do lado. Os coeficientes do polinómio resultante são determinados com recurso à rotina *polcoe* [36] e são utilizados posteriormente para calcular os valores das grandezas prescritas na fronteira nos pontos de colocação {integração} para o caso discreto {contínuo}.

5.5.3 Resolução de equações transcendentais

Como foi visto no capítulo 4, para obter a solução homogénea em lajes enviesadas é necessário a resolução de equações transcendentais.

O *método de Muller* [36], que resulta da generalização do *método da secante*, foi o escolhido. Em lugar da interpolação linear entre dois pontos, uma interpolação quadrática usando três pontos é utilizada, permitindo-se, assim, a detecção de eventuais raízes complexas. Dados três pontos x_{i-2} , x_{i-1} e x_i e o valor da função $P(x)$ nesses pontos, a aproximação seguinte, x_{i+1} , é dada por

$$x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \left[\frac{2C}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}} \right] \quad (5.6)$$

onde

$$\begin{aligned} q &\equiv \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1} - x_{i-2}} \\ A &\equiv qP(x_i) - q(1+q)P(x_{i-1}) + q^2P(x_{i-2}) \\ B &\equiv (2q+1)P(x_i) - (1+q)^2P(x_{i-1}) + q^2P(x_{i-2}) \\ C &\equiv (1+q)P(x_i) \end{aligned}$$

e o sinal no segundo termo do segundo membro do denominador de (5.6) é escolhido de modo a maximizar o seu valor absoluto ou módulo.

5.5.4 Montagem do sistema

Caso discreto

A matriz do sistema e o vector devido às solicitações são montados através de sucessivos ciclos às regiões, lados, pontos de colocação, grau e CF.

Dois esquemas de distribuição dos pontos de colocação ao longo da fronteira são admitidos. Em ambos, os pontos são dispostos simetricamente em relação ao centro do lado.

A posição dos pontos é determinada nos lados tipo, sendo as suas coordenadas no sistema global calculadas através de (5.1).

O primeiro esquema corresponde à distribuição de pontos segundo a regra de integração de Gauss-Legendre.

No segundo esquema os lados são divididos numa série de segmentos de comprimento

variável. Duas variações são admitidas, de acordo com as seguintes séries:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

O comprimento dos segmentos aumenta dos extremos para o centro dos lados. Os pontos de colocação são dispostos no ponto central de cada segmento.

Ao concentrar os pontos de colocação nos extremos dos lados aumenta-se o peso das CF que lhes estão associadas nas extremidades. Este procedimento pode beneficiar a qualidade da solução, tendo em conta que é junto aos limites dos lados que ocorrem, geralmente, os maiores gradientes de tensões.

Caso contínuo

As integrações apenas são determinadas exactamente nos casos em que a região em análise é regular, as regiões adjacentes são regulares, e a carga aplicada é uniformemente distribuída. Em todos os outros casos a integração numérica apenas fornece uma estimativa do valor correcto.

As solicitações devido a cargas circulares, de faca ou poligonais podem, em geral, actuar em várias regiões. Uma pesquisa das regiões onde estas cargas actuam é feita, sendo a solução particular respectiva confinada a estas.

A formação da matriz e do vector independente do sistema é substancialmente diferendo relativamente ao caso anterior no que respeita aos termos de interface, pois existem integrações a efectuar onde é necessário fornecer informação de ambas as regiões envolvidas simultaneamente.

5.6 Métodos de resolução de sistemas lineares

Dado que os sistemas de equações originados pelos casos analisados são de dimensão reduzida, o armazenamento dos sistemas de equações lineares foi realizado em matrizes cheias. Todas as operações são realizadas em dupla precisão. Apesar destes dois factores, o tempo utilizado para a resolução do sistema é reduzido.

A formação, para o caso discreto, de $C^T C$ na equação (3.12) pode revelar-se uma opção pouco ajustada devido ao aumento de erros numéricos que implica. A *Single Value Decomposition*, SVD, é uma alternativa viável.

Os métodos testados foram:

- gradientes conjugados [36];
- MA44AD (baseado na SVD) [25];
- rotina *dsvdcmp* [36] (outra implementação do SVD);
- Gauss [36];
- Cholesky [36].

O número de condição da matriz do sistema é determinado. Pode, assim, avaliar-se imediatamente a fiabilidade da solução obtida.

5.7 Apresentação de resultados

Os resultados obtidos são acedidos através de dois processos: *tabelas numéricas* ou *visualização gráfica*.

A elaboração das tabelas numéricas é realizada através da determinação das grandezas pretendidas numa malha de pontos definida no interior das regiões. Os resultados podem ser obtidos no referencial global ou local. Em cada ponto são calculados os resultados para as seguintes grandezas:

- deslocamento transversal,
- momentos flectores, M_{xx} e M_{yy} , e momento torsor, M_{xy} ,
- momentos, M_I e M_{II} , e direcções principais, θ_I e θ_{II} , de flexão,
- esforços transversos, Q_x e Q_y ,
- rotações, θ_x e θ_y ,
- densidade de energia de deformação, dU .

A visualização dos resultados obtidos é essencial, pois sintetiza uma apreciável quantidade de informação, permitindo uma rápida análise dos resultados.

As representações de contorno e de direcções principais apresentadas neste trabalho foram elaboradas com recurso ao *package* de rotinas gráficas Janela [2]. Os resultados não sofreram qualquer processo de tratamento. Este procedimento tem o inconveniente de ser necessário disponibilizar as bibliotecas com as várias soluções na fase de avaliação de resultados. Esta opção é preferível ao recurso a técnicas de suavização (*smoothing*) da solução, visto que estas implicam a introdução de erros adicionais.

Capítulo 6

Exemplos de aplicação

6.1 Introdução

Por forma a validar a formulação exposta anteriormente foram analisados uma série de casos de lajes finas. Julga-se que a amostra apresentada é representativa das potencialidades reveladas pelo método.

Os diversos exemplos estudados foram escolhidos de forma a variar algumas das variáveis fundamentais, como sejam: forma do domínio (para determinadas formas procurou-se, ainda, variar um parâmetro como seja a relação entre vãos ou um ângulo entre bordos), tipo de solicitação, modelação adoptada para o mesmo problema, eventual existência de vigas de bordadura e consideração de diversas condições de fronteira.

Foram utilizadas ambas as abordagens apresentadas, discreta e contínua, variando-se o número de pontos de colocação ou integração, conforme o caso, e o grau máximo da expansão, m .

Não foram incluídos neste trabalho casos de rigidez de flexão variável de região para região, vigas interiores, vigas com rigidez de flexão e/ou torção variável e condições de fronteira do tipo $\bar{w} \neq 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} \neq 0$ e $\bar{V}_n \neq 0$.

O número de pontos de colocação {integração} utilizados na abordagem discreta {contínua} é igual para as diversas condições de fronteira.

É dado especial ênfase a lajes rectangulares (página 67), especialmente à laje simplesmente apoiada. Alguns casos de lajes circulares são analisados (página 118) seguindo-se as lajes em viés (página 131). Casos de *superconvergência* serão indicados para lajes triangulares (página 155).

A comparação de resultados é feita com soluções obtidas a partir da expansão em série

	Solicitação		
	$\bar{p}$	P	$\bar{M}$
deslocamento	$w^{adim} = \frac{w D}{\bar{p} a^4}$	$w^{adim} = \frac{w D}{P a^2}$	$w^{adim} = \frac{w D}{\bar{M} a^2}$
rotações	$\theta_i^{adim} = \frac{\theta_i D}{\bar{p} a^3}$	$\theta_i^{adim} = \frac{\theta_i D}{P a}$	$\theta_i^{adim} = \frac{\theta_i D}{\bar{M} a}$
momentos	$M_{ij}^{adim} = \frac{M_{ij}}{\bar{p} a^2}$	$M_{ij}^{adim} = \frac{M_{ij}}{P}$	$M_{ij}^{adim} = \frac{M_{ij}}{\bar{M}}$
esforços transversos	$Q_i^{adim} = \frac{Q_i}{\bar{p} a}$	$Q_i^{adim} = \frac{Q_i a}{P}$	$Q_i^{adim} = \frac{Q_i a}{\bar{M}}$

Tabela 6.1: Definição de grandezas adimensionais.

de Fourier ou Lévy, do método dos elementos finitos e do método das diferenças finitas (recorrendo a resultados publicados na literatura).

Em todos os testes os pesos utilizados são unitários, isto é, $W_w = 1.0$, $W_{\frac{\partial w}{\partial n}} = 1.0$, $W_{M_n} = 1.0$ e $W_{V_n} = 1.0$. A inclusão de um programa de optimização não linear no algoritmo para a determinação de *pesos optimos* foi investigada pelo autor e Leitão [30].

Os pontos de colocação localizam-se nos pontos de Gauss dos lados, de acordo com o exposto no capítulo 5, caso não seja expressamente indicado um posicionamento distinto.

Os valores utilizados para a realização dos testes foram: $E = 1.0$, $a = 1.0$ (dimensão característica de cada problema), $t = \frac{a}{10}$, $\bar{p} = 1.0$, $\bar{P} = 1.0$ e $\bar{M}_n^{máx}(\xi) = 1.0$, excepto quando outros forem indicados.

O valor para o coeficiente de Poisson é, em geral, $\nu = 0.3$, exceptuando o exemplo de laje enviesada simplesmente apoiada-livre, página 137, em que $\nu = 0.2$ a fim de facilitar a comparação com resultados publicados na literatura.

Os resultados apresentados nas tabelas e representações bidimensionais foram escalados e são apresentados sob a forma adimensional. Assim, são definidas as entidades w^{adim} , θ_i^{adim} , M_{ij}^{adim} e Q_i^{adim} , ($i, j = x, y$), na tabela 6.1 em função do tipo de carregamento.

Os resultados apresentados sob a forma de diagramas de contorno não foram escalados.

A escolha dos limites de variação para as grandezas que se pretende representar graficamente exige, por vezes, alguns compromissos em nome da legibilidade. Os valores extremos para o intervalo não são óbvios nos casos em que o gradiente da função a representar é elevado, como por exemplo, os diagramas de esforços em lajes enviesadas. Neste caso o intervalo de variação da função é convenientemente truncado.

O número de equações a empregar na abordagem discreta foi escolhido de modo a ser igual ao dobro do número de coeficientes indeterminados, excepto quando forem ambos indicados.

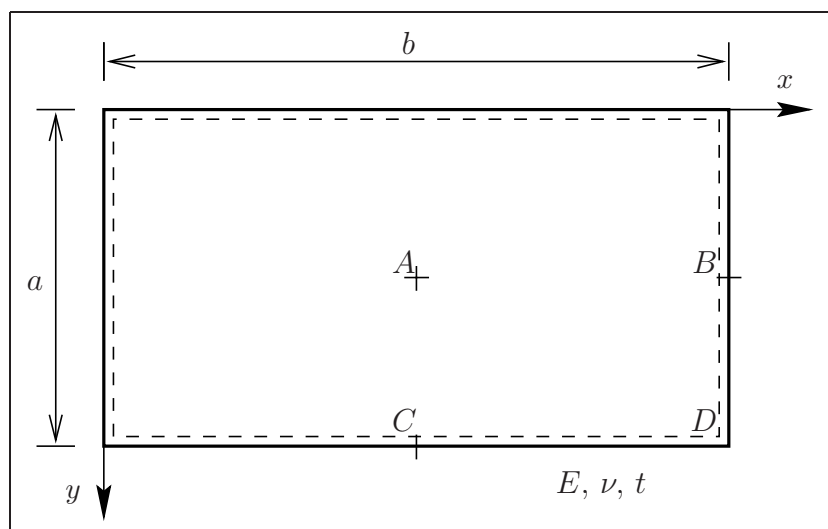


Figura 6.1: Laje rectangular simplesmente apoiada.

Supõe-se ainda que é utilizada a expansão de funções regulares (4.4), página 41, para aproximar o campo de deslocamentos, excepto quando esta for indicada explicitamente.

6.2 Lajes rectangulares

6.2.1 Simplesmente apoiada

Considere-se a laje rectangular simplesmente apoiada representada na figura 6.1.

Esta estrutura foi analisada para os casos de carga uniformemente distribuída (página 69), carga uniformemente distribuída em duas zonas rectangulares (página 71), carga linearmemente distribuída ao longo de um segmento de recta (página 77), carga concentrada no centro (página 82), distribuição parabólica de momentos ao longo de dois bordos paralelos (página 91) e carga bilinear (página 97).

Em todos os exemplos foi empregue a solução regular. A possibilidade de considerar a solução para lajes enviesadas (com $\theta_0 = 45^\circ$, ver figura 4.6, página 51 para definição de θ_0) foi concretizada em dois exemplos: lajes quadradas encastrada (página 100) e simplesmente apoiada (página 131).

Os resultados apresentados são determinados nos pontos indicados na figura 6.1: A (centro da laje), B (meio do menor bordo), C (meio do maior bordo) e D (canto). Outros pontos de interesse para exemplos específicos são analisados, sendo a sua localização indicada em cada caso.

Para a estrutura em análise é possível obter soluções, sob a forma de série, para o

campo de deslocamentos. Os diversos carregamentos actuantes podem ser convenientemente modelados através da expansão em série de Fourier.

Os resultados obtidos foram comparados com a solução de Navier ou Lévy no caso de solicitações no domínio ou fronteira, respectivamente.

A utilização de séries simples de Lévy [86], em princípio mais económica, revelou-se impossível para o cálculo de esforços transversos com a precisão desejada devido a problemas numéricos.

A convergência destas séries diminui com o aumento da ordem de diferenciação. Assim é necessário utilizar um número crescente de termos para a obtenção de rotações, momentos e esforços transversos.

Junto a determinados pontos, para carregamentos particulares, o método de Navier é proibitivo devido à baixa taxa de convergência. Nestes casos, outras soluções serão apresentadas.

Solução de Navier

Um carregamento genérico actuando no domínio, $p(x, y)$, pode ser representado na forma

$$p(x, y) = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

onde a_{mn} são coeficientes que dependem da solicitação. Um coeficiente particular, $a_{m'n'}$, determina-se através de

$$a_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{b} \sin \frac{n'\pi y}{a} dy dx. \quad (6.1)$$

Como a solução exacta para um carregamento sinusoidal é conhecida, o campo de deslocamentos pode ser obtido pela sobreposição dos termos em que a solicitação foi decomposta, resultando [86]

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (6.2)$$

Para o cálculo de rotações, momentos flectores e torsões e esforços transversos recorre-se à diferenciação simbólica do campo de deslocamentos, após o que se utilizam as definições (2.4), (2.10) e (2.11), respectivamente.

Para cada caso de estudo será apresentada a solução dos coeficientes a_{mn} obtidos a partir da expansão do carregamento em série de Fourier.

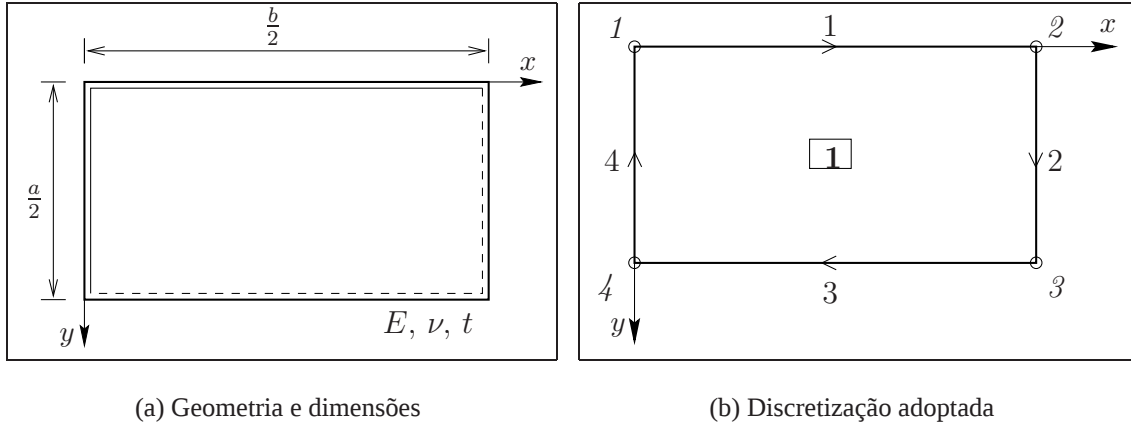


Figura 6.2: Laje fina rectangular simplesmente apoiada com dupla simplificação de simetria.

Carga uniformemente distribuída

Os resultados obtidos para uma carga uniformemente distribuída, $\bar{p}$, constam das tabelas 6.2 e 6.3. Considerou-se $b = 2a$. As duas abordagens discutidas no capítulo 4 foram utilizadas.

As soluções discreta e contínua são confrontadas com a solução de Navier. Impondo $p(x, y) = \bar{p}$ em (6.1) vem

$$a_{mn} = \frac{16\bar{p}}{\pi^2 m n} \quad (6.3)$$

onde $m = 1, 3, 5, \dots$ e $n = 1, 3, 5, \dots$

A solução é, então, obtida substituindo (6.3) em (6.2).

Apenas um quarto da laje foi analisada, ou seja, foi considerada a dupla simplificação de simetria, ver figura 6.2(a). A discretização adoptada consta da figura 6.2(b).

As condições de fronteira, no sistema de coordenadas representado na figura 6.2, são:

i. eixos de simetria

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{x=0, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}} &= 0, & \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{0 \leq x \leq \frac{b}{2}, y=0} &= 0, \\ \left. \bar{V}_n \right|_{x=0, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}} &= 0, & \left. \bar{V}_n \right|_{0 \leq x \leq \frac{b}{2}, y=0} &= 0. \end{aligned}$$

ii. lados simplesmente apoiados

m	$10 w^{adim A}$		$-Q_x^{adim B}$		$-Q_y^{adim C}$	
	Disc.	Cont.	Disc.	Cont.	Disc.	Cont.
6	0.103029	0.104508	0.3425	0.3164	0.4694	0.4767
8	0.101157	0.101246	0.3787	0.3793	0.4629	0.4609
10	0.101237	0.101291	0.3727	0.3740	0.4649	0.4664
12	0.101280	0.101286	0.3672	0.3670	0.4645	0.4638
Navier	0.101287		0.3696		0.4650	

Tabela 6.2: Valores de $w^{adim A}$, $Q_x^{adim B}$ e $Q_y^{adim C}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme.

m	$10 M_{xx}^{adim A}$		$M_{yy}^{adim A}$		$-10 M_{xy}^{adim D}$	
	Disc.	Cont.	Disc.	Cont.	Disc.	Cont.
6	0.47312	0.47417	0.10355	0.10508	0.48884	0.52893
8	0.46149	0.46435	0.10165	0.10180	0.48206	0.47881
10	0.46342	0.46385	0.10164	0.10171	0.46945	0.46869
12	0.46349	0.46354	0.10168	0.10169	0.46579	0.46574
Navier	0.46350		0.10168		0.46267	

Tabela 6.3: Valores de $M_{xx}^{adim A}$, $M_{yy}^{adim A}$ e $M_{xy}^{adim D}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme.

$$\begin{aligned} \bar{w}|_{x=\frac{b}{2}, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}} &= 0, & \bar{w}|_{0 \leq x \leq \frac{b}{2}, y=\frac{a}{2}} &= 0, \\ \bar{M}_n|_{x=\frac{b}{2}, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}} &= 0, & \bar{M}_n|_{0 \leq x \leq \frac{b}{2}, y=\frac{a}{2}} &= 0. \end{aligned}$$

A solução de Navier apresentada foi obtida utilizando 5000 termos em cada direcção. Este elevado número justifica-se apenas no presente contexto de aferição da qualidade da solução, sendo irrelevante para efeitos práticos.

Todos os teste foram realizados num processador Pentium II-333Mhz. Para ambas as análises o tempo de CPU consumido na formação da matriz do sistema foi cronometrado, encontrando-se os resultados na tabela 6.4.

Observa-se que a abordagem discreta é significativamente mais rápida que a contínua, como era de esperar tendo em conta que não existem integrações a efectuar.

m	Disc.	Cont.
6	0.05	0.6
8	0.06	1.15
10	0.11	1.81
12	0.17	1.98

Tabela 6.4: Valores do tempo de CPU (*seg*) consumido na formação da matriz do sistema.

Representações de contorno da solução obtida utilizando a abordagem discreta com 10 pontos de colocação/lado e $m = 10$ são apresentadas nas figuras 6.3 e 6.4.

Os resultados no centro são mais precisos que os obtidos na fronteira, onde foram feitas as aproximações.

Não existem diferenças significativas nos resultados fornecidos entre as duas abordagens.

Carga uniformemente distribuída em zona rectangular

Considere-se a laje representada na figura 6.5, onde $b = 2a$, submetida a duas cargas uniformemente distribuídas em zona rectangular cuja resultante é $\bar{P}$. O valor da carga uniforme actuante é, então, $\bar{p} = \frac{4\bar{P}}{a^2}$.

A solução de Navier para o caso representado na figura 6.6 é dada por (6.2), com [86]

$$a_{mn} = \frac{16}{a b u v} \bar{P} \sin \frac{m\pi\xi}{b} \sin \frac{n\pi\eta}{a} \sin \frac{m\pi u}{2b} \sin \frac{n\pi v}{2a} \quad (6.4)$$

onde $m = 1, 2, 3, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$

O significado das constantes u, v, ξ e η é evidenciado na figura 6.6 e $\bar{P}$ designa a carga total, $\bar{P} = u v \bar{p}$.

Sobrepondo a solução de Navier para cada zona rectangular da figura 6.5 obtém-se uma expressão analítica que permite obter aproximações numéricas da solução do problema.

A discretização utilizada consistiu numa única região com quatro lados rectos, idêntica à do exemplo precedente. Nas tabelas 6.5 e 6.6 encontram-se os resultados obtidos. O ponto E encontra-se indicado na figura 6.5.

Note-se que a obtenção dos termos correspondentes à carga aplicada envolve a integração de funções não polinomiais. Para que a comparação entre os resultados das duas abordagens seja possível optou-se por utilizar um número de pontos de integração igual ao número de pontos de colocação.

Representações de contorno da solução obtida utilizando a abordagem discreta com 20 pontos de colocação/lado e $m = 20$ são apresentadas nas figuras 6.7 e 6.8.

Este caso foi estudado por Venkatesh e Jiroušek [89] utilizando elementos híbridos de Trefftz. Os diagramas de esforço transversal então obtidos são semelhantes aos agora apresentados.

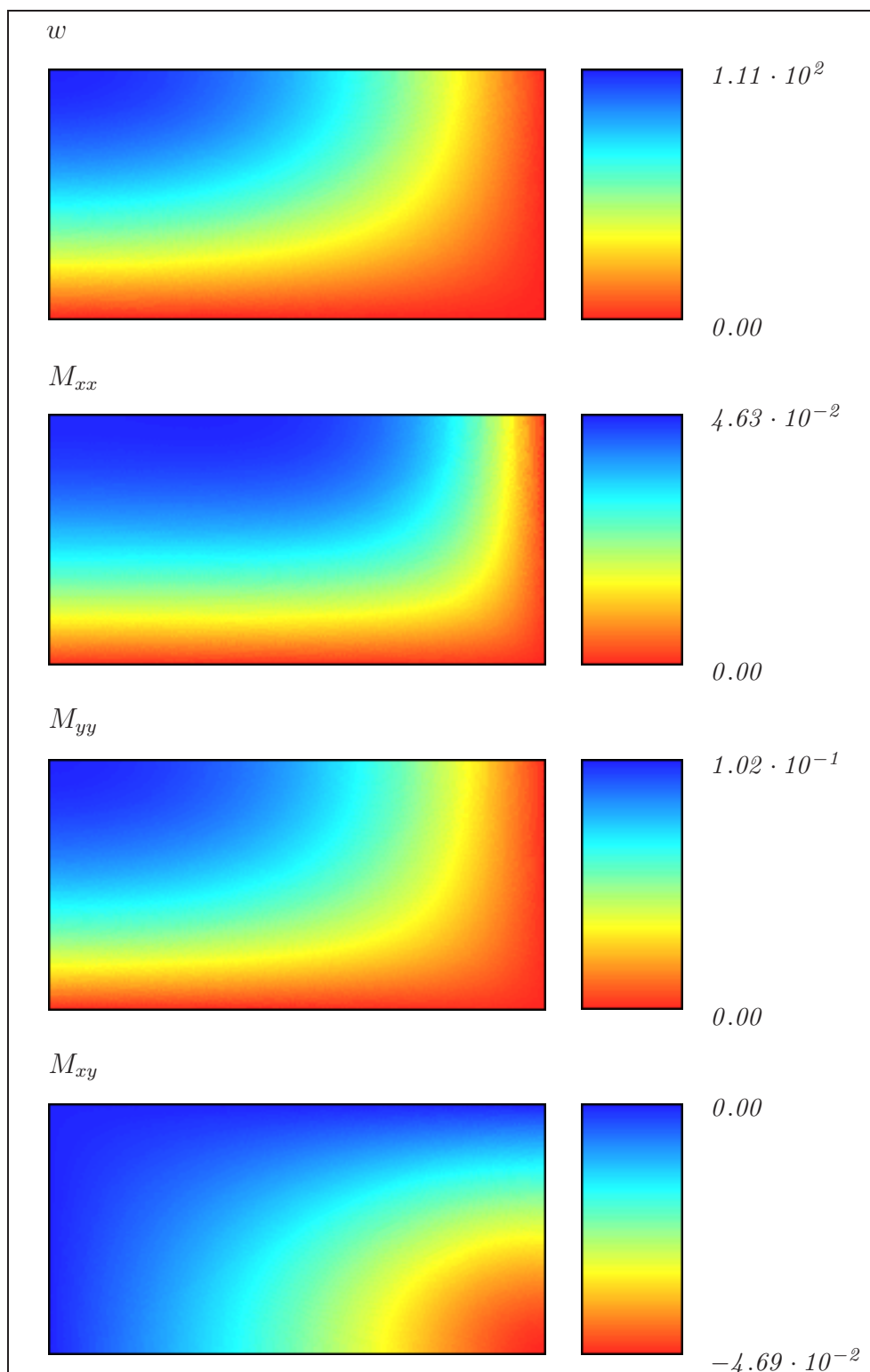


Figura 6.3: Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme.

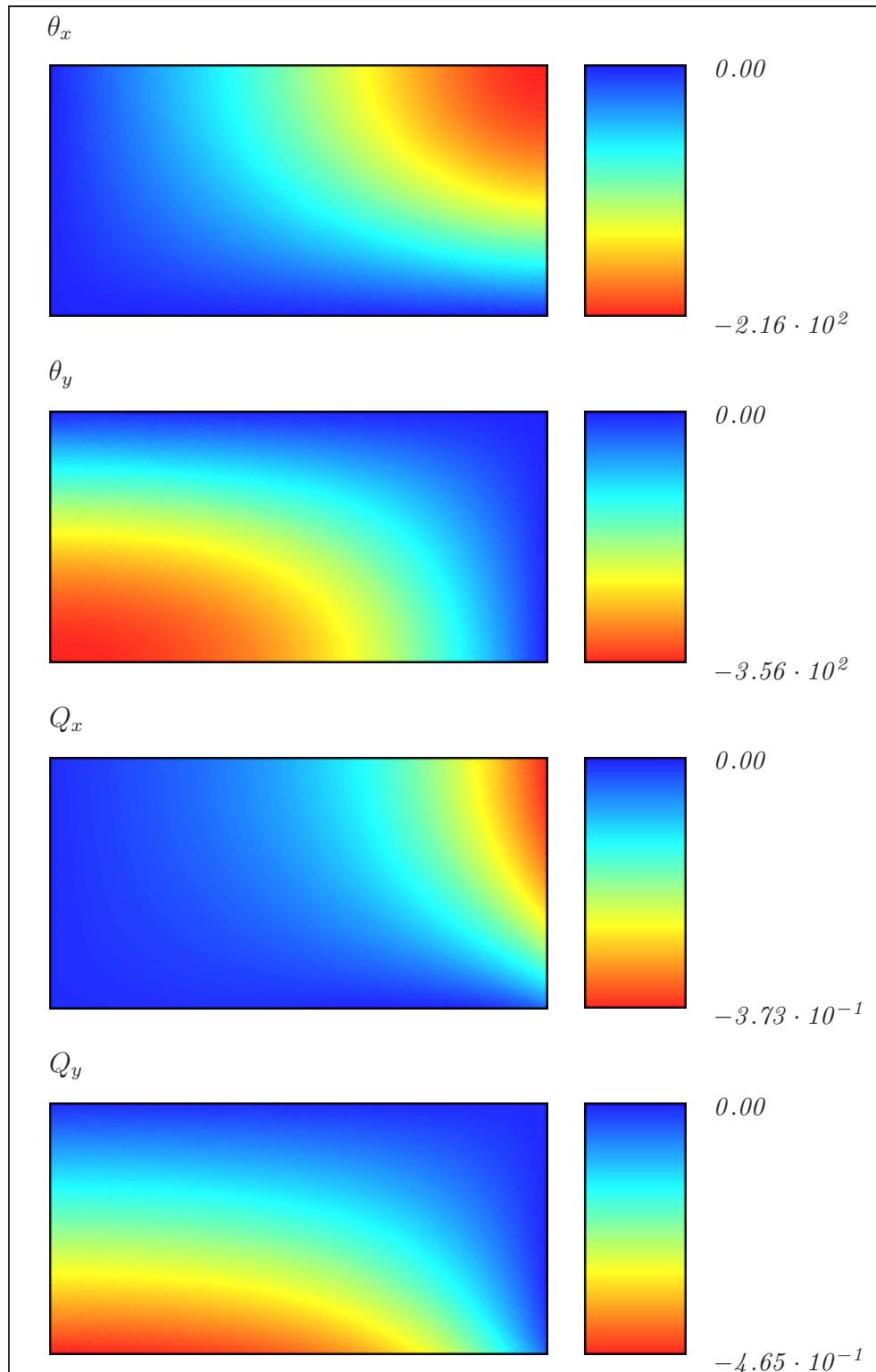


Figura 6.4: Campos de rotações e diagramas de esforço transverso em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme.

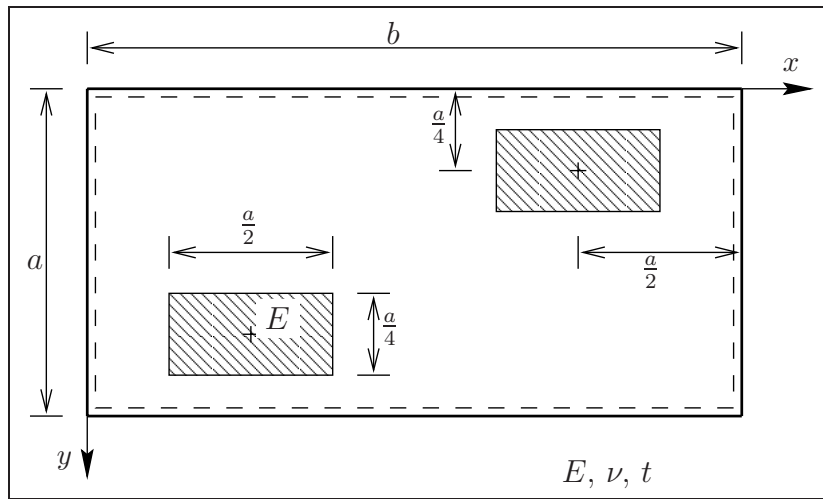


Figura 6.5: Laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída em duas zonas rectangulares.

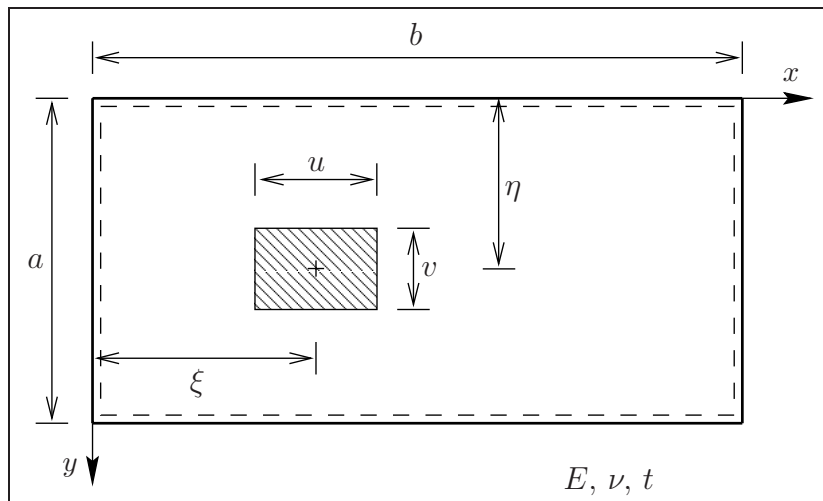


Figura 6.6: Laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída em zona rectangular. Notação da expressão (6.4).

m	$100 w^{adim A}$		$100 M_{xy}^{adim E}$	
	Disc.	Cont.	Disc.	Cont.
10	0.139705	0.134997	0.73549	0.72029
14	0.134859	0.134675	0.75186	0.75121
18	0.134665	0.134659	0.75783	0.75845
22	0.134657	0.134659	0.75715	0.75726
Navier	0.134659		0.75727	

Tabela 6.5: Valores de $w^{adim A}$ e $M_{xy}^{adim E}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em zona rectangular.

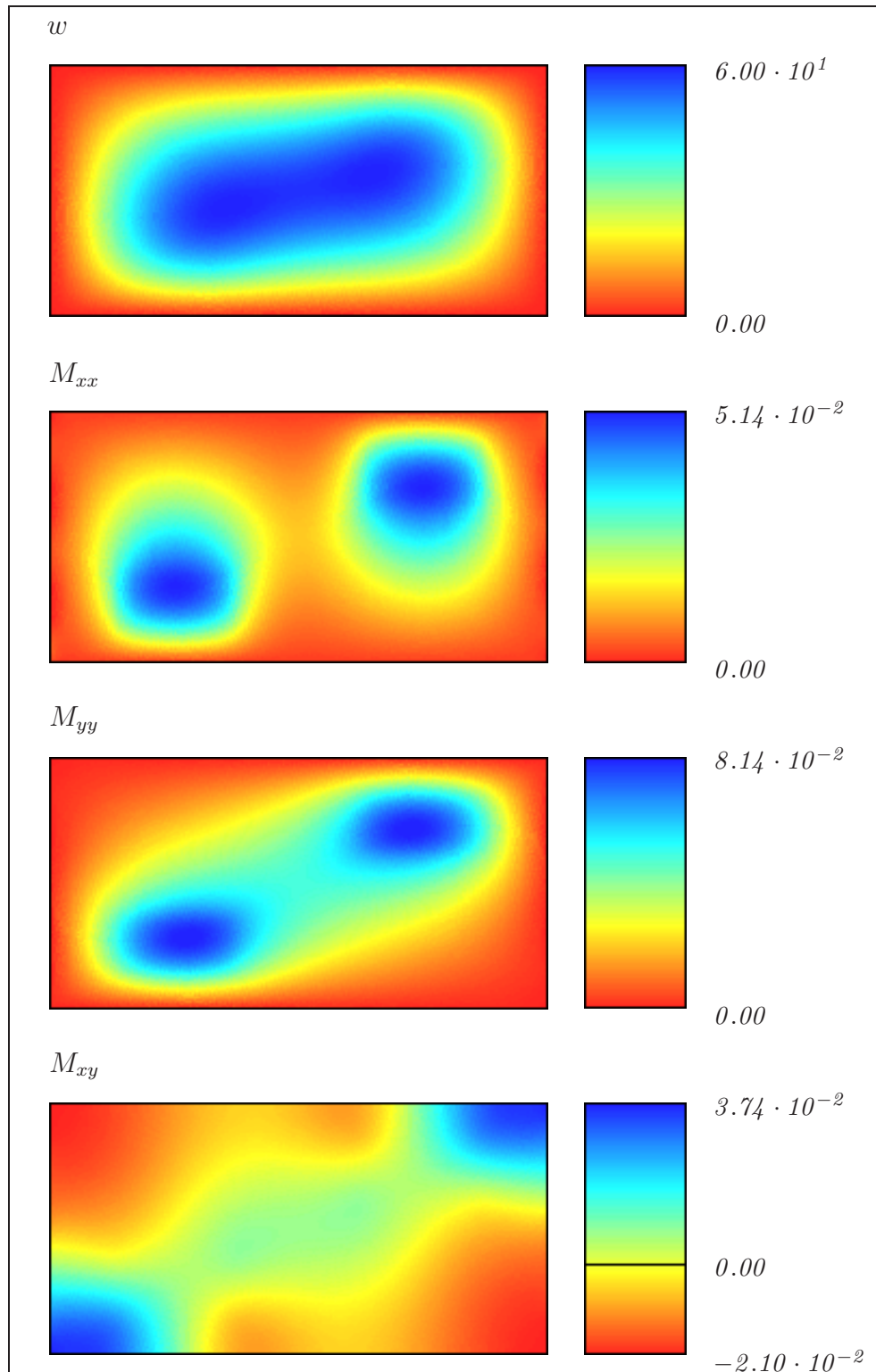


Figura 6.7: Campo de deslocamento e diagramas de momentos em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em superfícies rectangulares.

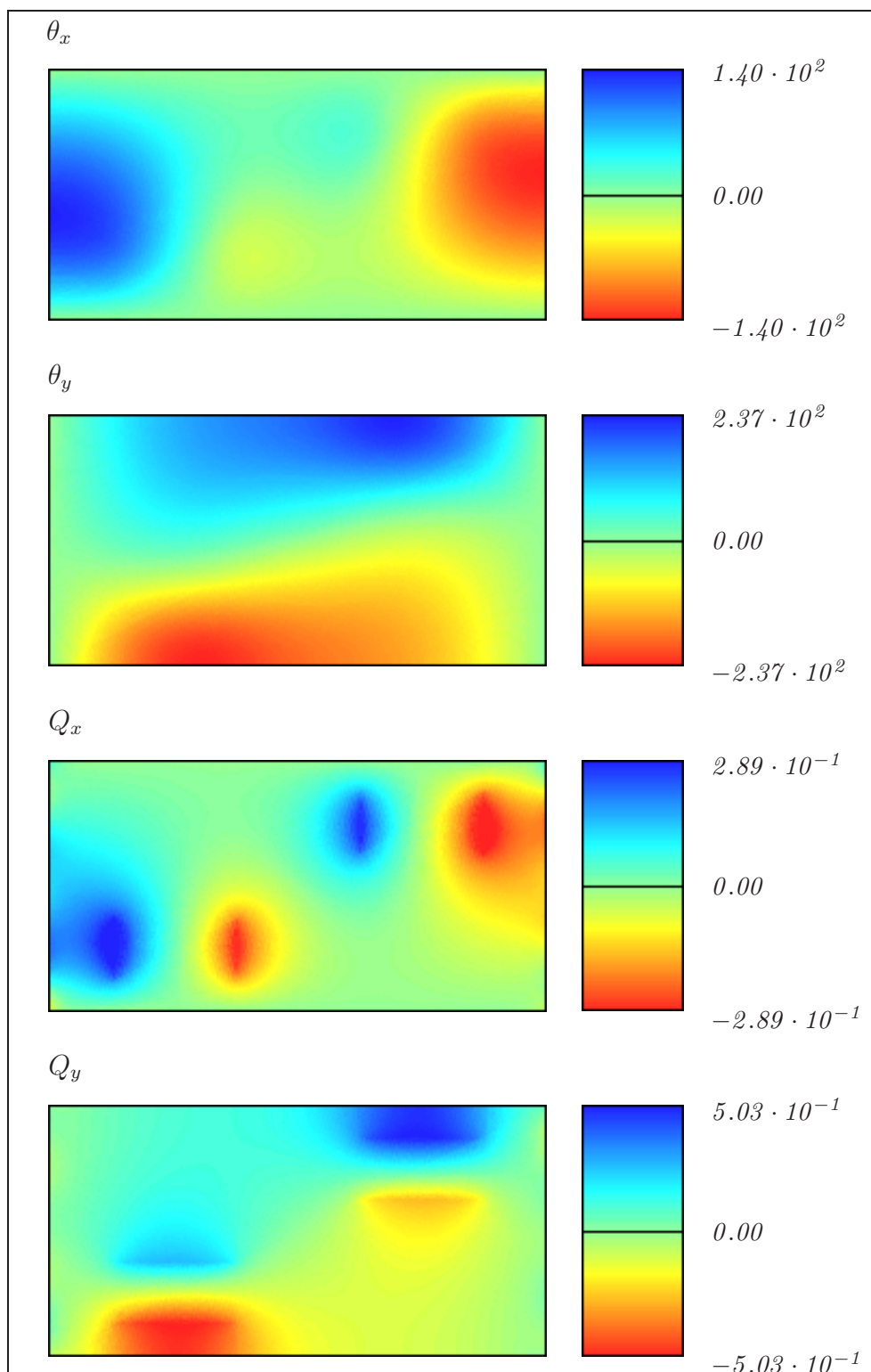


Figura 6.8: Campos de rotações e diagramas de esforço transversal em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em superfícies rectangulares.

m	$10 M_{xx}^{adim E}$		$10 M_{yy}^{adim E}$	
	Disc.	Cont.	Disc.	Cont.
10	0.49685	0.50000	0.78522	0.77242
14	0.49590	0.49531	0.80496	0.80427
18	0.49570	0.49567	0.80591	0.80603
22	0.49585	0.49586	0.80604	0.80603
Navier	0.49593		0.80601	

Tabela 6.6: Valores de $M_{xx}^{adim E}$ e $M_{yy}^{adim E}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em zona rectangular.

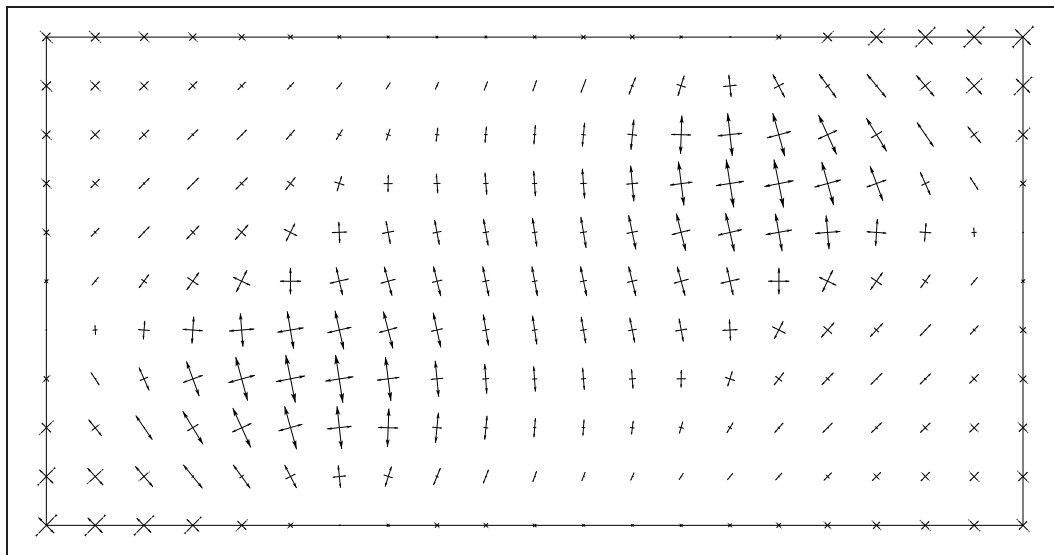


Figura 6.9: Direcções principais de flexão em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga uniforme em superfícies rectangulares.

As direcções principais de flexão são apresentadas na figura 6.9.

Atente-se na elevada precisão do presente método: é possível obter soluções com 6 algarismos significativos (para deslocamentos) com 72 graus de liberdade.

Carga linearmente distribuída em segmento de recta

Considere-se a laje representada na figura 6.10 ($b = 2a$) submetida a uma carga linearmente variável no segmento de recta $\overline{FH}$.

A resultante do carregamento é $\overline{P}$. O valor da carga em F e H é p_F e p_H , respectivamente.

A solução de Navier para o presente caso pode ser obtida, tal como anteriormente, através da expressão (6.2).

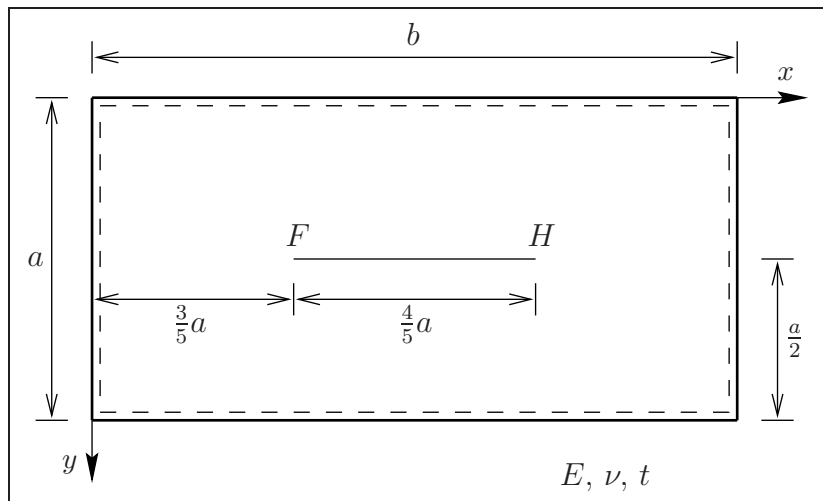


Figura 6.10: Laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca.

Considere-se que a carga é expressa no referencial global por $\bar{p}(x) = p_0 + p_1 x$. Os coeficientes a_{mn} são dados por

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} (p_0 + p_1 x) \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{a} dx. \quad (6.5)$$

onde as constantes u , ξ e η tem o significado indicado na figura 6.6. Para a presente situação $v = 0$.

A avaliação de (6.5) conduz a $a_{mn} = a_{mn}^{p_0} + a_{mn}^{p_1}$ com

$$a_{mn}^{p_0} = \frac{8p_0}{\pi m b} \sin \frac{n\pi \eta}{a} \sin \frac{m\pi \xi}{b} \sin \frac{m\pi u}{2b}$$

$$a_{mn}^{p_1} = \frac{4p_1}{\pi^2 m^2 a} \sin \frac{n\pi \eta}{a} \left[2b \cos \frac{m\pi \xi}{b} \sin \frac{m\pi u}{2b} \right. \\ \left. + 2\xi m \pi \sin \frac{m\pi \xi}{b} \sin \frac{m\pi u}{2b} - u m \pi \cos \frac{m\pi \xi}{b} \cos \frac{m\pi u}{2b} \right]$$

onde $m = 1, 2, 3, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$

A fim de aferir o efeito da distorção da forma do domínio na solução considere-se a discretização em duas regiões representada na figura 6.11.

A distorção das regiões depende do parâmetro γ , cujo significado é exposto na figura 6.12.

Os valores utilizados para a carga de faca foram: $p_F = 0$ e $p_H = \bar{P} \frac{5}{2a}$.

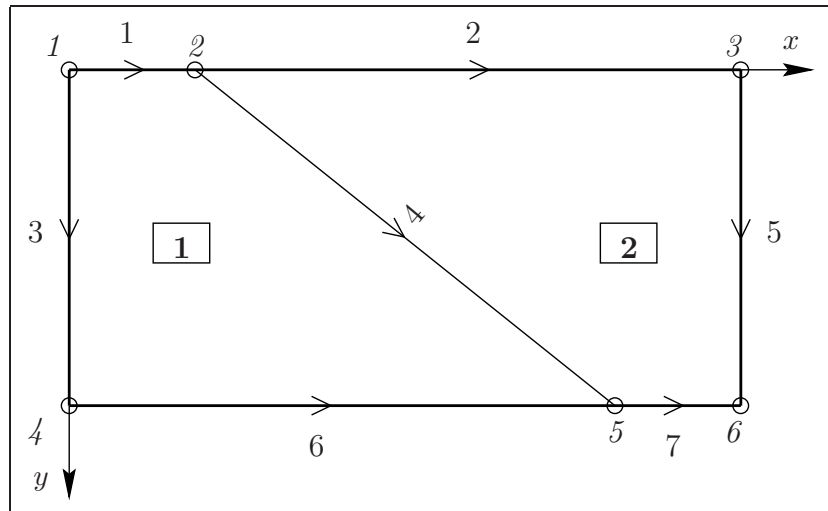


Figura 6.11: Discretização utilizada para laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca.

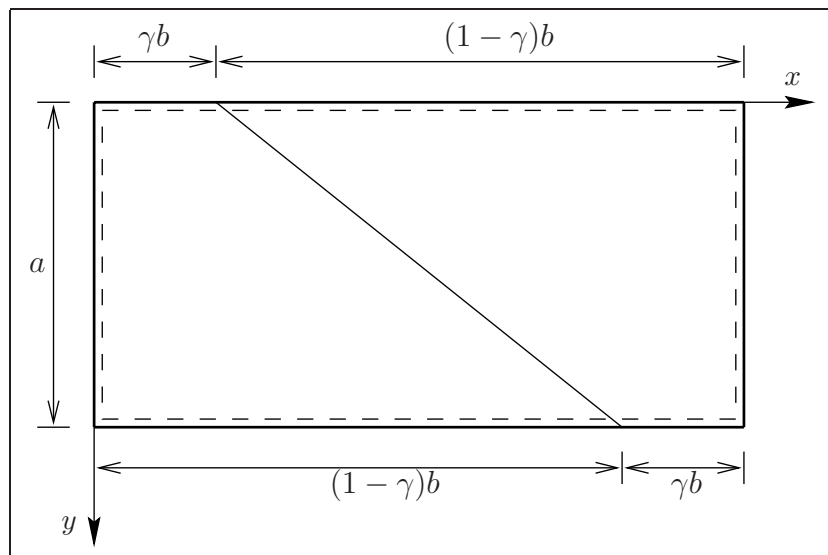


Figura 6.12: Laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca. Parâmetro de distorção, γ .

γ	$10 w^{adim A}$	$M_{xx}^{adim A}$	$M_{yy}^{adim A}$	$Q_x^{adim A}$
0.05	0.136023	0.106680	0.203068	0.364910
0.10	0.136015	0.106626	0.203047	0.364553
0.15	0.136015	0.106626	0.203046	0.364560
0.20	0.136016	0.106630	0.203048	0.364594
0.25	0.136016	0.106632	0.203050	0.364632
0.30	0.136015	0.106630	0.203048	0.364602
0.35	0.136016	0.106629	0.203048	0.364585
0.40	0.136016	0.106631	0.203049	0.364613
0.45	0.136015	0.106629	0.203048	0.364584
0.50	0.136015	0.106630	0.203048	0.364606
Exacto	0.136015	0.106630	0.203048	0.364603

Tabela 6.7: Valores de $w^{adim A}$, $M_{xx}^{adim A}$, $M_{yy}^{adim A}$, $Q_x^{adim A}$ para a região 1 em laje simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.

Os resultados apresentados nas tabelas 6.7 e 6.8 foram calculados no ponto central (A).

Dado que este ponto é partilhado por ambas as regiões (para todos os valores de γ), os resultados são indicados para ambas.

Foi utilizada a abordagem discreta com 10 pontos de colocação/lado e $m = 15$ nas duas regiões. O sistema obtido contém, consequentemente, 160 equações e 120 incógnitas.

O resultado exacto apresentado foi determinado utilizando a abordagem discreta com uma única região. Observando a convergência dos resultados, concluiu-se que, para a precisão apresentada, 80 pontos de colocação/lado e $m = 80$ é suficiente. A utilização da série derivada anteriormente revelou-se excelente para a obtenção de deslocamentos, mas de convergência lenta para esforços.

Da comparação das duas tabelas conclui-se que os erros obtidos na compatibilização dos deslocamentos generalizados e no equilíbrio dos esforços ao longo da fronteira entre as duas regiões são desprezáveis.

Saliente-se que estes resultados são obtidos no ponto central do lado, onde não existe qualquer ponto de colocação (o número de pontos de colocação é par).

A figura 6.13 representa graficamente os valores das tabelas 6.7 e 6.8. Os valores foram escalados ao valor exacto.

A figura 6.13 sugere os seguintes comentários:

- os erros são, para efeitos práticos, nulos para qualquer valor de γ . A solução é praticamente independente deste valor para $\gamma \geq 0.15$;

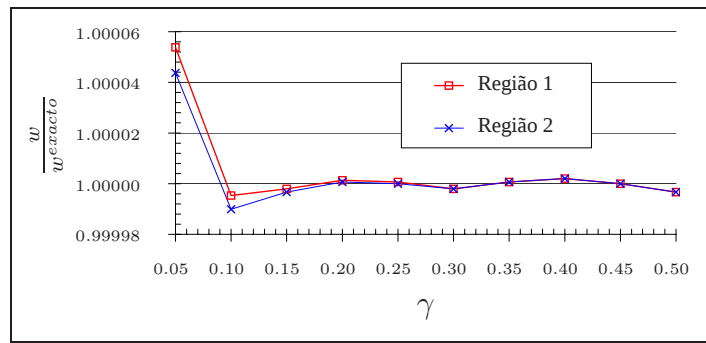
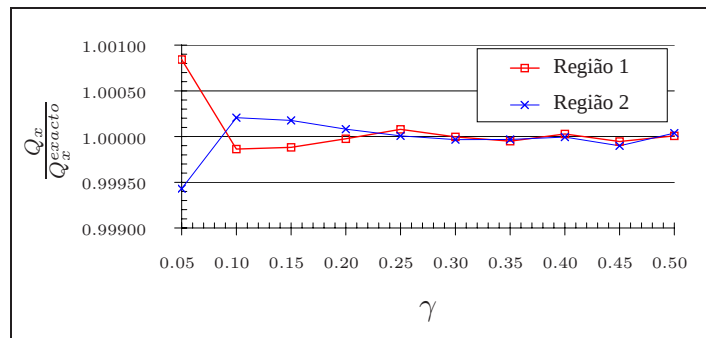
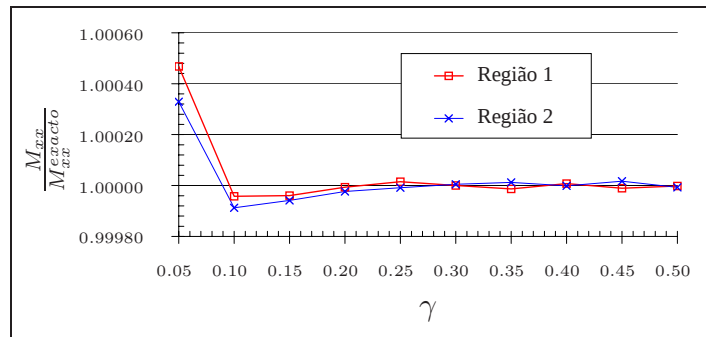
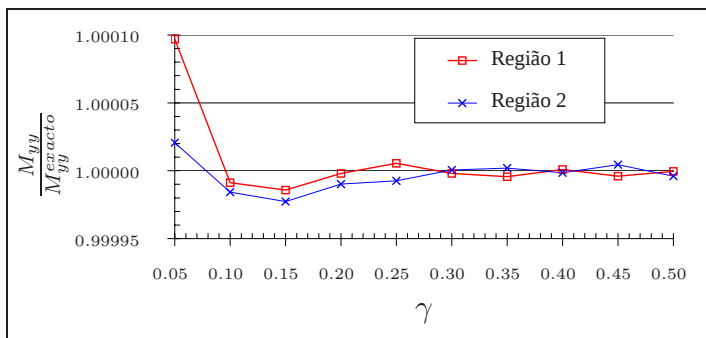
(a) Deslocamento, w (b) Esforço transversal, Q_x (c) Momento fletor, M_{xx} (d) Momento fletor, M_{yy}

Figura 6.13: Efeito da distorção das regiões na solução (ponto A) em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.

γ	$10 w^{adim A}$	$M_{xx}^{adim A}$	$M_{yy}^{adim A}$	$Q_x^{adim A}$
0.05	0.136021	0.106665	0.203053	0.364395
0.10	0.136014	0.106621	0.203045	0.364678
0.15	0.136015	0.106624	0.203044	0.364667
0.20	0.136016	0.106628	0.203046	0.364632
0.25	0.136015	0.106629	0.203047	0.364606
0.30	0.136015	0.106631	0.203049	0.364591
0.35	0.136016	0.106632	0.203049	0.364591
0.40	0.136016	0.106630	0.203048	0.364601
0.45	0.136015	0.106632	0.203049	0.364566
0.50	0.136015	0.106630	0.203048	0.364616
Exacto	0.136015	0.106630	0.203048	0.364603

Tabela 6.8: Valores de $w^{adim A}$, $M_{xx}^{adim A}$, $M_{yy}^{adim A}$, $Q_x^{adim A}$ para a região 2 em laje simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.

- com o aumento da ordem de diferenciação, os erros aumentam;
- a diferença na solução obtida através de cada uma das duas regiões é reduzida.

Na figura 6.14 são comparadas as soluções obtidas para $M_{yy}^{x=\frac{b}{2}}$ e $Q_y^{x=\frac{b}{2}}$ a partir da dupla série de Navier (com 50 termos em cada direcção) e da abordagem discreta com 10 pontos de colocação/lado, $m = 15$ nas duas regiões e $\gamma = 0.1$. Para esta última situação são, também, mostrados os diagramas de contorno de deslocamentos e momentos e rotações e esforços transversos nas figuras 6.15 e 6.16, respectivamente.

Se por um lado a obtenção de valores com elevada precisão, para esforços, utilizando séries de Navier é penosa, aproximações razoáveis para efeitos práticos podem ser obtidas com, relativamente, poucos termos, como se pode observar a partir da figura 6.14.

Dada a descontinuidade imposta pela carga de faca, a aproximação obtida para Q_y é claramente pior que para M_{yy} .

É de salientar a semelhança de andamento entre os diagramas representados na figura 6.14 e os obtidos para uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga central concentrada.

De referir ainda que tempo de cálculo exigido pelas séries é bastante superior ao do presente método.

Carga central concentrada

A concentração de tensões junto a cargas pontuais é usualmente menosprezada. No exemplo que segue uma carga central concentrada, $\bar{P}$, é modelada de diferentes formas e os

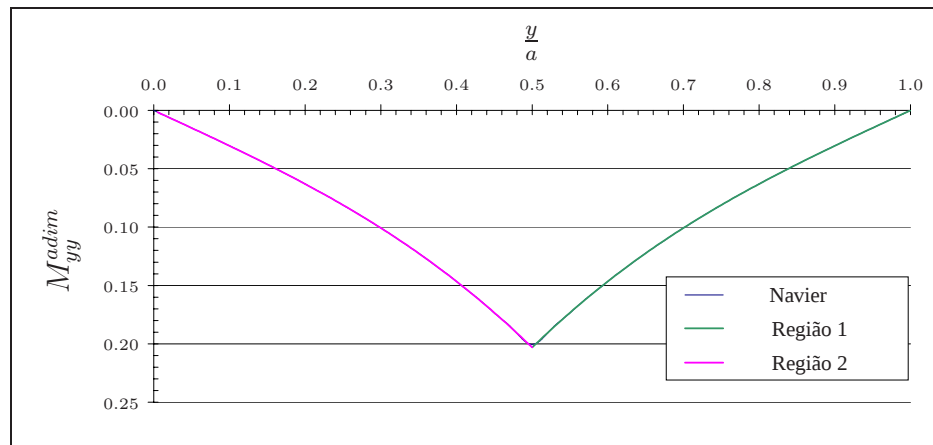
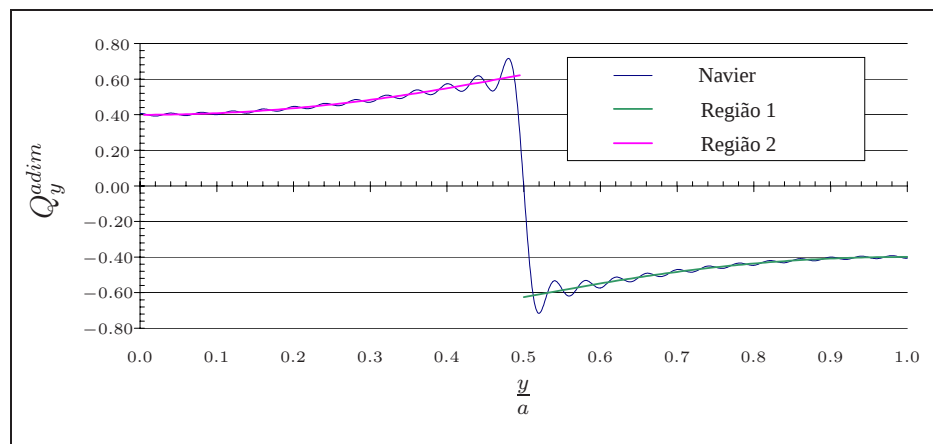
(a) Momento flector, M_{yy} (b) Esforço transversal, Q_y

Figura 6.14: Solução de Navier vs Trefftz em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear para $x = \frac{b}{2}$.

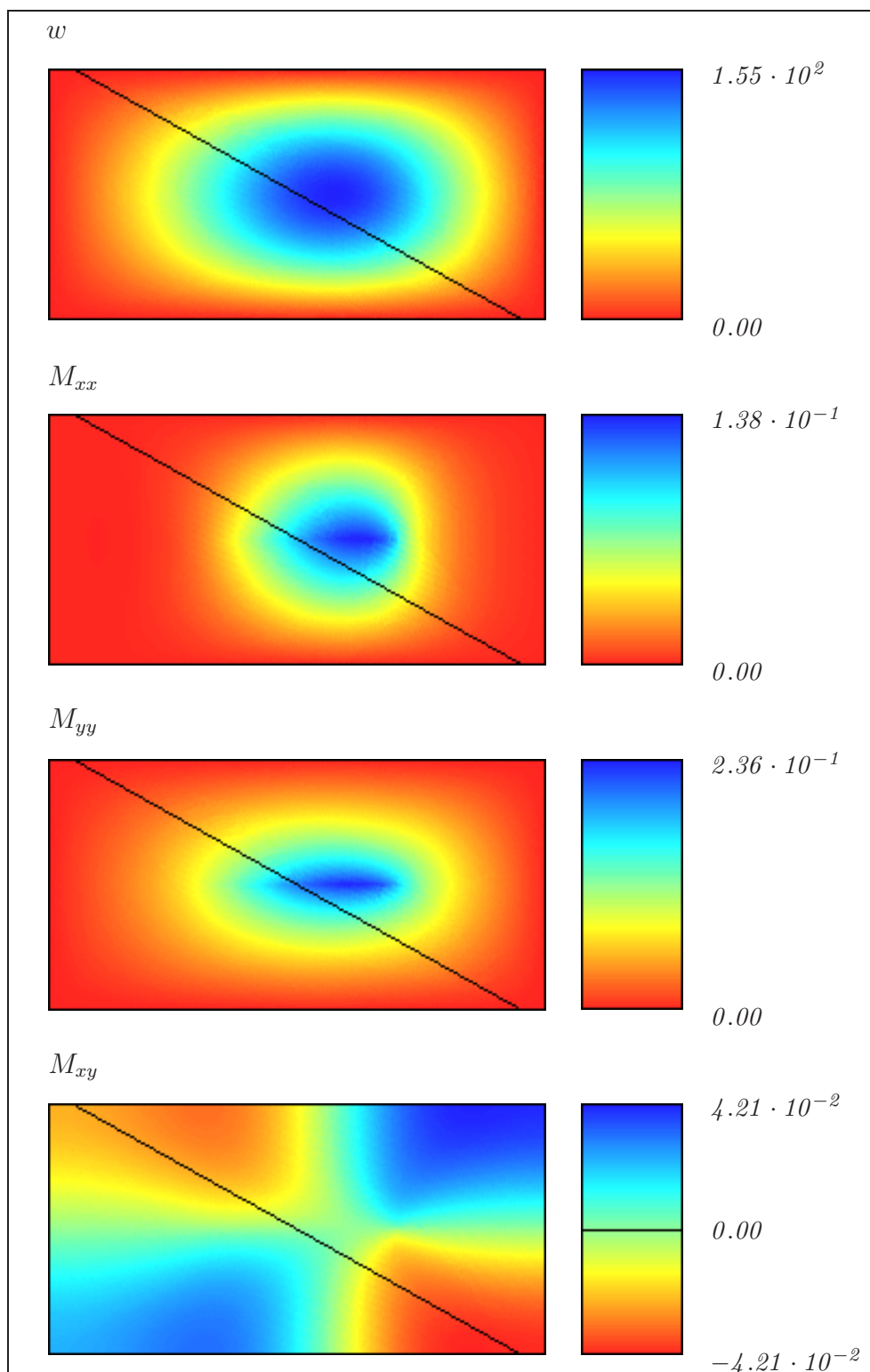


Figura 6.15: Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.

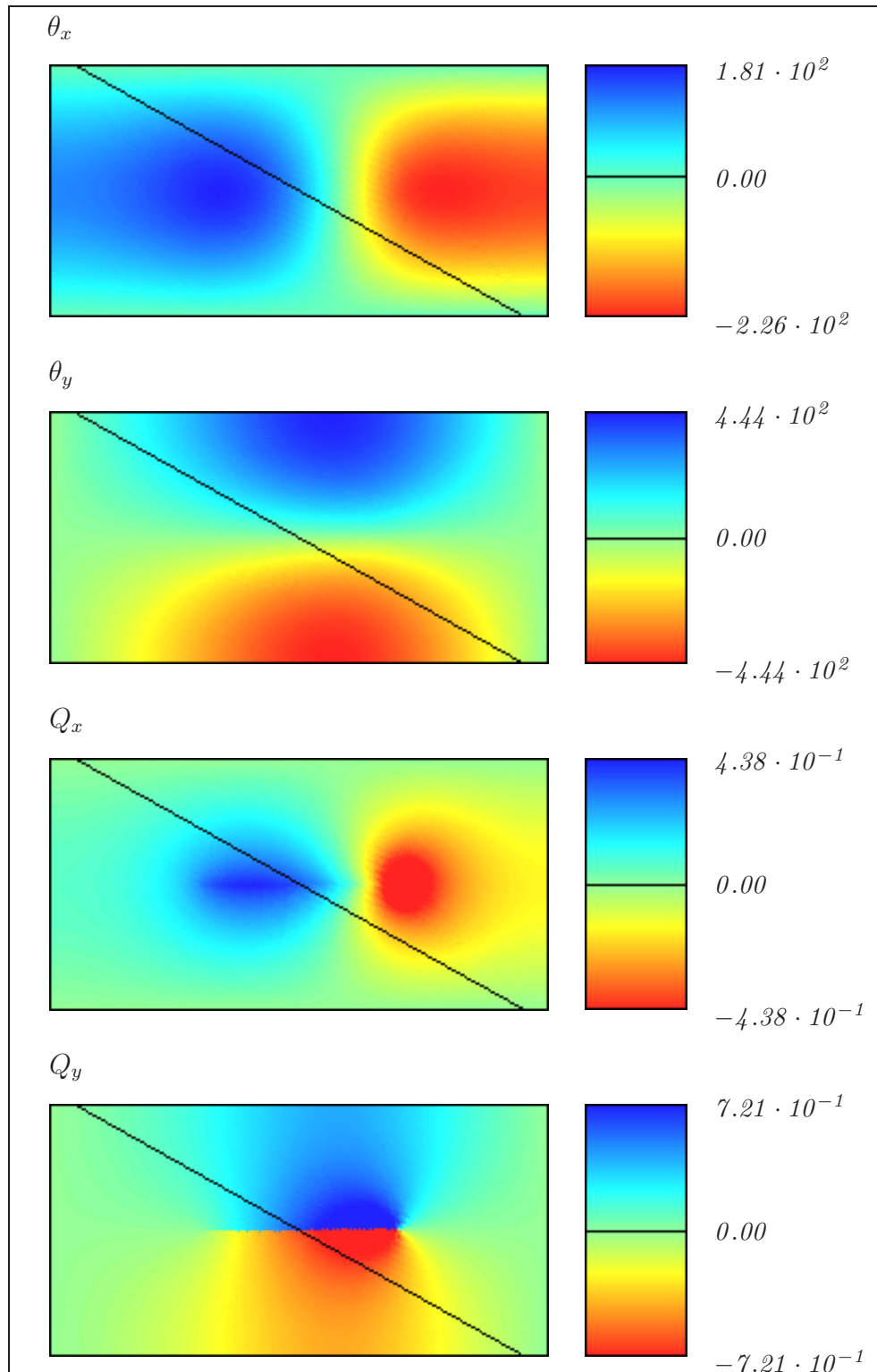


Figura 6.16: Campos de rotações e diagramas de esforço transverso em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga de faca linear.

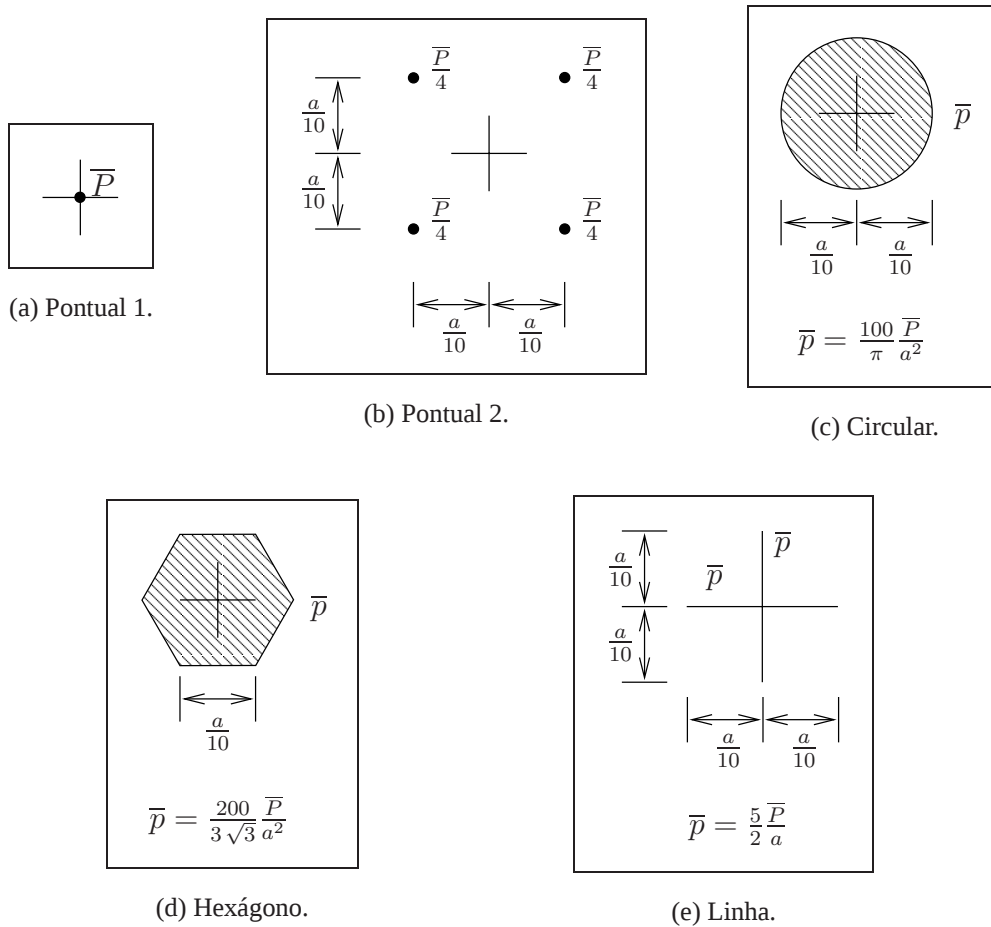


Figura 6.17: Modelações utilizadas para a carga central.

resultados são comparados. Tal como nos exemplos anteriores, $b = 2a$.

A representação gráfica das cargas utilizadas e a sua denominação nos testes encontra-se na figura 6.17.

As cargas pontuais foram modeladas utilizando quatro soluções particulares distintas: solução clássica da teoria da elasticidade para uma laje infinita sujeita a carga pontual (4.6), solução para carga uniformemente distribuída em zona circular (4.7), solução para carga uniformemente distribuída em zona hexagonal (??) e solução para carga uniformemente distribuída em segmento de recta (4.18).

Foi ainda considerada a utilização de quatro cargas pontuais, habitualmente utilizada no FEM quando a malha não possui um nó no ponto de aplicação da carga (no caso de elementos de quatro nós).

A equivalência estática entre todas os carregamentos foi preservada.

Não foi utilizada qualquer simplificação de simetria, pois tal implicaria uma descon-

tinuidade na fronteira, com óbvios prejuízos na solução.

Os resultados obtidos utilizando a abordagem discreta com 10 pontos de colocação/lado e $m = 10$ são apresentadas na figura 6.18.

Estes resultados suscitam os seguintes comentários:

- as soluções obtidas utilizando a carga circular e hexagonal são idênticas. Este facto resulta da semelhança da zona de aplicação da carga, ver figuras 6.17(c) e 6.17(d), nas duas modelações;
- os deslocamentos são tanto maiores quanto maior for a concentração da carga;
- a modelação através de quatro cargas pontuais conduz sistematicamente a resultados inferiores aos obtidos pelas restantes modelações, tanto em deslocamentos como esforços.

Na tabela 6.9 são apresentados os resultados para os deslocamentos no ponto A obtidos para diversas relações de $\frac{b}{a}$ através das duas abordagens no caso da solicitação *Pontual 1*. O número de pontos de integração (no caso da abordagem contínua) utilizados para a determinação do vector que representa a solicitação é igual ao número de pontos de colocação (no caso da abordagem discreta).

A solução de Navier para este caso pode ser obtida fazendo os valores de u e v tenderem para zero na expressão (6.4), obtendo-se a seguinte expressão para os coeficientes que descrevem a carga [86]:

$$a_{mn} = \frac{4\bar{P}}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{b} \sin \frac{n\pi\eta}{a} \quad (6.6)$$

onde $m = 1, 2, 3, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$

Os resultados designados por *Navier* na tabela 6.9 foram obtidos utilizando 5000 termos em cada uma das duas direcções da série (6.2) com a_{mn} dado por (6.6).

Apesar de não constituir objectivo do presente trabalho a investigação da taxa de convergência de séries trigonométricas, apresentam-se nas tabelas 6.10 e 6.11 os resultados obtidos utilizando os métodos de Navier e Lévy, respectivamente, e os correspondentes tempos médios de cálculo.

A série de Lévy para este caso encontra-se na referência [86], em conjunto com uma listagem de valores que é reproduzida na tabela 6.11. Alguns dos valores aí publicados, determinados com um número desconhecido de termos, são ligeiramente diferentes dos agora obtidos com 10 a 5000 termos (em cada direcção) no caso da série de Navier e 5 a 50 no caso da série de Lévy.

A determinação de esforços no ponto A a partir das séries mencionadas anteriormente não é possível devido à baixa taxa de convergência que estas apresentam.

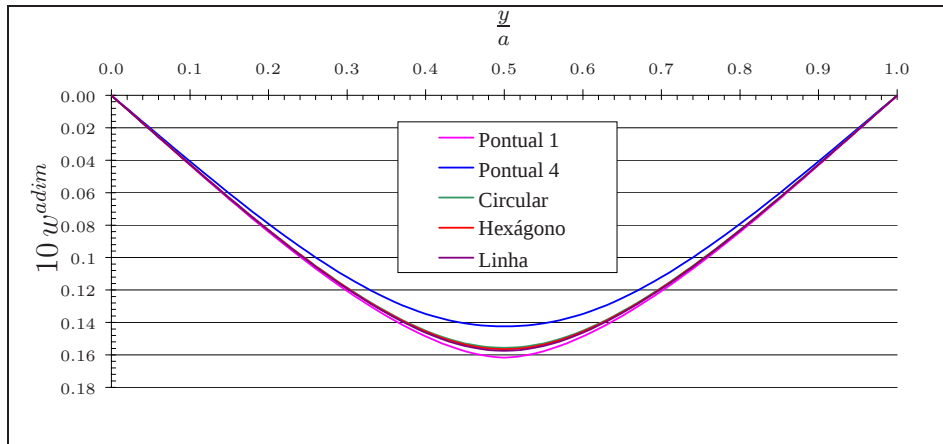
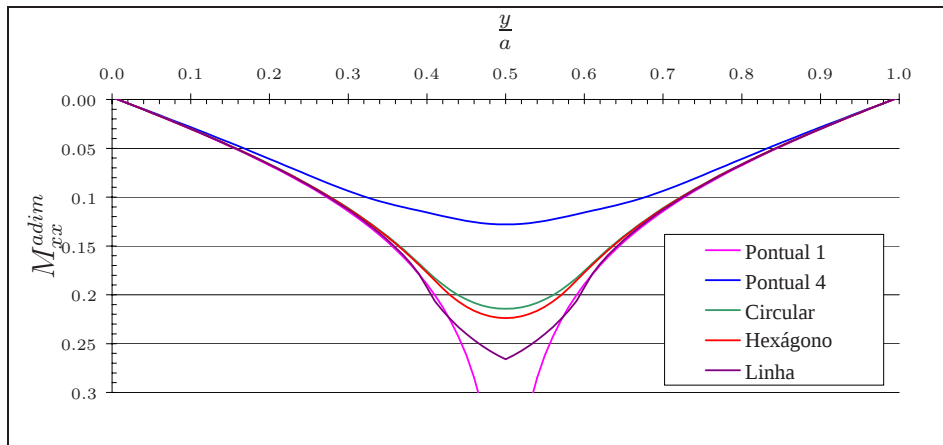
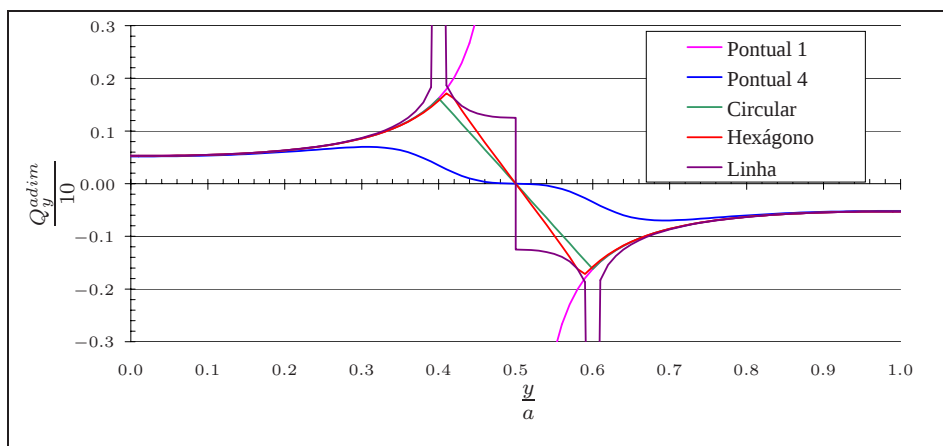
(a) Deslocamento transversal, w^{adim} .(b) Momento flector segundo y , M_{xx}^{adim} .(c) Esforço transversal, Q_y^{adim} .

Figura 6.18: Laje simplesmente apoiada sujeita a carga concentrada. Resultados para $x = \frac{b}{2}$.

$\frac{b}{a}$	$m_{Disc.}$			$m_{Cont.}$			Navier
	10	15	20	10	15	20	
1.0	0.115837	0.116010	0.116008	0.115987	0.116008	0.116008	0.1160084
1.1	0.126458	0.126682	0.126679	0.126656	0.126679	0.126679	0.1266795
1.2	0.135290	0.135563	0.135560	0.135538	0.135560	0.135560	0.1355599
1.3	0.142491	0.142821	0.142818	0.142798	0.142818	0.142818	0.1428180
1.4	0.148252	0.148668	0.148667	0.148645	0.148666	0.148667	0.1486671
1.5	0.152768	0.153325	0.153328	0.153294	0.153326	0.153328	0.1533283
1.6	0.156215	0.157001	0.157010	0.156950	0.157007	0.157010	0.1570096
1.7	0.158739	0.159882	0.159896	0.159794	0.159892	0.159896	0.1598962
1.8	0.160448	0.162127	0.162146	0.161983	0.162141	0.162146	0.1621462
1.9	0.161408	0.163871	0.163890	0.163656	0.163885	0.163891	0.1638914
2.0	0.161637	0.165225	0.165236	0.164936	0.165231	0.165239	0.1652395

Tabela 6.9: Valores de $10w^{adim A}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga pontual central.

$\frac{b}{a}$	número de termos em x e y				
	10	50	500	1000	5000
1.0	0.1153559	0.1159821	0.1160082	0.1160083	0.1160084
1.1	0.1259571	0.1266503	0.1266792	0.1266794	0.1266795
1.2	0.1347587	0.1355275	0.1355595	0.1355598	0.1355599
1.3	0.1419290	0.1427821	0.1428177	0.1428179	0.1428180
1.4	0.1476813	0.1486273	0.1486668	0.1486670	0.1486671
1.5	0.1522367	0.1532842	0.1533278	0.1533281	0.1533283
1.6	0.1558036	0.1569609	0.1570092	0.1558036	0.1570096
1.7	0.1585669	0.1598425	0.1598957	0.1570095	0.1598962
1.8	0.1606851	0.1620872	0.1621456	0.1621461	0.1621462
1.9	0.1622898	0.1638266	0.1638908	0.1638912	0.1638914
2.0	0.1634889	0.1651688	0.1652388	0.1652393	0.1652395
Tempo(seg.)	2.01	4.01	160.50	647.63	26571.74

Tabela 6.10: Valores obtidos para $10w^{adim A}$ em laje simplesmente apoiada sujeita a carga pontual central utilizando a série de Navier.

$\frac{b}{a}$	número de termos em y (Lévy)			Ref. [86]
	5	25	50	
1.0	0.1156092	0.1159923	0.1160044	0.1160
1.1	0.1262802	0.1266634	0.1266755	0.1265
1.2	0.1351606	0.1355438	0.1355559	0.1353
1.3	0.1424189	0.1428019	0.1428140	—
1.4	0.1482679	0.1486510	0.1486631	0.1484
1.5	0.1529290	0.1533122	0.1533243	—
1.6	0.1566104	0.1569935	0.1570056	0.1570
1.7	0.1594970	0.1598800	0.1598921	—
1.8	0.1617470	0.1621300	0.1621421	0.1620
1.9	0.1634922	0.1638753	0.1638874	—
2.0	0.1648403	0.1652234	0.1652354	0.1651
Tempo(seg.)	1.92	2.31	2.53	—

Tabela 6.11: Valores obtidos para $10w^{adim A}$ em laje simplesmente apoiada sujeita a carga pontual central utilizando a série de Lévy e Ref. [86].

Uma abordagem alternativa para calcular momentos flectores na vizinhança do ponto de aplicação da carga é sugerida por Timoshenko e Woinowsky-Krieger. Consiste em assumir que as tensões dentro de um círculo de raio pequeno (c) são dadas por dois termos: o primeiro representa uma laje circular submetida a uma carga central e o segundo envolve a diferença entre esta e a laje rectangular.

Os momentos assim obtidos são dados por [86]

$$M_{xx} = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] - (1 - \nu - \gamma_2) \frac{P}{4\pi}, \quad (6.7a)$$

$$M_{yy} = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] + \frac{\gamma_1 P}{4\pi}. \quad (6.7b)$$

onde os factores γ_1 e γ_2 dependem da relação entre os vãos da laje. Para $\frac{b}{a} = 2.0$, $\gamma_1 = -0.042$ e $\gamma_2 = 0.023$.

Dado que esta abordagem é tanto mais válida quanto menor for o raio c de aplicação da carga, novos testes foram realizados. Os resultados obtidos, para uma relação $\frac{c}{a} = 1.0 \cdot 10^{-5}$, são apresentados na tabela 6.12.

Para que a comparação entre os resultados da abordagem discreta e contínua seja possível optou-se por utilizar um número de pontos de integração igual ao número de pontos de colocação.

Da tabela 6.12 conclui-se que a solução obtida utilizando o presente método apresenta excelente concordância com os obtidos pelas expressões (6.7a) e (6.7b).

	$\frac{M_{xx}^{adim A}}{10}$		$\frac{M_{yy}^{adim A}}{10}$	
m	Disc.	Cont.	Disc.	Cont.
10	0.116687	0.116948	0.121802	0.122032
15	0.116991	0.116995	0.122053	0.122053
20	0.117001	0.117001	0.122050	0.122051
expressão (6.7)	0.117001		0.122054	

Tabela 6.12: Valores de $M_{xx}^{adim A}$ e $M_{yy}^{adim A}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga circular central de raio $c = \frac{a}{1.0 \cdot 10^5}$.

Representações de contorno da solução obtida para momentos e densidade de energia de deformação no caso da carga circular utilizando a abordagem contínua com $m = 10$ são apresentadas na figura 6.19. As integrações requeridas para a formação do vector que representa a solicitação foram determinadas utilizando 10 pontos de Gauss.

Distribuição parabólica de momentos ao longo de dois bordos paralelos

Considere-se novamente a laje representada na figura 6.1. Admita-se que esta é submetida à acção de momentos distribuídos, $M_{yy}(x)$, ao longo dos dois bordos paralelos ao eixo x . Por simplicidade, admite-se que esta acção é simétrica em relação ao eixo definido por $y = \frac{a}{2}$.

A representação da distribuição de momentos ao longo dos bordos $y = 0$ e $y = a$ pode ser feita através da série trigonométrica:

$$M_{yy}(x) = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{b} \quad (6.8)$$

onde

$$E_m = \frac{2}{b} \int_0^b M_{yy}(x) \sin \frac{m\pi x}{b} dx. \quad (6.9)$$

Neste caso, a solução de Lévy é dada por [86]:

$$w(x, y) = \frac{b^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{b}}{m^2 \cosh \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y'}{b} - \frac{m\pi y'}{b} \sinh \frac{m\pi y'}{b} \right) \quad (6.10)$$

onde $y' = y - \frac{a}{2}$ e $\alpha_m = \frac{m\pi a}{2b}$.

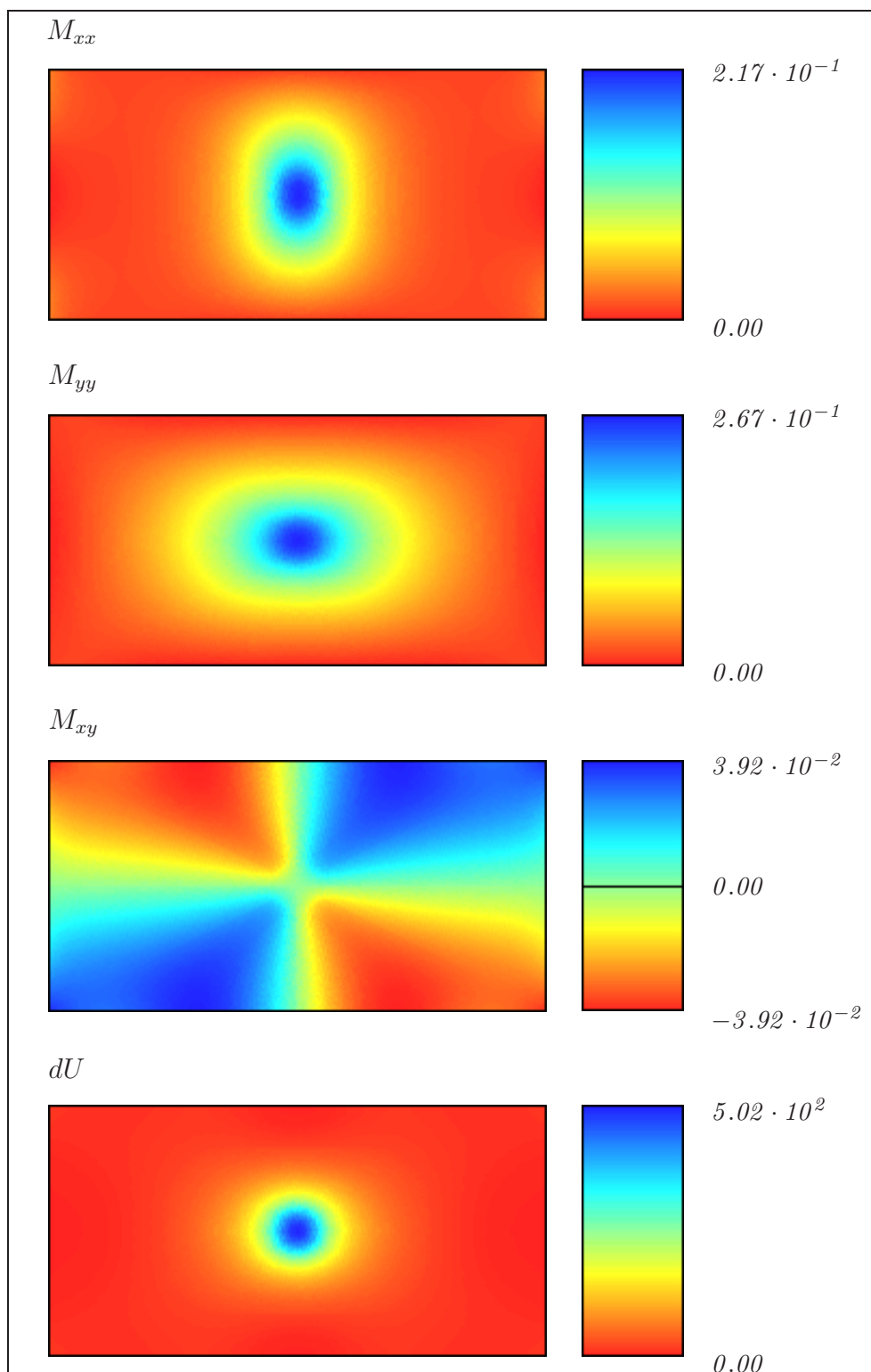


Figura 6.19: Diagramas de momentos e densidade de energia de deformação em laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a carga circular central uniforme.

m	$10 w^{Adim A}$	$M_{xx}^{Adim A}$	$M_{yy}^{Adim A}$	$-M_{xy}^{Adim D}$	$-\frac{Q_x^{Adim B}}{10}$	$\frac{Q_y^{Adim C}}{10}$
8	0.300215	0.330539	0.204071	0.425258	0.128990	0.291163
12	0.300013	0.329459	0.204357	0.437619	0.129904	0.266718
16	0.300012	0.329469	0.204350	0.439278	0.129930	0.270950
20	0.300012	0.329469	0.204350	0.439753	0.129830	0.269863
24	0.300012	0.329469	0.204349	0.439960	0.129894	0.270235
Lévy	0.300012	0.329469	0.204349	0.440141	0.129874	0.270125

Tabela 6.13: Resultados para laje simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos para $\frac{b}{a} = 1.0$.

m	$10 w^{Adim A}$	$M_{xx}^{Adim A}$	$M_{yy}^{Adim A}$	$-M_{xy}^{Adim D}$	$-\frac{Q_x^{Adim B}}{10}$	$\frac{Q_y^{Adim C}}{10}$
8	0.601104	0.377613	0.460615	0.431780	0.134951	0.150677
12	0.599690	0.373435	0.460665	0.445404	0.137667	0.146979
16	0.599717	0.373601	0.460618	0.447569	0.137078	0.151923
20	0.599716	0.373590	0.460623	0.448208	0.137306	0.150208
24	0.599716	0.373590	0.460622	0.448454	0.137209	0.150860
Lévy	0.599715	0.373590	0.460622	0.448689	0.137241	0.150677

Tabela 6.14: Resultados para laje simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos para $\frac{b}{a} = 1.5$.

Impondo que $M_{yy}(x) = M_0 + M_1x + M_2x^2$, isto é, que a distribuição de momentos tem uma variação quadrática, e usando (6.9), obtêm-se os seguintes resultados para os coeficientes da expansão (6.8):

$$\begin{aligned}
 E_m^{M_0} &= \frac{4M_0}{m\pi} & m &= 1, 3, 5, \dots \\
 E_m^{M_1} &= \frac{2bM_1}{m^2\pi^2} (\sin m\pi - m\pi \cos m\pi) & m &= 1, 2, 3, \dots \\
 E_m^{M_2} &= \frac{2b^2M_2}{m^3\pi^3} (2m\pi \sin m\pi - m^2\pi^2 \cos m\pi + 2 \cos m\pi - 2) & m &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Os resultados apresentados nas tabelas 6.13, 6.14 e 6.15 referem-se a uma distribuição parabólica em que o valor do momento M_{yy} para $x = \frac{b}{2}$ vale $\overline{M}$ e é nulo nas extremidades.

Os testes foram realizados para três relações de $\frac{b}{a}$. A abordagem contínua foi a utilizada.

A solução de Lévy apresentada foi determinada usando 400 termos. Este número, aparentemente elevado, justifica-se devido à lenta convergência de M_{xy}^D e Q_y^C . Não foi possível utilizar mais termos devido a problemas numéricos com as funções hiperbólicas envolvidas.

m	$10 w^{Adim A}$	$M_{xx}^{Adim A}$	$M_{yy}^{Adim A}$	$-M_{xy}^{Adim D}$	$-\frac{Q_x^{Adim B}}{10}$	$\frac{Q_y^{Adim C}}{10}$
8	0.888146	0.373601	0.638916	0.418175	0.126057	0.930055
12	0.883942	0.366340	0.637269	0.414570	0.126037	0.901601
16	0.884046	0.366745	0.637205	0.417208	0.126078	0.936805
20	0.884041	0.366719	0.637214	0.417907	0.125993	0.929351
24	0.884041	0.366720	0.637213	0.418056	0.126092	0.929530
Lévy	0.884042	0.366720	0.637213	0.418175	0.126057	0.930055

Tabela 6.15: Resultados para laje simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos para $\frac{b}{a} = 2.0$.

Mais uma vez se pode constatar o excelente desempenho da solução homogênea polinomial na modelação do campo de deslocamentos e esforços em problemas de lajes finas.

Representações de contorno da solução obtida utilizando a abordagem contínua com $m = 10$ e $\frac{b}{a} = 1.5$ são apresentadas nas figuras 6.20 e 6.21.

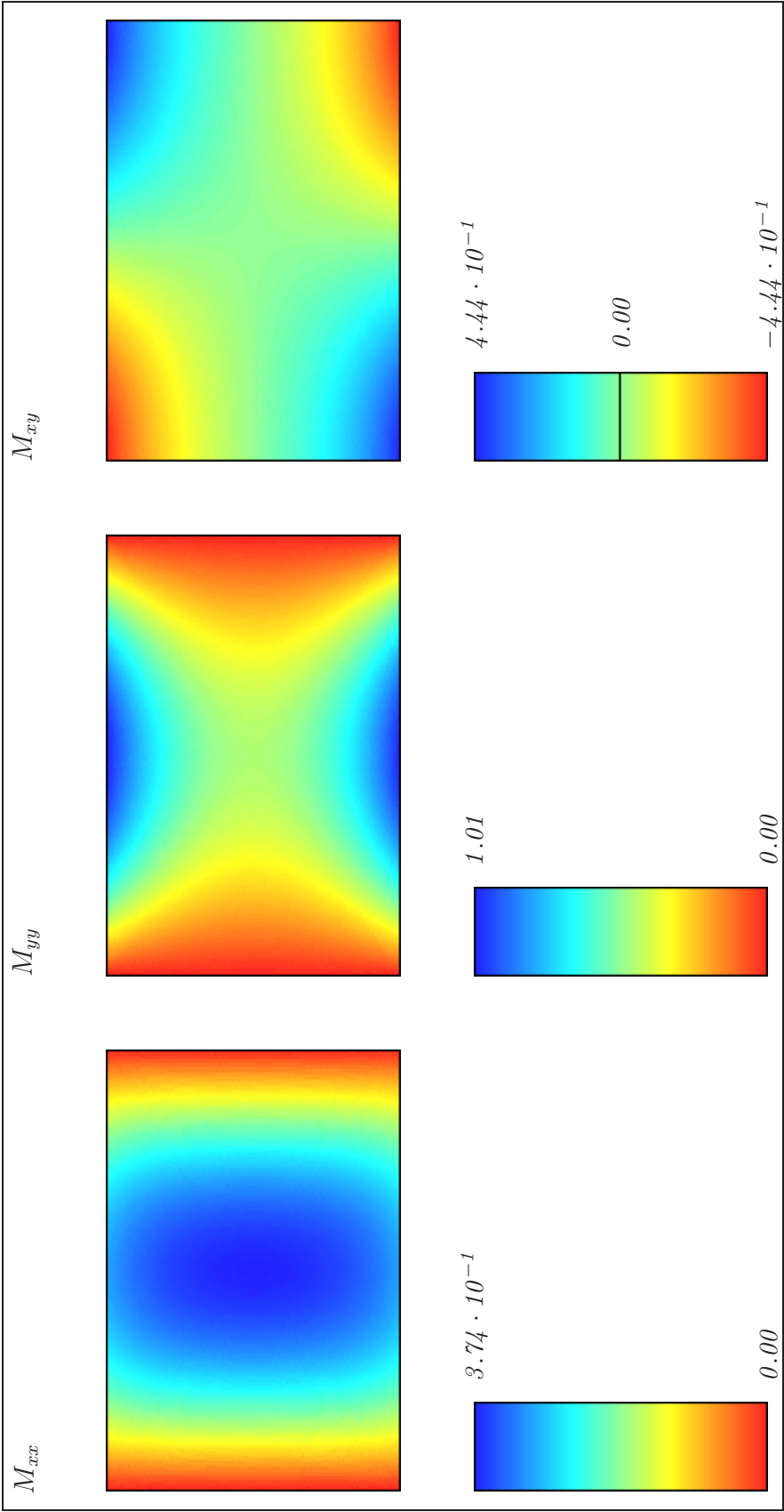


Figura 6.20: Diagramas de momentos para laje rectangular ($\frac{b}{a} = 1.5$) simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos ao longo de dois bordos paralelos.

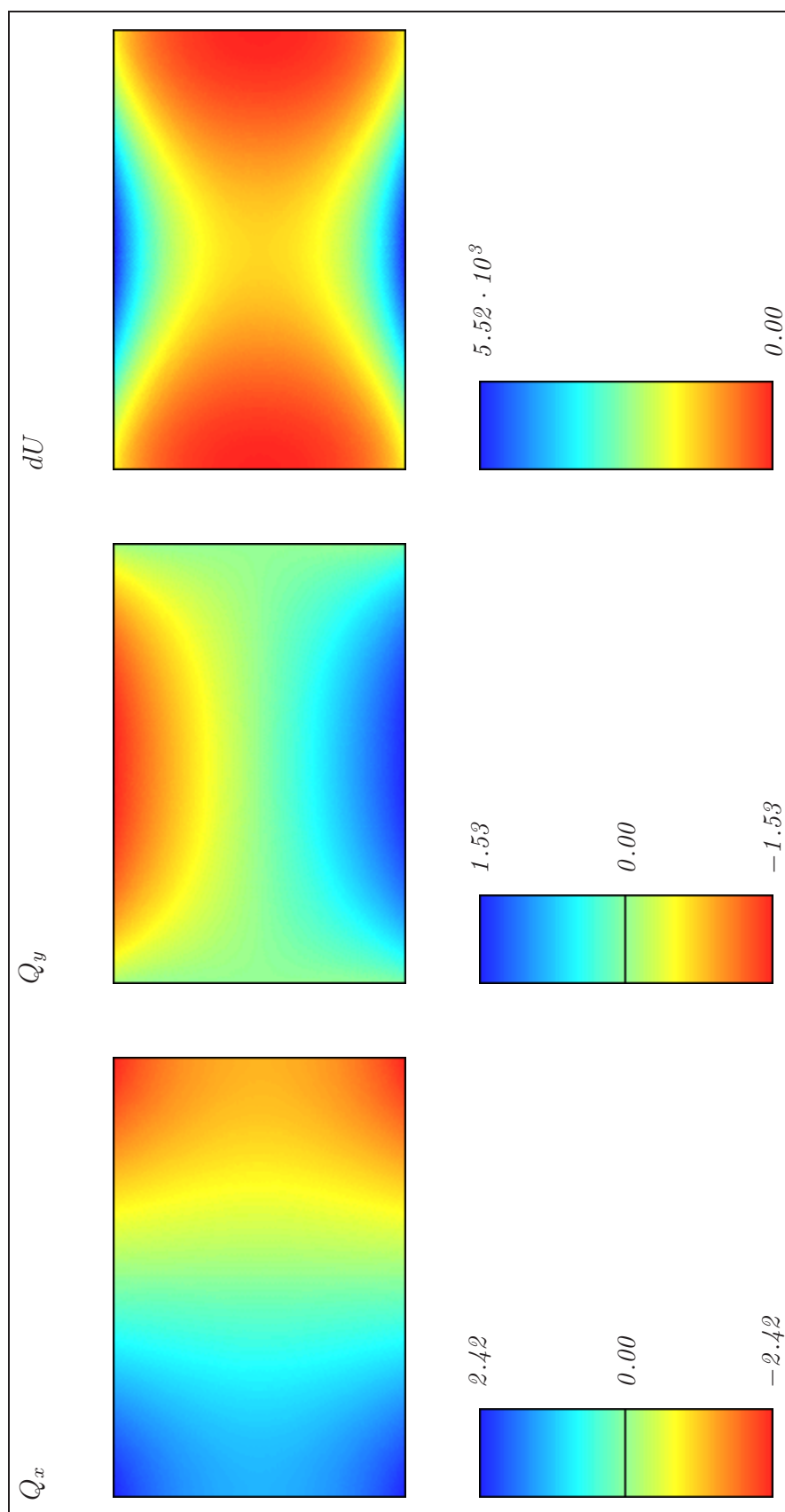


Figura 6.21: Diagramas de esforço transversal e densidade de energia de deformação para laje rectangular ($\frac{b}{a} = 1.5$) simplesmente apoiada sujeita a distribuição parabólica de momentos ao longo de dois bordos paralelos.

Carga bilinear

Atente-se na laje rectangular simplesmente apoiada submetida a carga bilinear representada na figura 6.22.

Considere-se a carga, $\bar{p}$, é expressa no referencial global por $\bar{p}(x, y) = p_0 + p_1x + p_2y$. Os coeficientes a_{mn} que descrevem a carga no método de Navier são dados por

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{\xi-\frac{u}{2}}^{\xi+\frac{u}{2}} \int_{\eta-\frac{v}{2}}^{\eta+\frac{v}{2}} (p_0 + p_1x + p_2y) \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{a} dy dx, \quad (6.11)$$

onde as constantes u, v, ξ e η tem o significado indicado na figura 6.6.

A avaliação de (6.11) conduz a $a_{mn} = a_{mn}^{p_0} + a_{mn}^{p_1} + a_{mn}^{p_2}$ onde $a_{mn}^{p_0}$ é dado por (6.4) com $\bar{P} = uv\bar{p}_0$. Os restantes termos são dados por:

$$a_{mn}^{p_1} = \frac{8p_1}{\pi^3 m^2 n} \sin \frac{n\pi\eta}{a} \sin \frac{n\pi v}{2a} \left[2b \cos \frac{m\pi\xi}{b} \sin \frac{m\pi u}{2b} + 2\xi m\pi \sin \frac{m\pi\xi}{b} \sin \frac{m\pi u}{2b} - u m\pi \cos \frac{m\pi\xi}{b} \cos \frac{m\pi u}{2b} \right],$$

$$a_{mn}^{p_2} = \frac{8p_2}{\pi^3 m n^2} \sin \frac{m\pi\xi}{b} \sin \frac{m\pi u}{2b} \left[2a \cos \frac{n\pi\eta}{a} \sin \frac{n\pi v}{2a} + 2\eta n\pi \sin \frac{n\pi\eta}{a} \sin \frac{n\pi v}{2a} - v n\pi \cos \frac{n\pi\eta}{a} \cos \frac{n\pi v}{2a} \right].$$

Na tabela 6.16 encontram-se os resultados obtidos no centro da laje para diversas relações de vãos. A discretização utilizada consistiu numa única região com quatro lados rectos, figura 6.2(b).

A solução de Navier foi determinada utilizando 500 termos em cada direcção. A abordagem discreta foi utilizada com dois valores para o grau máximo da expansão: $m = 10$ e $m = 30$.

A solicitação foi modelada através de duas cargas linearmente variáveis distribuídas em superfície poligonal, neste caso rectangular.

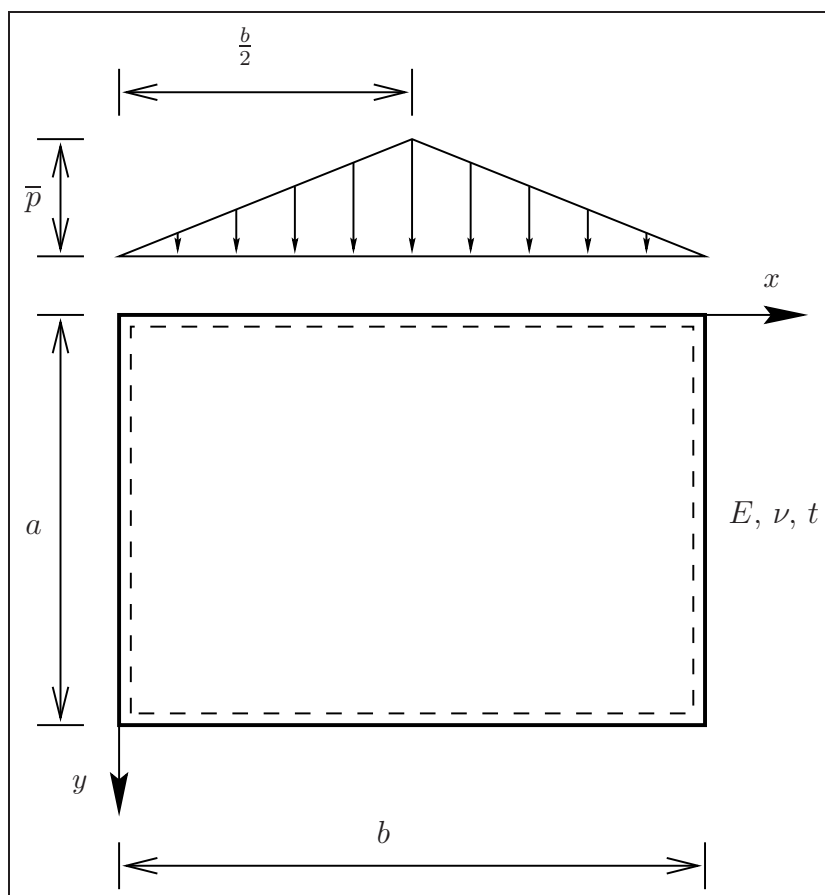


Figura 6.22: Laje rectangular simplesmente apoiada submetida a carga bilinear.

$\frac{b}{a}$	$100 w^{adim A}$			$10 M_{xx}^{adim A}$			$10 M_{yy}^{adim A}$		
	$m = 10$	$m = 30$	Navier	$m = 10$	$m = 30$	Navier	$m = 10$	$m = 30$	Navier
1.0	0.262486	0.262744	0.262744	0.340630	0.340498	0.340498	0.316428	0.317095	0.317095
1.1	0.315525	0.315835	0.315835	0.356264	0.356065	0.356065	0.367775	0.368460	0.368460
1.2	0.367426	0.367751	0.367751	0.367773	0.367518	0.367518	0.417060	0.417699	0.417699
1.3	0.417229	0.417571	0.417571	0.376055	0.375779	0.375779	0.463633	0.464222	0.464222
1.4	0.464339	0.464729	0.464729	0.381857	0.381618	0.381618	0.507161	0.507729	0.507729
1.5	0.508440	0.508934	0.508934	0.385778	0.385649	0.385649	0.547528	0.548120	0.548120
1.6	0.549413	0.550089	0.550089	0.388284	0.388350	0.388350	0.584762	0.585438	0.585438
1.7	0.587273	0.588231	0.588230	0.389727	0.390085	0.390085	0.618976	0.619813	0.619813
1.8	0.622109	0.623479	0.623479	0.390367	0.391124	0.391124	0.650327	0.651426	0.651426
1.9	0.654051	0.656004	0.656003	0.390392	0.391670	0.391669	0.678990	0.680482	0.680482
2.0	0.683238	0.685998	0.685997	0.389926	0.391869	0.391868	0.705134	0.707193	0.707193
3.0	0.848359	0.886844	0.886844	0.369017	0.388367	0.388389	0.855320	0.884728	0.884716

Tabela 6.16: Valores de $w^{adim A}$, $M_{xx}^{adim A}$ e $M_{yy}^{adim A}$ para laje simplesmente apoiada sujeita a carga bilinear.

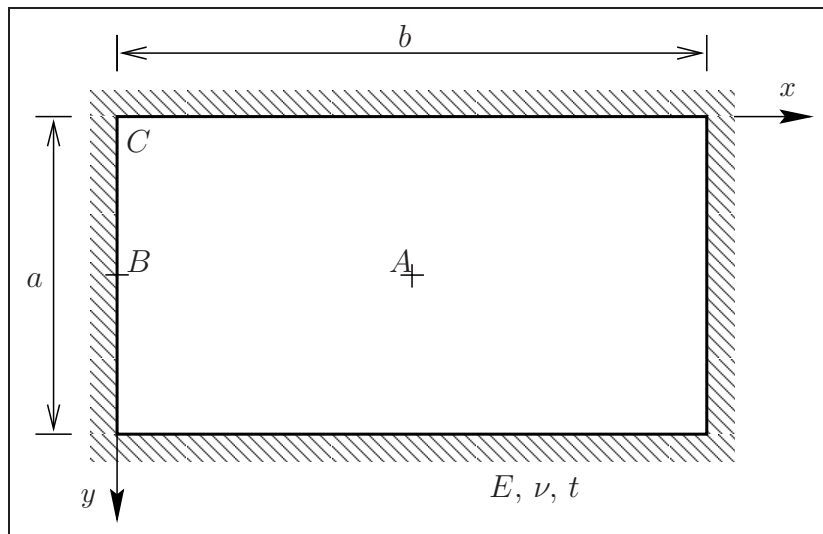


Figura 6.23: Geometria para laje rectangular encastrada.

Os resultados obtidos utilizando o presente método mostram uma perfeita concordância com os obtidos pela série de Navier tanto em deslocamentos como em momentos flectores.

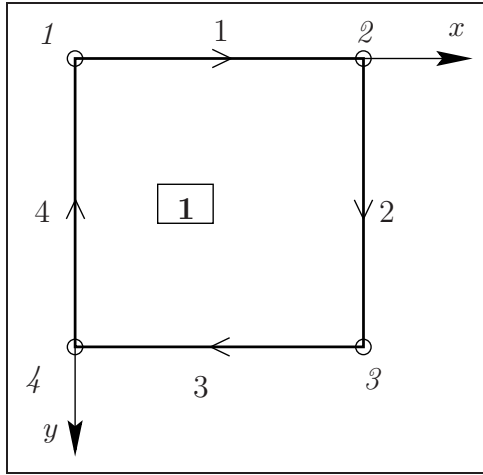
6.2.2 Encastrada

Carga uniformemente distribuída

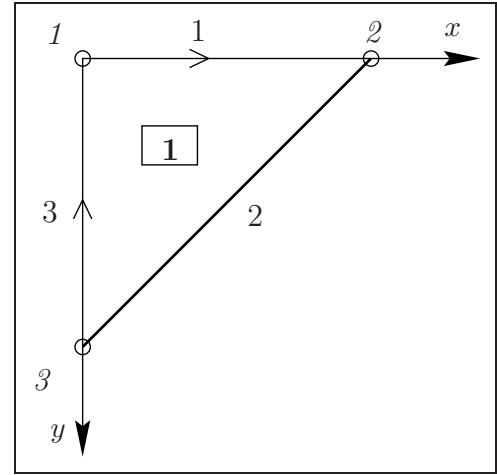
Considere-se a laje encastrada representada na figura 6.23, onde $b = a$. Esta foi analisada com funções *regulares* e *singulares*, cujas discretizações se encontram nas figuras 6.24(a) e 6.24(b), respectivamente. Tirou-se partido da dupla {simples} simplificação de simetria nos casos de utilização de funções *regulares* {*singulares*} ao nível da geometria da estrutura.

Na realidade o termo *singular* indica, neste caso, que foi utilizado uma solução homogénea que satisfaz a equação diferencial governativa bem como algumas das condições de fronteira (neste caso as dos bordos adjacentes ao ponto onde é centrada a *singularidade*) do problema. Esta solução não contém, no entanto, nenhum termo singular como se poderá concluir a partir do valor da primeira raiz da equação transcendente associada a este caso.

Para a segunda discretização é necessário determinar as raízes da equação transcendente (caso 1) que consta da tabela 4.1, página 51. Dado que apenas os modos de deformação simétricos são relevantes para o caso em estudo é conveniente colocar a referida equação na forma (6.12):



(a) Discretização usando funções regulares



(b) Discretização usando funções singulares

Figura 6.24: Laje rectangular encastrada. Discretizações utilizadas.

$$(\sin 2\lambda\theta_0 + \lambda \sin 2\theta_0)(\sin 2\lambda\theta_0 - \lambda \sin 2\theta_0) = 0. \quad (6.12)$$

As raízes extraídas do primeiro {segundo} termo originam modos de deformação simétricos {antisimétricos}. Estes últimos foram excluídos da expansão do campo de deslocamentos, sendo assim imposta a simetria em relação ao eixo $\overline{CA}$, figura 6.23.

Neste caso as raízes não dependem do valor do coeficiente de Poisson pois apenas estão envolvidas condições de fronteira cinemáticas.

As referidas raízes são determinadas usando o método de Muller, de acordo com o exposto no capítulo 5, subsecção 5.5.3, página 61.

Na tabela 6.17 encontram-se listadas as primeiras 12 raízes para cada modo, neste caso todas complexas.

As raízes $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ são excluídas pois não satisfazem a limitação física que determina que w e $\frac{\partial w}{\partial r}$ permaneçam finitos quando $r \rightarrow 0$.

As integrações na abordagem contínua utilizando funções regulares são determinadas exactamente, para a precisão numérica utilizada.

Ao utilizar a abordagem contínua, na segunda análise, é necessário integrar as soluções homogénea e particular. O número de pontos de integração utilizados foi 50. Testes efectuados indicam que este valor é suficiente para determinar excelentes aproximações dos integrais a efectuar, para a precisão pretendida.

Nas tabelas 6.18 e 6.19 encontram-se os resultados obtidos para a discretização usando

k	Modo de deformação			
	Simétrico		Antisimétrico	
	$\Re_k$	$\Im_k$	$\Re_k$	$\Im_k$
0	2.739593356324596	1.119024534342417	4.808250761274225	1.463928121698337
1	6.845135158415644	1.681634695817452	8.868825977288248	1.842383988914041
2	10.88555235011179	1.970199497044725	12.89809091110336	2.076415812912557
3	14.90789080321011	2.167332596071205	16.91579046255449	2.246828034346500
4	18.92231199067750	2.317464557906283	20.92779902985394	2.381025854191590
5	22.93248780049759	2.438804427472491	24.93654646921208	2.491767285876998
6	26.94009826411157	2.540657033975491	28.94323570150313	2.586056464939475
7	30.94602969173512	2.628431430087338	32.94853556387525	2.668160213860326
8	34.95079716681093	2.705554217058773	36.95284973073052	2.740872866045085
9	38.95472190737559	2.774334582167356	40.95643725287214	2.806124999317562
10	42.95801532397595	2.836403219258446	44.95947250101218	2.865306641841226
11	46.96082261423251	2.892954743051349	48.96207742655331	2.919452064634234

Tabela 6.17: Primeiras raízes da equação transcendente para o caso encastrado-encastrado para $\theta_0 = 45^\circ$.

funções regulares e singulares, respectivamente. Para facilitar a comparação de resultados é indicado o número de graus de liberdade (G. L.) em cada teste.

As funções *singulares* têm um desempenho bastante superior ao das *regulares*. De salientar que em ambas o $M_{xx}^{Adim A}$ converge para um valor ligeiramente inferior ao de referência (Timoshenko e Woinowsky-Krieger) que por sua vez foi confirmado com uma solução utilizando o FEM com uma malha suficientemente refinada. Note-se que, devido à simplificação de simetria, os resultados são determinados em pontos localizados na fronteira, onde os erros são, em geral, superiores.

Representações de contorno da solução obtida utilizando a abordagem contínua com funções *singulares* e $m = 6$ são apresentadas nas figuras 6.25, 6.26 e 6.27.

m	G.L.	$100 w^{Adim A}$		$10 M_{xx}^{Adim A}$		$-10 M_{xx}^{Adim B}$	
		Cont.	Disc.	Cont.	Disc.	Cont.	Disc.
7	28	0.14166	0.14497	0.23814	0.24877	0.60115	0.61162
8	32	0.13072	0.12878	0.25262	0.24381	0.52125	0.51859
9	36	0.12693	0.12746	0.22907	0.23121	0.51048	0.51197
10	40	0.12636	0.12648	0.22803	0.22838	0.51201	0.51214
11	44	0.12653	0.12636	0.22953	0.22899	0.51202	0.51138
12	48	0.12645	0.12644	0.22850	0.22876	0.51254	0.51232
13	52	0.12653	0.12651	0.22928	0.22905	0.51426	0.51397
14	56	0.12652	0.12653	0.22893	0.22902	0.51406	0.51408
15	60	0.12653	0.12653	0.22909	0.22903	0.51323	0.51340
Ref. [86]		0.126		0.231		0.513	

Tabela 6.18: Resultados para laje quadrada encastrada utilizando funções regulares.

m	G.L.	$100 w^{Adim A}$		$10 M_{xx}^{Adim A}$		$-10 M_{xx}^{Adim B}$	
		Cont.	Disc.	Cont.	Disc.	Cont.	Disc.
2	6	0.11577	0.12816	0.20358	0.23776	0.48047	0.51374
3	8	0.12627	0.12664	0.23431	0.22421	0.50926	0.51398
4	10	0.12623	0.12625	0.22591	0.23130	0.51294	0.51331
5	12	0.12648	0.12676	0.23012	0.22835	0.51305	0.51327
6	14	0.12648	0.12637	0.22842	0.22882	0.51320	0.51336
Ref. [86]		0.126		0.231		0.513	

Tabela 6.19: Resultados para laje quadrada encastrada utilizando funções singulares.

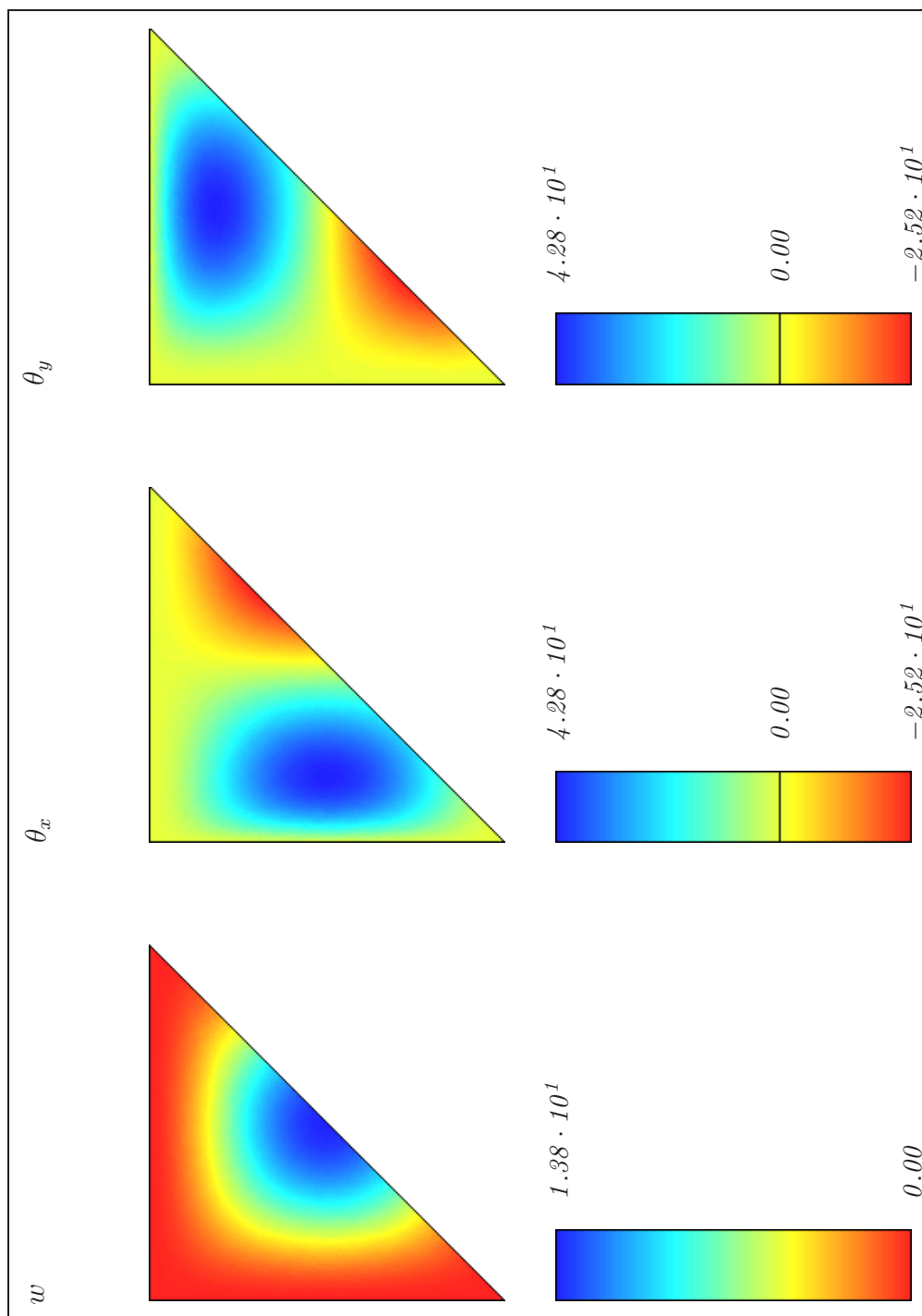


Figura 6.25: Campo de deslocamentos e rotações em laje rectangular encastrada sujeita a carga uniforme.

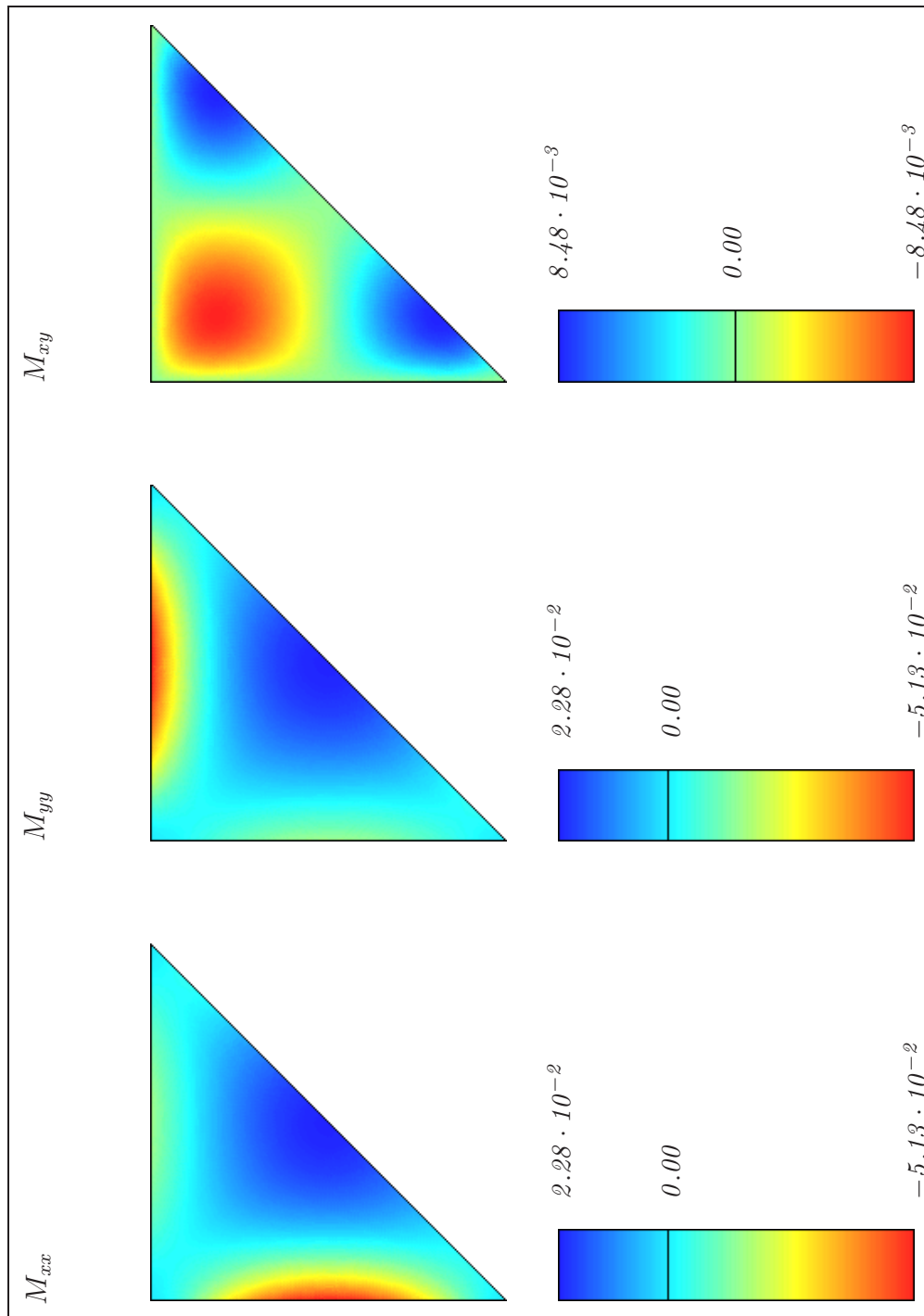


Figura 6.26: Diagramas de momentos em laje rectangular encastrada sujeita a carga uniforme.

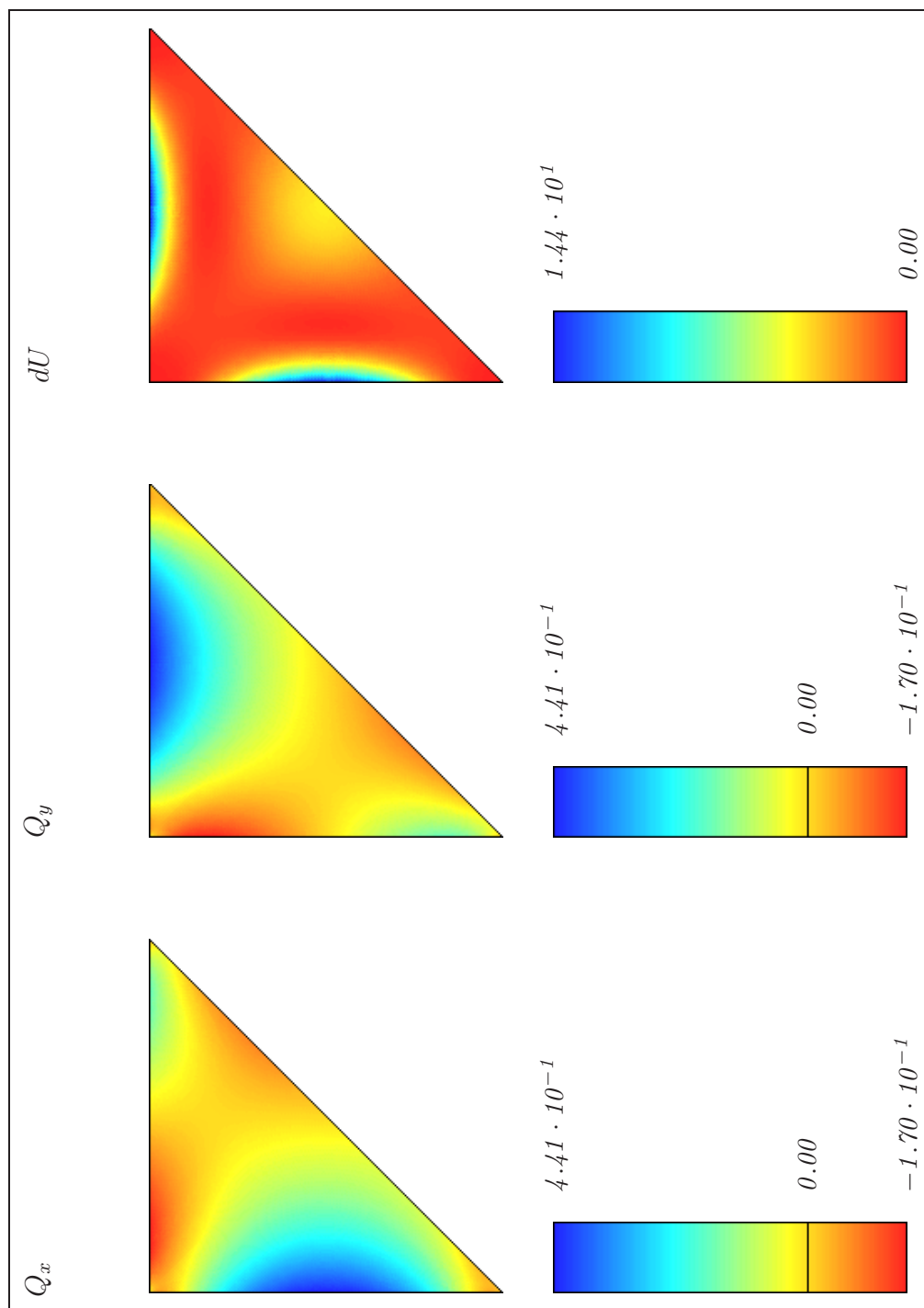


Figura 6.27: Diagramas de esforço transverso e densidade de energia de deformação em laje rectangular encastrada sujeita a carga uniforme.

Laje com abertura circular

Considere-se uma laje semelhante à representada na figura 6.23 com $b = 2a$ e uma abertura central circular de raio c submetida a carga uniformemente distribuída, $\bar{p}$. Tal como discutido no capítulo 4, a abertura induz o aparecimento de uma singularidade na fronteira interior da peça.

A discretização adoptada na análise efectuada é a indicada na figura 6.2(b), onde o campo de deslocamentos específico para este tipo de problemas é dado no apêndice B. Não foi utilizada qualquer simplificação de simetria da estrutura.

A comparação com a solução obtida empregando um programa comercial de elementos finitos foi realizada. Para esta foi utilizado o elemento de laje que é disponibilizado pelo programa de cálculo automático de estruturas SAP 2000 [13], o DKQ [6].

Duas discretizações de 12 (malha A) e 12 500 (malha B) elementos finitos DKQ com 36 e 37 550 graus de liberdade (GL), respectivamente, foram elaboradas para o caso de $c = \frac{a}{10}$. Nestas duas análises foi efectuada dupla simplificação de simetria.

Os resultados obtidos para $x = \frac{b}{2}$ encontram-se nas figuras 6.28 e 6.29. Para os esforços, no caso dos resultados fornecidos pelo FEM, a média nodal foi determinada. A solução do presente método foi determinada através abordagem discreta com $m = 10$, originando um problema com 40 graus de liberdade.

A solução obtida com a malha A afasta-se significativamente das restantes. A solução obtida com a malha B é semelhante à obtida pelo presente método, excepto para esforços transversos. Note-se que em ambas as soluções obtidas pelo FEM o esforço transversal Q_x não é nulo no eixo de simetria. Para $x = \frac{b}{2}$, $y = \frac{4}{10}a$ tem-se: $100 w_{Treffz}^{adim} = 0.25366$ e $100 w_{malha B}^{adim} = 0.25377$.

A solução obtida utilizando a abordagem discreta com $m = 10$ e $c = \frac{3a}{10}$ é representada nas figuras 6.30 e 6.31.

6.2.3 Encastrada-apoiada-livre-apoiada

Considere-se a laje encastrada-apoiada-livre-apoiada representada na figura 6.32 submetida a carga uniformemente distribuída, $\bar{p}$. A discretização adoptada é a indicada na figura 6.2(b). Não foi utilizada qualquer simplificação de simetria da estrutura.

Apenas a abordagem contínua, utilizando funções regulares, foi empregue.

Os valores expostos na tabela 6.20 foram obtidos para $m = 15$ (resultando, então, um sistema com 60 graus de liberdade) e foram comparados com a referência [86]. Note-se que a fim de facilitar a referida comparação não foi utilizada a adimensionalização habit-

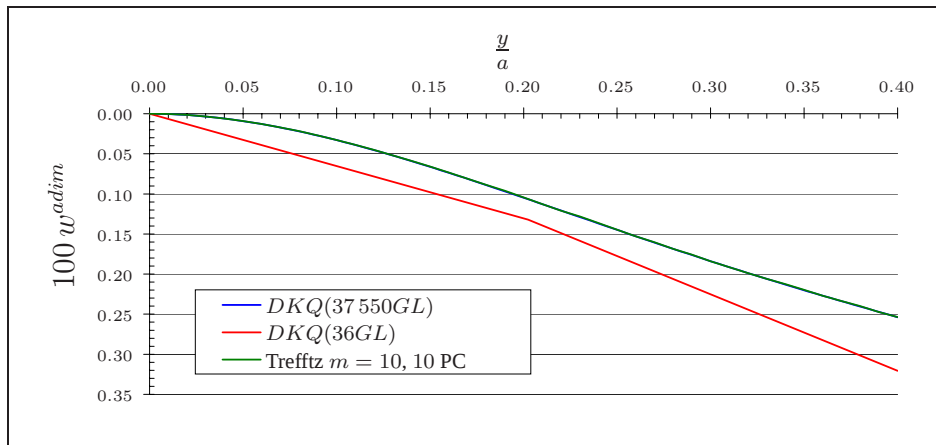
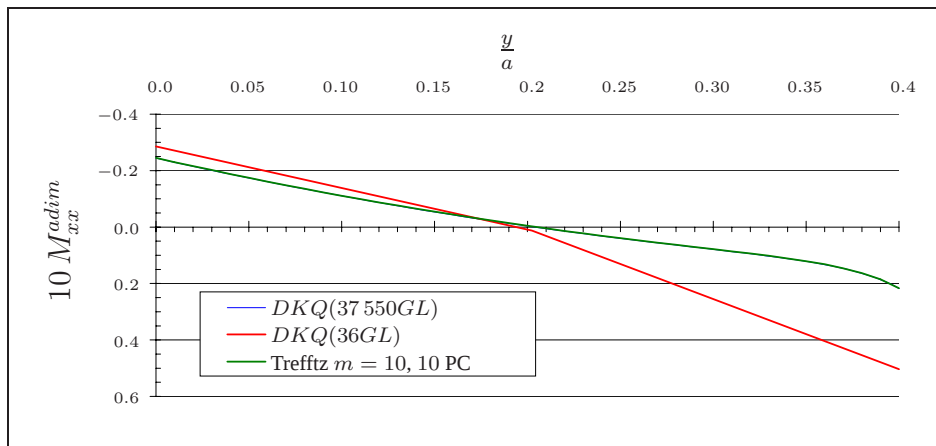
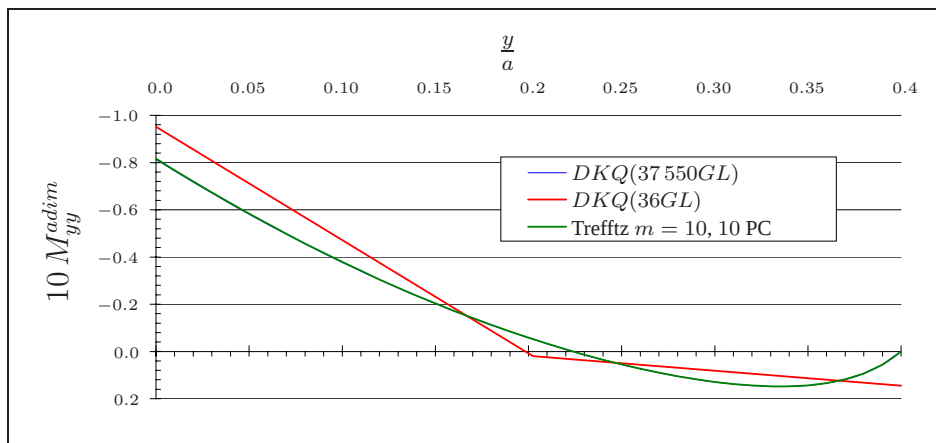
(a) Deslocamento transversal, w^{adim} .(b) Momento flector segundo y , M_{xx}^{adim} .(c) Momento flector segundo x , M_{yy}^{adim} .

Figura 6.28: Campo de deslocamento e diagramas de momentos flectores para $x = \frac{b}{2}$ em laje rectangular ($b = 2a$) encastrada com abertura circular central ($c = \frac{a}{10}$) sujeita a carga uniformemente distribuída.

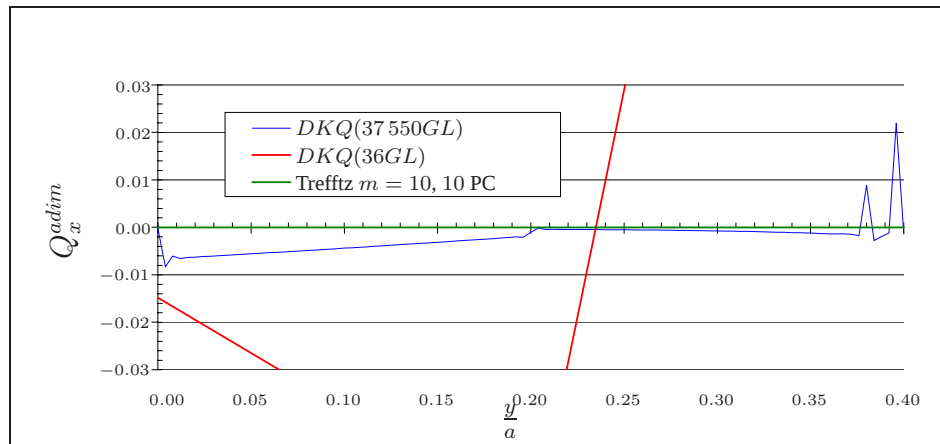
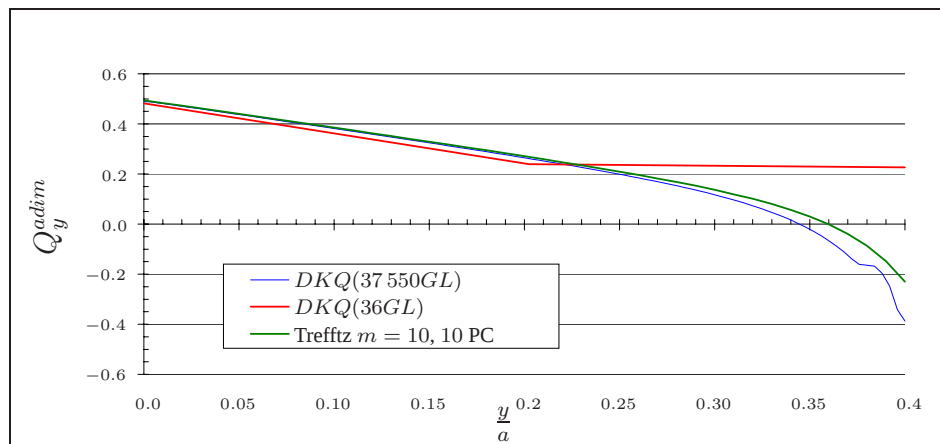
(a) Esforço transversal, Q_x .(b) Esforço transversal, Q_y .

Figura 6.29: Diagramas de esforço transversal para $x = \frac{b}{2}$ em laje rectangular ($b = 2a$) encasturada com abertura circular central ($c = \frac{a}{10}$) sujeita a carga uniformemente distribuída.

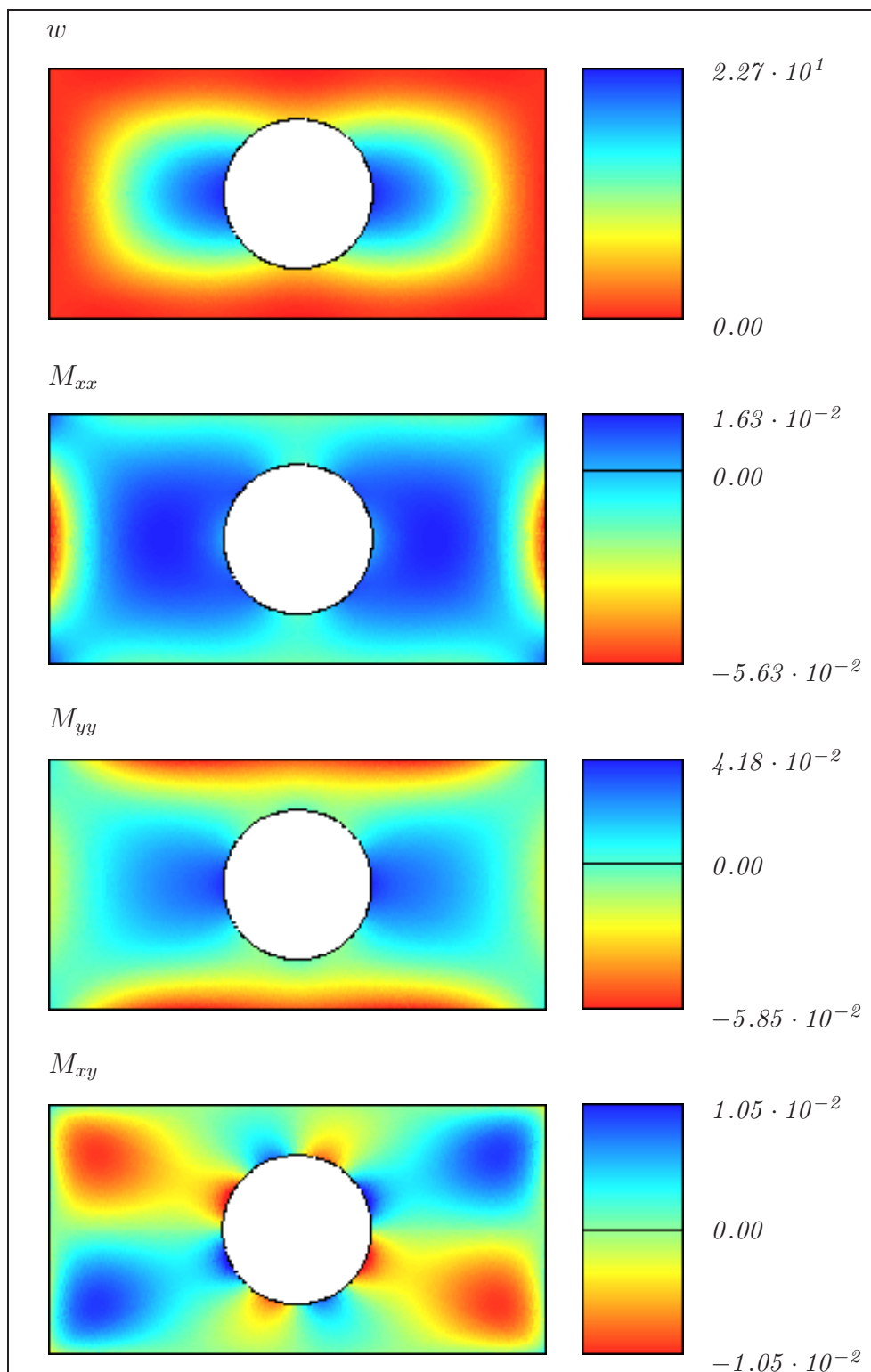


Figura 6.30: Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje rectangular ($b = 2a$) encastrada com abertura circular central ($c = \frac{3a}{10}$) sujeita a carga uniformemente distribuída.

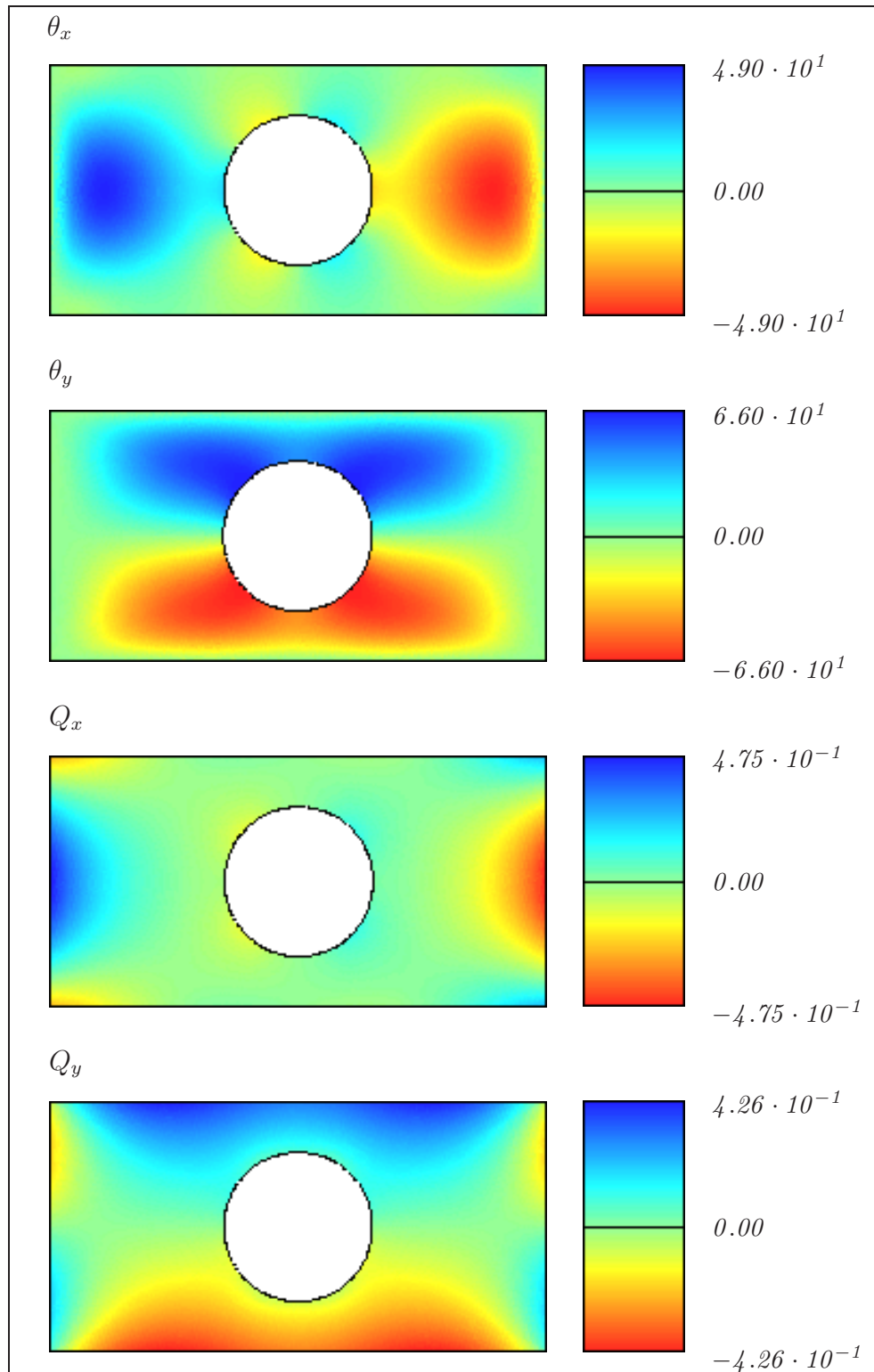


Figura 6.31: Campos de rotações e diagramas de esforço transverso em laje rectangular ($b = 2a$) encastrada com abertura circular central ($c = \frac{3a}{10}$) sujeita a carga uniformemente distribuída.

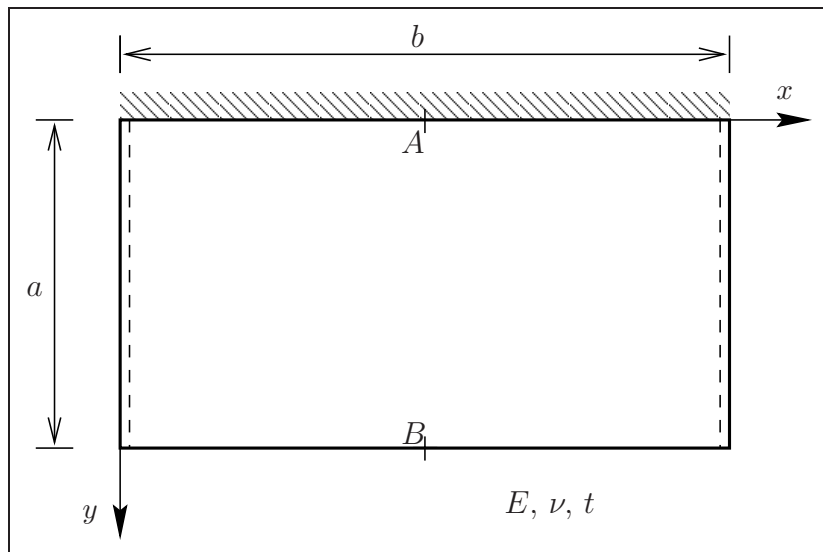


Figura 6.32: Laje rectangular encastada-apoiada-livre-apoiada.

ual neste trabalho.

Os resultados obtidos mostram que a combinação de diversas condições de fronteira não efectam significativamente a qualidade dos resultados.

O resultado obtido para M_{yy} e $\frac{a}{b} = 3$ é uma fraca aproximação do resultado exacto. Este facto deve-se à elevada relação entre vãos. Este valor pode ser melhorado utilizando um maior número de funções, por exemplo, para $m = 25$ obtém-se $M_{yy} = 0.124799 \bar{p}b^2$.

Nas figuras 6.33 e 6.34 encontram-se representadas, para diversas relações de vãos $\frac{a}{b}$, as soluções para M_{xx} e M_{xy} , respectivamente. Os valores extremos utilizados nestes diagramas encontram-se na tabela 6.21. Como habitual, as côres azul e vermelho indicam o valor máximo e mínimo, respectivamente.

De uma forma gráfica pretende-se mostrar a influência das extremidades na flexão da laje. Os limites da flexão cilíndrica são particularmente visíveis na representação do diagrama de momentos torsores. Destaque-se a maior influência do bordo encastado no comportamento global da estrutura, relativamente ao bordo livre.

As direcções principais de flexão e a deformada para o caso $\frac{a}{b} = 2$ são apresentadas nas figuras 6.35 e 6.36, respectivamente. No primeiro caso a peça é representada com uma rotação em torno do eixo z de -90° .

6.2.4 Vigas de bordadura

Considere-se a laje representada na figura 6.37, onde $b = a$, submetida a carga uniformemente distribuída, $\bar{p}$. O apoio elástico uniformemente distribuído tem propriedades

$\frac{a}{b}$	w^B		M_{xx}^B		$-M_{yy}^A$	
	Trefftz	Ref. [86]	Trefftz	Ref. [86]	Trefftz	Ref. [86]
0	—	$0.125 \frac{\bar{p}a^4}{D}$	—	0	—	$0.500 \bar{p}a^2$
$\frac{1}{3}$	$0.09398 \frac{\bar{p}a^4}{D}$	$0.094 \frac{\bar{p}a^4}{D}$	$0.00783 \bar{p}b^2$	$0.0078 \bar{p}b^2$	$0.42788 \bar{p}a^2$	$0.428 \bar{p}a^2$
$\frac{1}{2}$	$0.05822 \frac{\bar{p}a^4}{D}$	$0.0582 \frac{\bar{p}a^4}{D}$	$0.02930 \bar{p}b^2$	$0.0293 \bar{p}b^2$	$0.31892 \bar{p}a^2$	$0.319 \bar{p}a^2$
$\frac{2}{3}$	$0.03354 \frac{\bar{p}a^4}{D}$	$0.0335 \frac{\bar{p}a^4}{D}$	$0.05587 \bar{p}b^2$	$0.0558 \bar{p}b^2$	$0.22693 \bar{p}a^2$	$0.227 \bar{p}a^2$
1	$0.01123 \frac{\bar{p}a^4}{D}$	$0.0113 \frac{\bar{p}a^4}{D}$	$0.09704 \bar{p}b^2$	$0.0972 \bar{p}b^2$	$0.11836 \bar{p}a^2$	$0.119 \bar{p}a^2$
$\frac{3}{2}$	$0.01415 \frac{\bar{p}b^4}{D}$	$0.0141 \frac{\bar{p}b^4}{D}$	$0.12340 \bar{p}b^2$	$0.123 \bar{p}b^2$	$0.12307 \bar{p}b^2$	$0.124 \bar{p}b^2$
2	$0.01494 \frac{\bar{p}b^4}{D}$	$0.0150 \frac{\bar{p}b^4}{D}$	$0.13058 \bar{p}b^2$	$0.131 \bar{p}b^2$	$0.12301 \bar{p}b^2$	$0.125 \bar{p}b^2$
3	$0.01520 \frac{\bar{p}b^4}{D}$	$0.0152 \frac{\bar{p}b^4}{D}$	$0.13199 \bar{p}b^2$	$0.133 \bar{p}b^2$	$0.11634 \bar{p}b^2$	$0.125 \bar{p}b^2$
∞	—	$0.0152 \frac{\bar{p}b^4}{D}$	—	$0.133 \bar{p}b^2$	—	$0.125 \bar{p}b^2$

Tabela 6.20: Resultados para laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída.

$\frac{a}{b}$	M_{xx} (Figura 6.33)		M_{xy} (Figura 6.34)	
	Máx.	Mín.	Máx.	Mín.
$\frac{1}{3}$	$9.54 \cdot 10^{-3}$	$-1.43 \cdot 10^{-2}$	$1.17 \cdot 10^{-2}$	$-1.17 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{2}$	$5.59 \cdot 10^{-2}$	$-3.03 \cdot 10^{-2}$	$2.81 \cdot 10^{-2}$	$-2.81 \cdot 10^{-2}$
1	$9.70 \cdot 10^{-2}$	$-3.55 \cdot 10^{-2}$	$3.18 \cdot 10^{-2}$	$-3.18 \cdot 10^{-2}$
$\frac{3}{2}$	$1.23 \cdot 10^{-1}$	$-3.69 \cdot 10^{-2}$	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$-3.31 \cdot 10^{-2}$
2	$1.31 \cdot 10^{-1}$	$-3.68 \cdot 10^{-2}$	$3.30 \cdot 10^{-2}$	$-3.30 \cdot 10^{-2}$
3	$1.32 \cdot 10^{-1}$	$-3.49 \cdot 10^{-2}$	$2.95 \cdot 10^{-2}$	$-2.95 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.21: Valores extremos utilizados nos diagramas de momentos M_{xx} (figura 6.33) e M_{xy} (figura 6.34).

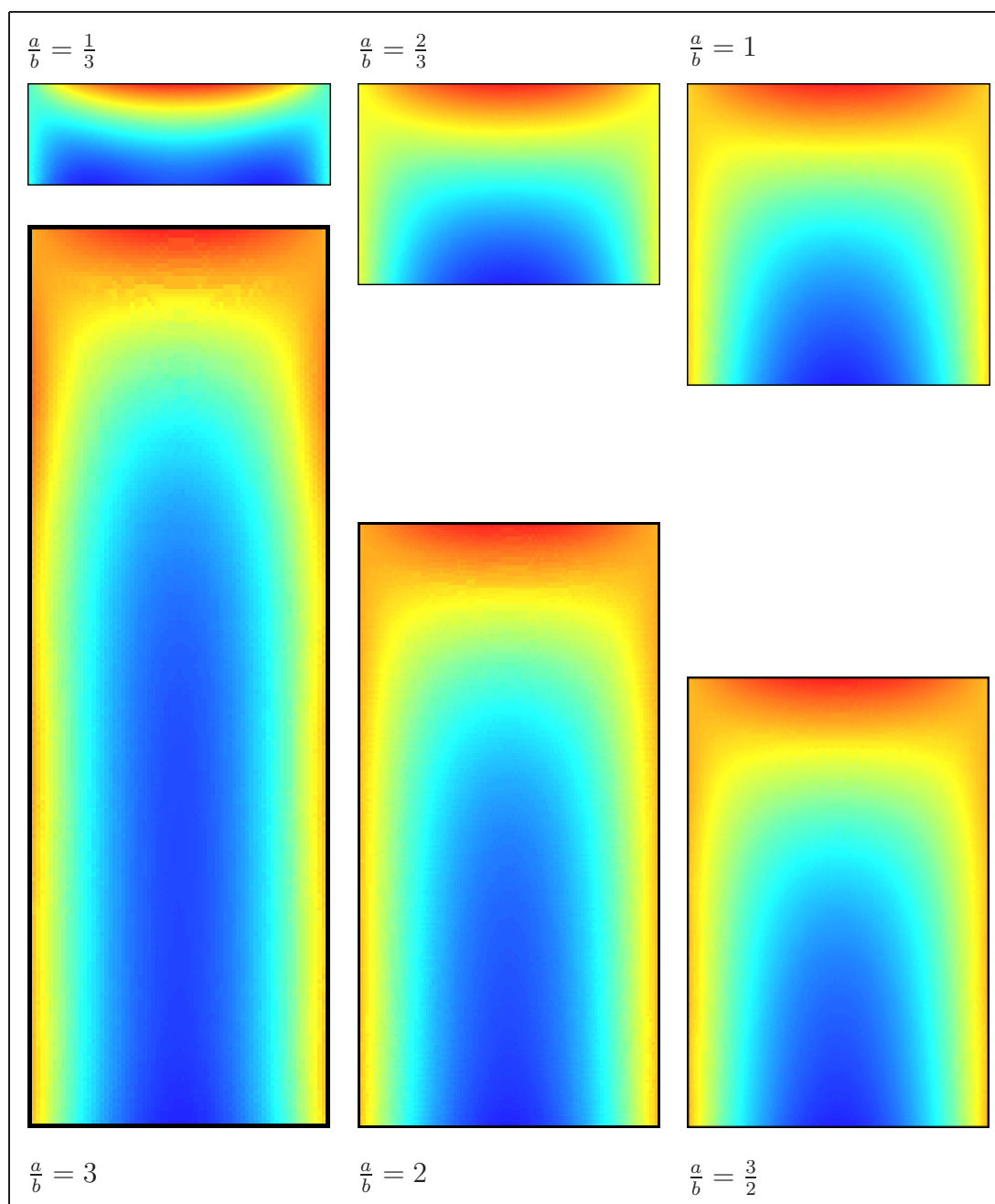


Figura 6.33: Diagrama de momentos M_{xx} em laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída para diversas relações de vãos $\frac{a}{b}$.

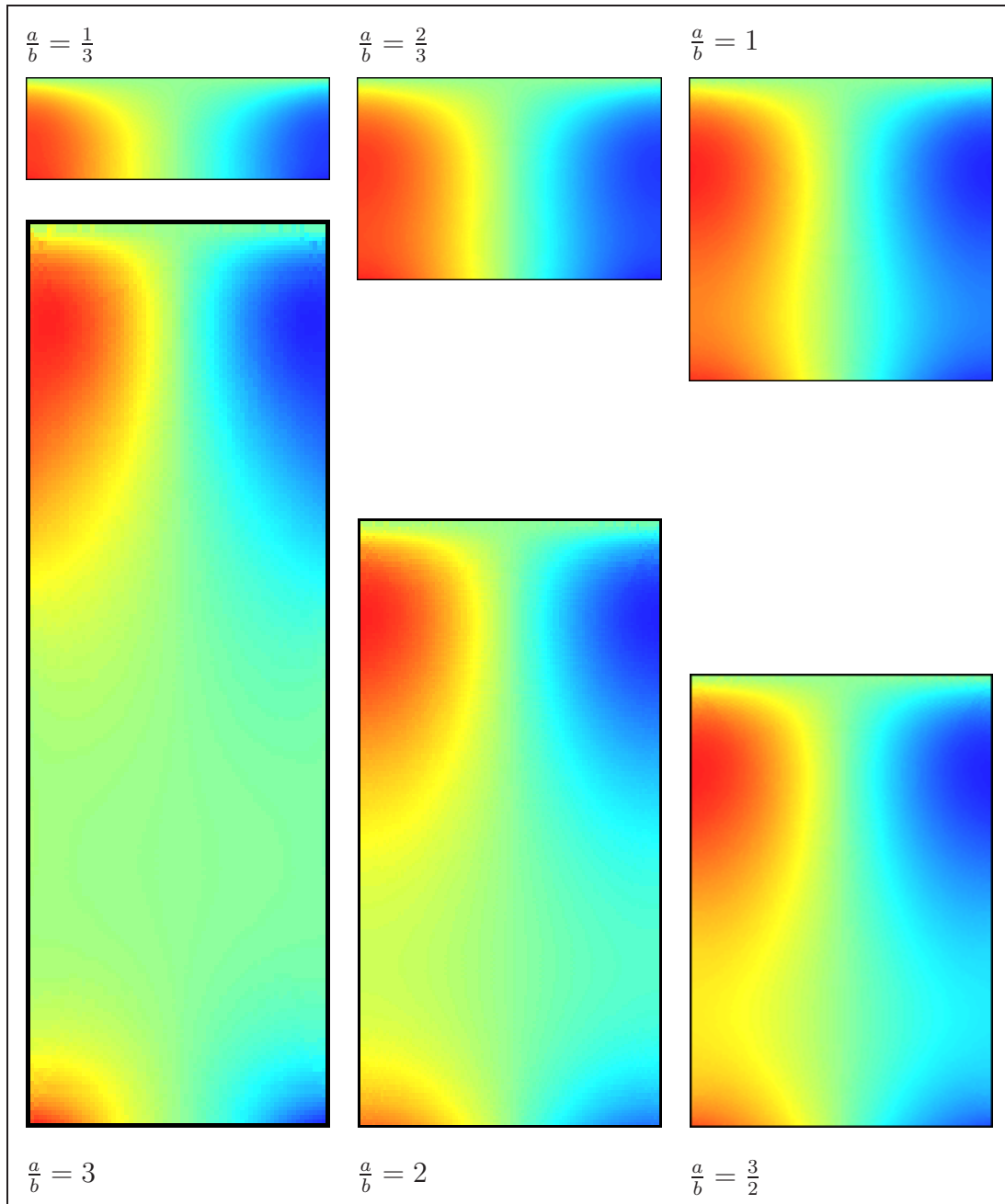


Figura 6.34: Diagrama de momentos M_{xy} em laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída para diversas relações de vãos $\frac{a}{b}$.

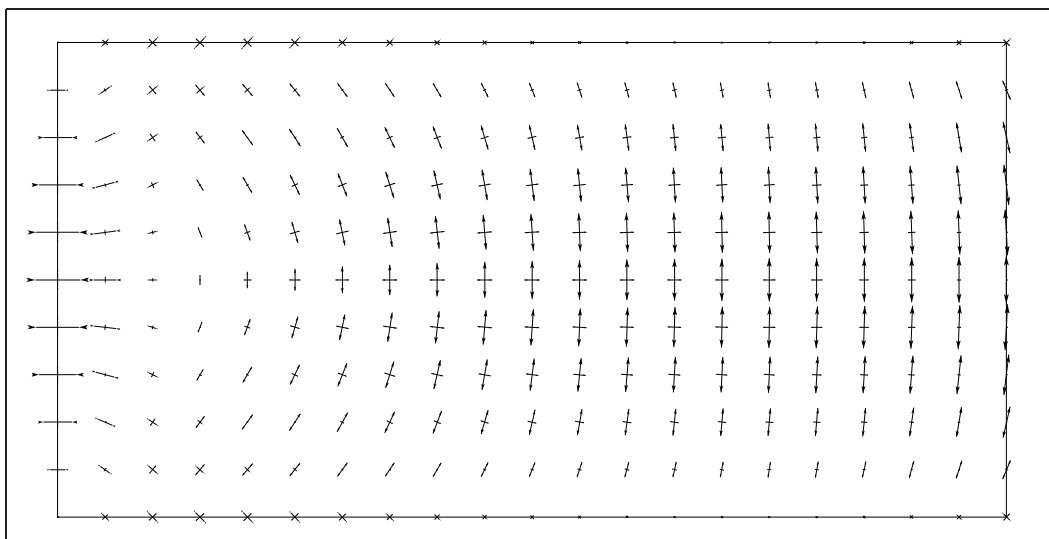


Figura 6.35: Direcções principais de flexão em laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída para $\frac{a}{b} = 2$.

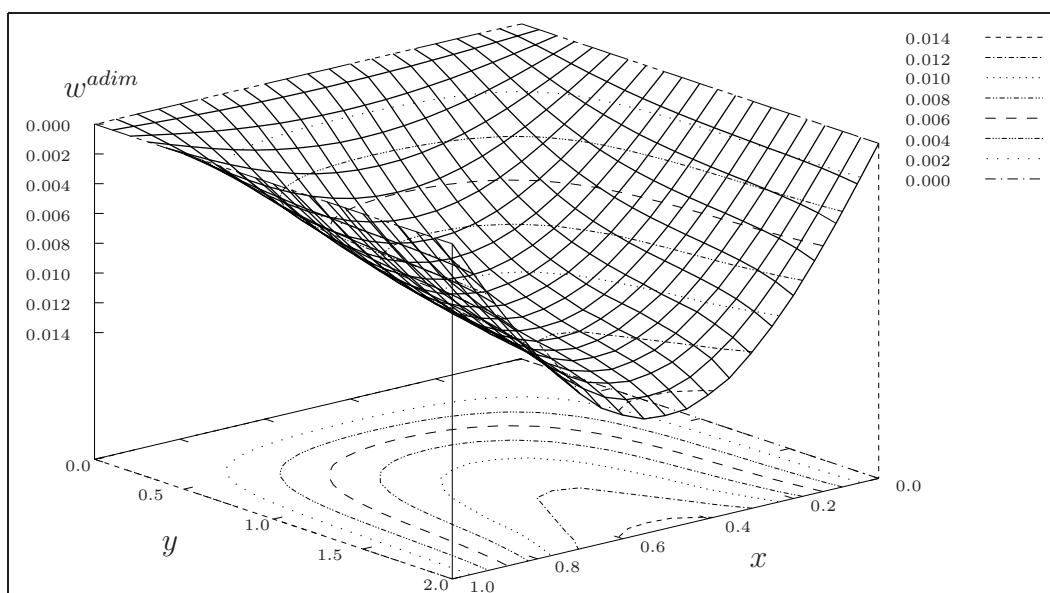


Figura 6.36: Deformada em laje rectangular encastrada-apoiada-livre-apoiada sujeita a carga uniformemente distribuída para $\frac{a}{b} = 2$.

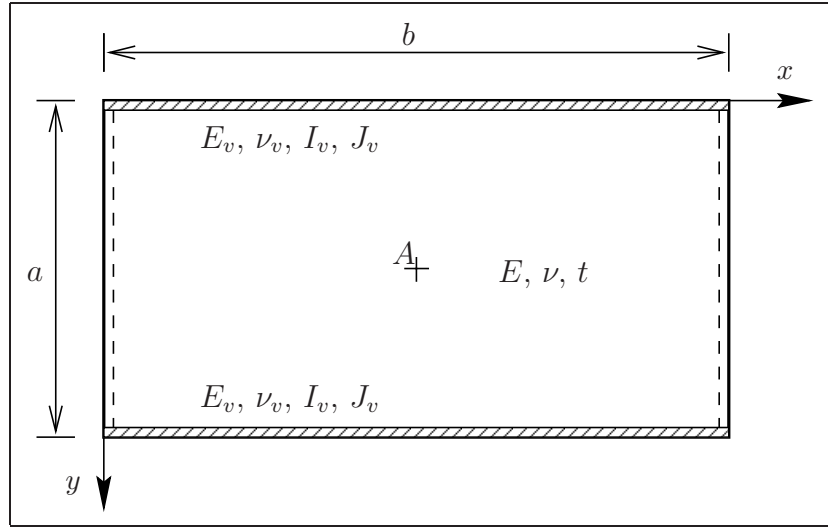


Figura 6.37: Laje rectangular com dois bordos simplesmente apoiados e dois bordos apoiados elasticamente.

$E_v = E$, $\nu_v = \nu$, $J_v = 0$ e $I_v = \frac{\lambda a D}{E}$. O factor adimensional λ é proporcional à rigidez de flexão da viga. Para $\lambda = 0$ ($\lambda = \infty$) obtém-se a laje apoiada-livre-apoiada-livre {laje simplesmente apoiada em todos os bordos}.

A solução para esta situação é dada na referência [86]. Verificou-se que alguns dos valores numéricos aí publicados apresentam erros significativos. Os resultados apresentados na tabela 6.22 foram calculados utilizando os primeiros 110 termos da expressão (6.13):

$$w = \frac{\bar{p} b^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \cosh \frac{m\pi y'}{b} + B_m \frac{m\pi y'}{b} \sinh \frac{m\pi y'}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{b} \quad (6.13)$$

onde

$$A_m = \frac{4}{\pi^5 m^5} \frac{\nu(1+\nu) \sinh \alpha_m - \nu(1-\nu) \alpha_m \cosh \alpha_m - m\pi \lambda (2 \cosh \alpha_m + \alpha_m \sinh \alpha_m)}{(3+\nu)(1-\nu) \sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - (1-\nu)^2 \alpha_m + 2m\pi \lambda \cosh^2 \alpha_m}$$

$$B_m = \frac{4}{\pi^5 m^5} \frac{\nu(1-\nu) \sinh \alpha_m + m\pi \lambda \cosh \alpha_m}{(3+\nu)(1-\nu) \sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - (1-\nu)^2 \alpha_m + 2m\pi \lambda \cosh^2 \alpha_m}$$

com $\alpha_m = \frac{m\pi a}{2b}$ e $y' = y - \frac{a}{2}$.

Os valores expostos na tabela 6.22 foram obtidos empregando a abordagem discreta com $m = 80$ (resultando um sistema de 640 equações a 320 incógnitas). Este valor, aparentemente elevado, foi escolhido para testar a robustez do algoritmo.

Os valores apresentados para $\lambda = \infty$ foram, tanto para a *Série* como para o método de *Trefftz*, determinados para uma laje com todos os bordos simplesmente apoiados.

λ	$10 w^{adim A}$		$M_{xx}^{adim A}$		$10 M_{yy}^{adim A}$	
	Trefftz	Série	Trefftz	Série	Trefftz	Série
∞	0.0406235	0.0406235	0.0478864	0.0478864	0.4788638	0.4788638
100.0	0.0409014	0.0409096	0.0481166	0.0481232	0.4782206	0.4782025
80.0	0.0410204	0.0409809	0.0482143	0.0481822	0.4779507	0.4780379
60.0	0.0410785	0.0410994	0.0482634	0.0482803	0.4778101	0.4777640
40.0	0.0413001	0.0413354	0.0484471	0.0484757	0.4772965	0.4772185
20.0	0.0420246	0.0420361	0.0490465	0.0490559	0.4756243	0.4755989
10.0	0.0433936	0.0434053	0.0501798	0.0501893	0.4724605	0.4724347
6.0	0.0451519	0.0451665	0.0516355	0.0516473	0.4683967	0.4683645
4.0	0.0472658	0.0472708	0.0533853	0.0533893	0.4635128	0.4635017
2.0	0.0530008	0.0530067	0.0581326	0.0581374	0.4502612	0.4502482
1.0	0.0623994	0.0624038	0.0659115	0.0659151	0.4285509	0.4285412
0.5	0.0757169	0.0757207	0.0769314	0.0769344	0.3978038	0.3977955
0.0	0.1309368	0.1309368	0.1225454	0.1225454	0.2707821	0.2707821

Tabela 6.22: Resultados no centro para laje quadrada com apoios elásticos em dois bordos paralelos sujeita a carga uniformemente distribuída.

Observando a tabela 6.22 conclui-se que o desempenho neste exemplo é excelente. Este facto advém da utilização de $m = 80$. Note-se que para os dois testes onde o parâmetro λ está ausente (ou é considerado indirectamente) os valores obtidos pelos dois métodos são iguais (para a precisão mostrada).

Na figura 6.38 representam-se graficamente os resultados da tabela 6.22.

6.3 Lajes circulares

Apesar da sua reduzida aplicação prática, os seguintes testes em lajes circulares são realizados devido a dois factores:

- averiguação do desempenho das funções-T na modelação de fronteiras curvas;
- existência de soluções analíticas sob a forma de expressões algébricas simples, o que facilita a comparação com os resultados exactos.

6.3.1 Encastrada

Considere-se a laje circular encastrada de raio a , espessura $t = \frac{a}{10}$, módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν representada na figura 6.39.

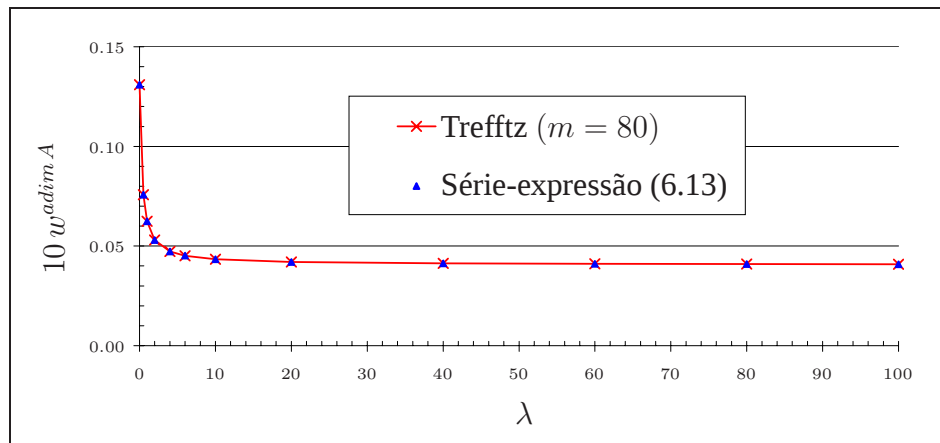
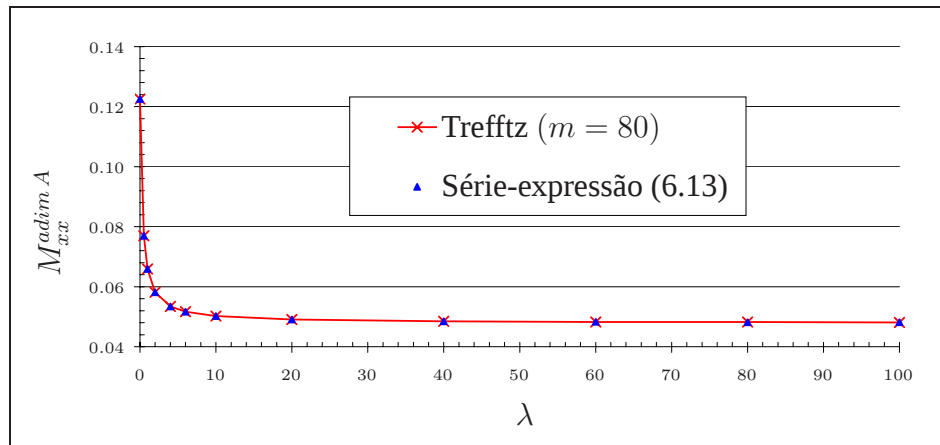
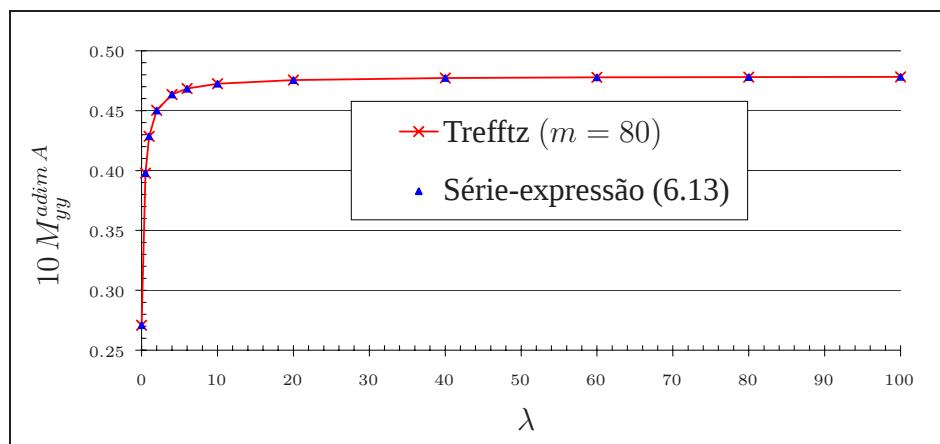
(a) Deslocamento transversal, $w^{adim} A$.(b) Momento flector segundo y , $M_{xx}^{adim} A$.(c) Momento flector segundo x , $M_{yy}^{adim} A$.

Figura 6.38: Resultados no centro para laje quadrada com apoios elásticos em dois bordos paralelos sujeita a carga uniformemente distribuída.

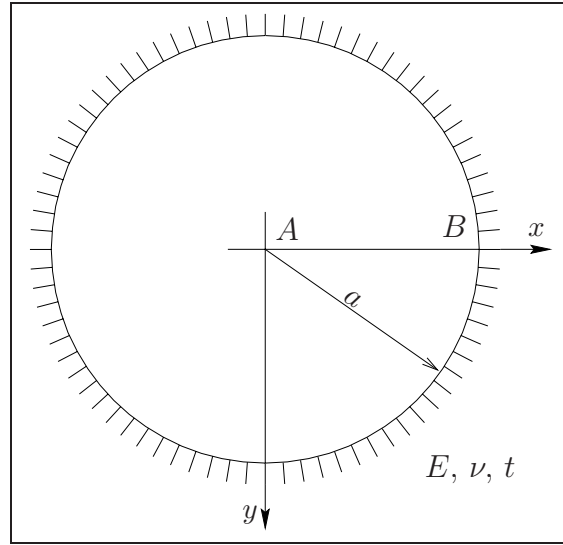


Figura 6.39: Laje circular encastrada.

As condições de fronteira (no sistema local de coordenadas) são:

$$w|_{r=a} = 0, \quad (6.14a)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{r=a} = 0. \quad (6.14b)$$

Carga uniformemente distribuída

A solução exacta para o deslocamento transversal para o caso de uma carga uniformemente distribuída, $\bar{p}$ é [86]:

$$w^{\bar{p}} = \frac{\bar{p}}{64D} (a^2 - r^2)^2, \quad (6.15)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$.

Tratando-se de flexão simétrica em laje circular os esforços $M_{r\theta}$ e Q_θ são nulos, bem como a rotação θ_θ .

Os momentos flectores M_r e M_θ são, dados pela substituição de (6.15) em (2.27a) e (2.27b), respectivamente.

$$M_r = \frac{\bar{p}}{16} [a^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)], \quad (6.16a)$$

$$M_\theta = \frac{\bar{p}}{16} [a^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \quad (6.16b)$$

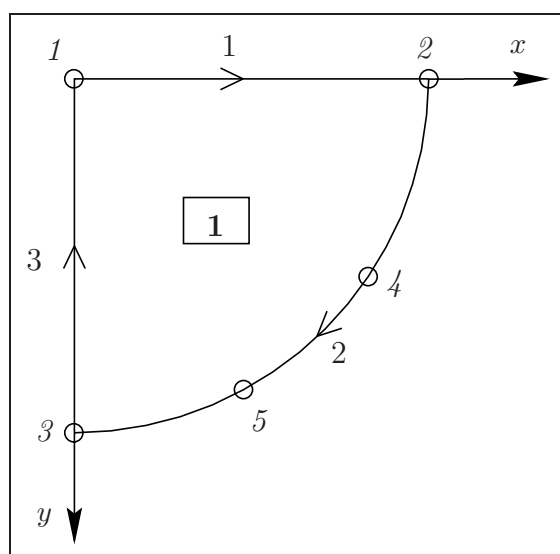


Figura 6.40: Laje circular encastrada. Discretização para carga uniformemente distribuída.

A discretização utilizada consiste numa única região com 3 lados, dois rectos e um *spline* cúbico. Tal como indicado na figura 6.40 tirou-se partido da simplificação de simetria.

Os testes apresentados foram realizados para $m = 10$. Os resultados obtidos para os três tipos de esquemas de colocação descritos no capítulo 5, secção 5.5.4, página 61 são confrontados. A tabela 6.23 resume os resultados.

É notório que a precisão da solução *decrece* significativamente com o *aumento* do número de equações. Este facto está relacionado com o aumento do número de condição da matriz do sistema quando se aumenta o número de equações.

Não existem diferenças relevantes entre os resultados obtidos para os diversos esquemas de colocação.

Na figura 6.41 são comparados os resultados para $m = 10$ com 10 pontos de colocação por lado com a solução exacta. A colocação foi imposta nos pontos de Gauss. Constata-se que as soluções são muito semelhantes.

Abertura circular central

Considere-se agora que a laje circular encastrada possui uma abertura circular central de raio $b < a$. A solicitação é a mesma do exemplo anterior e, de resto, a única que foi apresentada no capítulo 4 para esta situação.

A solução exacta para este caso é dada pela sobreposição de três termos: a

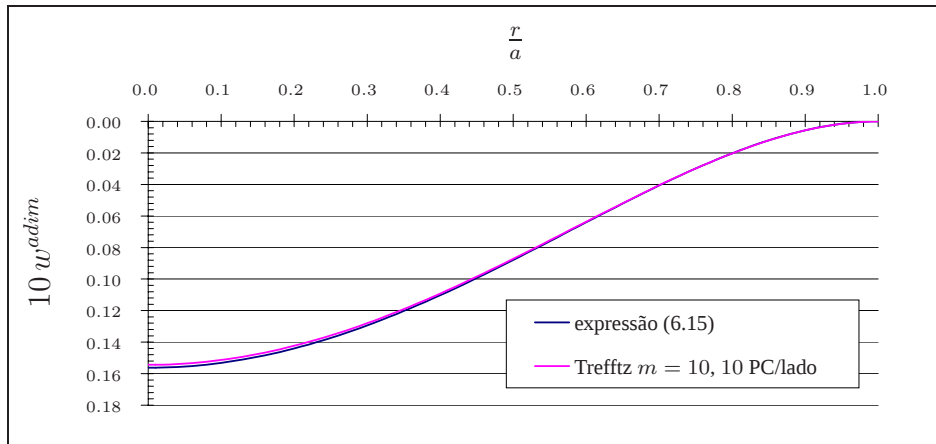
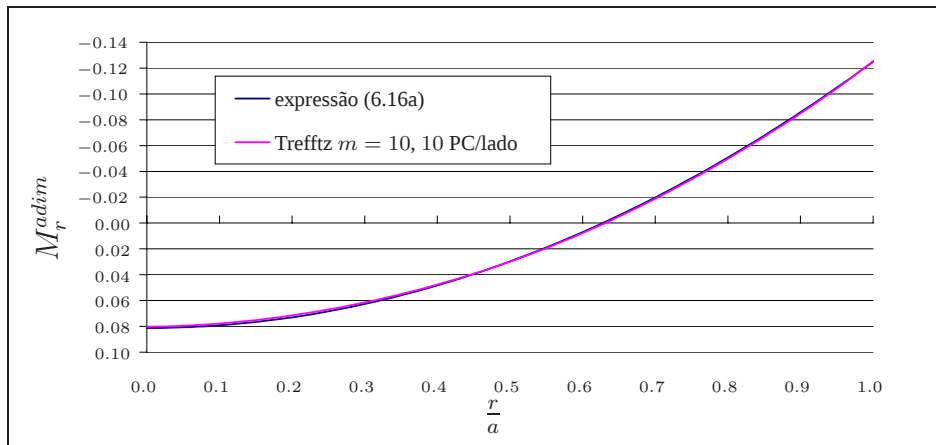
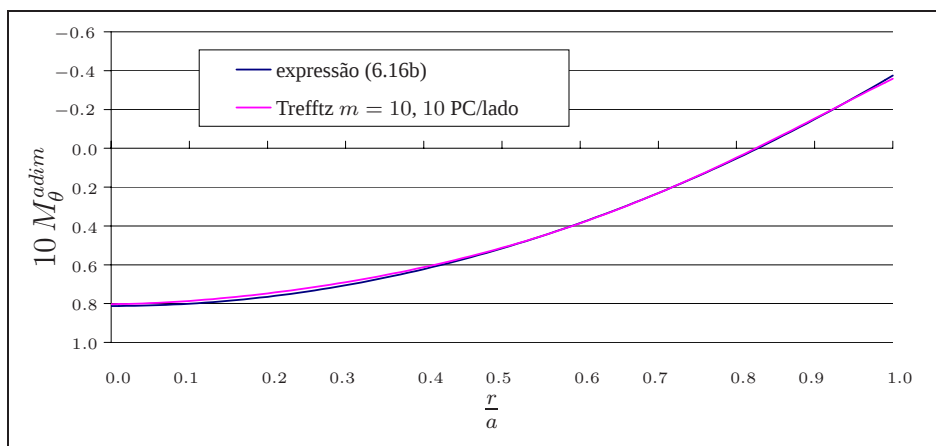
(a) Deslocamento transversal, w^{adim} .(b) Momento flector segundo θ , M_r^{adim} .(c) Momento flector segundo r , M_θ^{adim} .

Figura 6.41: Resultados para laje circular encastrada sujeita a carga uniformemente distribuída.

Esquema Col.	n_{col}	$\frac{n_{equações}}{n_{incógnitas}}$	$10w^{adim A}$	$10M_r^{adim A}$	$-M_r^{adim B}$	$-10M_\theta^{adim B}$
Gauss	7	1.05	0.15681	0.815	0.128	0.370
	9	1.35	0.15460	0.803	0.125	0.365
	11	1.65	0.14318	0.707	0.109	0.321
	13	1.95	0.11789	0.542	0.086	0.435
	15	2.25	0.11647	0.530	0.093	0.259
$1 + 2 + \dots + n$	7	1.05	0.15671	0.814	0.127	0.366
	9	1.35	0.15582	0.809	0.127	0.374
	11	1.65	0.15280	0.766	0.118	0.323
	13	1.95	0.13454	0.643	0.106	0.290
	15	2.25	0.12901	0.606	0.101	0.279
$1 + 2^2 + \dots + n^2$	7	1.05	0.15661	0.814	0.128	0.370
	9	1.35	0.15211	0.787	0.124	0.343
	11	1.65	0.12103	0.572	0.087	0.235
	13	1.95	0.11723	0.556	0.088	0.242
	15	2.25	0.09934	0.442	0.079	0.225
Exacta			0.15625	0.813	0.125	0.375

Tabela 6.23: Resultados para laje circular encastrada sujeita a carga uniformemente distribuída.

solução para laje circular encastrada sem abertura submetida a carga uniformemente distribuída (6.15) e soluções para laje circular encastrada com abertura circular submetida a momento flector uniforme M_0 e esforço transversal uniforme Q_0 no contorno da abertura circular.

Este método foi utilizado por Timoshenko e Woinowsky-Krieger [86] em laje circular simplesmente apoiada com abertura circular submetida a carga uniformemente distribuída. Aplicando a mesma metodologia para a presente situação conclui-se (6.17):

$$w = w^{\bar{p}} + w^{M_0} + w^{Q_0}, \quad (6.17)$$

onde $w^{\bar{p}}$ é dado pela expressão (6.15),

$$w^{M_0} = -\frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3, \quad (6.18)$$

com

$$C_1 = 2M_0 \frac{b^2}{D [b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)]},$$

$$C_2 = -a^2 M_0 \frac{b^2}{D [b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)]},$$

$$C_3 = \frac{a^2 M_0}{2} \frac{b^2}{D [b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)]}$$

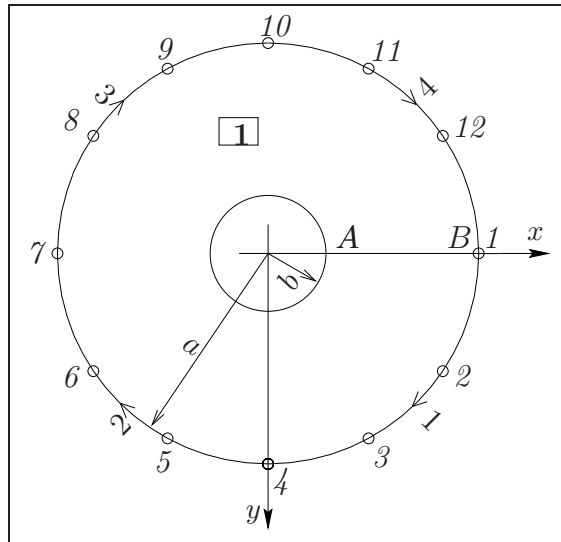


Figura 6.42: Discretização para laje circular encastrada com abertura circular.

e

$$w^{Q_0} = \frac{bQ_0r^2}{4D} \left(\ln \frac{r}{a} - 1 \right) - \frac{C_1r^2}{4} - C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3, \quad (6.19)$$

com

$$C_1 = bQ_0 \frac{2b^2 \ln \frac{b}{a}(1+\nu) + (b^2 - a^2)(1-\nu)}{2D [b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)]},$$

$$C_2 = -b^3a^2Q_0 \frac{\ln \frac{b}{a}(1+\nu) + 1}{2D [b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)]},$$

$$C_3 = ba^2Q_0 \frac{b^2(3+\nu) + a^2(1-\nu) + 2b^2 \ln \frac{b}{a}(1+\nu)}{8D [b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)]}.$$

O valor do momento flector uniforme é $M_0 = -\frac{\bar{p}}{16} [a^2(1+\nu) - b^2(3+\nu)]$ e para o esforço transversal uniforme tem-se $Q_0 = -\frac{\bar{p}b}{2}$.

A discretização utilizada está representada na figura 6.42. A solução específica para aberturas circulares, tal como descrito no capítulo 4, subsecção 4.3.3, página 52, foi empregue.

Nas tabelas 6.24 e 6.25 são apresentados os resultados obtidos nos pontos A e B localizados nas fronteiras estática e cinemática (ver figura 6.42), respectivamente, para $\frac{b}{a} = 0.3$. O número de pontos de colocação {integração} por lado utilizados na abordagem discreta {contínua} é igual a m .

Os resultados estão de acordo com a solução exacta, apesar de exibirem uma qualidade inferior à revelada em lajes de forma rectangular.

Tal como anteriormente, não foram encontradas diferenças significativas entre os resultados das duas abordagens.

m	$n_{\text{equações}}$	G.L.	$10 w^{adim A}$		$10 M_{\theta}^{adim A}$	
			Cont.	Disc.	Cont.	Disc.
2	16	10	0.1330	0.1330	0.7830	0.7830
4	32	18	0.1321	0.1321	0.7806	0.7806
6	48	26	0.1321	0.1320	0.7809	0.7803
8	64	34	0.1321	0.1321	0.7808	0.7806
10	80	42	0.1321	0.1321	0.7808	0.7806
Exacto			0.1316		0.7776	

Tabela 6.24: Valores de $w^{adim A}$ e $M_{\theta}^{adim A}$ para laje circular encastrada com abertura circular sujeita a carga uniforme.

m	$n_{\text{equações}}$	G.L.	$-M_r^{adim B}$		$-10 M_{\theta}^{adim B}$	
			Cont.	Disc.	Cont.	Disc.
2	16	10	0.1133	0.1133	0.3376	0.3376
4	32	18	0.1118	0.1118	0.3331	0.3331
6	48	26	0.1114	0.1118	0.3316	0.3333
8	64	34	0.1133	0.1138	0.3382	0.3400
10	80	42	0.1133	0.1139	0.3381	0.3403
Exacto			0.1135		0.3405	

Tabela 6.25: Valores de $M_r^{adim B}$ e $M_{\theta}^{adim B}$ para laje circular encastrada com abertura circular sujeita a carga uniforme.

Na figura 6.43 encontra-se os resultados para $m = 10$ com 10 pontos de colocação por lado para diferentes valores da relação $\frac{b}{a}$.

Pode observar-se que quando a relação $\frac{b}{a}$ decresce o momento flector M_{θ} aumenta consideravelmente.

Representações de contorno da solução obtida para $\frac{b}{a} = 0.3$ utilizando a abordagem discreta com 10 pontos de colocação/lado e $m = 10$ são apresentadas na figura 6.44. Nesta figura pode avaliar-se a excelente qualidade da aproximação que os *splines* cúbicos proporcionam na modelação da fronteira.

Tratando-se de flexão simétrica em torno do centro da estrutura, tem-se $\theta_r = \theta_x$ para $y = 0$, $\theta_{\theta} = 0$, $M_r = M_{xx}$ para $y = 0$, $M_{\theta} = M_{xx}$ para $x = 0$, $M_{r\theta} = 0$, $Q_r = Q_x$ para $y = 0$ e $Q_{\theta} = 0$.

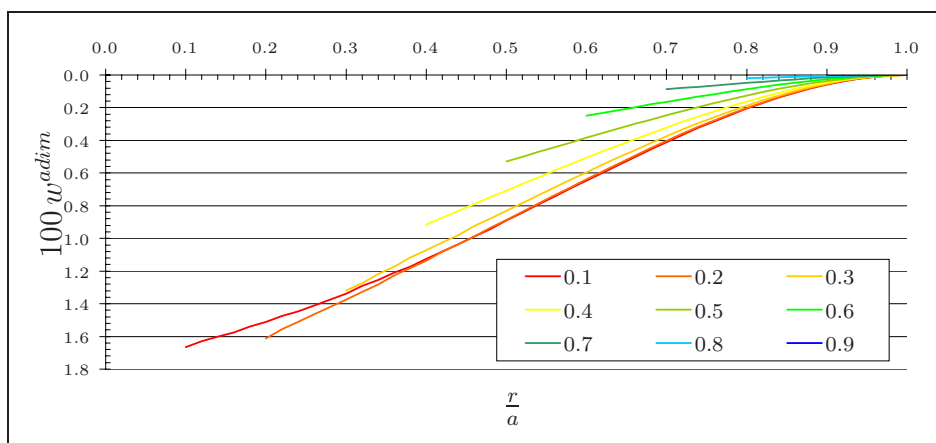
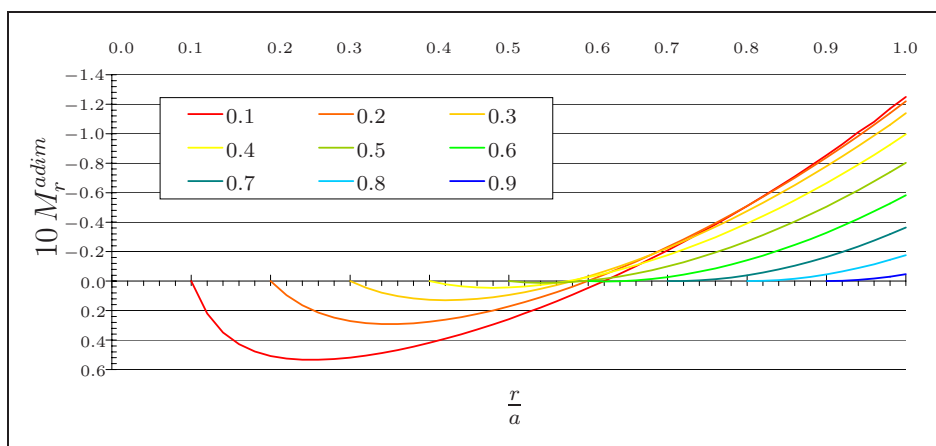
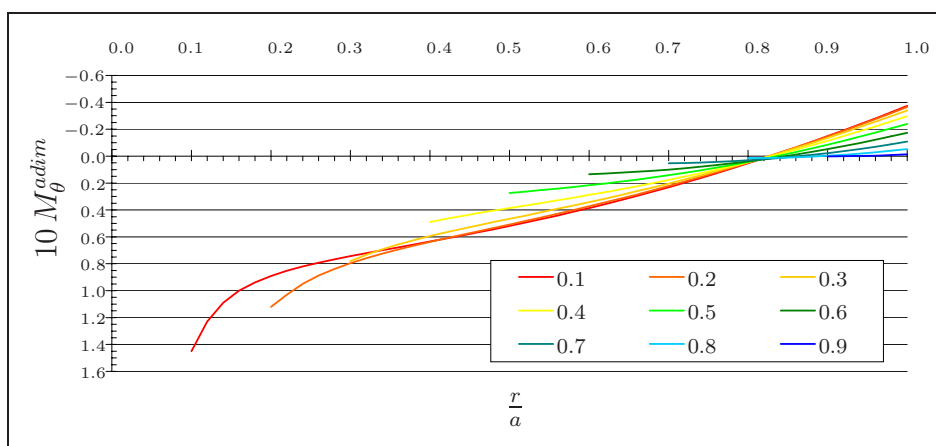
(a) Deslocamento transversal, w^{adim} .(b) Momento flector segundo θ , M_r^{adim} .(c) Momento flector segundo r , M_{θ}^{adim} .

Figura 6.43: Resultados para laje circular encastrada sujeita a carga uniformemente distribuída para diferentes valores da relação $\frac{b}{a}$.

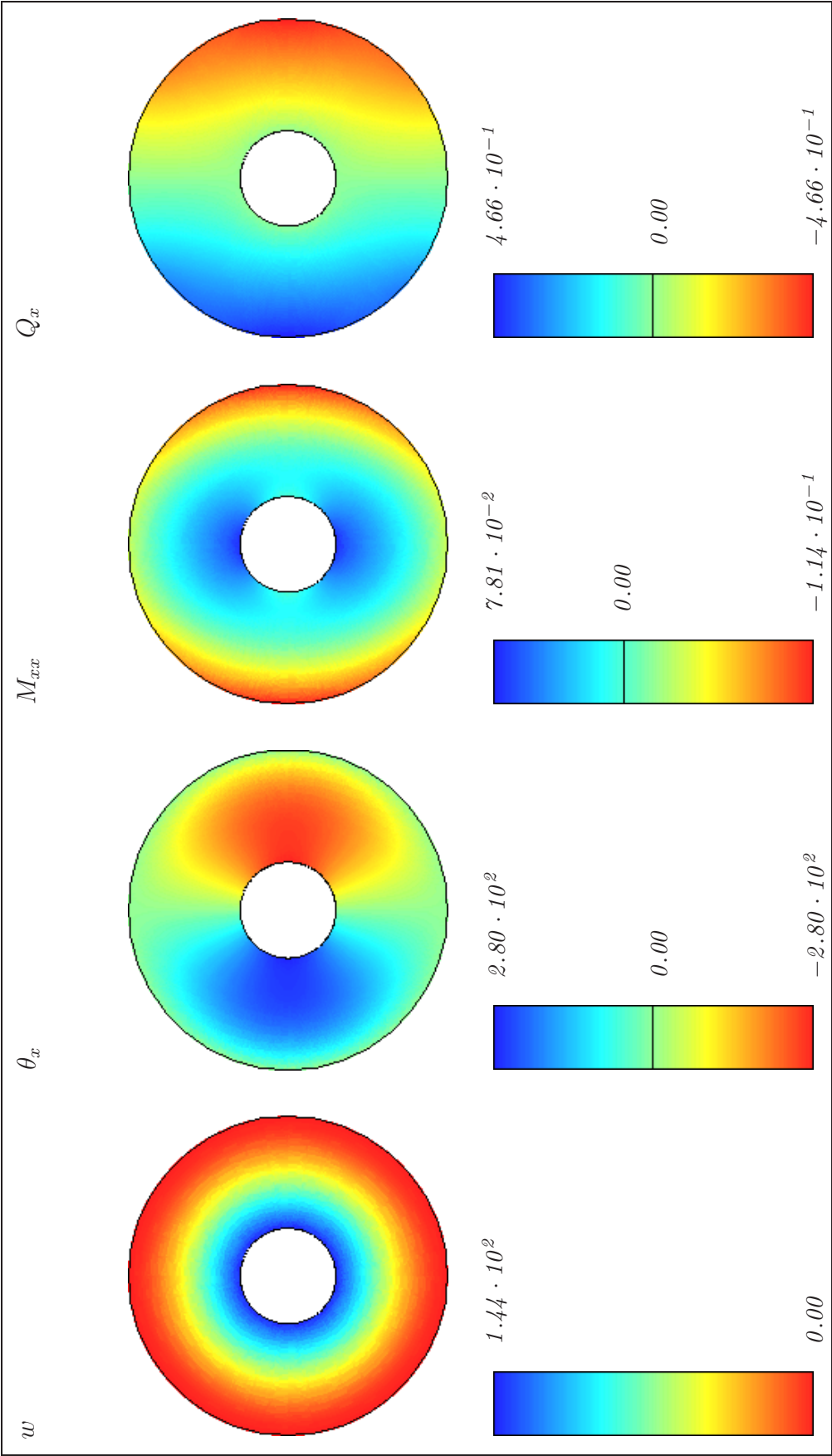


Figura 6.44: Campo de deslocamentos, rotações, diagrama de momentos e esforço transverso em laje circular encastrada com abertura circular sujeita a carga uniforme para $\frac{b}{a} = 0.3$.

Carga concentrada

A solução exacta para o deslocamento transversal para o caso de uma carga concentrada, $\bar{P}$, a actuar no centro é [86]:

$$w = \frac{\bar{P}}{8\pi D} r^2 \log \frac{r}{a} + \frac{\bar{P}}{16\pi D} (a^2 - r^2). \quad (6.20)$$

O deslocamento na origem é dado por $\lim_{r \rightarrow 0} w = \frac{\bar{P}}{16\pi D} a^2$.

Os momentos flectores M_r e M_θ para pontos afastados do ponto de aplicação da carga são, assim, dados por:

$$M_r = \frac{\bar{P}}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right] \quad (6.21a)$$

$$M_\theta = \frac{\bar{P}}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} - \nu \right] \quad (6.21b)$$

No centro da laje os momentos flectores podem ser calculados, assumindo que a carga se encontra distribuída dentro de um círculo de raio pequeno (c), por [86]:

$$M_{máx} = \frac{\bar{P}}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} - \frac{(1 - \nu)c^2}{4a^2} \right]. \quad (6.22)$$

O esforço transversal Q_r é obtido substituindo (6.20) em (2.28a).

$$Q_r = -\frac{\bar{P}}{2\pi r} \quad (6.23)$$

A laje foi discretizada numa única região com quatro lados iguais. Estes são definidos por *splines* cúbicos. Não foram utilizadas simplificações de simetria.

Duas modelações para a carga foram utilizadas:

1. carga pontual;
2. carga uniformemente distribuída em zona circular de raio pequeno c .

A segunda foi apenas utilizada para calcular momentos flectores no centro da laje.

Os resultados obtidos usando a primeira modelação encontram-se nas tabelas 6.26 e 6.27.

m	$n_{\text{equações}}$	G.L.	$10 w^{adim A}$		$-Q_r^{adim B}$	
			Cont.	Disc.	Cont.	Disc.
1	8	4	0.19826	0.19826	0.15915	0.15915
3	24	12	0.19923	0.19942	0.15915	0.15915
5	40	20	0.19925	0.19921	0.15268	0.15374
Exacto			0.19894		0.15915	

Tabela 6.26: Valores de $w^{adim A}$ e $Q_r^{adim B}$ para laje circular encastrada sujeita a carga central pontual.

m	$n_{\text{equações}}$	G.L.	$-10 M_r^{adim B}$		$-10 M_\theta^{adim B}$	
			Cont.	Disc.	Cont.	Disc.
1	8	4	0.79756	0.79756	0.24052	0.24052
3	24	12	0.79502	0.79452	0.23798	0.23748
5	40	20	0.78015	0.78269	0.23171	0.23279
Exacto			0.79577		0.23873	

Tabela 6.27: Valores de $M_r^{adim B}$ e $M_\theta^{adim B}$ para laje circular encastrada sujeita a carga central pontual.

Saliente-se a boa aproximação conseguida com apenas quatro graus de liberdade (os três termos de corpo rígido, 1, x e y e o termo r^2). Na realidade as rotações de corpo rígido não contribuem para a solução (o referencial local onde são efectuados os cálculos tem origem no centro de gravidade) e os pesos associados que resultam na solução são apenas resíduos numéricos, logo na realidade trata-se de dois graus de liberdade.

Os resultados obtidos usando a segunda modelação encontram-se na tabela 6.28, onde o resultado exacto foi determinado por 6.22. Tal como no caso da laje rectangular os valores obtidos para os momentos flectores estão de acordo com a solução analítica.

A perfeita concordância entre as soluções exacta e numérica ao longo de um raio é evidente na figura 6.45. Estes foram determinados utilizando a abordagem discreta com 10 pontos de colocação/lado e $m = 10$. A primeira modelação para a solicitação foi empregue.

m	$n_{\text{equações}}$	G.L.	$\frac{M_r^{adim A}}{10} = \frac{M_\theta^{adim A}}{10}$	
			Cont.	Disc.
1	8	4	0.119084	0.119084
3	24	12	0.119110	0.119115
5	40	20	0.119110	0.119109
Exacto			0.119102	

Tabela 6.28: Valores de $M_r^{adim A}$ e $M_\theta^{adim A}$ para laje circular encastrada sujeita a carga central distribuída num círculo de raio $c = \frac{a}{1.0 \cdot 10^5}$.

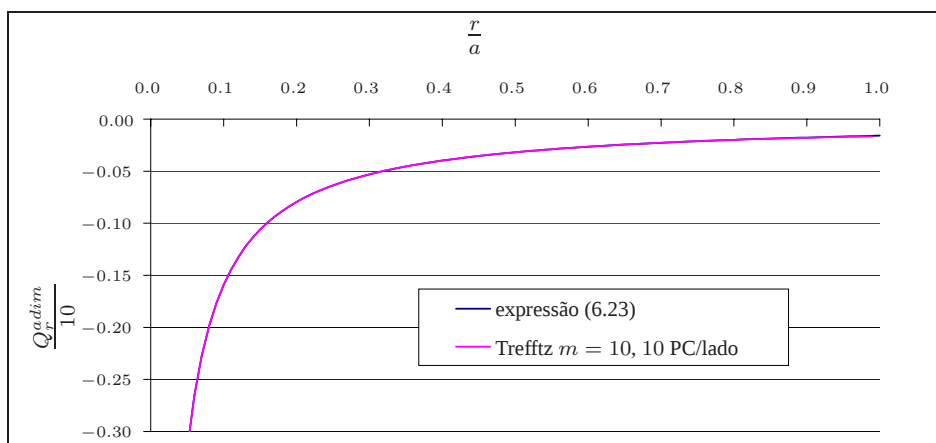
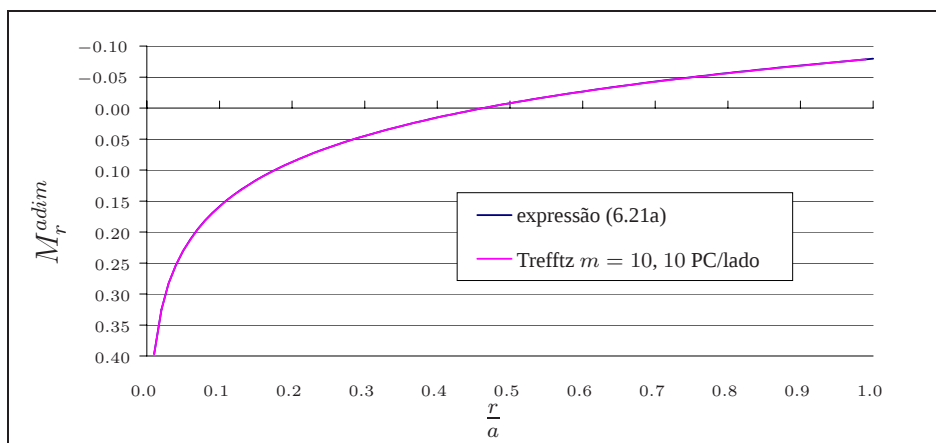
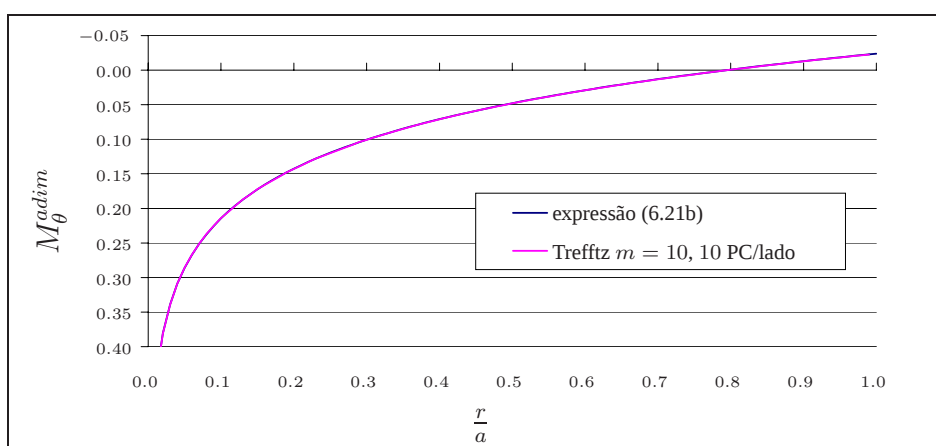
(a) Esforço transverso, Q_r^{dim} .(b) Momento flector segundo θ , M_r^{dim} .(c) Momento flector segundo r , M_θ^{dim} .

Figura 6.45: Resultados para laje circular encastrada sujeita a carga central concentrada.

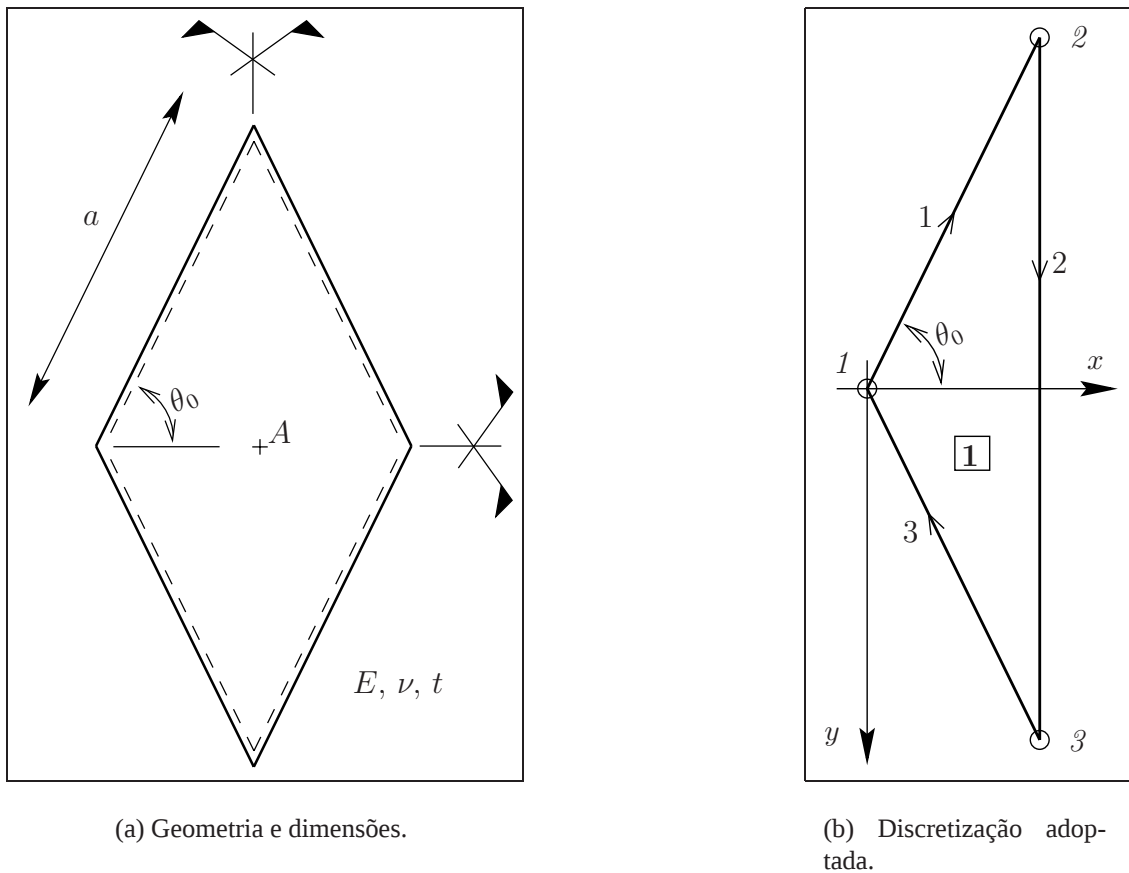


Figura 6.46: Laje enviesada simplesmente apoiada.

6.4 Lajes enviesadas

Em seguida são apresentados três exemplos que visam testar o desempenho do método descrito para lajes com diversas condições de fronteira e ângulos de viés.

6.4.1 Laje simplesmente apoiada

Considere-se a laje simplesmente apoiada representada na figura 6.46(a). A discretização adoptada está representada na figura 6.46(b).

As condições a impôr no bordo 2 são as de rotação e esforço transversal efectivo nulos.

As raízes da equação transcendente, caso 6 da tabela 4.1, página 51, são reais para qualquer valor de θ_0 .

A simetria em relação ao eixo x , figura 6.46, é imposta utilizando apenas a parcela

	θ_0 (graus)				
m	45	50	60	70	75
4	4.063030	2.496213	2.559708	0.878252	0.164060
6	4.062419	3.400495	2.560105	0.956677	0.397154
8	4.062381	3.824832	2.560099	0.958229	0.407788
10	4.060042	3.861860	2.560096	0.958263	0.407765
12	4.062190	3.884341	2.561288	0.958135	0.407813
Referência	4.062353	3.870	2.560	0.958	0.408

Tabela 6.29: Resultados para $1 \cdot 10^3 w^{adim A}$ em laje enviesada simplesmente apoiada.

	θ_0 (graus)				
m	45	50	60	70	75
4	0.480170	0.230510	0.425858	0.254281	0.034549
6	0.479158	0.401886	0.425371	0.280678	0.185565
8	0.478975	0.479364	0.425342	0.280649	0.190739
10	0.488346	0.517959	0.425298	0.280504	0.190707
12	0.479529	0.376266	0.423416	0.280996	0.190612
Referência	0.478864	0.486	0.425	0.281	0.191

Tabela 6.30: Resultados para $10 M_{xx}^{adim A}$ em laje enviesada simplesmente apoiada.

simétrica da solução complementar.

Nas tabelas 6.29, 6.30 e 6.31 são apresentados os resultados obtidos para diversos valores do ângulo θ_0 no ponto A, centro da laje, ver figura 6.46(a) em termos de deslocamentos e momentos flectores. Foi utilizada a abordagem discreta com 20 PC em todos os testes.

Para $\theta_0 = 45^\circ$ recupera-se a laje quadrada simplesmente apoiada.

A solução designada por *Referência* nas tabelas indica que para $\theta_0 = 45^\circ$ se utilizou a série de Navier (6.2) com a_{mn} dado por (6.3) com 1000 termos. Para os restantes valores de θ_0 recorreu-se ao trabalho de Morley [72].

	θ_0 (graus)				
m	45	50	60	70	75
4	0.480190	0.280607	0.333445	0.169771	0.028904
6	0.479175	0.394249	0.332937	0.180722	0.106657
8	0.479085	0.441664	0.332913	0.180449	0.108460
10	0.464448	0.415637	0.332889	0.180558	0.108377
12	0.477789	0.520176	0.338676	0.180148	0.108534
Referência	0.478864	0.448	0.333	0.180	0.108

Tabela 6.31: Resultados para $10 M_{yy}^{adim A}$ em laje enviesada simplesmente apoiada.

Os resultados obtidos estão, em geral, de acordo com as soluções conhecidas.

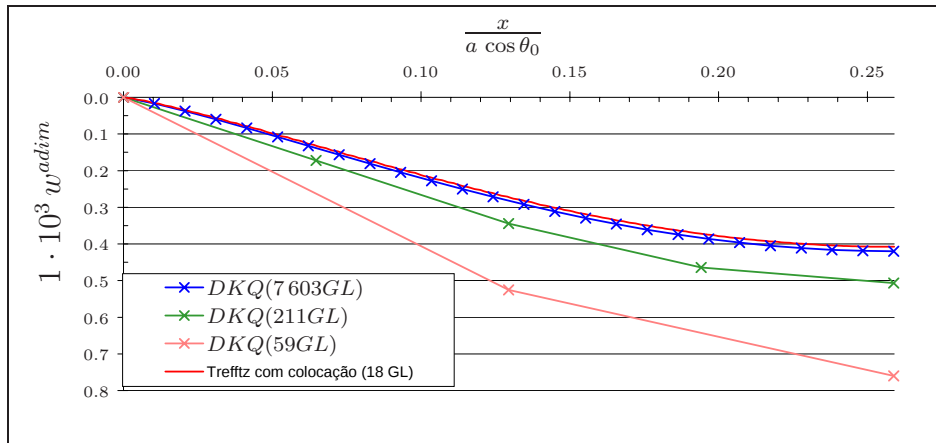
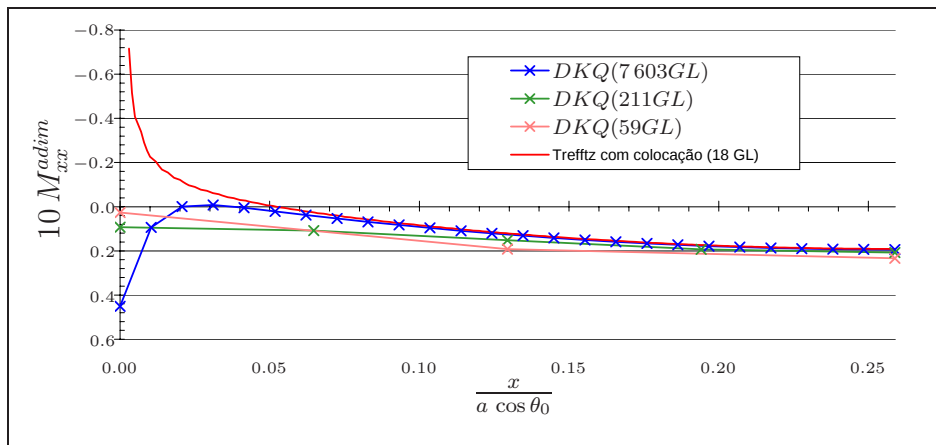
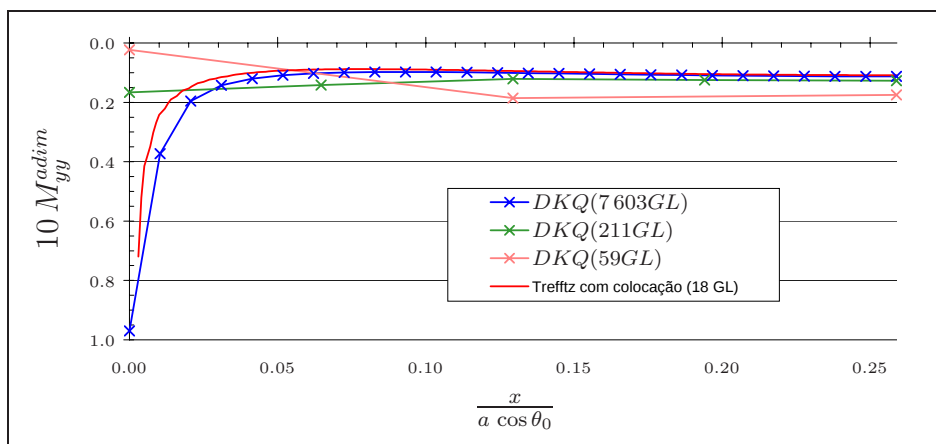
Note-se que para $\theta_0 = 45^\circ$ tem-se $M_{xx}^A \neq M_{yy}^A$. Esta falta de simetria nos resultados é natural atendendo ao tipo de funções empregues.

A comparação com os resultados obtidos empregando o programa de cálculo automático de estruturas SAP 2000 [13] foi realizada a fim de extrair conclusões acerca da importância do campo singular induzido pelo ângulo de viés.

Análises utilizando malhas regulares de 16, 64 e 2 500 elementos finitos DKQ com 59, 211 e 7 603 graus de liberdade (GL), respectivamente, foram elaboradas para o caso de $\theta_0 = 75^\circ$.

A comparação com os resultados obtidos pelo presente método para $m = 8$, a que correspondem 18 GL é efectuada na figura 6.47. Para o cálculo dos momentos flectores, no caso do *FEM*, foi feita a média dos valores nodais.

Representações de contorno da solução obtida utilizando a abordagem discreta com 20 pontos de colocação e $m = 8$ são apresentadas nas figuras 6.48 e 6.49. De notar a convergência das soluções obtidas com o elemento DKQ e a concordância com o método proposto para a malha mais refinada. Existe, contudo, uma discrepância em relação ao momento flector M_{xx} , a qual se nota numa faixa de cerca de 20% do vão na vizinhança do canto obtuso. Nessa zona o presente método consegue captar a inversão da curvatura associada à *reação de canto* ao longo da diagonal com origem no canto e que é ignorada pelo SAP 2000.

(a) Deslocamento transversal, w .(b) Momento flector segundo y , M_{xx} .(c) Momento flector segundo x , M_{yy} .Figura 6.47: Resultados para $\theta_0 = 75^\circ$ em laje enviesada simplesmente apoiada.

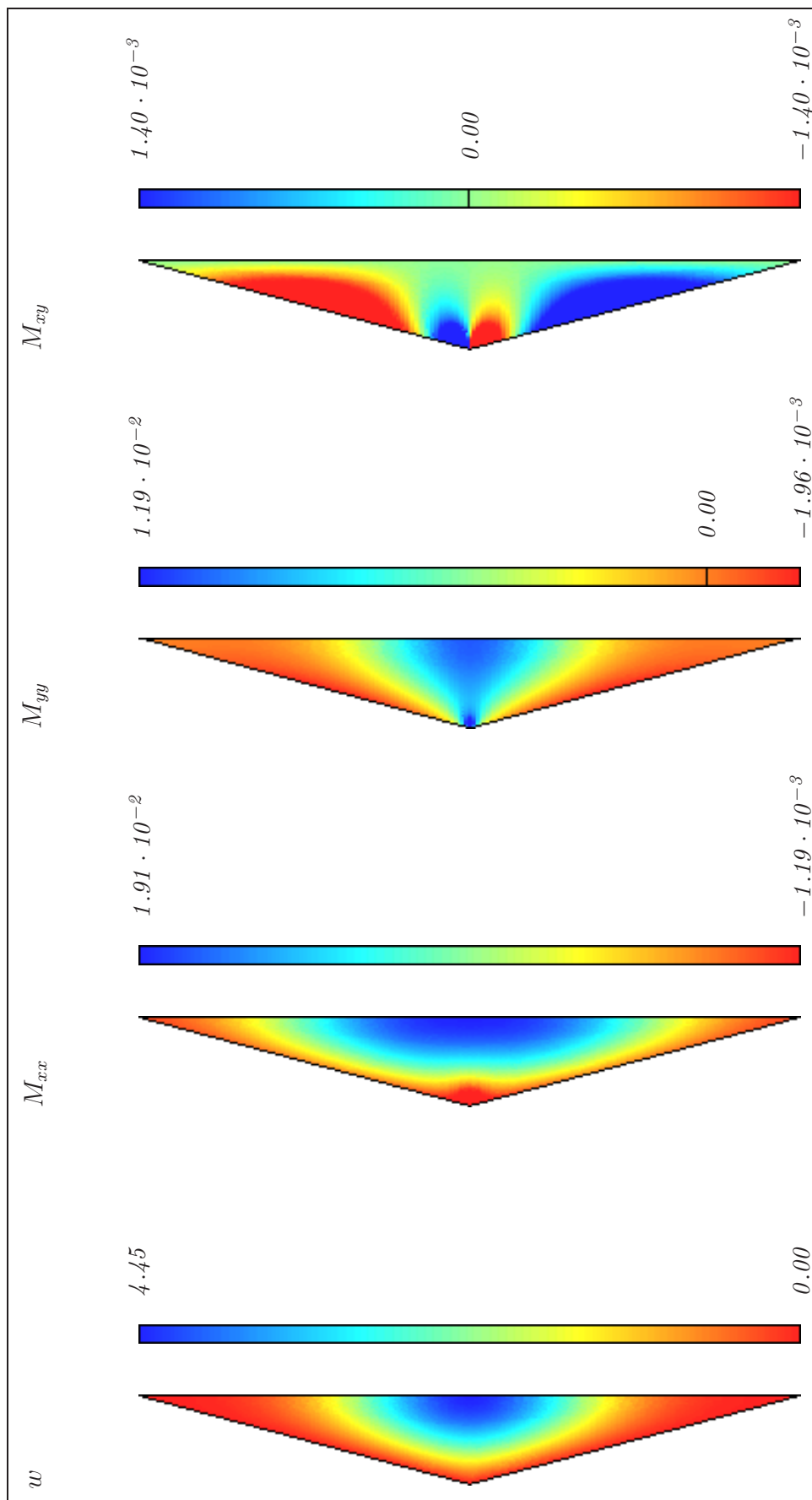


Figura 6.48: Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje enviesada simplesmente apoiada para $\theta_0 = 75^\circ$.

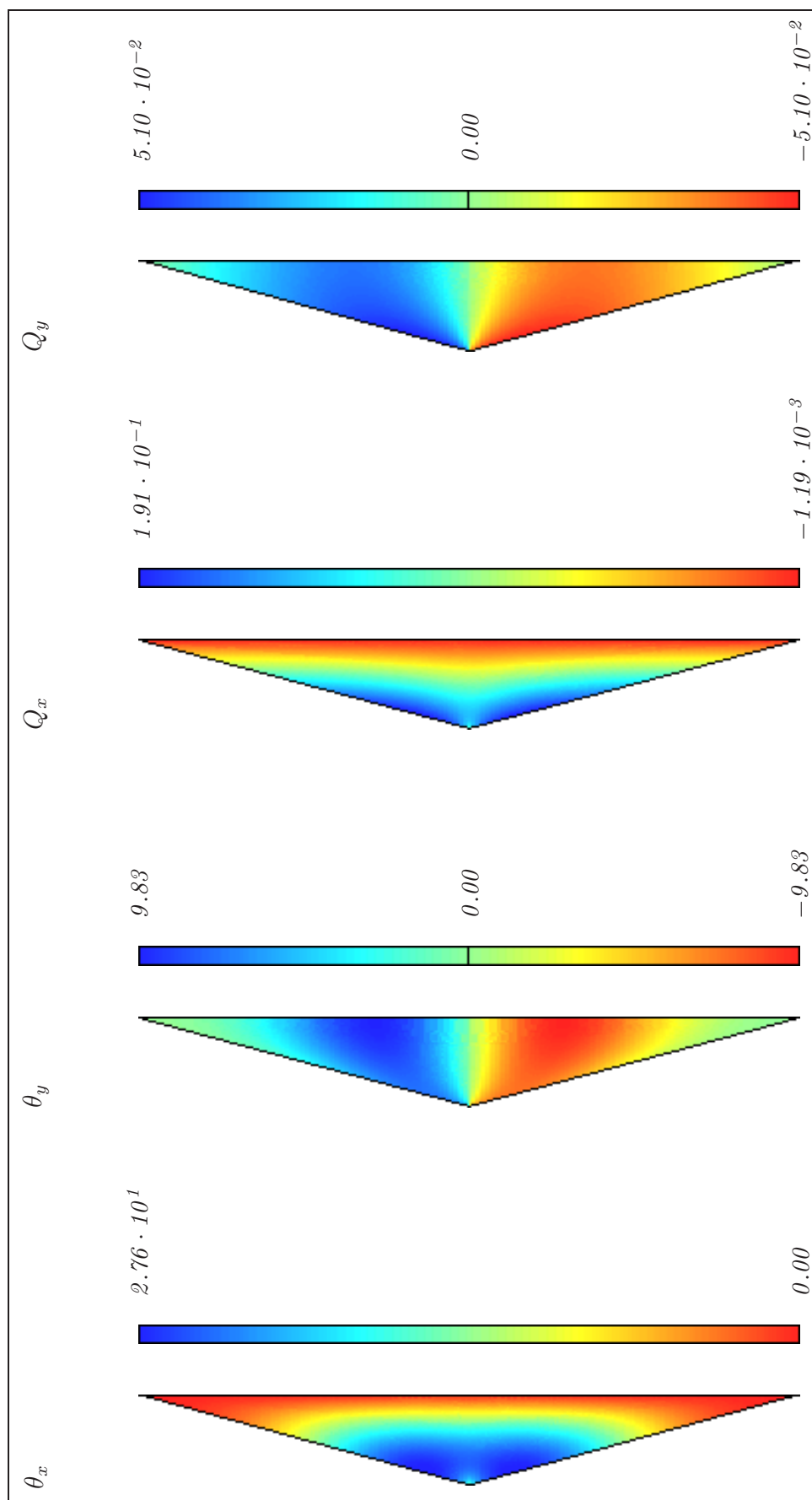


Figura 6.49: Campo de rotações e diagramas de esforço transverso em laje enfiada simplesmente apoiada para $\theta_0 = 75^\circ$.

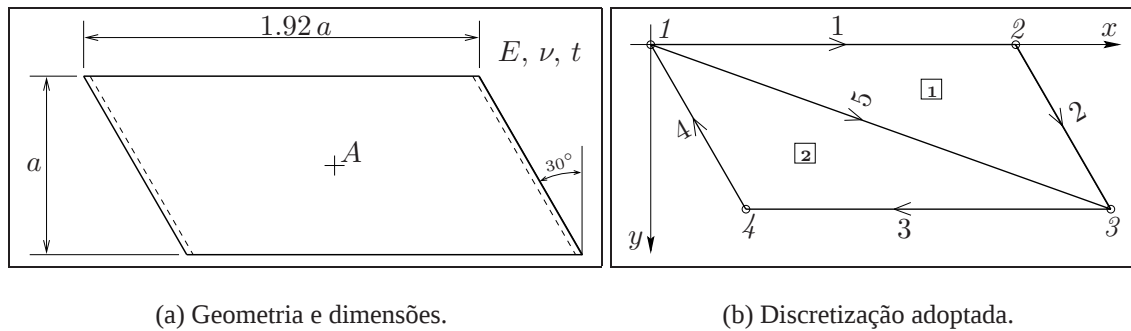


Figura 6.50: Laje enviesada apoiada-livre.

6.4.2 Laje simplesmente apoiada-livre

Carga uniformemente distribuída

Considere-se a laje e a sua discretização representadas na figura 6.50. Esta laje, que pode ser considerada uma situação típica em tabuleiros de pontes, apresenta duas zonas singulares associadas a dois cantos obtusos. Cada um desses cantos deverá pertencer a uma única região, daí que se tenham considerado duas regiões. A colocação é feita apenas na interface. Nos restantes bordos as condições de fronteira são satisfeitas *a priori*.

A fim de comparar o resultado com uma solução existente na literatura considere-se $\nu = 0.2$.

Torna-se necessário determinar as raízes da equação transcendente (caso 5) que consta da tabela 4.1, página 51.

Neste caso as raízes dependem do valor do coeficiente de Poisson pois também estão envolvidas condições de fronteira de natureza estática.

Na tabela 6.32 encontram-se listadas as primeiras 20 raízes. As primeiras 5 são reais e as restantes complexas.

O termo $k = 0$ é reservado para a rotação de corpo rígido em torno do bordo simplesmente apoiada.

Os resultados adimensionais obtidos pelo presente método *dependem* do valor numérico empregue para as constantes do problema. As escalas efectuadas não eliminam totalmente esta dependência, constatando-se que são atribuídos involuntariamente *pesos artificiais* às condições de fronteira estáticas.

Em particular, no caso das funções para cantos surge o termo $\frac{p}{D}$ no vector que representa as solicitações que origina algumas diferenças de magnitude de valores entre a matriz $\mathbf{K}$ e o vector $\mathbf{f}$.

k	$\Re_k$	$\Im_k$
1	0.712999193037099	—
2	1.583543489574467	—
3	2.135268460983237	—
4	3.181394007058043	—
5	3.541409077482337	—
6	4.862873622413461	0.0782518204832020
7	6.364013122102321	0.2018651761467750
8	7.864926326388522	0.2689009898752850
9	9.365677638673523	0.3183968587220900
10	10.86630860745550	0.3582975624179000
11	12.36684736530481	0.3919526863698970
12	13.86731370941722	0.4211553679072030
13	15.36772201677514	0.4469977269302480
14	16.86808300539667	0.4702019175526800
15	18.36840484472062	0.4912736787274750
16	19.86869388116088	0.5105825989093620
17	21.36895512689858	0.5284078208994000
18	22.86919259796807	0.5449658036028290
19	24.36940955354541	0.5604280603222210
20	25.86960866877670	0.5749329647384320

Tabela 6.32: Raízes da equação transcendente para o caso simplesmente apoiado-livre para $\theta_0 = 60^\circ$ e $\nu = 0.2$.

m	GL	$w^{adim A}$	$M_{xx}^{adim A}$	$10M_{yy}^{adim A}$	$w_{máx}^{adim}$
6	16	0.115232	0.306970	0.494164	0.127360
8	24	0.113743	0.317167	0.480833	0.124829
10	32	0.113940	0.314278	0.516912	0.125418
12	40	0.113951	0.313282	0.522959	0.125442
14	48	0.113939	0.313882	0.525791	0.125437
16	56	0.113936	0.313974	0.527628	0.125438
18	64	0.113936	0.313952	0.529221	0.125438
20	72	0.113936	0.313964	0.528796	0.125438
FEM	7701	0.113919	0.314040	0.528310	0.125388
FEM	29 241	0.113937	0.313959	0.528786	0.125444
Ref. [86]		0.1183	—	—	0.1302

Tabela 6.33: Resultados para laje enviesada com cantos obtusos simplesmente apoiados-livre.

Com vista a melhorar o condicionamento da matriz foi atribuído um módulo de elasticidade que torna unitário a relação $\frac{p}{D}$, mantendo as outras constantes o valor usual, isto é, $E = \frac{12(1-\nu^2)p}{t^3}$, ou seja, $E = 11\,520$. A rigidez de flexão D torna-se, também, unitária.

A tabela 6.33 expõe os resultados obtidos utilizando a abordagem discreta com 20 pontos de colocação no lado onde a colocação é efectuada, o que origina um sistema com 80 equações. A comparação com valores extraídos da referência [86] e com recurso ao FEM é efectuada. Para este último foi utilizado o programa SAP 2000 com duas malhas regulares de 2 500 e 9 600 elementos DKQ totalizando 7 701 e 29 241 GL, respectivamente. Os valores da referência [86] foram calculados através do método das diferenças finitas.

O deslocamento máximo ocorre sempre ao longo do bordo livre.

A concordância entre o presente método e o FEM é evidente. Em virtude desta pode concluir-se que a solução determinada pelo método das diferenças finitas é de menor qualidade.

Nas figuras 6.51 e 6.52 comparam-se os valores normalizados do deslocamento, rotações e momentos flectores e torsões ao longo do bordo 1, figura 6.50(b), pelo presente método e com recurso ao programa SAP 2000 com a malha regular de 2 500 elementos DKQ.

De notar a concordância das duas soluções no que diz respeito ao deslocamento transversal e rotações, figura 6.51.

No que diz respeito a esforços, as soluções são semelhantes, excepto junto ao canto obtuso:

- os momentos M_{xx} e M_{xy} tendem para $-\infty$ segundo o método de Trefftz (este valor foi truncado nas figuras 6.52(a) e 6.52(c)) enquanto o elemento DKQ tem um valor finito;
- o momento M_{yy} é exacto segundo o método de Trefftz, pois expansão utilizada satisfaz essa condição de fronteira *a priori*. O elemento DKQ origina erros significativos;

Destaque-se que, apesar de não se tratar de uma estrutura simétrica, seria possível tirar partido do seguinte facto: os coeficientes da expressão que descrevem o campos de deslocamento e consequentemente de rotações e diagramas de esforços para cada região são idênticos, pois as regiões têm as mesmas propriedades geométricas e materiais e o mesmo carregamento. Note-se que as quatro condições de continuidade teriam de ser impostas, ao contrário do exemplo anterior em que duas são identicamente satisfeitas. Assim bastaria a determinação de apenas uma série finita de coeficientes para a expansão. Este facto não foi tomado em consideração na resolução do problema mas a *simetria* foi verificada observando a igualdade entre coeficientes do mesmo grau nas duas expansões.

Nas figuras 6.51(b) e 6.51(c) as rotações seguem a definição (2.4), dada no capítulo 2, página 12 e não a habitualmente utilizada no FEM.

Representações de contorno da solução obtida utilizando a abordagem discreta com 20 pontos de colocação e $m = 10$ são apresentadas nas figuras 6.53 e 6.54.

Carga central concentrada

O facto de apenas ser conhecida a solução particular para carga uniformemente distribuída para os campos de deslocamento transversal singulares apresentados não deve ser tido como uma limitação à análise de outras solicitações.

O efeito das singularidades no campo de tensões é, em geral, importante numa zona confinada. Fora desta zona pode utilizar-se a solução regular e consequentemente, todas as soluções derivadas para essa situação. As condições de continuidade de deslocamentos e esforços generalizados devem ser impostas na interface.

Considere-se a mesma laje do exemplo anterior, figura 6.50(a), submetida a uma carga central uniformemente distribuída numa zona rectangular cujas dimensões são $0.1 a \times 0.06 a$ segundo as direcções x e y , respectivamente. A resultante desta carga é $\overline{P}$.

A discretização adoptada encontra-se indicada na figura 6.55. Três regiões foram consideradas, sendo a número 2 regular e as restantes duas singulares. As funções incluídas na solução homogénea para estas últimas é a mesma do exemplo anterior, sendo as raízes da respectiva equação transcendente as que constam da tabela 6.32.

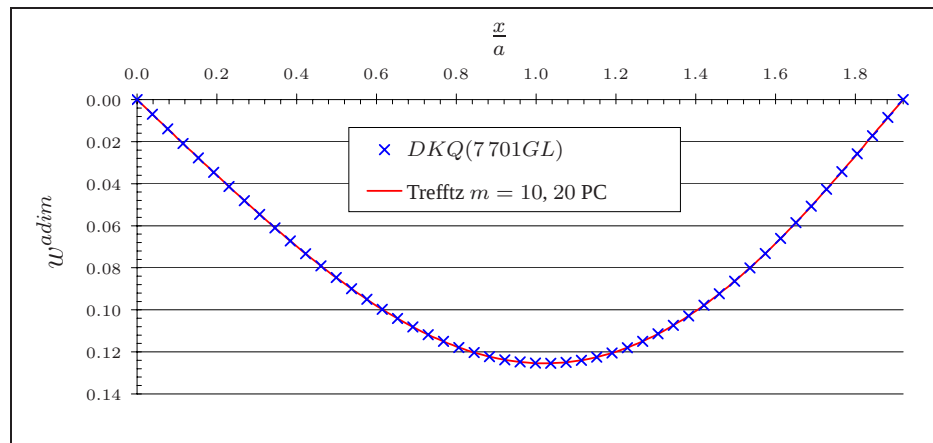
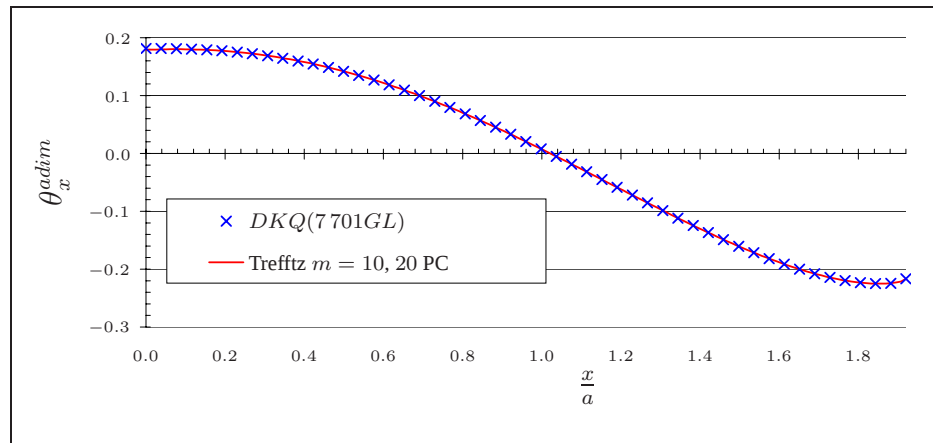
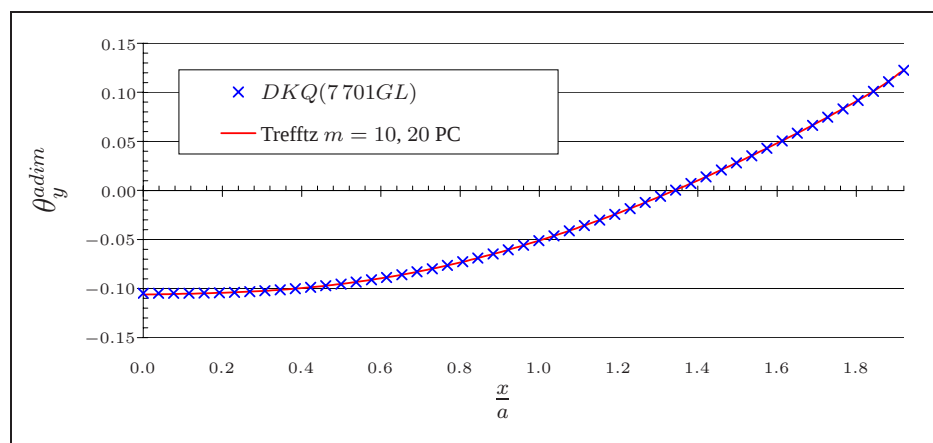
(a) Deslocamento, w (b) Rotação em x , θ_x (c) Rotação em y , θ_y

Figura 6.51: Campos de deslocamento e rotações em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiado-livre sujeita a carga uniforme para $y = 0$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.

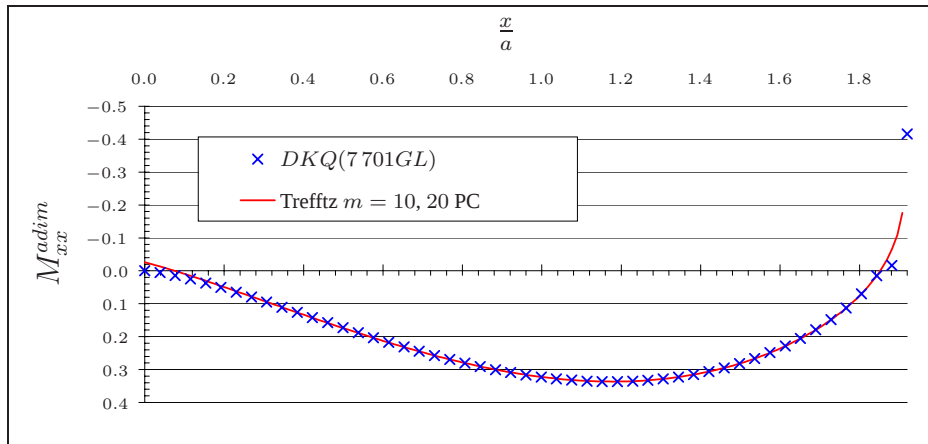
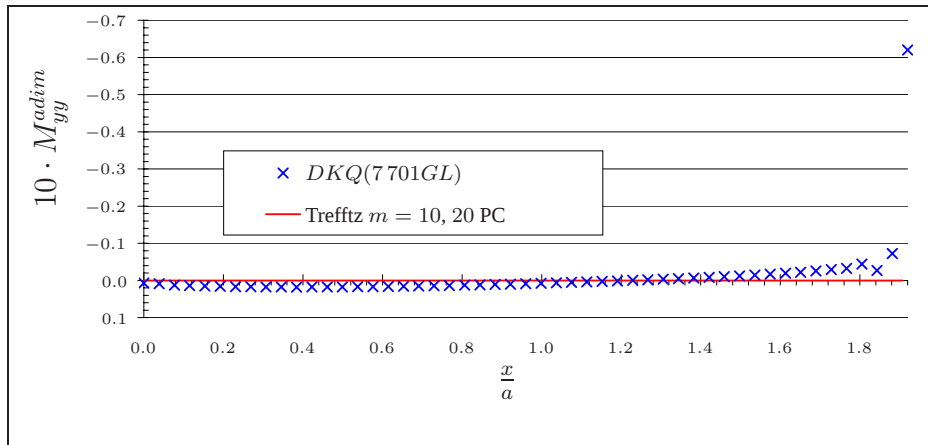
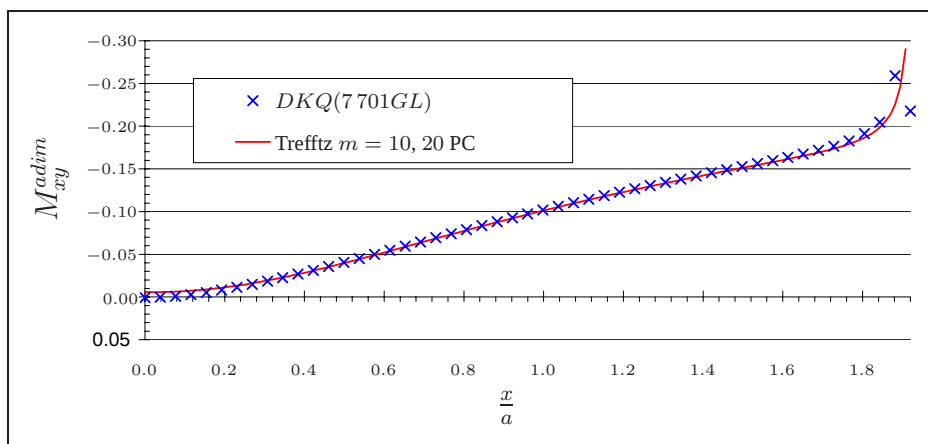
(a) Momento flector segundo y , M_{xx} .(b) Momento flector segundo x , M_{yy} .(c) Momento torsor, M_{xy} .

Figura 6.52: Diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiado-livre sujeita a carga uniforme para $y = 0$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.

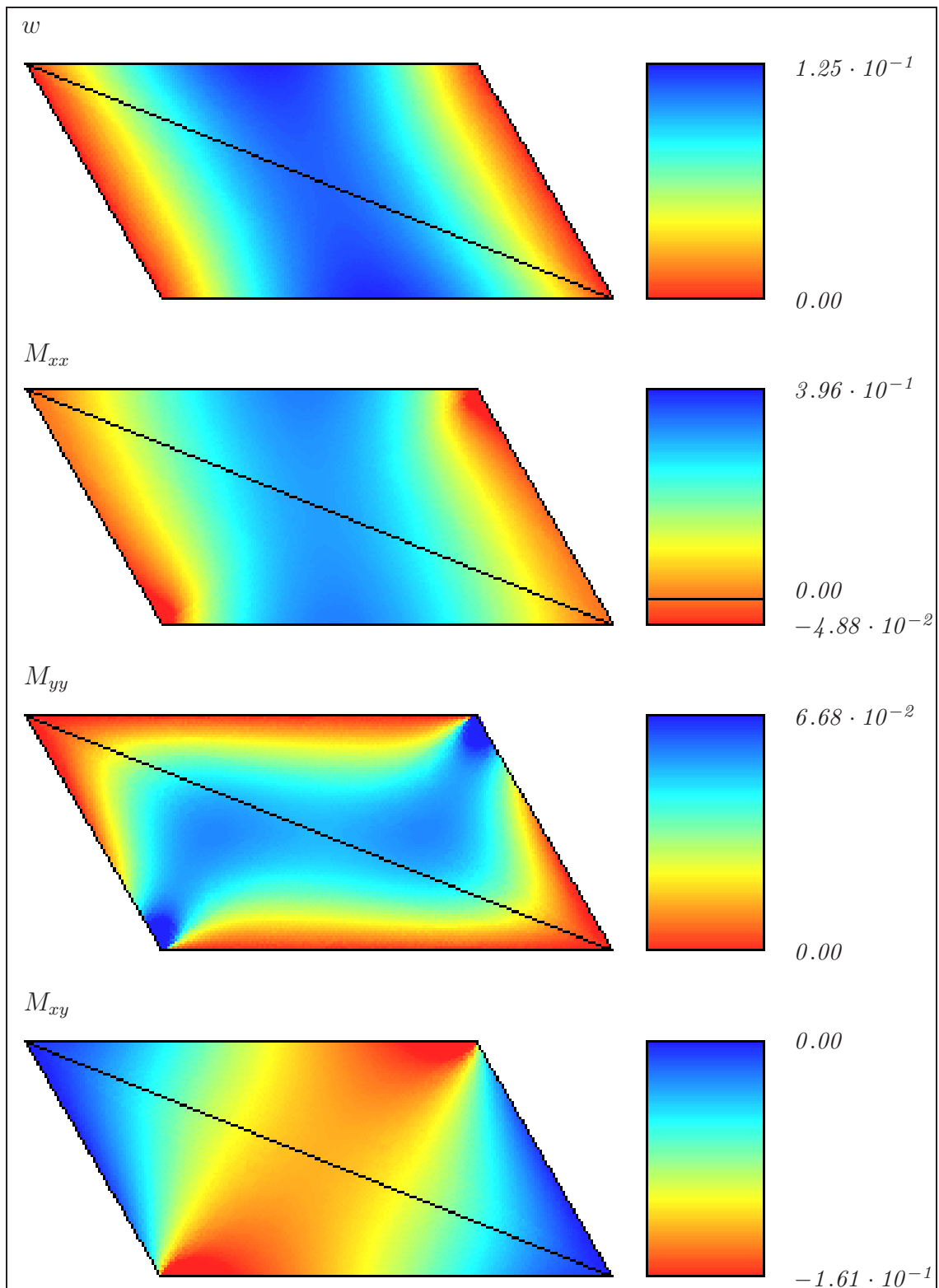


Figura 6.53: Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga uniforme.

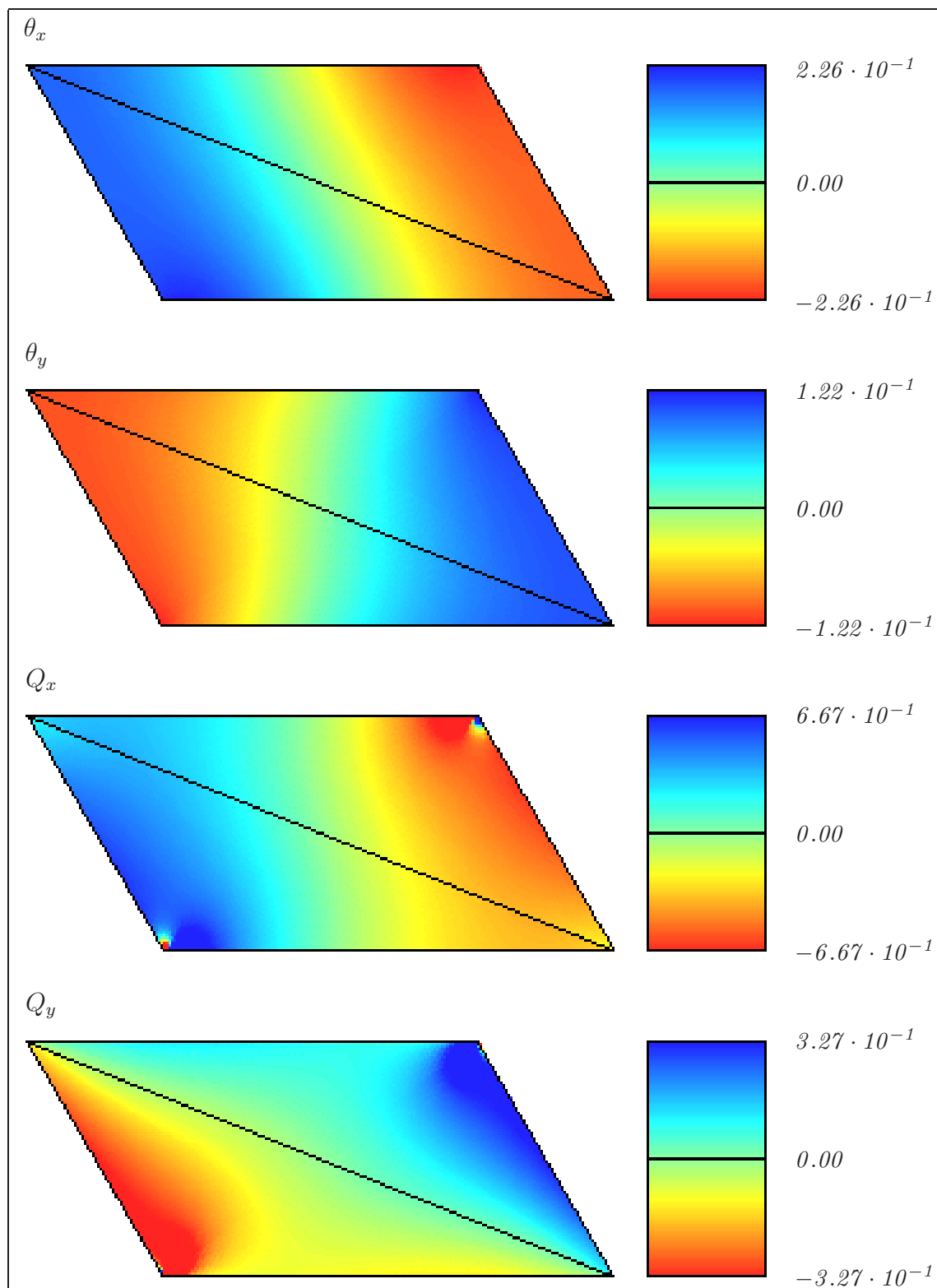


Figura 6.54: Campos de rotações e diagramas de esforço transverso em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga uniforme.

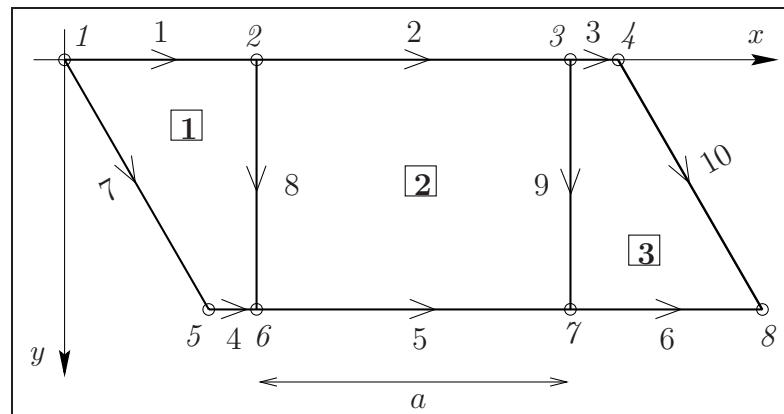


Figura 6.55: Discretização adoptada para laje enviesada apoiada-livre sujeita a carga central concentrada.

A análise foi efectuada utilizando a abordagem discreta com 15 pontos de colocação (nos bordos onde as condições de fronteira não são satisfeitas *a priori*) e $m = 20$ para as três regiões, resultando um sistema de 240 equações a 152 incógnitas.

A comparação dos resultados com uma malha regular de 4 500 elementos DKQ com 13 821 graus de liberdade ao longo do eixo $y = \frac{a}{2}$ é feita nas figuras 6.56 e 6.57. A solicitação foi modelada através de cargas concentradas nos nós contidos na zona de aplicação do carregamento.

A concordância para deslocamentos e momentos é evidente. Os desvios obtidos nos esforços transversos ficam a dever-se à posição assimétrica dos nós que foram carregados no FEM.

Representações de contorno da solução obtida constam das figuras 6.58 e 6.59. A concentração de esforços junto à zona carregada é evidente.

6.4.3 Laje encastrada-livre

Considere-se a laje enviesada com dois cantos obtusos do tipo encastrado-livre representada na figura 6.60. O ângulo de viés é 135° .

A discretização adoptada é a mesma do exemplo anterior, figura 6.50(b).

Pelas mesmas razões apontadas anteriormente o módulo de elasticidade foi considerado igual a $E = 10\,920$. O coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$.

Na tabela 6.34 encontram-se listadas as primeiras 26 raízes da equação transcendente (caso 3) que consta da tabela 4.1, página 51.

Foram realizados testes empregando a abordagem discreta e contínua, cujos resultados

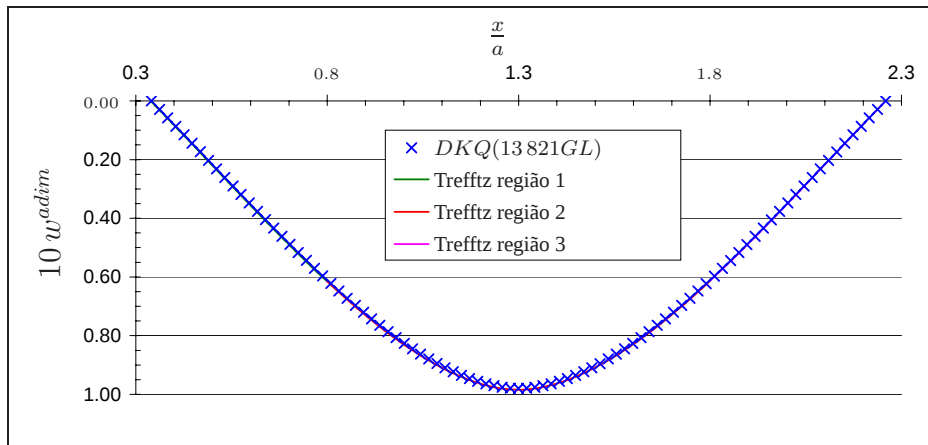
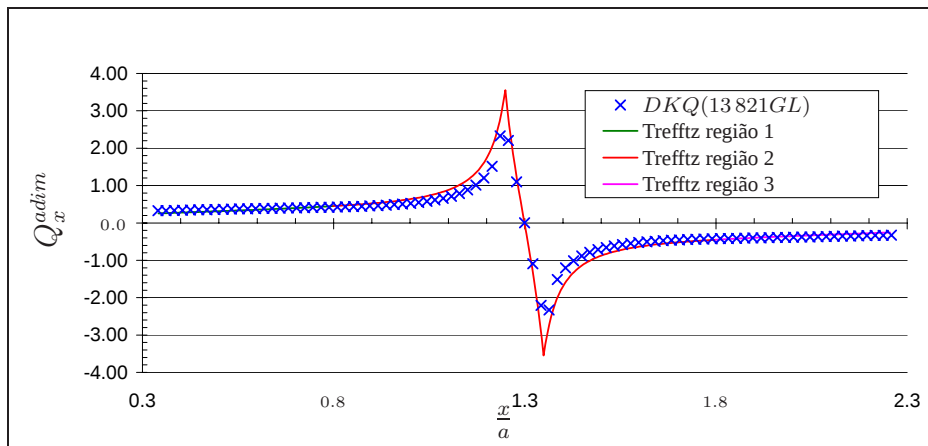
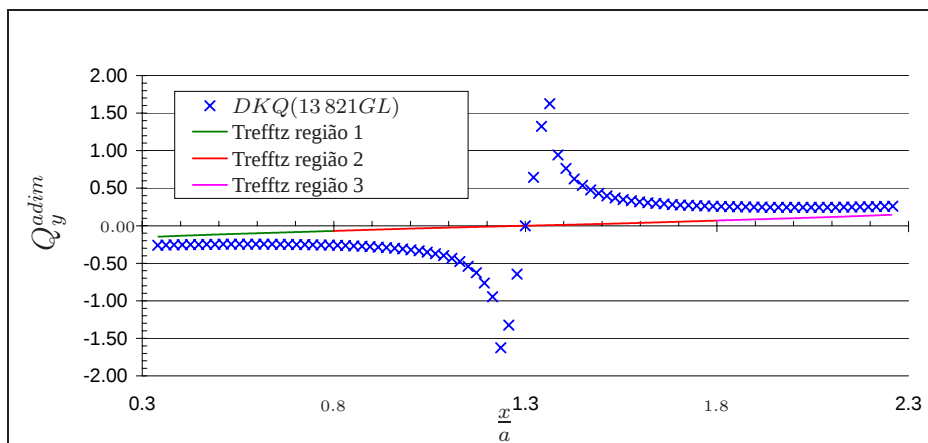
(a) Deslocamento, w (b) Esforço transversal, Q_x .(c) Esforço transversal, Q_y .

Figura 6.56: Campo de deslocamentos e diagramas de esforço transversal em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga central concentrada para $y = \frac{a}{2}$. Comparação com FEM.

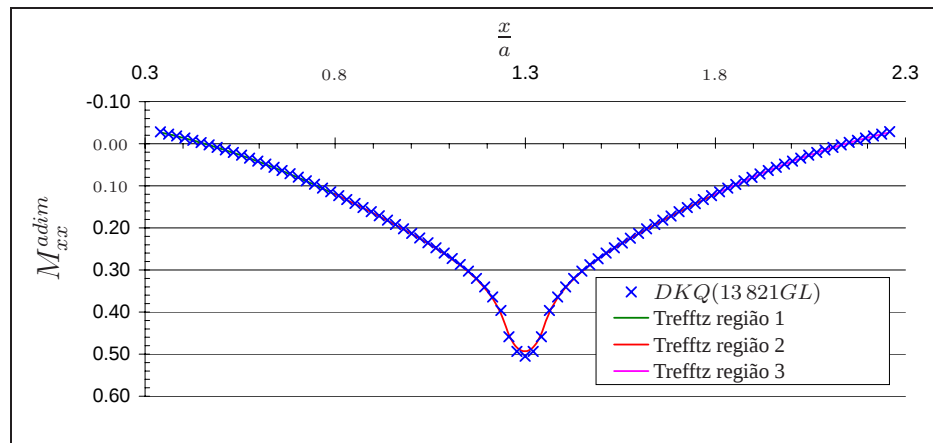
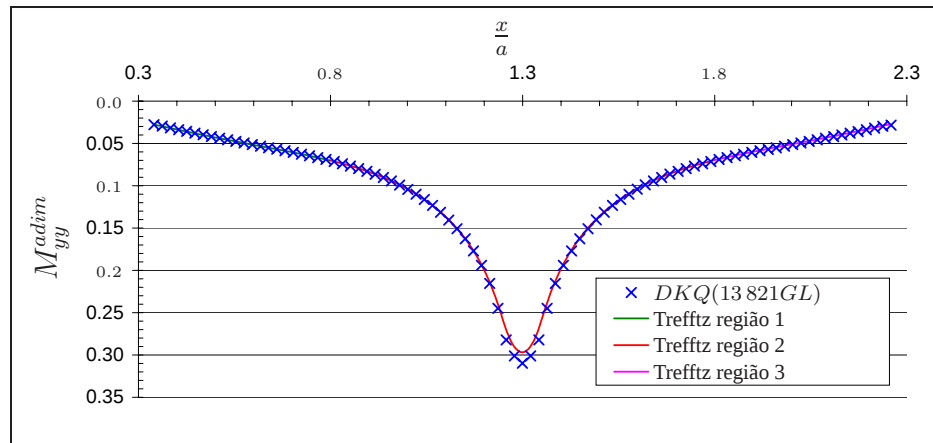
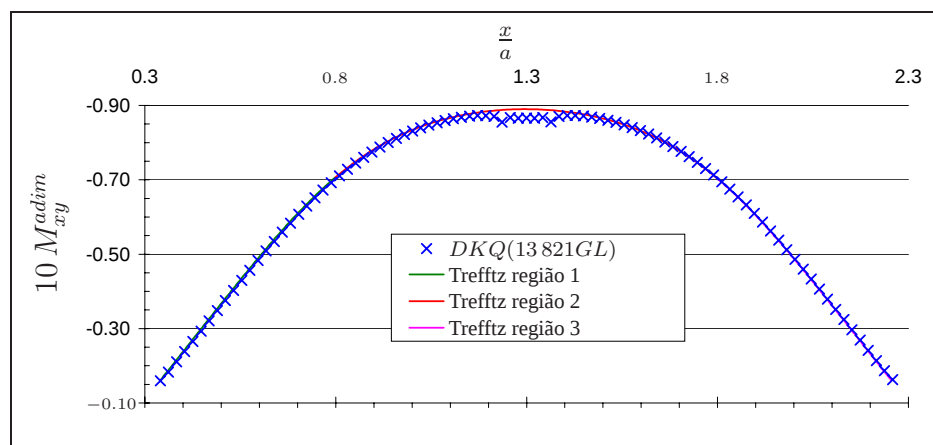
(a) Momento flector segundo y , M_{xx}^{dim} .(b) Momento flector segundo x , M_{yy}^{dim} .(c) Momento torsor, M_{xy}^{dim} .

Figura 6.57: Diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga central concentrada para $y = \frac{a}{2}$. Comparação com FEM.

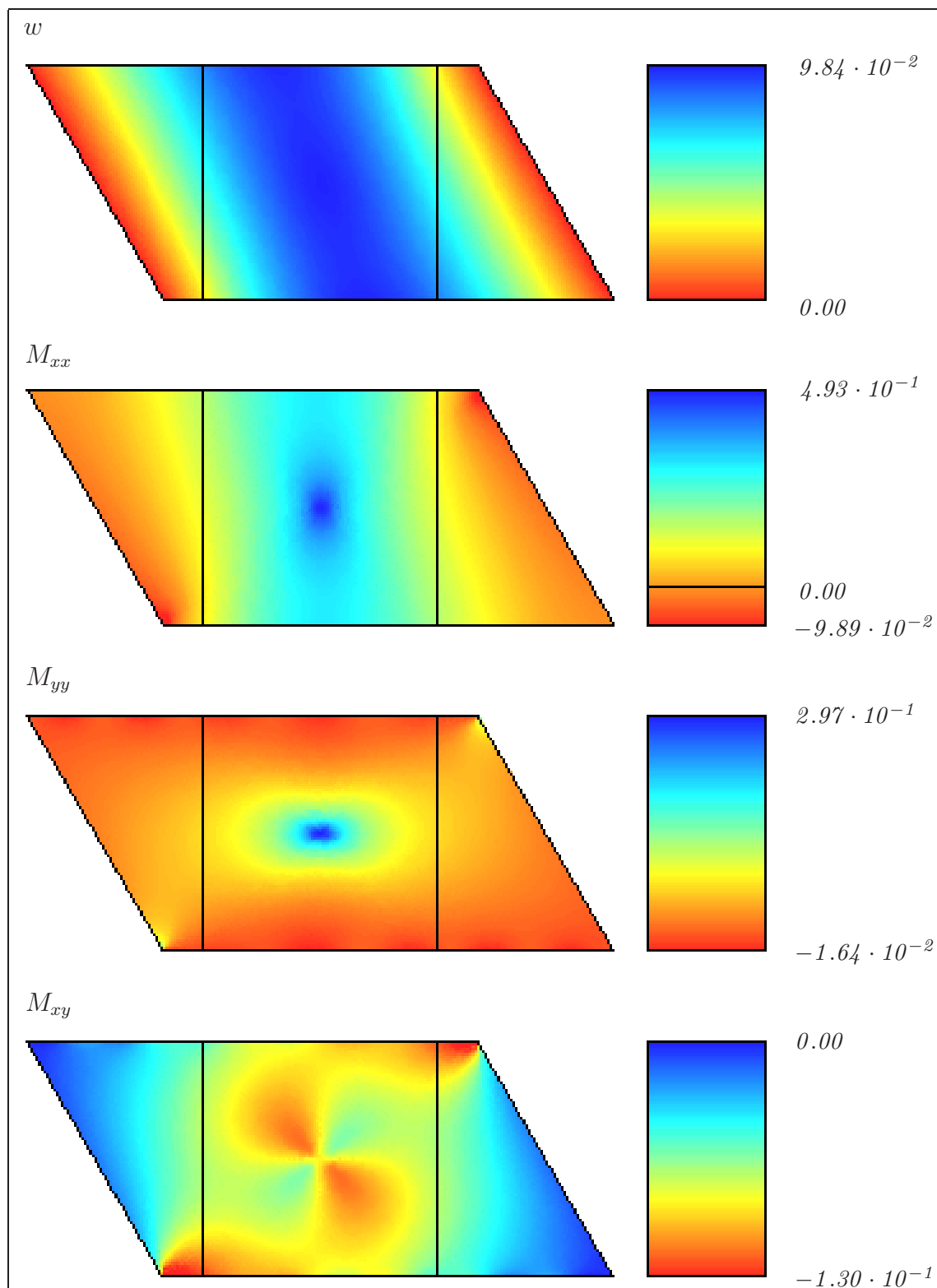


Figura 6.58: Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga central concentrada.

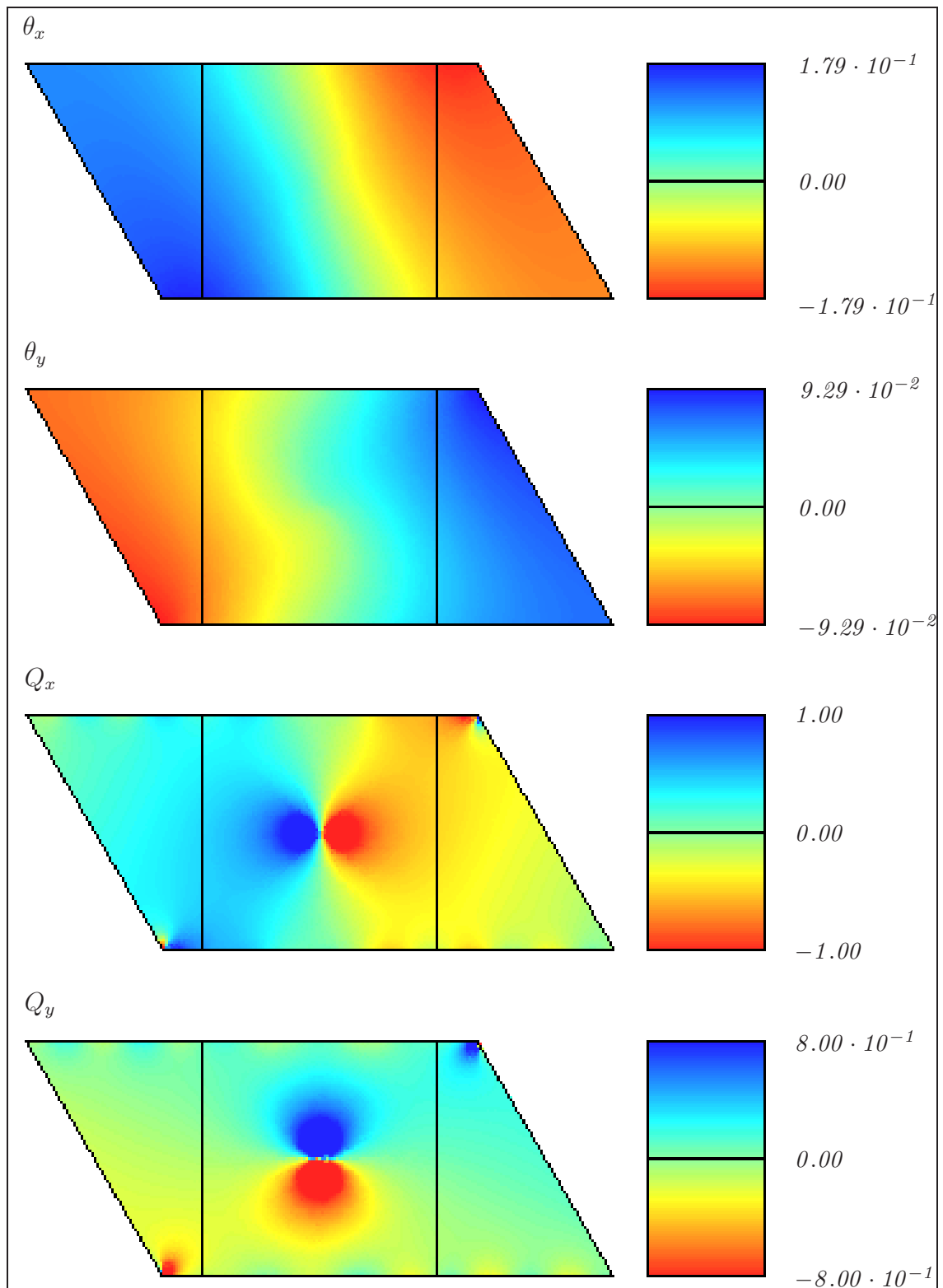


Figura 6.59: Campos de rotações e diagramas de esforço transverso em laje enviesada com dois cantos simplesmente apoiados-livre sujeita a carga central concentrada.

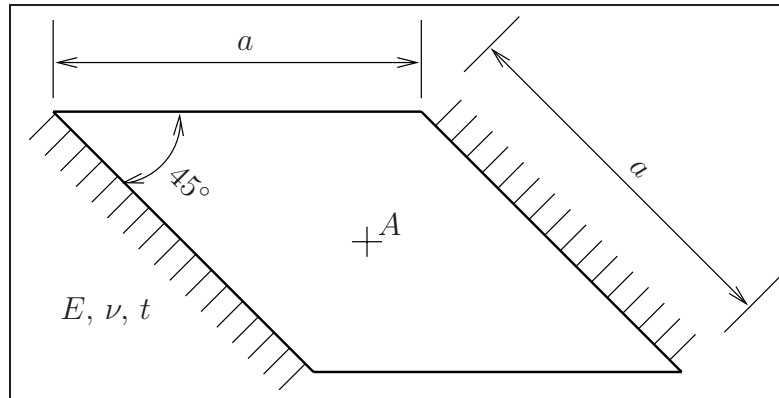


Figura 6.60: Laje enviesada encastrada-livre. Geometria e dimensões.

k	$\Re_k$	$\Im_k$
0	0.675692401180203	0.322071247673027
1	2.032536448443552	0.224968064905448
2	3.094715315659661	—
3	3.805568826023740	—
4	4.033395017387404	—
5	5.275093908051378	0.410727770310631
6	6.617925109705349	0.557198256469756
7	7.957111625342903	0.657459948917370
8	9.294614147415690	0.735417201485340
9	10.63115283320135	0.799790262130265
10	11.96706810854878	0.854876335507277
11	13.30254739848883	0.903151513922285
12	14.63770497417844	0.946189206088916
13	15.97261574340684	0.985058913537214
14	17.30733152231922	1.020524393060124
15	18.64188966278255	1.053152049995605
16	19.97631798018510	1.083374662301811
17	21.31063773951605	1.111531012951429
18	22.64486555364856	1.137891678662612
19	23.97901463873105	1.162676445341135
20	25.31309567231474	1.186066439880657
21	26.64711739659093	1.208212807100563
22	27.98108705275116	1.229243058000063
23	29.31501070031714	1.249265806746842
24	30.64889345620776	1.268374367036293
25	31.98273967660598	1.286649524594179

Tabela 6.34: Primeiras raízes da equação transcendente para o caso encastrado-livre com $\theta_0 = 67.5^\circ$ e $\nu = 0.3$.

m	GL	n_{PC}	$n_{equações}$	$10^3 w^{adim} A$	$10 M_{xx}^{adim} A$	$10^2 M_{yy}^{adim} A$	$10^2 w_{máx}^{adim}$
15	58	29	116	0.758092	0.139099	0.950622	0.126580
20	78	39	156	0.766520	0.147709	0.870667	0.128890
25	98	49	196	0.767325	0.143167	0.931172	0.128920
30	118	59	236	0.760410	0.125786	0.935428	0.128910
FEM	4797	—	4797	0.771478	0.143423	0.917173	0.129162
FEM	24297	—	24297	0.767589	0.142603	0.922252	0.128938

Tabela 6.35: Resultados para laje enviesada com cantos obtusos encastrado-livre. Abordagem discreta.

m	GL	$1 \cdot 10^3 w^{adim} A$	$10 M_{xx}^{adim} A$	$1 \cdot 10^2 M_{yy}^{adim} A$	$1 \cdot 10^2 w_{máx}^{adim}$
15	58	0.766789	0.141851	0.930907	0.128910
20	78	0.766778	0.142540	0.921881	0.128920
25	98	0.766824	0.142454	0.923580	0.128922
SAP 2000	4797	0.771478	0.143423	0.917173	0.129162
SAP 2000	24297	0.767589	0.142603	0.922252	0.128938

Tabela 6.36: Resultados para laje enviesada com cantos obtusos encastrado-livre. Abordagem contínua.

se encontram nas tabelas 6.35 e 6.36, respectivamente.

Os testes relativos à abordagem contínua foram levados a cabo realizando integrações com 70 pontos de Gauss.

Comparações com o programa SAP 2000 foram efectuadas utilizando duas malhas regulares com 1 600 e 8 100 elementos, a que corresponde 4 797 e 24 297 graus de liberdade, respectivamente.

O deslocamento máximo ocorre sempre ao longo dos bordos livres. Note-se que este deslocamento é calculado em pontos diferentes nos dois métodos. No FEM apenas se localizou o nó com deslocamento máximo. Os resultados obtidos, em termos de distância ao canto agudo, foram: $0.60000 a$ e $0.61111 a$ para as malhas com 1 600 e 8 100 elementos, respectivamente e $0.608888 a$ utilizando o programa desenvolvido para o presente método.

Os comentários tecidos acerca da *simetria* da solução no exemplo anterior são igualmente aplicáveis a este caso.

Nas figuras 6.61, 6.62 e 6.63 comparam-se os valores normalizados do deslocamento, rotações, momentos flectores e torsões e esforços transversos ao longo do segmento de recta $y = a \frac{\sqrt{2}}{4}$, figura 6.60, pelo presente método e com recurso ao programa SAP 2000 com a malha regular de 8 100 elementos DKQ. Para os esforços são indicados os valores nodais para cada elemento, não sendo efectuada a média entre elementos adjacentes.

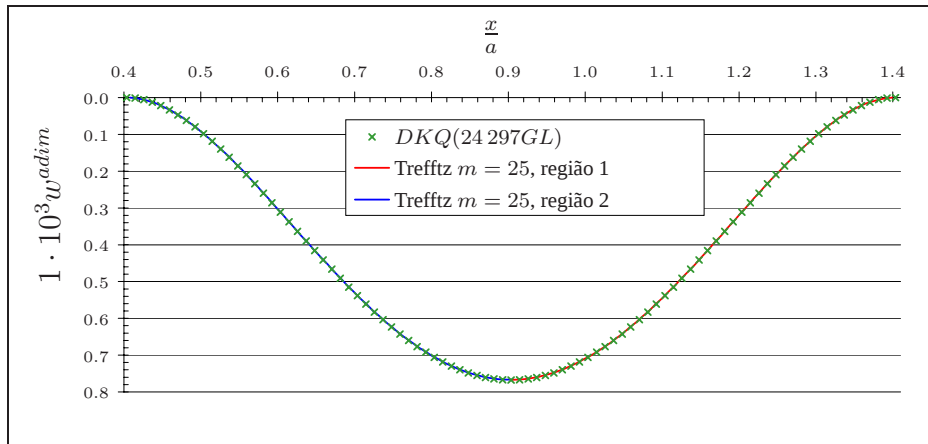
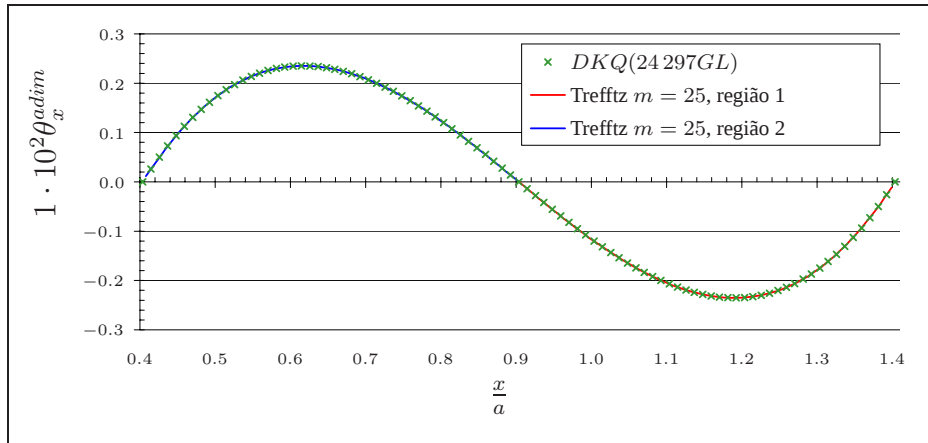
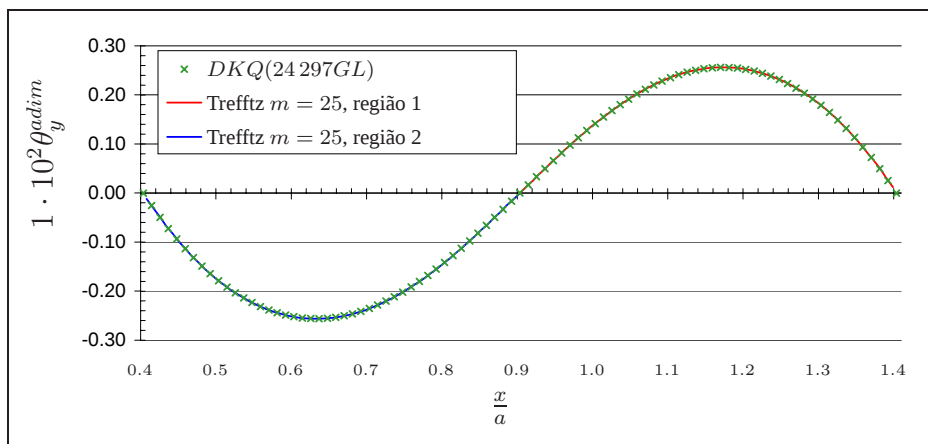
(a) Deslocamento, w (b) Rotação em x , θ_x (c) Rotação em y , θ_y

Figura 6.61: Campos de deslocamento e rotações em laje enviesada com dois cantos encastrado-livre sujeita a carga uniforme para $y = a\frac{\sqrt{2}}{4}$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.

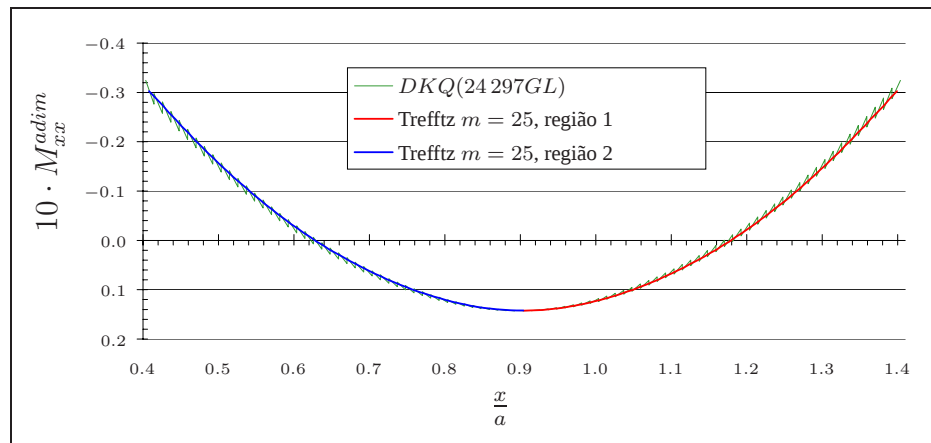
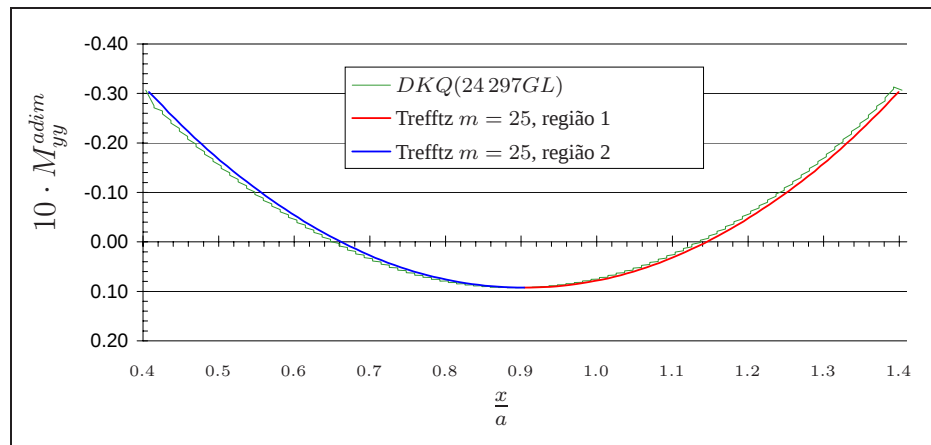
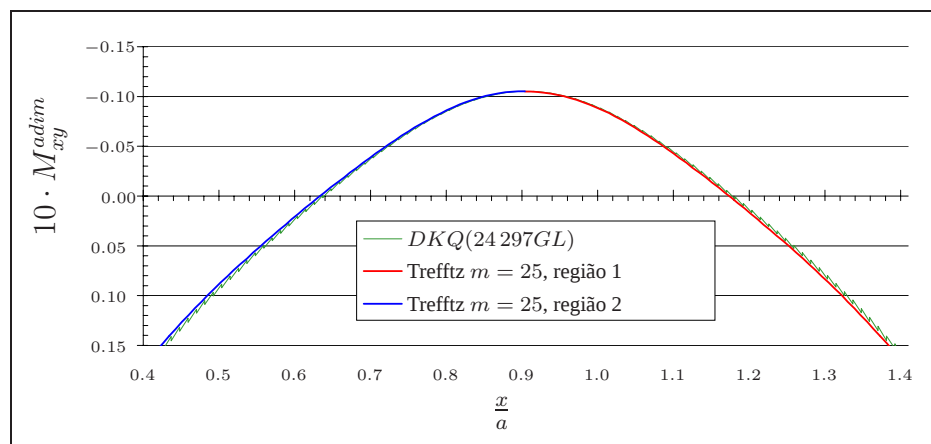
(a) Momento flector segundo y , M_{xx} .(b) Momento flector segundo x , M_{yy} .(c) Momento torsor, M_{xy} .

Figura 6.62: Diagramas de momentos em laje enviesada com dois cantos encastrado-livre sujeita a carga uniforme para $y = a\frac{\sqrt{2}}{4}$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.

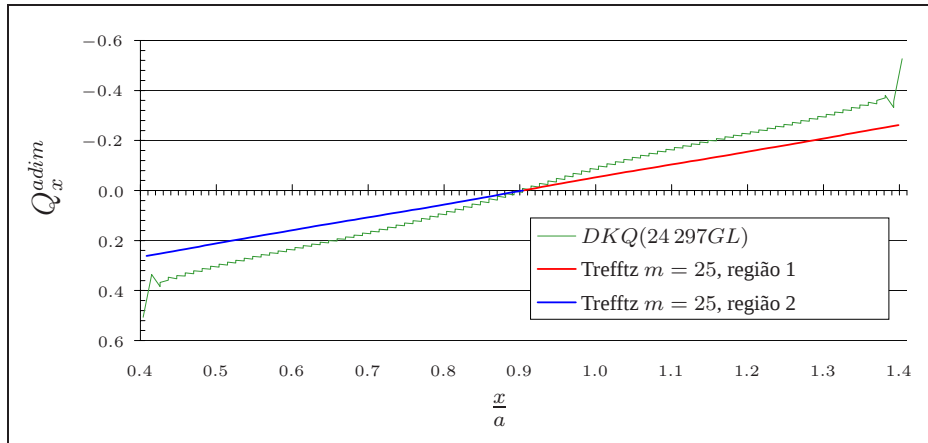
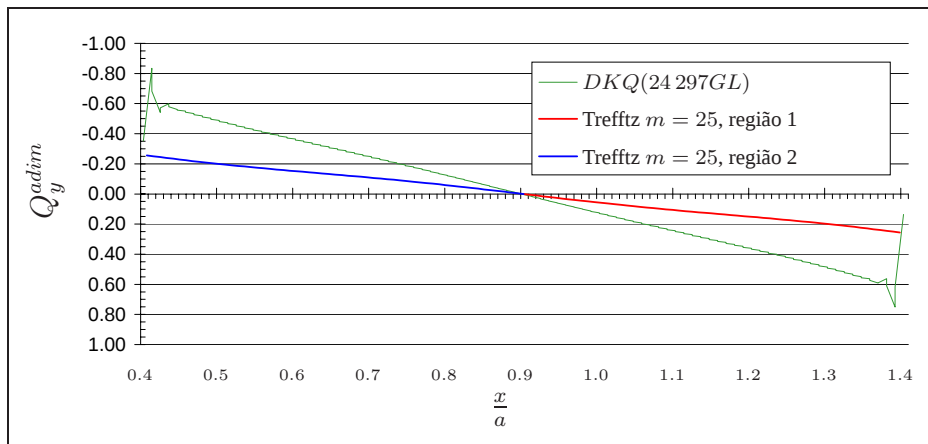
(a) Esforço transversal, Q_x .(b) Esforço transversal, Q_y .

Figura 6.63: Diagramas de esforços transversos em laje enviesada com dois cantos encastrado-livre sujeita a carga uniforme para $y = a\frac{\sqrt{2}}{4}$ na figura 6.50(a). Comparação com FEM.

Representações de contorno da solução obtida utilizando a abordagem contínua com 70 pontos de integração e $m = 25$ são apresentadas nas figuras 6.64 e 6.65.

Dos resultados obtidos conclui-se que o desempenho do método proposto, face ao elemento DKQ, é excelente.

Verifica-se para os esforços transversos algumas diferenças significativas entre os dois métodos. O andamento obtido pelo FEM é atípico para esta situação.

6.5 Lajes triangulares

Em seguida são apresentados dois exemplos que visam testar o desempenho do método descrito para lajes triangulares simplesmente apoiadas.

Considere-se a laje simplesmente apoiada cuja forma é a de um triângulo equilátero representada na figura 6.66.

6.5.1 Carga uniformemente distribuída

Considere-se que a laje se encontra submetida a uma carga uniformemente distribuída, $\bar{p}$.

A solução analítica para o campo de deslocamentos é dada por [86]

$$w(x, y) = \frac{\bar{p}}{64aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right). \quad (6.24)$$

As duas discretizações utilizadas estão representadas na figura 6.67. A primeira utiliza funções *regulares* e a segunda *singulares*: canto simplesmente apoiado em ambos os bordos.

A primeira discretização fornece a solução *exacta* para valores de $m \geq 4$ utilizando qualquer uma das abordagens. No caso da abordagem discreta deve-se utilizar um número de pontos de colocação que origine um sistema, no mínimo, determinado. Na abordagem contínua as integrações são *exactas* (para a precisão numérica utilizada).

O facto da solução *exacta* ser obtida explica-se facilmente tendo em conta que todos os termos da expressão (6.24) estão contidos na expansão do campo de deslocamentos para $m = 4$.

Os resultados obtidos com a discretização que utiliza funções singulares é, também, *exacto* para qualquer das abordagens (para a precisão numérica utilizada). Verifica-se que

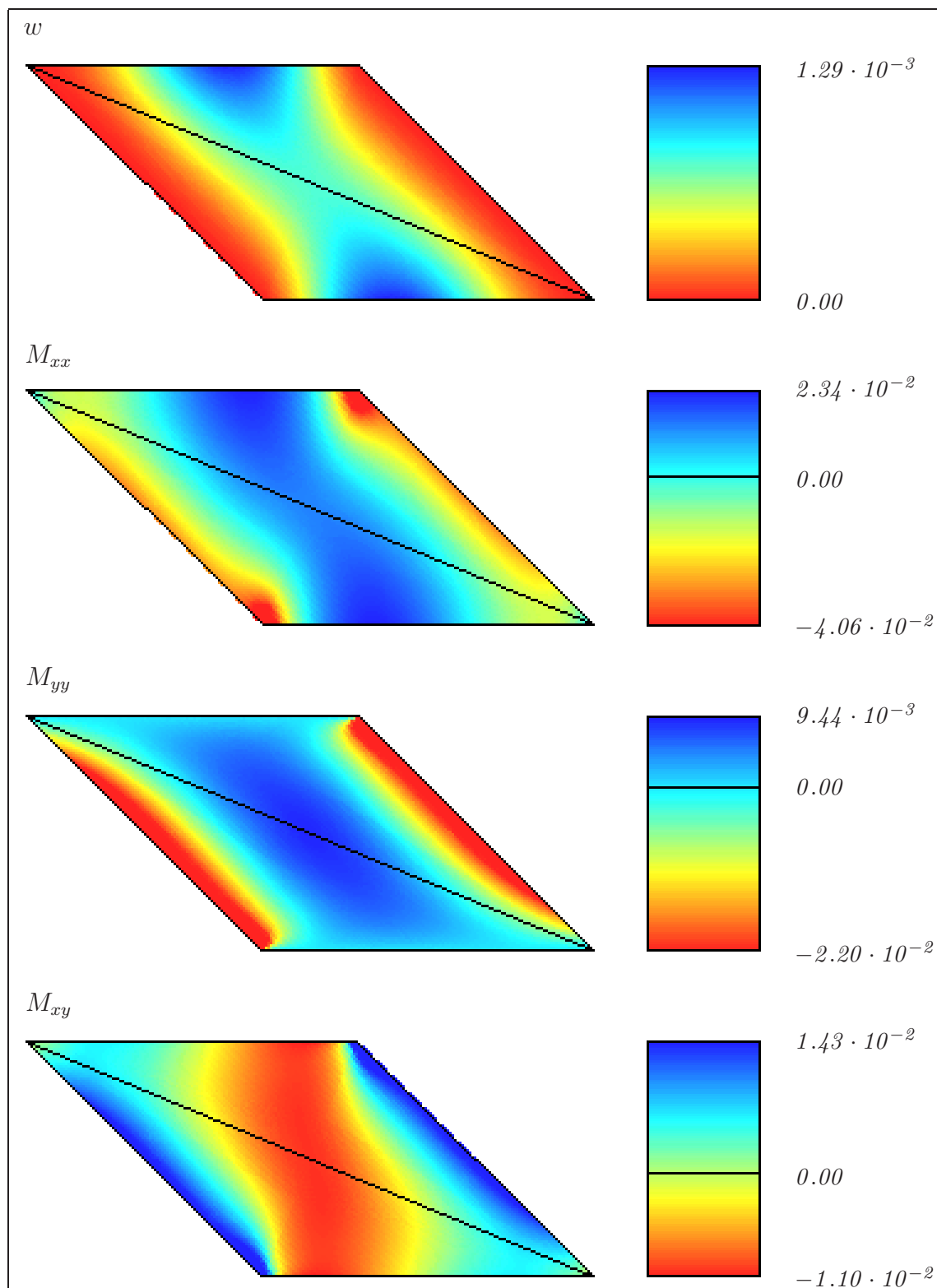


Figura 6.64: Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje enviesada com bordos encastrado-livre para $\theta_0 = 67.5^\circ$.

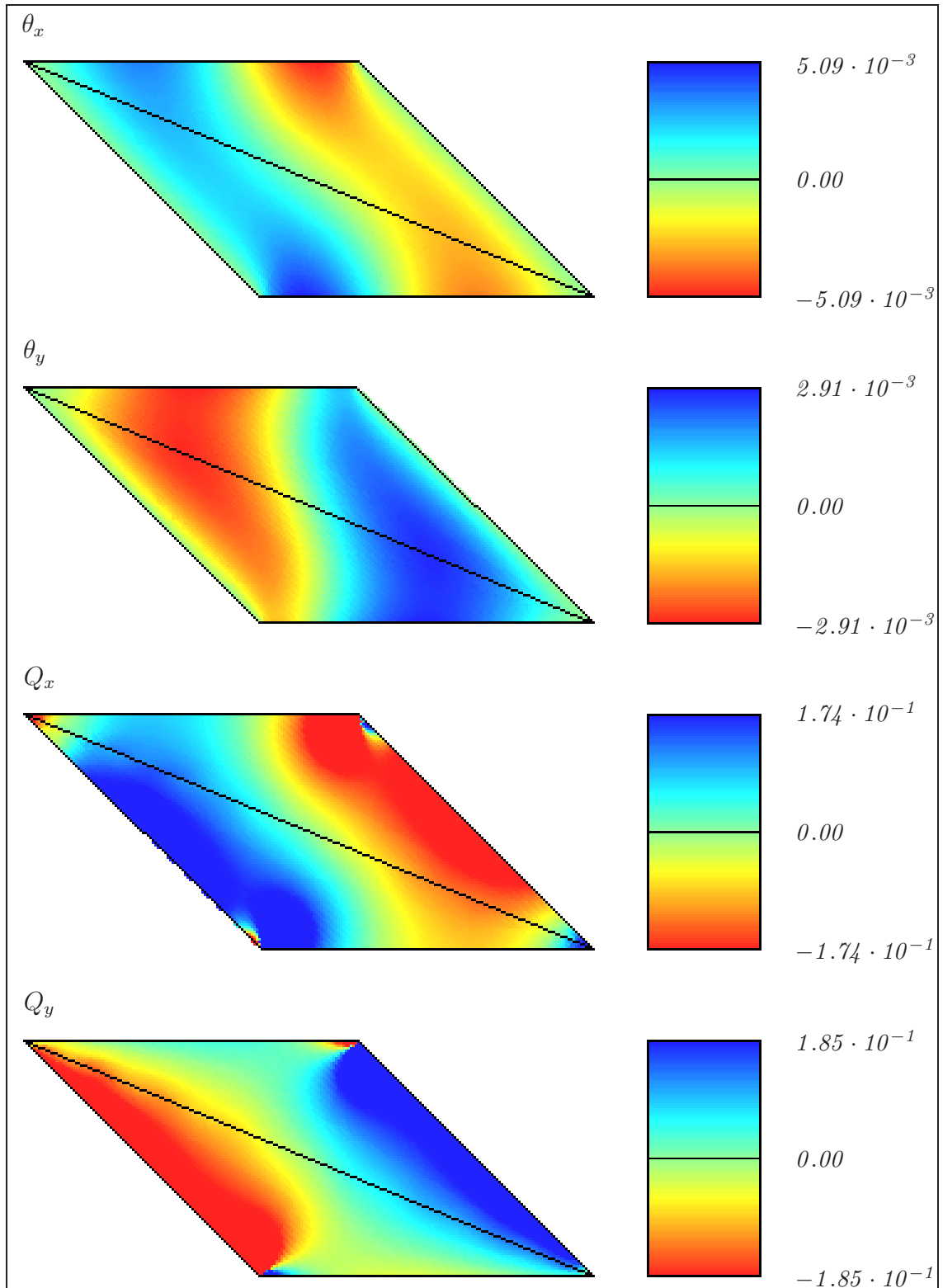


Figura 6.65: Campos de rotações e diagramas de esforço transversal em laje enviesada com bordos encastrado-livre para $\theta_0 = 67.5^\circ$.

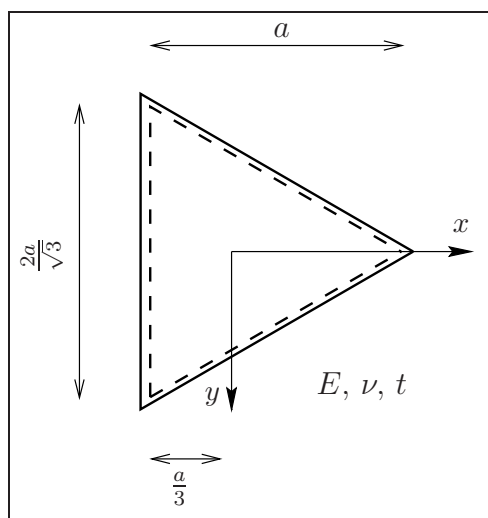
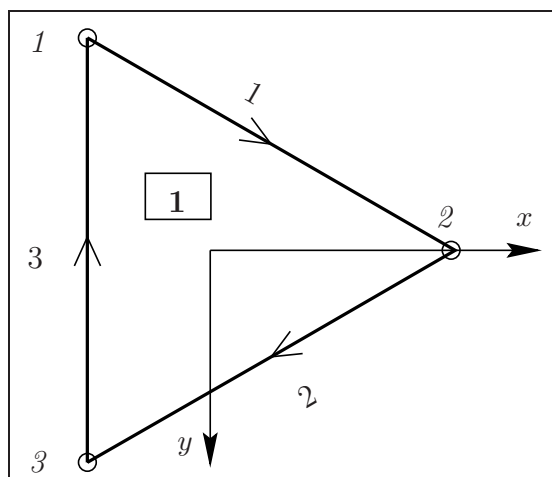
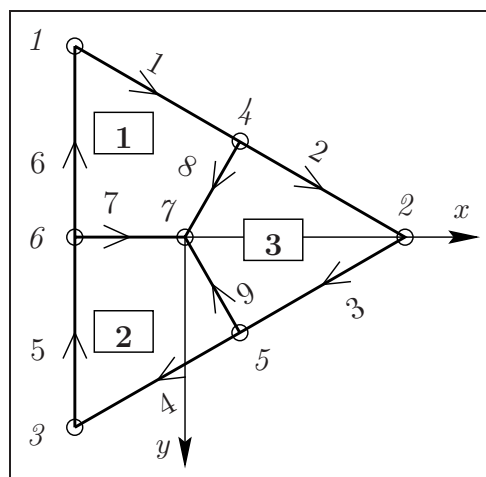


Figura 6.66: Laje triangular simplesmente apoiada.



(a) Discretização usando funções regulares



(b) Discretização usando funções singulares

Figura 6.67: Laje triangular simplesmente apoiada. Discretizações utilizadas.

apenas aos termos de grau 0 da parcela simétrica da solução homogénea é atribuído um peso diferente de zero (numérico), isto é, com 6 GL é obtida uma excelente aproximação da solução exacta.

Os resultados obtidos para $m = 0$ utilizando a abordagem contínua com 10 pontos de integração por lado para a discretização singular estão representados nas figuras 6.68 e 6.69.

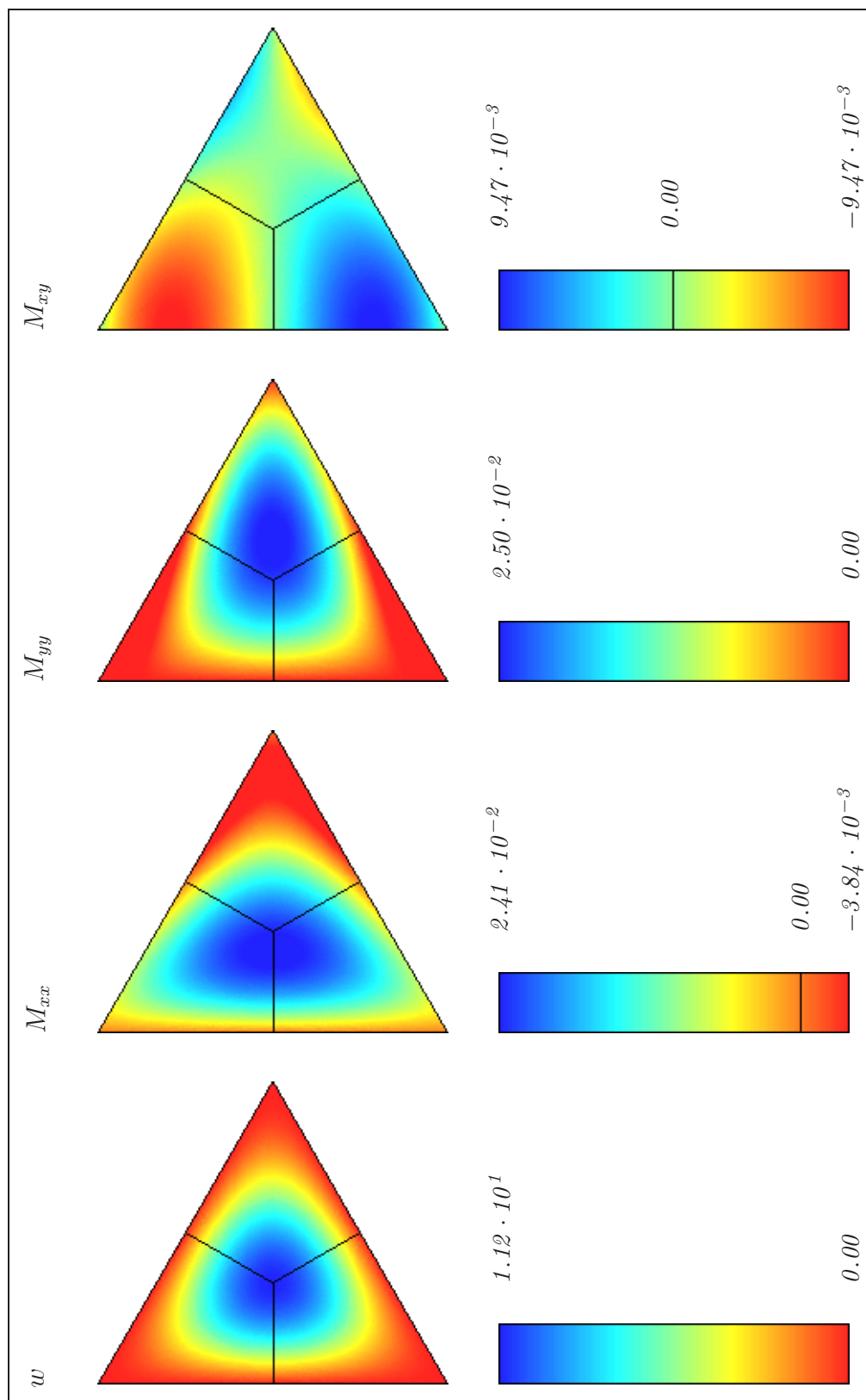


Figura 6.68: Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje triangular simplesmente apoiada submetida a carga uniformemente distribuída.

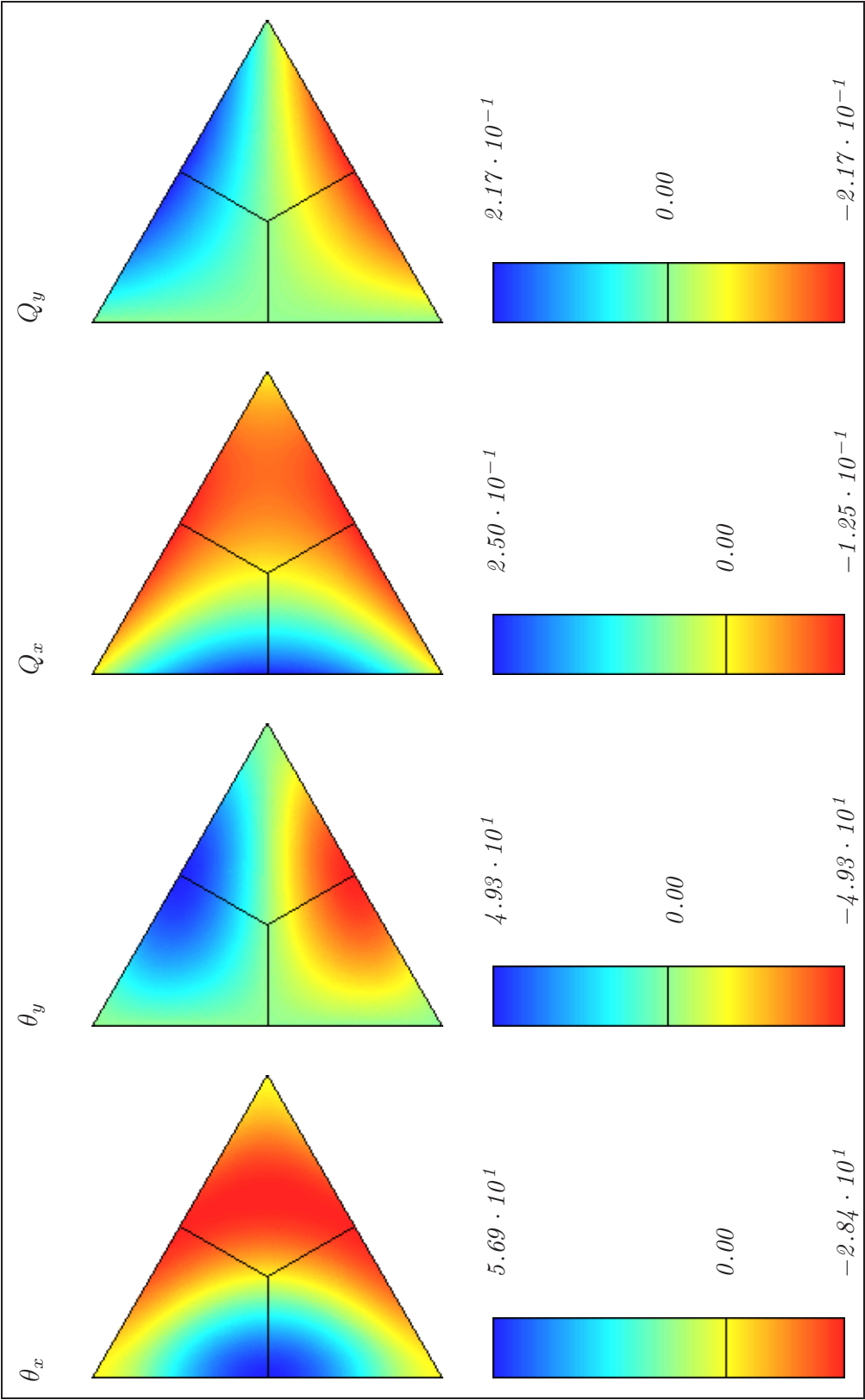


Figura 6.69: Campo de rotações e diagramas de esforços transversos em laje triangular simplesmente apoiada submetida a carga uniformemente distribuída.

6.5.2 Momento normal uniformemente distribuído no contorno

Considere-se que a laje se encontra submetida a uma distribuição uniforme de momentos flectores normais $\overline{M}_n$ ao longo de todo o seu contorno.

A solução analítica para o campo de deslocamentos é dada por [86]

$$w(x, y) = \frac{\overline{M}_n}{4aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right]. \quad (6.25)$$

Usando a primeira discretização utilizada no exemplo anterior obtém-se, novamente e pelas mesmas razões, a solução exacta. Desta vez é suficiente $m = 3$, pois a carga no domínio é nula.

Os resultados obtidos para $m = 3$ utilizando a abordagem discreta com 3 pontos de colocação por lado estão representados na figura 6.70.

Os esforços transversos são nulos em todo o domínio do problema.

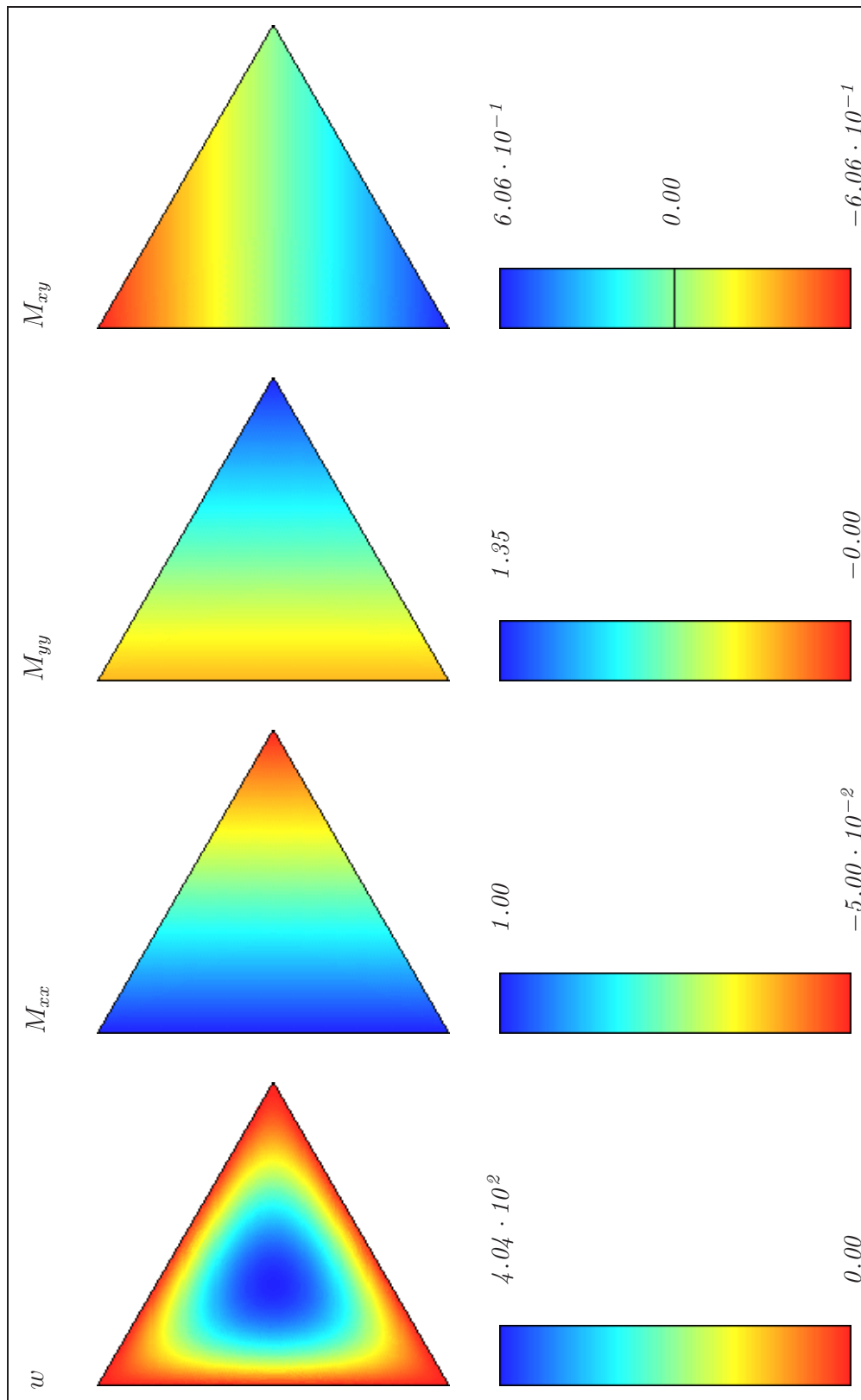


Figura 6.70: Campo de deslocamentos e diagramas de momentos em laje triangular simplesmente apoiada submetida a uma distribuição uniforme de momentos flectores normais ao longo do contorno.

Capítulo 7

Conclusões e desenvolvimentos futuros

7.1 Conclusões

A utilização e desenvolvimento de uma formulação indirecta do método de Trefftz na análise de lajes finas constituiu o principal objectivo deste trabalho. Um aliciente suplementar foi a obtenção da soluções tendo como critério o *LSM*, e não os teoremas energéticos, tão vulgarizados na formulação e resolução de problemas de Mecânica Computacional.

A consistente fundamentação dos métodos apresentados, aliada à qualidade dos resultados obtidos, permite inferir conclusões acerca da versatilidade e possibilidades que lhes estão associadas.

As principais características dos métodos utilizados são discutidas de uma forma sumária em seguida. Uma confrontação entre o caso contínuo e discreto do *LSM* é feita.

Os benefícios que advêm da utilização de formulações indirectas do método de Trefftz associadas ao *LSM* podem ser sumarizados nos seguintes aspectos essenciais:

- a discretização do domínio é realizada por regiões com um número genérico de lados em que a qualidade da aproximação pode ser ajustada à custa do grau m (limitado pela estabilidade numérica das expansões em série consideradas), aumentando as possibilidades de discretização. Em geral, um reduzido número destas é suficiente, o que facilita as operações de pré-processamento. A topologia da malha é consideravelmente mais simples que a requerida pelo *FEM*, sendo, apesar disso, ajustável a domínios de forma arbitrária. Lados lineares, quadráticos e cúbicos foram considerados;
- a eliminação do conceito de *interpolação nodal*, vulgar nas formulações de elementos finitos, expande o leque de opções no que respeita às funções de aproximação

a utilizar para o campo de deslocamentos. Foram utilizadas funções polinomiais, trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. Em relação à formulação directa do *BEM*, é enfraquecido o requerimento de utilizar funções singulares;

- as solicitações são tratadas de um modo natural, não sendo introduzidas relaxações no seu efeito sobre as regiões (como é feito no *FEM* ao nível dos elementos). Não existe o conceito de *força generalizada nodal equivalente*. A solução clássica da Teoria da Elasticidade para carga concentrada é utilizada, fornecendo resultados de qualidade. Dentro da vizinhança do seu ponto de aplicação podem obter-se resultados para os esforços distribuindo a carga num pequeno círculo. Soluções para cargas uniformes e lineares distribuídas em áreas poligonais ou segmentos de recta foram obtidas e utilizadas para modelar uma série de situações;
- a topologia da malha é independente das solicitações a que a estrutura é sujeita, o que vem de encontro às necessidades do utilizador: utilizar a mesma malha para as diversas acções;
- é facilitada a incorporação de soluções clássicas da Teoria da Elasticidade para o campo de deslocamentos nos casos em que a geometria induz o aparecimento de singularidades nos campos de tensões. Deste modo um substancial aumento de precisão e eficácia é conseguido na modelação destes campos;
- o refinamento da solução pode ser concretizado implementando processos *p*- e/ou *h*- adaptativos. Malhas com um reduzido número de regiões diminuem o trabalho de pré-processamento, reduzindo, porém, a esparsidade do sistema global, o que não deve ser visto como uma desvantagem, tal como acontece para as formulações tradicionais de elementos finitos, uma vez que os sistemas já são de muito pequena dimensão. De referir, no entanto, que um elevado número de GL numa região conduz, eventualmente, a instabilidades numéricas;
- evitando-se as integrações no domínio, a eficácia do processo de cálculo é incrementada. O confinamento da solução do problema à imposição das CF origina sistemas de equações de ordem mais baixa, quando comparados com outros métodos.
- as soluções são muito pouco sensíveis à distorção da malha;
- as formulações de elementos finitos aproximam o campo de deslocamentos e/ou de tensões, resultando daí elementos de compatibilidade, equilíbrio ou híbridos. Em qualquer destes casos não são satisfeitas, simultaneamente, as equações de equilíbrio e compatibilidade. A aplicação do método de Trefftz possibilita a satisfação do equilíbrio e da compatibilidade no domínio, de uma forma natural, restringindo-se a aproximação à fronteira;
- as operações de pós-processamento são facilitadas devido a dois factos: a topologia simples da malha e a utilização dos mesmos coeficientes para a determinação de todas as grandezas estáticas e cinemáticas (ao contrário do que acontece para as formulações híbridas de elementos finitos);

- a influência dos pesos que permitem estabelecer a indispensável homogeneidade dimensional entre as diversas grandezas físicas é reduzida se escalas apropriadas forem utilizadas;
- a inclusão de vigas à custa da generalização das CF estáticas é eficiente e conduz a resultados precisos. Este procedimento, em relação ao *FEM*, traduz-se na diminuição da informação a armazenar e tratar.

Apesar das vantagens apontadas serem significativas, limitações existem que devem ser apontadas. Os inconvenientes encontrados são listados em seguida:

- para que a eliminação dos termos no domínio seja possível, ver expressão (3.5) na página 23, é necessário dispôr de um conjunto completo de funções que verifique localmente as condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade do problema. Se por um lado a remoção do conceito de *interpolação nodal* permite uma maior liberdade à escolha das funções de aproximação, o facto apontado anteriormente constitui uma limitação significativa à escolha destas funções.
- as incógnitas do problema (à excepção dos termos de corpo rígido) não têm significado físico, são pesos de funções. As funções utilizadas nas expansões em série são pouco intuitivas quando comparadas com o *FEM*;
- a liberdade oferecida em termos de discretização e o facto de ser necessário fornecer mais informação que a estritamente necessária para a resolução do problema, exige, por parte do utilizador, conhecimentos adicionais;
- o sistema de equações normal pode ser mal condicionado se o grau da expansão for demasiado elevado.
- não é possível estabelecer estimativas de erro *a priori*;
- a precisão obtida para os resultados das grandezas cinemáticas é ligeiramente superior à das estáticas. Este facto resulta da aproximação directa que é feita do campo de deslocamentos. Os campos de esforços são determinados pelas relações esforços-deslocamentos, que envolvem operações de diferenciação de segunda e terceira ordem.

As duas vertentes do *LSM* analisadas permitem concluir que a utilização da colocação é mais conveniente que a integração na fronteira. Em termos de tempo de execução a diferença é substancial. A integração no contorno de domínios irregulares modelados com lados não lineares exige um elevado número de pontos de integração e não é exacta. Sob o ponto de vista conceptual e de execução a formulação discreta é, também, mais simples.

7.2 Desenvolvimentos futuros

As possibilidades do método de Trefftz estão longe de terem sido totalmente investigadas. A vitalidade da investigação neste campo tem-se traduzido, até aqui, na publicação de numerosos artigos acerca do tema.

Neste trabalho mostrou-se que a análise de lajes finas utilizando uma formulação indirecta de Trefftz, baseada no *LSM*, constitui uma alternativa eficaz aos métodos tradicionais.

Com ligeiras modificações ao programa desenvolvido, será possível determinar linhas de influência pelo método directo. A parcela homogénea da solução será constante, dado que não haverá necessidade de modificar a discretização. No caso particular de tabuleiros de pontes em laje enviesada o método poderá ser especialmente eficaz.

A implementação de soluções particulares específicas para outros casos, como sejam variações diferenciais de temperatura na espessura da laje para campos regulares e cargas pontuais para campos singulares, é outro dos desenvolvimentos que se pode vir a fazer num futuro próximo.

A extensão a lajes moderadamente espessas é imediata. Trabalho analítico neste domínio foi realizado e formulações híbridas de elementos finitos foram desenvolvidas [56], pelo que a sua implementação não deverá apresentar dificuldades de maior.

O tratamento de lajes moderadamente espessas em fundação elástica (para fundação de Winkler e Pasternak) é, também, possível. Um campo de funções *T* para este caso foi apresentado [54].

A utilização de campos específicos e gerais numa mesma região é possível [70]. Aproveitando apenas os termos singulares da expansão e combinando-a com os termos regulares é de esperar uma qualidade superior para os resultados. Note-se que será necessário proceder a colocação ou integração nos bordos adjacentes ao canto.

O desenvolvimento dos algoritmos numéricos, especialmente no que diz respeito ao armazenamento da informação e à solução do sistema de equações é outro dos pontos a desenvolver.

Apêndice A

Soluções para cantos

As soluções homogêneas e particulares para o campo de deslocamentos w são apresentadas em seguida para os seis casos da tabela 4.1.

A.1 Parcela homogênea

A.1.1 Encastrado-encastrado

A solução pode ser decomposta nos modos de deformação simétricos e anti-simétricos.

Parcela simétrica

$$N_{k1} = [F_1(r, \theta)]$$

com

$$F_1(r, \theta) = r^{\lambda_{k1}+1} \left[\cos(\lambda_{k1} + 1)\theta - \frac{\cos(\lambda_{k1} + 1)\theta_0}{\cos(\lambda_{k1} - 1)\theta_0} \cos(\lambda_{k1} - 1)\theta \right], \quad k1 = 0, 1, 2 \dots$$

Parcela anti-simétrica

$$N_{k2} = [F_2(r, \theta)]$$

com

$$F_2(r, \theta) = r^{\lambda_{k2}+1} \left[\sin(\lambda_{k2} + 1)\theta - \frac{\sin(\lambda_{k2} + 1)\theta_0}{\sin(\lambda_{k2} - 1)\theta_0} \sin(\lambda_{k2} - 1)\theta \right], \quad k2 = 0, 1, 2 \dots$$

A.1.2 Livre-Livre

A solução, tal como no caso de condições de fronteira Encastrado-Encastrado, pode ser dividida nos modos de deformação simétricos e anti-simétricos.

Parcela simétrica

$$N_{k1} = [F_1(r, \theta)]$$

com

$$F_1(r, \theta) = r^{\lambda_{k1}+1} \left[\cos(\lambda_{k1} + 1)\theta + \frac{(\lambda_{k1} + 1)(1 - \nu) \cos(\lambda_{k1} + 1)\theta_0}{\{\nu + 3 - \lambda_{k1}(1 - \nu)\} \cos(\lambda_{k1} - 1)\theta_0} \cos(\lambda_{k1} - 1)\theta \right]$$

onde $k1 = 0, 1, 2 \dots$

Parcela anti-simétrica

$$N_{k2} = [F_2(r, \theta)]$$

com

$$F_2(r, \theta) = r^{\lambda_{k2}+1} \left[\sin(\lambda_{k2} + 1)\theta + \frac{(\lambda_{k2} + 1)(1 - \nu) \sin(\lambda_{k2} + 1)\theta_0}{\{\nu + 3 - \lambda_{k2}(1 - \nu)\} \sin(\lambda_{k2} - 1)\theta_0} \sin(\lambda_{k2} - 1)\theta \right]$$

onde $k2 = 0, 1, 2 \dots$

A.1.3 Encastrado-Livre

$$N_k = [F(r, \theta)]$$

com

$$F(r, \theta) = r^{\lambda_k+1} \left(\sin(\lambda_k + 1)(\theta + \theta_0) + R \cos(\lambda_k + 1)(\theta + \theta_0) - \frac{\lambda_k + 1}{\lambda_k - 1} \sin(\lambda_k - 1)(\theta + \theta_0) - R \cos(\lambda_k - 1)(\theta + \theta_0) \right),$$

$k = 0, 1, 2 \dots$ e

$$R = \frac{(\lambda_k + 1) [(\lambda_k - 1)(1 - \nu) \cos(\lambda_k + 1)2\theta_0 - \overline{R} \cos(\lambda_k - 1)2\theta_0]}{(\lambda_k - 1) [(\lambda_k + 1)(1 - \nu) \sin(\lambda_k + 1)2\theta_0 - \overline{R} \sin(\lambda_k - 1)2\theta_0]}$$

$$\overline{R} = \{\lambda_k(1 - \nu) + 3 + \nu\}$$

A.1.4 Encastrado-simplesmente apoiado

Para $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ todas as raízes são reais. Assim distinguem-se os dois casos.

Raízes complexas, $2\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$

$$N_k = [F(r, \theta)]$$

$$F(r, \theta) = r^{\lambda_k+1} \left(\sin(\lambda_k + 1)(\theta + \theta_0) + R \cos(\lambda_k + 1)(\theta + \theta_0) - \frac{\lambda_k + 1}{\lambda_k - 1} \sin(\lambda_k - 1)(\theta + \theta_0) - R \cos(\lambda_k - 1)(\theta + \theta_0) \right),$$

$$R = -\frac{\lambda_k + 1}{\lambda_k - 1} \frac{\sin(\lambda_k - 1)2\theta_0}{\cos(\lambda_k - 1)2\theta_0}$$

e $k = 0, 1, 2, \dots$

Raízes reais, $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$N_{k-1} = \begin{bmatrix} F_1(r, \theta) & F_2(r, \theta) \end{bmatrix}$$

$$F_1(r, \theta) = r^{2k} \left[\sin 2(k-1)(\theta + \theta_0) - \frac{k-1}{k} \sin 2k(\theta + \theta_0) \right]$$

$$F_2(r, \theta) = r^{2k+1} [\cos(2k+1)(\theta + \theta_0) - \cos(2k-1)(\theta + \theta_0)],$$

e $k = 1, 2, 3, \dots$

Note-se que o primeiro termo anula-se para $k = 1$.

A.1.5 Simplesmente apoiado-livre

Para $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ todas as raízes são reais. Assim distinguem-se os dois casos.

Raízes complexas, $2\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$

$$N_k = \begin{bmatrix} F(r, \theta) \end{bmatrix}$$

$$F(r, \theta) = r^{\lambda_k+1} (\sin(\lambda_k + 1)(\theta + \theta_0) + R \sin(\lambda_k - 1)(\theta + \theta_0))$$

$$R = \frac{(\lambda_k + 1)(1 - \nu) \sin(\lambda_k + 1)2\theta_0}{\{\nu + 3 - \lambda_k(1 - \nu)\} \sin(\lambda_k - 1)2\theta_0}$$

e $k = 0, 1, 2, \dots$

Raízes reais, $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$N_{m-1} = \begin{bmatrix} F_1(r, \theta) & F_2(r, \theta) \end{bmatrix}$$

$$F_1(r, \theta) = r^{2k} [\sin 2k(\theta + \theta_0) + R \sin 2(k-1)(\theta + \theta_0)]$$

$$F_2(r, \theta) = r^{2k+1} [\sin(2k+1)(\theta + \theta_0) + \overline{R} \sin(2k-1)(\theta + \theta_0)],$$

$$R = \frac{2k(1-\nu)}{(2k-1)(1-\nu) + 3 + \nu}, \quad \overline{R} = \frac{(2k+1)(1-\nu)}{2k(1-\nu) - 3 - \nu}$$

e $k = 1, 2, 3 \dots$

A.1.6 Simplesmente apoiado-simplesmente apoiado

As raízes da equação transcendente são sempre reais.

$$N_{k1-1} = \begin{bmatrix} r^{\frac{k1\pi}{2\theta_0}} \sin \frac{k1\pi\theta}{2\theta_0} \end{bmatrix}, \quad k1 = 1, 2, 3 \dots$$

$$N_{k2-1} = \begin{bmatrix} r^{\frac{k2\pi}{2\theta_0}+2} \sin \frac{k2\pi\theta}{2\theta_0} \end{bmatrix}, \quad k2 = 1, 2, 3 \dots$$

Os modos de deformação simétricos e anti-simétricos são obtidos para valores ímpares e pares de $k1$ e $k2$, respectivamente.

A.2 Parcela particular

A.2.1 Encastrado-encastrado

$$\ddot{w} = \frac{\bar{p} r^4}{64D} \left\{ - \left(1 + \frac{S_2}{S} \right) \cos 4(\theta + \theta_0) + \frac{S_1}{S} \sin 4(\theta + \theta_0) \right. \\ \left. + \frac{S_2}{S} \cos 2(\theta + \theta_0) - 2 \frac{S_1}{S} \sin 2(\theta + \theta_0) + 1 \right\}$$

$$S = -4 + 4 \cos 4\theta_0 + \sin 4\theta_0 \sin 8\theta_0$$

$$S_1 = -2 \sin 8\theta_0 \cos 4\theta_0 + \cos 8\theta_0 \sin 4\theta_0 + 2 \sin 8\theta_0 - \sin 4\theta_0$$

$$S_2 = 4 \sin^2 4\theta_0 (1 - \cos 4\theta_0)$$

A.2.2 Livre-Livre

$$\begin{aligned}\circ w &= \frac{\bar{p} r^4}{64D} \left\{ \frac{1}{3(1-\nu)} \left[3\nu \frac{S_1}{S} + (1+3\nu) \right] \cos 4(\theta + \theta_0) - \frac{3-\nu}{2(1-\nu)} \frac{S_2}{S} \sin 4(\theta + \theta_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_1}{S} \cos 2(\theta + \theta_0) + \frac{S_2}{S} \sin 2(\theta + \theta_0) + 1 \right\} \\ S &= 9 \{ 4\nu(3-\nu) + [4\nu^2 + (3-\nu)^2] \sin 4\theta_0 \sin 8\theta_0 - 4\nu(3-\nu) \cos 4\theta_0 \cos 8\theta_0 \} \\ S_1 &= 2(1+3\nu) \{ 3(3-\nu) [\cos 8\theta_0 - \cos 4\theta_0 + \cos 8\theta_0 \cos 4\theta_0 - 1] - 4\nu \sin 4\theta_0 \sin 8\theta_0 \} \\ S_2 &= 6(1+3\nu) \{ 2\nu \sin 8\theta_0 [\cos 4\theta_0 - 1] + (3-\nu) \sin 4\theta_0 [\cos 8\theta_0 - 1] \}\end{aligned}$$

A.2.3 Encastrado-Livre

$$\begin{aligned}\circ w &= \frac{\bar{p} r^4}{64D} \left\{ - \left(1 + \frac{S_2}{S} \right) \cos 4(\theta + \theta_0) + \frac{S_1}{S} \sin 4(\theta + \theta_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_2}{S} \cos 2(\theta + \theta_0) - 2 \frac{S_1}{S} \sin 2(\theta + \theta_0) + 1 \right\} \\ S &= 3(5\nu - 3)(1 - \nu) \sin 4\theta_0 \sin 8\theta_0 + 6 \{ (1 - \nu)^2 - \nu(3 - \nu) \} \\ &\quad + 6(1 - \nu)(2\nu - 3) \cos 4\theta_0 \cos 8\theta_0 \\ S_1 &= 2(1 - \nu)(1 + 3\nu) \sin 8\theta_0 - (3 - \nu)(1 + 3\nu) \sin 4\theta_0 \\ &\quad - 3(1 - \nu)(3 - \nu) \sin 4\theta_0 \cos 8\theta_0 - 6\nu(1 - \nu) \sin 8\theta_0 \cos 4\theta_0 \\ S_2 &= -12\nu(1 - \nu) \sin 4\theta_0 \sin 8\theta_0 - 6(1 - \nu)^2 - 2(1 + 3\nu)(1 - \nu) \cos 8\theta_0 \\ &\quad + 2(3 - \nu)(1 + 3\nu) \cos 4\theta_0 + 6(3 - \nu)(1 - \nu) \cos 8\theta_0 \cos 4\theta_0\end{aligned}$$

A.2.4 Encastrado-simplesmente apoiado

Para $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ a solução é singular, tornando-se necessário distinguir os dois casos.

$$2\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = \frac{\bar{p}r^4}{64D} \left\{ - \left(1 + \frac{S_2}{S} \sin 4\theta_0 \right) \cos 4(\theta + \theta_0) + \frac{S_1}{S} \sin 4(\theta + \theta_0) \right. \\ \left. + \frac{S_2}{S} \sin 4\theta_0 \cos 2(\theta + \theta_0) - 2 \frac{S_1}{S} \sin 2(\theta + \theta_0) + 1 \right\} \end{aligned}$$

$$S = \sin^3 4\theta_0$$

$$S_1 = 2 \cos 4\theta_0 - 3 \cos 4\theta_0 \sin^2 4\theta_0 + 4 \sin^2 4\theta_0 - 2$$

$$S_2 = 2 (2 - 3 \sin^2 4\theta_0 - 2 \cos 4\theta_0)$$

$$2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = \frac{\bar{p}r^4}{64D} \left\{ 3 \cos 4(\theta + \theta_0) - 4 \cos 2(\theta + \theta_0) - \frac{8}{3\pi} \sin 2(\theta + \theta_0) \right. \\ \left. + \frac{16}{3\pi} [\ln r (2 \sin 2(\theta + \theta_0) - \sin 4(\theta + \theta_0)) + (\theta + \theta_0) (2 \cos 2(\theta + \theta_0) \right. \\ \left. - \cos 4(\theta + \theta_0))] + 1 \right\} \end{aligned}$$

A.2.5 Simplesmente apoiado-livre

$$\theta_0 \neq \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = \frac{\bar{p}r^4}{64D} \left[\frac{1}{3} \cos 4(\theta + \theta_0) + \frac{S_2}{S} \sin 4(\theta + \theta_0) - \frac{4}{3} \cos 2(\theta + \theta_0) + \right. \\ \left. \frac{(1 - \nu)S_1}{S} \sin 2(\theta + \theta_0) + 1 \right] \end{aligned}$$

$$S = 3(1 - \nu) [(3 - \nu) \cos 4\theta_0 \sin 8\theta_0 + 2\nu \sin 4\theta_0 \cos 8\theta_0]$$

$$S_1 = 2(1 - \nu) - 4(3 - \nu) \sin 8\theta_0 \sin 4\theta_0 + 8\nu \cos 4\theta_0 \cos 8\theta_0 - 2(1 + 3\nu) \cos 8\theta_0$$

$$\begin{aligned} S_2 = 2\nu(1 - \nu) \sin 8\theta_0 \sin 4\theta_0 - 4\nu(3 - \nu) - (3 - \nu)(1 - \nu) \cos 8\theta_0 \cos 4\theta_0 \\ + (1 + 3\nu)(3 - \nu) \cos 4\theta_0 \end{aligned}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = & \frac{\bar{p}r^4}{64D} \left[\frac{1}{3} \cos 4(\theta + \theta_0) - \frac{4}{3} \cos 2(\theta + \theta_0) + \frac{8\nu(1+\nu)}{3\pi(9-\nu^2)} \sin 2(\theta + \theta_0) \right. \\ & + \frac{16}{3\pi} \frac{\nu}{1-\nu} \frac{3-\nu}{3+\nu} (\ln r \sin 4(\theta + \theta_0) + (\theta + \theta_0) \cos 4(\theta + \theta_0)) \\ & \left. + \frac{32}{3\pi} \frac{\pi}{3+\nu} (\ln r \sin 2(\theta + \theta_0) + (\theta + \theta_0) \cos 2(\theta + \theta_0)) + 1 \right] \end{aligned}$$

A.2.6 Simplesmente apoiado-simplesmente apoiado

$$\theta_0 \neq \frac{1}{8}\pi, \frac{2}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi$$

$$\dot{w} = \frac{\bar{p}r^4}{64D} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\cos 4\theta}{\cos 4\theta_0} - \frac{4}{3} \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\theta_0} \right)$$

$$\theta_0 = \frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi$$

$$\dot{w} = \frac{\bar{p}r^4}{64D} \left[1 + \frac{\theta}{3\theta_0} \frac{\sin 4\theta}{\sin 4\theta_0} - \frac{4}{3} \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\theta_0} - \frac{1}{3\theta_0} \frac{\cos 4\theta}{\sin 4\theta_0} \ln r \right]$$

$$\theta_0 = \frac{1}{4}\pi$$

$$\dot{w} = \frac{\bar{p}r^4}{64D} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\cos 4\theta}{\cos 4\theta_0} - \frac{4\theta}{3\theta_0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\theta_0} + \frac{4}{3\theta_0} \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta_0} \ln r \right]$$

Apêndice B

Solução para abertura circular

As soluções para uma laje infinita com uma abertura circular livre são apresentadas em seguida.

B.1 Parcela homogênea

$$\begin{aligned} N_0 &= \begin{bmatrix} 1 & r \cos \theta & r \sin \theta \end{bmatrix} \\ N_1 &= \begin{bmatrix} \ln \rho + \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} \rho^2 \end{bmatrix} \\ N_2 &= \begin{bmatrix} f(\rho) \cos \theta & f(\rho) \sin \theta \end{bmatrix}, \\ N_{k+1} &= \begin{bmatrix} f_1(\rho) \cos k\theta & f_1(\rho) \sin k\theta & f_2(\rho) \cos k\theta & f_2(\rho) \sin k\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \rho^3 - \frac{1}{\rho} \frac{3+\nu}{1-\nu} \\ f_1(\rho) &= \frac{1}{k} \frac{3+\nu}{1-\nu} \rho^k + \frac{1}{\rho^{k-2}} - \frac{k-1}{k} \frac{1}{\rho^k} \\ f_2(\rho) &= \rho^{k+2} - \frac{k+1}{k} \rho^k - \frac{1}{k} \frac{3+\nu}{1-\nu} \frac{1}{\rho^k} \end{aligned}$$

e $k = 2, 3, 4, \dots$

B.2 Parcela particular

$$\overset{\circ}{w} = \frac{\bar{p}a^4}{64D} \left\{ \rho^4 + 2\frac{3+\nu}{1+\nu}\rho^2 - 8\rho^2 \ln \rho \right\}$$

Bibliografia

- [1] Ahmed Abdel-Akher e Gilbert A. Hartley. Domain integration for plate bending analysis by the boundary element method. *Communications in Applied Numerical Methods*, 5:23–28, 1989.
- [2] J. P. B. M. Almeida. Janela: uma interface gráfica destinada à aplicação em problemas de mecânica computacional. Relatório, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 1992.
- [3] Tom M. Apostol. *Calculus: multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability*, volume II. John Wiley & Sons, 2^a edição, 1969.
- [4] Richard Bareš. *Tablas para el cálculo de placas y vigas pared*. Editorial Gustavo Gili, S. A., Barcelona, 2^a edição ampliada, 1981.
- [5] J. Barta. Über die näherungsweise Lösung einiger zweidimensionaler Elastizitätsaufgaben. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 7:184–185, 1937.
- [6] J. L. Batoz e M. B. Tahar. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1655–1677, 1982.
- [7] M. Bonnet, G. Maier e C. Polizzotto. Symmetric Galerkin boundary element method. *Applied Mechanics Reviews*, 1998, (em publicação).
- [8] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles e L. C. Wrobel. *Boundary element techniques. Theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, 1984.
- [9] Gary Burgess e Enayat Mahajerin. A numerical method for laterally loaded thin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49:1–15, 1985.
- [10] L. M. S. S. Castro. *Wavelets e Séries de Walsh em Elementos Finitos*. Tese de Doutorado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1996.
- [11] Y. K. Cheung, W. G. Jin e O. C. Zienkiewicz. Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions. *Communications in Applied Numerical Methods*, 5:159–169, 1989.

-
- [12] C. Cismaşiu e J. A. Teixeira de Freitas. Hybrid-Trefftz Finite Element Formulation for Spectral Elastodynamic Analysis. *2nd Int. PhD Symposium in Civil Engineering*, Budapest, 1998.
- [13] Inc. Computers & Structures. *SAP 2000-Three dimensional static and dynamic finite element analysis and design of stuctures, version 7.0*. Berkeley, Califórnia, 1998.
- [14] H. D. Conway. The approximate analysis of certain boundary-value problems. *Journal of Applied Mechanics*, 27:275–277, 1960.
- [15] H. D. Conway. The bending, buckling and flexural vibration of simply supported polygonal plates by point-matching. *Journal of Applied Mechanics*, 28:288–291, 1961.
- [16] H. D. Conway e K. A. Farnham. Deflections of uniformly loaded circular plates with combinations of clamped, simply supported and free boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 9:661–671, 1967.
- [17] H. D. Conway e A. W. Leissa. Application of the point-matching method to shallow-spherical shell theory. *Journal of Applied Mechanics*, 29:745–747, 1962.
- [18] Jesus Adjalma Costa e C. A. Brebbia. Plate bending problems using BEM. *Boundary Elements VI*, páginas 3.43–3.63, Berlin, 1984. CML Publications, Springer-Verlag.
- [19] A. R. Cusens e R. P. Pama. *Bridge deck analysis*. John Wiley & Sons, 1975.
- [20] J. P. B. Moitinho de Almeida. *Modelos de Elementos Finitos para a Análise Elastoplástica*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1989.
- [21] J. A. Teixeira de Freitas. Duality and symmetry in mixed integral methods of elastostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1161–1179, 1989.
- [22] J. A. Teixeira de Freitas. Formulation of elastostatic hybrid-Trefftz stress elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153:127–151, 1998.
- [23] J. A. Teixeira de Freitas e Z.-Y. Ji. Hybrid-Trefftz equilibrium model for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:569–584, 1996.
- [24] J. A. Teixeira de Freitas e Z.-Y. Ji. Hybrid-Trefftz finite element formulation for simulation of singular stress fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:281–308, 1996.
- [25] Advanced Computing Department. Harwell subroutine library. Relatório, Harwell Laboratory, Oxfordshire, 1990.

- [26] L. I. Deverall. Discussion of: the approximate analysis of certain boundary-value problems. *Journal of Applied Mechanics*, 28:156–157, 1961.
- [27] E. D. Eason. A review of least-squares methods for solving partial differential equations. *International journal for numerical methods in engineering*, 10:1021–1046, 1976.
- [28] T. M. R. Ellis. *Fortran 77 Programming*. Addison-Wesley, 2^a edição, 1991.
- [29] Carlos Fernandes e Vitor Leitão. Análise de lajes enviesadas. *Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas*, Editores: S. Pompeu Santos e Manuel Pipa, Lisboa, Portugal, 25-28 Novembro 1998. Grupo Português de Engenharia de Estruturas e Grupo Português do Betão Estrutural.
- [30] Carlos Fernandes e Vitor Leitão. On a least squares trefftz collocation method for plate bending. Editores: Vladimír Kompiš, Milan Žmindák e Branislav Hučko, *Numerical Methods in Continuum Mechanics*, páginas 7–12, High Tatras, República Eslovaca, 6-9 Outubro 1998. Universidade de Žilina.
- [31] Carlos Fernandes e Vitor Leitão. On a multi-region trefftz collocation method for plate bending. Editores: Sergio R. Idelsohn, Eugenio Oñate e Eduardo N. Dvorkin, *IV World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, Argentina, 29 Junho-2 Julho 1998.
- [32] J. A. T. Freitas. Hybrid-Trefftz displacement and stress elements for elastodynamic analysis in the frequency domain. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Science*, 4:345–368, 1997.
- [33] J. A. T. Freitas, C. Cismaşiu e Z.M. Wang. Numerical applications with hybrid-Trefftz stress and displacement elements. Editores: Vladimír Kompiš, Milan Žmindák e Branislav Hučko, *Numerical Methods in Continuum Mechanics*, páginas 35–44, High Tatras, República Eslovaca, 6-9 Outubro 1998. Universidade de Žilina.
- [34] J. A. Teixeira Freitas e Z.-M. Wang. Hybrid-Trefftz stress elements for elastoplasticity. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 43:655–683, 1998.
- [35] Y. Guyon. Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisées par les entretoises. *Annales des Ponts et Chaussées*, 24(9–10):553–612, 1946.
- [36] William H. Press et al. *Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 2^a edição, 1994.
- [37] Edmund C. Hambly. *Bridge deck behavior*. Chapman and Hall, 1976.
- [38] Friedel Hartmann. A note on the domain force integral of Kirchhoff plates. *Engineering Analysis*, 2(2):111–112, 1985.

- [39] Arne Hillerborg. *Strip method of design*. Viewpoint, 1975.
- [40] M. M. Hrabok e T. M. Hrudey. A review and catalogue of plate bending finite elements. *Computers & Structures*, 19(3):479–495, 1984.
- [41] J. R. Hutchinson e A. Houmat. A boundary method for free vibration of solids of revolution. *Advances in Boundary Elements Methods in Japan and USA*, páginas 121–135, 1990.
- [42] J. R. Hutchinson. Analysis of plates and shells by boundary collocation. *Boundary Element Analysis of Plates and Shells*, editor: D. F. Beskos, Springer-Verlag, páginas 341–368, 1991.
- [43] G. J. Burgess. *The numerical treatment of body forces, dislocation fields and arrays of cracks in plane elastostatics problems*. Tese de Doutorado, Michigan State University, 1981.
- [44] W. G. Jin, Y. K. Cheung e O. C. Zienkiewicz. Application of the Trefftz method in plane elasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:1147–1161, 1990.
- [45] W. G. Jin, Y. K. Cheung e O. C. Zienkiewicz. Solution of Helmholtz equation by Trefftz method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:63–78, 1991.
- [46] W. G. Jin, Y. K. Cheung e O. C. Zienkiewicz. Trefftz method for Kirchhoff plate bending problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:765–781, 1993.
- [47] J. Jiroušek e L. Guex. The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:651–693, 1986.
- [48] J. Jiroušek e N. Leon. A powerful finite element for plate bending. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 12:77–96, 1977.
- [49] J. Jiroušek e M. N’Diaye. Solution of orthotropic plates based on p -extension of the hybrid-Trefftz finite element model. *Computer & Structures*, 34(1):51–62, 1990.
- [50] J. Jiroušek e Q. H. Qin. Application of hybrid-Trefftz element approach to transient heat conduction analysis. Relatório LSC 94/10, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Suíça, 1994.
- [51] J. Jiroušek e P. Teodorescu. Large finite elements method for the solution of problems in the theory of elasticity. *Computers & Structures*, 15:575–587, 1982.
- [52] J. Jiroušek e A. Wróblewski. Least-squares T-elements: equivalent FE and BE forms of a substructure-oriented boundary solution approach. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10:21–32, 1994.

- [53] J. Jiroušek e A. Wróblewski. T-elements: a finite element approach with advantages of boundary solution methods. *Advances in Engineering Software*, 24:71–88, 1995.
- [54] J. Jiroušek e A. Wróblewski. T-elements: state of the art and future trends. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 3(4):323–434, 1996.
- [55] J. Jiroušek, A. Wróblewski, Q. H. Qin e X. Q. He. A family of quadrilateral hybrid-Trefftz p -elements for thick plate analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:315–344, 1995.
- [56] J. Jiroušek, A. Wróblewski, Q. H. Qin e X. Q. He. A family of quadrilateral hybrid-trefftz p -elements for thick plate analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:315–344, 1995.
- [57] J. Jiroušek, A. Wróblewski e B. Szybiński. A new 12DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:2619–2638, 1995.
- [58] J. Jiroušek e A. P. Zieliński. Survey of Trefftz-type element formulations. *Computers & Structures*, 63(2):225–242, 1997.
- [59] D. Johnson. Plate bending by a boundary point method. *Computers & Structures*, 26:673–680, 1987.
- [60] G. Kirchhoff. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen scheibe. *J. Reine und Angewandte Mathematic*, 40:51–88, 1850.
- [61] Eisuke Kita, Norio Kamiya e Youichi Ikeda. First- and second-order sensitivity analysis schemes by collocation-type Trefftz method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4:477–489, 1997.
- [62] J. A. Kolodziej e A. Uścilowska. Trefftz-type procedure for Laplace equation on domains with circular holes, circular inclusions, corners, slits, and symmetry. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4:501–519, 1997.
- [63] J. A. Kolodziej. Review of application of boundary collocation methods in mechanics of continuous media. *Solid Mechanics Archives*, 12:187–231, 1987.
- [64] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, 7ª edição, 1993.
- [65] A. W. Leissa e W. E. Clausen. Deflection of a circular plate having mixed boundary conditions. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 4:2287–2289, 1967.
- [66] A. W. Leissa e F. W. Nietenfuhr. A study of the cantilevered square plate subjected to uniform loading. *Journal of the Aerospace Sciences*, 29:162–169, 1962.

- [67] A. W. Leissa e F. W. Nietenfuhr. Bending of a square plate with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1:116–120, 1963.
- [68] A. W. Leissa e F. W. Nietenfuhr. Uniformly loaded plates of regular polygonal shape. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 3:566–567, 1965.
- [69] V. M. A. Leitão. On a multi-region indirect Trefftz formulation for potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12:77–96, 1997.
- [70] V. M. A. Leitão. Application of multi-region Trefftz-collocation to fracture mechanics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 22:251–256, 1998.
- [71] C. Massonnet. Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur resistance à la torsion. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, 10:147–182, 1950.
- [72] L. S. D. Morley. Bending of a simply supported rhombic plate under uniform normal loading. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math*, XV:413–426, 1962.
- [73] N. I. Muskhelishvili. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 4^a edição, 1963.
- [74] Norma Portuguesa NP-761. Vocabulário da teoria das estruturas. Relatório técnico, LNEC, 1969.
- [75] R. Park e W. L. Gamble. *Reinforced concrete slabs*. Jonh Wiley & Sons, 1980.
- [76] E. M. B. R. Pereira. *Elementos Finitos de Tensão - Aplicação à análise elástica de estruturas*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1993.
- [77] J. Petrolito. Hybrid-Trefftz quadrilateral elements for thick plate analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78:331–351, 1990.
- [78] R. Piltner. On the representation of three-dimensional elasticity solutions with the aid of complex valued functions. *J. Elast.*, 22:45–55, 1989.
- [79] R. Piltner. A quadrilateral hybrid Trefftz plate bending element for the inclusion of warping based on a three-dimensional plate formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:387–408, 1992.
- [80] R. Piltner. Recent developments in the Trefftz method for finite element and boundary element applications. *Advances in Engineering Software*, 24:107–115, 1995.
- [81] Adolf Pucher. *Influence surfaces of elastic plates*. Springer-Verlag, 1964.
- [82] R. Bareš e C. Massonnet. *Analysis of beam grids and orthotropic plates*. Crosby Lockwood Ltd., Londres, 1968.

- [83] T. Sekiya. An approximate solution in the problems of elastic plates with arbitrary external form and a circular hole. *Proceedings of the 5th Japan National Congress for Applied Mechanics*, páginas 95–98, 1955.
- [84] Rudolph Szilard. *Theory and analysis of plates*. Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [85] C. J. Thorne. Square plate fixed at points. *Journal of Applied Mechanics*, 70:73–79, 1948.
- [86] Stephen P. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. Engineering Mechanics. McGraw-Hill, 2^a edição, 1959.
- [87] E. Trefftz. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. In *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech.*, páginas 131–137, 1926.
- [88] A. C. Ugural. *Stresses in plates and shells*. McGraw-Hill, 1981.
- [89] A. Venkatesh e J. Jiroušek. Accurate representation of local effects due to concentrated and discontinuous loads in hybrid-Trefftz plate bending elements. *Computers & Structures*, 57(5):863–870, 1995.
- [90] G. M. Vörös e J. Jiroušek. Application of the hybrid-Trefftz finite element model to thin shell analysis. Editores: P. Ladeveze e O. C. Zienkiewicz, *Proc. European Conf. on New Advances in Comp. Struc. Mech.*, páginas 547–554, Giens, França, 1991. Elsevier.
- [91] R. H. Wampler. A report on the accuracy of some widely used Least-Squares Computer Programs. *Journal of the American Statistical Association*, 65(330):549–565, 1970.
- [92] M. L. Williams. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*, 19:526–528, 1952.
- [93] Stephen Wolfram. *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*. Addison-Wesley, 2^a edição, 1992.
- [94] A. Wróblewski e J. Jiroušek. Application of hybrid-Trefftz *p*-elements to stress analysis in shafts. *Proc. XI Polish Conference on Comp. Meth. in Mech.*, volume 2, páginas 983–990, Kielce-Cedzyna, Polónia, 1993.
- [95] A. Wróblewski, A. P. Zieliński e J. Jiroušek. Hybrid-Trefftz *p*-element for 3-D axisymmetric problems of elasticity. Editores: C. Hirsch, O. C. Zienkiewicz e E. Oñate, *Numerical Methods in Engineering'92, Proc. First Europ. Conf. on Numer. Meth. in Eng.*, páginas 803–810, Bruxelas, 1992. Elsevier.
- [96] B. C. Wu e N. J. Altiero. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. *Computers & Structures*, 10:703–707, 1979.

- [97] B. C. Wu e N. J. Altiero. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin-plate bending problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 25:343–353, 1981.
- [98] A. P. Zieliński e O. C. Zienkiewicz. Generalized finite element analysis with t-complete boundary solutions functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:509–528, 1985.
- [99] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly e P. Bettess. Marriage à la mode-The best of both worlds (finite elements and boundary integrals). Editores: R. Glowinski, E. Y. Rodin e O. C. Zienkiewicz, *Energy methods in finite element analysis*, capítulo 5, páginas 82–107. John Wiley & Sons, 1979.
- [100] O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor. *The finite element method-basic formulation and linear problems*, volume 1. McGraw-Hill Book Company, 4^a edição, 1991.
- [101] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method-solid and fluid mechanics and non-linearity*, volume 2. McGraw-Hill Book Company, 4^a edição, 1991.