UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Elástica de Estruturas Reticuladas

João António Teixeira de Freitas

Carlos Tiago

2 de maio de 2022

Índice

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objectivo

A análise estrutural é a fase de um processo de engenharia em que são quantificadas as variáveis que caracterizam o comportamento da parte resistente, ou *estrutura*, de uma construção já edificada ou a construir. Essas variáveis podem ser determinadas experimentalmente, sobre a estrutura existente ou recorrendo a um modelo físico da estrutura a construir, ou utilizando um modelo matemático que simula esse comportamento, o qual é geralmente bastante complexo e cuja caracterização envolve frequentemente muitas incertezas.

Este texto de introdução aos métodos de análise estrutural cobre apenas o modelo matemático mais simples, o modelo definido por um sistema de peças lineares, geralmente designado por *estrutura reticulada*. Para além disso, admite-se que o comportamento da estrutura é linear, isto é, que o comportamento mecânico dos elementos estruturais é elástico linear, *a hipótese de linearidade física*, e que são muito pequenos os deslocamentos e as deformações que se verificam nos elementos estruturais, *a hipótese de linearidade geométrica*.

Admite-se ainda que se conhecem todas as características geométricas e mecânicas dos elementos estruturais e que a solicitação que actua sobre estrutura é determinística e está univocamente caracterizada. Admite-se, finalmente, que essa solicitação provoca um comportamento estrutural quasi-estático, isto é, que são desprezáveis os efeitos variáveis no tempo, designadamente as forças de inércia e de amortecimento.

Por *acção* entende-se tudo o que possa alterar os campos de tensão e/ou de extensão em qualquer parte da estrutura, como, por exemplo as sobrecargas, o pré-esforço de elementos estruturais, as variações térmicas e os assentamentos nos apoios da estrutura. A informação que se pretende obter de uma análise estrutural é o valor e a distribuição das grandezas que caracterizam a resposta da estrutura a uma dada acção, designadamente os esforços, as deformações e os deslocamentos nas secções das peças lineares, tipicamente vigas e pilares, e as reacções nos apoios que simulam a ligação da estrutura à fundação.

Apesar das hipóteses simplificativas em que se baseia, o modelo resultante é frequentemente utilizado na análise de estruturas reais, como as estruturas de edifícios e de pontes, pois a informação que proporciona é suficiente para fins de verificação dos critérios de segurança. Acresce que o grau de precisão que é assegurado na definição dessa informação é o adequado para fins de aplicação prática, desde que o conjunto de hipóteses seja apropriado para o caso em estudo, o que sucede frequentemente em situações normais de serviço das estruturas.

Para obter essa informação, os problemas de análise estrutural devem ser formulados e resolvidos usando os métodos que assegurem a máxima eficácia dos meios disponíveis. A concepção que aqui se adopta visa a solução dos problemas de análise estrutural em computador. É vantajoso, nesse contexto, formular matricialmente o problema da análise de estruturas, o que justifica a designação alternativa de *Análise Matricial de Estruturas* para a abordagem aqui seguida.

Uma outra designação também frequentemente utilizada é a de *Cálculo Automático de Estruturas*, pois a concepção da formulação do problema de análise estrutural é determinada pelo objectivo de potenciar a sistematização e a automatização das três fases de um processo de análise estrutural por computador: a definição do problema, isto é, a definição dos dados sobre a estrutura e o carregamento; a formulação e a resolução do problema, o que no contexto da modelação matemática corresponde a calcular e a resolver o sistema de equações que caracteriza o comportamento da estrutura; e a apresentação dos resultados, o que na análise de estruturas reticuladas corresponde a representar e quantificar a deformada da estrutura e a distribuição dos esforços nos elementos estruturais e nas reacções nos apoios.

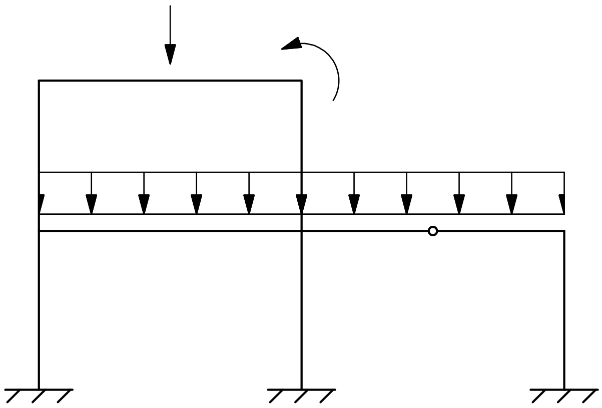
O modelo matemático do comportamento linear de estruturas reticuladas é tipicamente descrito por equações diferenciais às derivadas parciais, existindo diversos métodos para o resolver através de um sistema de equações algébricas equivalentes. O que distingue esses métodos são as variáveis do problema seleccionadas para incógnitas. São aqui tratados os dois principais métodos de análise estrutural, designadamente o *método das forças* e o *método dos deslocamentos*.

1.2 Representação da Estrutura

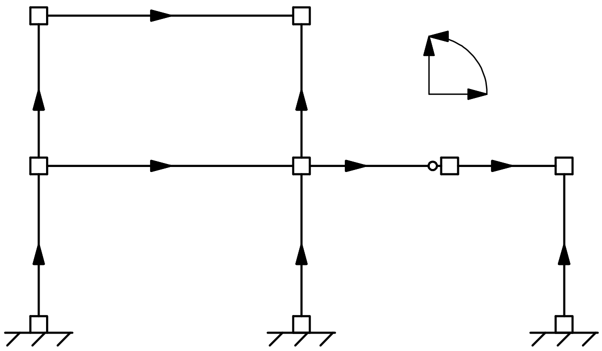
Como se ilustra na figura 1.1a, a representação de uma estrutura reticulada é idealizada recorrendo a quatro tipos de elementos: as peças lineares, que recebem as cargas e as transmitem ao meio de fundação, os nós rígidos, que ligam as peças lineares entre si e à fundação, os aparelhos de libertação, que permitem controlar os esforços em determinadas secções das peças lineares, e os aparelhos de ligação, geralmente designados por apoios, que caracterizam as condições de ligação da estrutura ao meio de fundação.

Uma *peça linear*, também designada por peça prismática, é um elemento estrutural em que a dimensão longitudinal é muito superior às suas dimensões transversais, como as vigas e os pilares, que funcionam predominantemente à flexão e à compressão, respectivamente. é representada pelo seu eixo, ao qual se atribui um sistema de referência utilizado na medição das quantidades vectoriais que caracterizam o seu comportamento. Por simplicidade, e porque traduzem a situação prática mais corrente, admite-se geralmente que as peças lineares têm eixo recto e secção constante. As peças curvas podem ser aproximadas por um conjunto adequado de segmentos rectos e as peças de secção variável por um conjunto de peças de secção constante, como se ilustra nas figuras 1.2 e 1.3.

Os *nós rígidos* representam os pontos de intersecção dos eixos de peças lineares adjacentes, podendo ou não ter uma representação física na estrutura real. Em termos de modelação estrutural, a sua principal função é identificar as peças lineares contínuas que formam a estrutura. Como adiante se poderá verificar, a sistematização do cálculo é muito facilitada se se admitir que as peças lineares são contínuas, isto é, que não têm libertações nem apoios no vão. É desta condição que decorre a discretização em duas peças lineares contínuas da barra articulada na estrutura representada na figura 1.1.

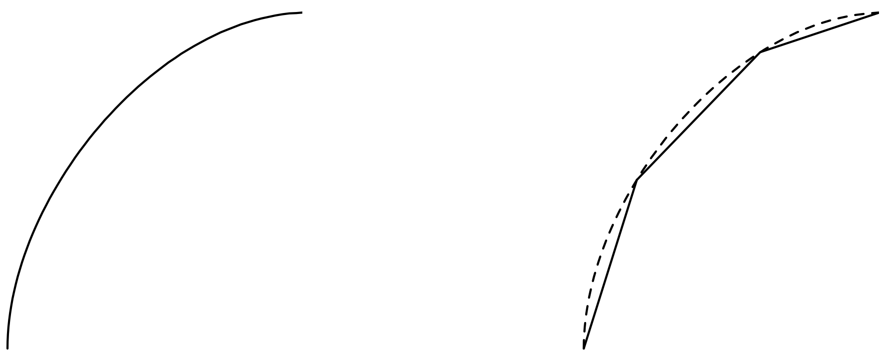


(a) Representação gráfica da estrutura e cargas.



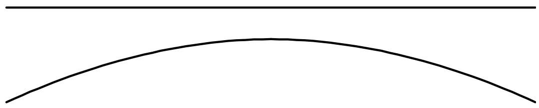
(b) Discretização da estrutura.

Figura 1.1: Estrutura e respectiva discretização.

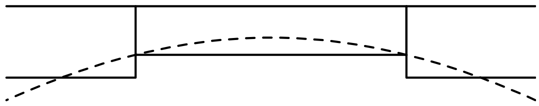


(a) Eixo curvo. (b) Aproximação do eixo curvo.

Figura 1.2: Discretização de uma peça curva.



(a) Alçado da peça.



(b) Discretização através de peças de secção constante.

Figura 1.3: Discretização de peças com secção variável.

Os *aparelhos de libertação* são sistemas que permitem deslocamentos relativos entre as secções transversais de peças lineares, podendo representar uma idealização de cálculo ou dispositivos construtivos concebidos para esse efeito. Os aparelhos de libertação são utilizados para controlar directamente o esforço correspondente ao movimento relativo que permitem. Estão, por isso, tipicamente associados a um dos seis esforços que se podem desenvolver numa secção transversal de uma estrutura reticulada, designadamente as duas componentes do momento flector, as duas componentes do esforço transverso, o esforço axial e o momento torsor, como representado na figura 1.4.

A *rótula*, ou *articulação*, é um aparelho que permite a rotação relativa entre duas barras, podendo essa rotação ser livre em relação a um ponto (rótula esférica) ou a um eixo (rótula cilíndrica). O *encastramento deslizante* é um aparelho que permite a translação relativa entre duas barras, perpendicularmente ao seu eixo e no plano que as contém. A *libertação axial* é um aparelho que permite a translação relativa entre duas barras, segundo o eixo comum a essas barras. Um aparelho de libertação diz-se ser *perfeito* se o movimento relativo que permite é livre, independentemente do valor do esforço correspondente. Dizem--se *elásticos* se esse movimento é proporcional ao esforço correspondente.

As representações usuais dos aparelhos de libertação perfeitos e elásticos são as indicadas nas figuras 1.5 e 1.6.

O mesmo tipo de representação pode ser utilizado para estruturas planas ou tridimensionais, desde que, no caso das libertações de momento flector e de esforço transverso, se indique expressamente qual o movimento ou movimentos permitidos. Como as libertações de esforço axial e de momento torsor estão associadas a esforços e movimentos segundo o eixo da peça, a sua representação esquemática tem de especificar univocamente o seu comportamento, sendo também necessário distinguir inequivocamente as rótulas esféricas e as rótulas cilíndricas na modelação de estruturas espaciais.

Qualquer dos aparelhos de libertação acima referidos, os quais são combináveis para simular libertações múltiplas de esforços, pode também ser utilizado para simular as condições de apoio da estrutura, bastando para tal introduzir uma combinação apropriada de aparelhos de libertação entre o nó e a fundação da estrutura. Por combinação apropriada entende-se um conjunto de aparelhos de libertação que permita os mesmos movimentos, na mesma direcção e sentido, que os aparelhos de apoio reais, e que sejam portanto capazes de absorver o mesmo tipo de esforços, ou reacções de apoio.

Os *aparelhos de apoio*, ou de ligação, são sistemas que impedem, total ou parcialmente, os deslocamentos dos nós de extremidade de uma peça linear ligada ao meio de fundação, podendo também representar uma idealização de cálculo ou um dispositivo construtivo específico, como se ilustra na figura 1.6. O movimento que está impedido ou restringido

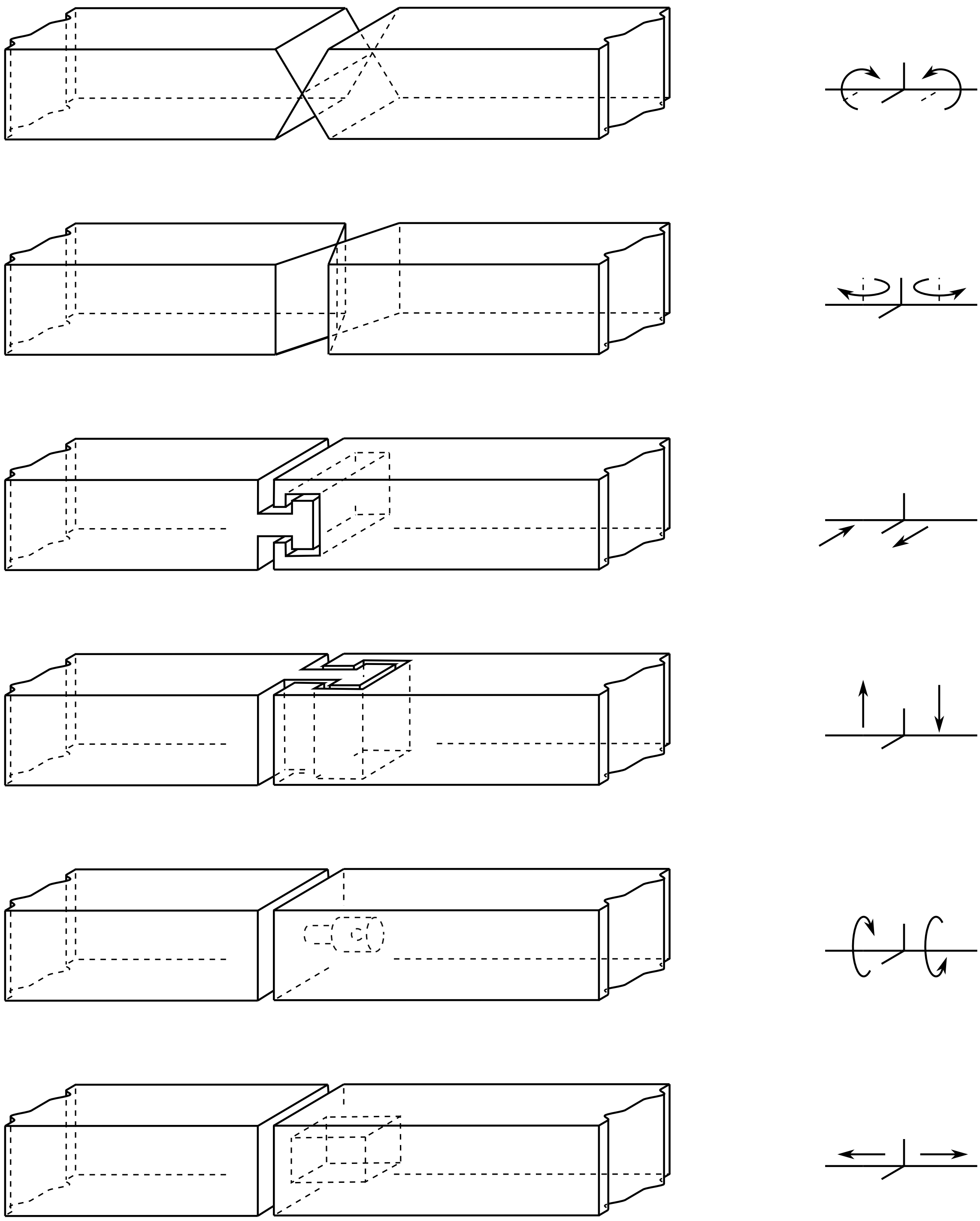


Figura 1.4: Aparelhos de libertação.

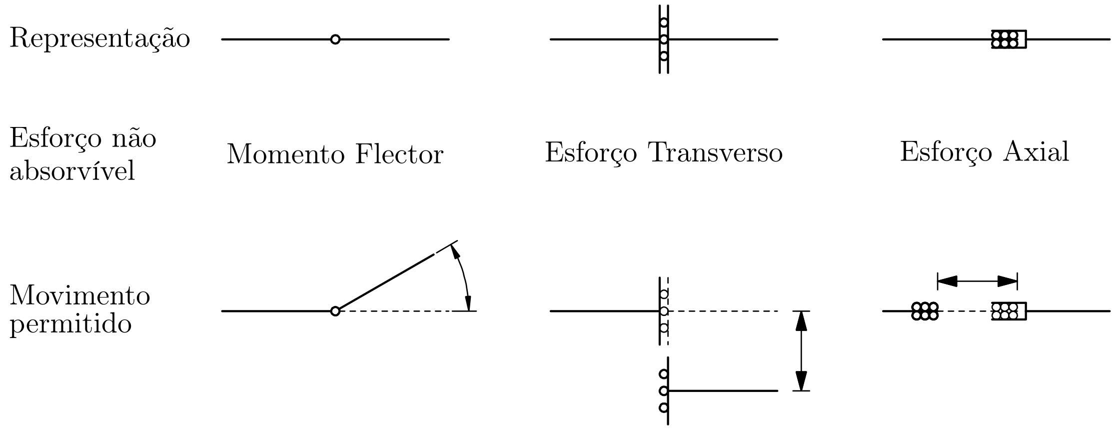


Figura 1.5: Representação de aparelhos de libertação perfeitos.

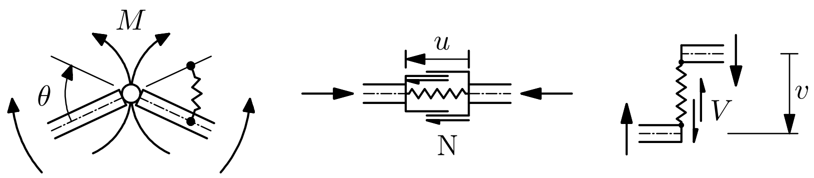


Figura 1.6: Representação de aparelhos de libertação elásticos.

provoca o desenvolvimento de uma força, ou momento, que define a reacção transmitida ao meio de fundação.

Podem desenhar-se aparelhos de ligação que restringem apenas um ou qualquer combinação dos seis movimentos possíveis no espaço, designadamente três translações e três rotações. Definem-se na figura 1.7 os aparelhos de apoio mais utilizados na modelação de estruturas reticuladas, designadamente, o *encastramento total*, que impede todos os movimentos do nó, o *encastramento deslizante*, que permite apenas a translação no sentido da libertação, o *encastramento de rotação*, que impede a rotação do nó segundo o eixo normal ao aparelho, o *apoio fixo*, que impede as translações do nó, e o *apoio móvel* que impede a translação segundo o eixo do aparelho. Tal como os aparelhos de libertação, os aparelhos de ligação também podem ser perfeitos ou elásticos. Uma ligação diz-se ser *perfeita* se for rígida, isto é, se impedir o movimento correspondente. Diz-se ser *elástica* se o movimento que restringe for proporcional à reacção correspondente, sendo esse comportamento representado inserindo uma mola segundo esse movimento, linear ou angular.

1.3 Representação das Acções e da Resposta da Estrutura

As acções a que uma estrutura reticulada pode estar sujeita podem ser transmitidas através das peças lineares, as *cargas de vão*, e dos nós, as *cargas nodais*. São exemplos de cargas de vão o peso próprio e as sobrecargas decorrentes das funções da estrutura, o pré-esforço de elementos estruturais, as variações térmicas nesses elementos. São exemplo de cargas nodais as forças e os momentos aplicados nos nós, ou os deslocamentos e as rotações aí impostos, designadamente as cedências nos apoios. é por vezes conveniente falar em *forças generalizadas*, ou simplesmente *forças*, para incluir numa mesma designação forças e momentos, concentrados ou distribuídos. O conceito de *deslocamento* ou *deslocamento generalizado* é utilizado no mesmo sentido, agora em termos de componentes de movimento.

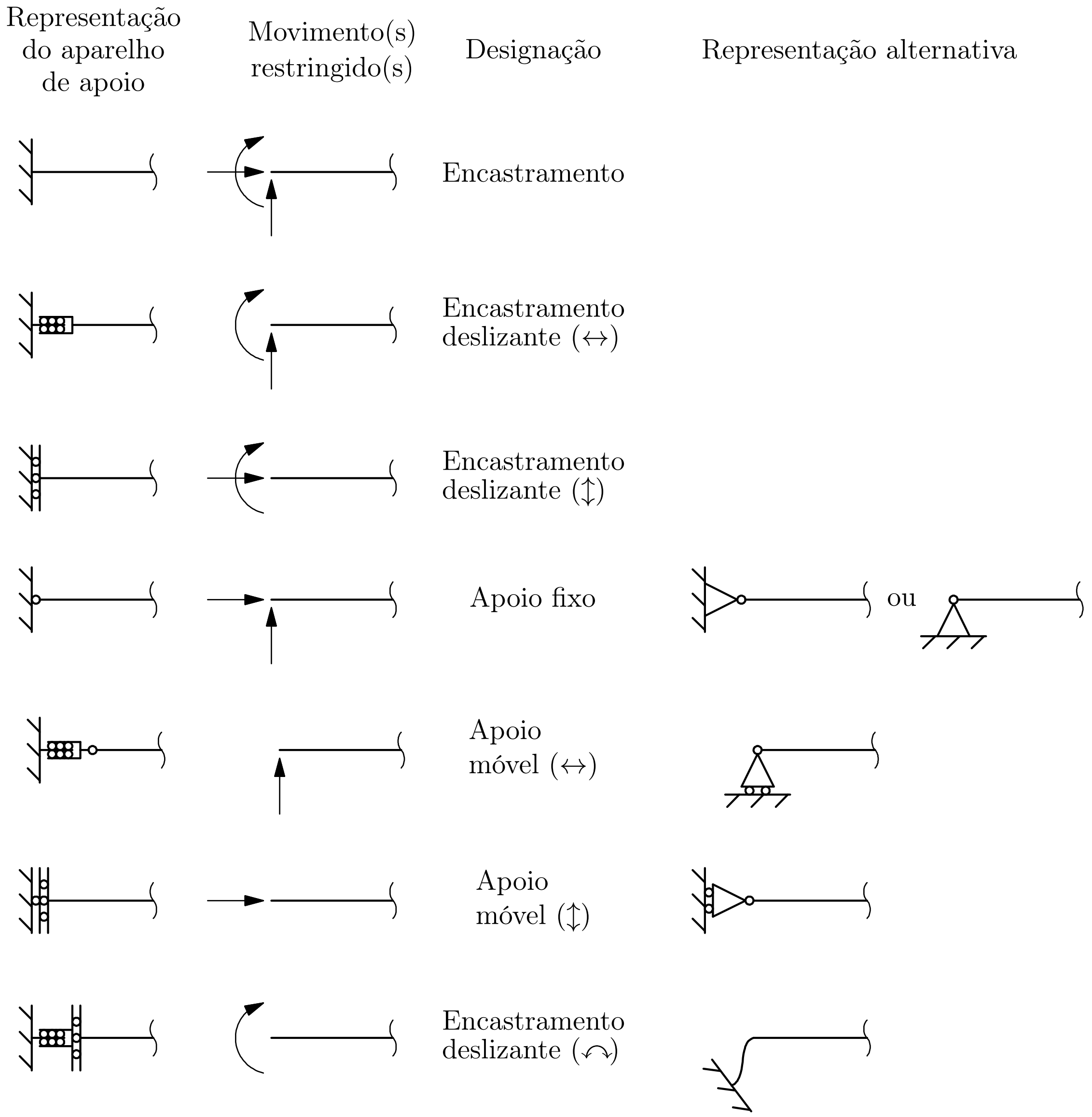


Figura 1.7: Representação dos aparelhos de apoio rígidos.

Admite-se na análise estrutural que a acção é conhecida, sendo o objectivo central determinar os deslocamentos e os esforços que provocam. Esta informação pode ser proporcionada ao analista numericamente, definindo os valores determinados para os deslocamentos em determinados nós da estrutura, ou graficamente, representando a deformada da estrutura, a qual descreve o movimento e mudança de forma do conjunto dos elementos estruturais. Analogamente, os esforços podem ser definidos numericamente em secções seleccionadas ou representados por diagramas que definem a sua variação ao longo das peças. As reacções são definidas numericamente e atribuídas aos apoios em que se desenvolvem, utilizando-se o mesmo procedimento relativamente às deformações.

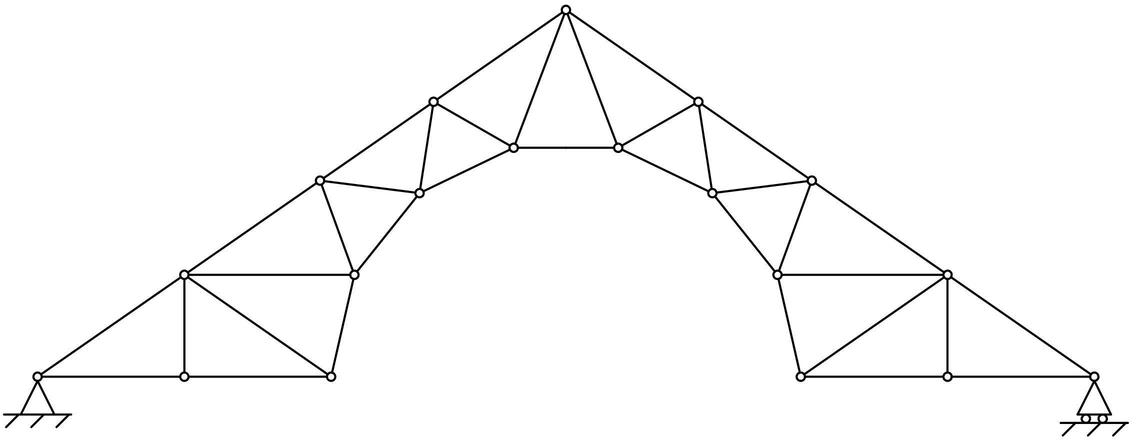


Figura 1.8: Treliça plana.

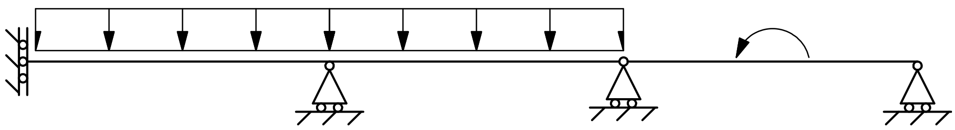


Figura 1.9: Viga contínua.

1.4 Classificação das Estruturas Reticuladas

As estruturas reticuladas são usualmente classificadas em estruturas *planas* ou *espaciais*, ou tridimensionais, consoante os elementos estruturais existam ou não num mesmo plano. Em cada caso, podem ser classificadas de acordo com o conjunto de esforços que caracterizam o seu comportamento, o qual decorre das acções a que estão sujeitas e da maneira como os elementos estruturais se ligam entre si e ao meio de fundação.

O modelo de *estrutura articulada*, ou *treliça*, é o modelo mais simples, em que se admite que as peças lineares estão apenas sujeitas a esforço axial. Tal pressupõe que a estrutura está sujeita apenas a forças aplicadas nos nós e que todas as barras se ligam entre si e ao meio de fundação por *rótulas globais*, como se ilustra na figura 1.8. A rótula global é a representação usada para indicar que todas as barras incidentes num nó, excepto uma, se articulam nesse nó.

O modelo de *viga contínua* aplica-se a vigas com dois ou mais tramos que funcionam predominantemente à flexão, como se ilustra na figura 1.9. Admite-se que a peça é recta e que as acções envolvem apenas forças transversais ao eixo e momentos no plano da viga, de modo a assegurar que é nulo o esforço axial em todos os outros elementos estruturais.

O modelo de *grelha* aplica-se a estruturas reticuladas planas actuadas por forças perpendiculares a esse plano e a momentos em torno de eixos existentes nesse plano, como se indica na figura 1.10. Os elementos estruturais funcionam, portanto, à flexão e ao corte, no sentido das cargas aplicadas, e à torção. O esforço axial e a flexão e o corte no plano da estrutura são nulos por se admitir que são nulas as forças aplicadas nesse plano e os momentos segundo eixos que lhe sejam ortogonais.

O modelo de *estrutura porticada plana*, exemplificado na figura 1.1, aplica-se a estruturas reticuladas planas sujeitas a um sistema de forças complementar do descrito para as grelhas. Os elementos estruturais funcionam, portanto, à flexão e ao corte, no plano da estrutura, e ao esforço axial. A torção, a flexão e o corte fora do plano da estrutura são

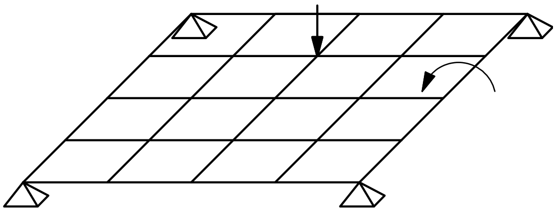


Figura 1.10: Modelo de grelha.

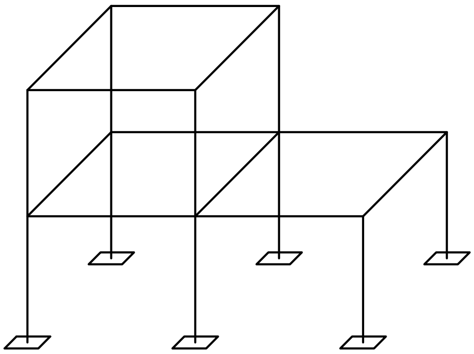


Figura 1.11: Estrutura porticada tridimensional.

nulos por se admitir que são nulas as forças ortogonais a esse plano e os momentos segundo eixos que nele existam. O modelo de *estrutura porticada tridimensional*, representado na figura 1.11, é o mais geral e aplica-se a todas as situações em que os elementos estruturais estão sujeitos à flexão e ao corte em dois planos, ao esforço axial e à torção. Esse comportamento pode verificar-se em estruturas que existam num plano mas em que a acção, as ligações dos elementos estruturais entre si e à fundação ou a própria assimetria das secções transversais das peças induzam um comportamento tridimensional.

1.5 Modelos matemáticos

A análise estrutural é a disciplina da engenharia de estruturas vocacionada para a determinação da resposta de uma estrutura a uma dada acção. O modelo matemático é a ferramenta mais poderosa a que um analista pode recorrer para caracterizar o comportamento de uma estrutura: é simples de formular e de compreender, se se associar sempre essa formulação ao fenómeno físico em estudo, é geral, pois aplica-se a todos os problemas que cumpram as hipóteses do modelo, e pode ser resolvido com grande economia e rapidez através dos meios de cálculo disponíveis.

É por isso fundamental que não se olhe para uma equação da análise estrutural como uma fórmula matemática com origem duvidosa e utilidade incerta, mas como uma relação física muito clara entre quantidades que descrevem o comportamento de uma estrutura. No presente contexto, são fundamentalmente três os tipos de equação presentes num modelo estrutural:

a) as equações de *equilíbrio*, que relacionam as forças generalizadas que constituem a acção (forças exteriores) com os esforços (forças interiores) nos elementos estruturais;

b) as equações de *compatibilidade*, que relacionam os deslocamentos generalizados (movimento) com as deformações (mudança de forma) dos elementos estruturais;

c) as equações de *elasticidade*, que relacionam os esforços com as deformações, sendo essa relação unívoca para materiais elásticos lineares.

Estas equações definem as três leis que determinam o comportamento das estruturas. São simples em conceito, têm um significado físico claro e até intuitivo, e a sua compreensão e manipulação exige apenas a formação adequada num número limitado de disciplinas, designadamente: Estática e Resistência de Materiais, para compreender o modelo de comportamento da estrutura; álgebra Linear, por permitir exprimir as equações do problema da forma compacta e sistemática; Programação, por ser bastante simples automatizar os métodos de análise estrutural que aqui são abordados.

A sistematização de procedimentos, isto é, a explicitação passo a passo do algoritmo de solução, envolvendo cada um deles um mesmo conjunto de operações, é essencial para assegurar a eficácia computacional de um método de cálculo. Essa opção, que tem necessariamente de ser aqui seguida, pode suscitar a propensão para aprender como se faz sem compreender porque se faz. A questão não é saber fazer os cálculos, essa é a função do computador, mas saber se os resultados obtidos são coerentes com o problema que se pretende resolver. São frequentes os erros cometidos na entrada de dados e na escolha das opções de modelação oferecidas pelos programas de cálculo disponíveis no mercado. A apreciação crítica dos resultados só pode ser feita conhecendo e compreendendo o método de cálculo utilizado nesses programas, ou seja, os fundamentos, a lógica e a estratégia dos métodos de análise estrutural em que esses programas se baseiam.

1.6 Organização do Texto

Este texto de introdução à análise elástica linear de estruturas reticuladas está organizado de modo a iniciar o estudo pelo método de análise estrutural mais intuitivo, o método das forças, e abordar depois o método que é mais facilmente automatizável, o método dos deslocamentos, no qual se baseia a maioria dos programas de análise estrutural. No entanto, para estabelecer a terminologia e para caracterizar o problema da análise elástica linear estática de estruturas reticuladas, começou-se, ainda neste capítulo, por resumir as definições e as hipóteses básicas, e sistematizar a representação do modelo estrutural.

Os conceitos envolvidos no segundo capítulo apelam ao entendimento do comportamento de estruturas reticuladas, ainda sem qualquer preocupação de quantificar esse comportamento. Recorre-se, para isso, aos conceitos intuitivos de simetria e anti-simetria, aplicados agora aos campos vectoriais que descrevem o movimento e o sistema de forças interiores em estruturas reticuladas. Define-se o que se entende por estruturas simétricas, discute-se a sua resposta a acções simétricas e anti-simétricas e conclui-se sobre as simplificações de cálculo que daí podem decorrer.

No terceiro capítulo caracteriza-se o comportamento do elemento estrutural que tipifica as estruturas reticuladas, a peça linear. São introduzidos dois conceitos, os *esforços independentes* e as *deformações independentes*, os quais são fundamentais para atingir dois objectivos centrais. O primeiro é substituir o sistema de equações diferenciais que define o comportamento da estrutura por um sistema de equações algébricas equivalente, o mais adequado para processamento automático. O segundo é criar as condições necessárias para sistematizar o cálculo: a caracterização que se obtém para a caracterização do comportamento da peça linear é válida para todas as peças de qualquer estrutura reticulada.

Os dois capítulos seguintes incidem sobre matérias introdutórias à posterior apresentação do método das forças (Capítulo 6), designadamente a determinação dos graus de hiperestatia de estruturas reticuladas (Capítulo 4) e o cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas (Capítulo 5). O primeiro conceito é o que determina a identificação das incógnitas do método das forças, designadamente as reacções de apoio e/ou os esforços que tornam a estrutura hiperestática. Essas forças e/ou esforços são desconhecidos, sendo por isso designadas por *forças indeterminadas* ou *forças hiperestáticas da estrutura*. No entanto, os deslocamentos, ou os deslocamentos relativos correspondentes, são conhecidos. é esta a informação que é utilizada para resolver a indeterminação das forças hiperestáticas.

Assim, a estratégia do método consiste, fundamentalmente, em libertar as forças hiperestáticas para converter a estrutura numa estrutura isostática equivalente, designada por *estrutura-base*. Esta estrutura é depois analisada combinando dois carregamentos, a acção dada (conhecida) e o conjunto das forças hipertáticas (ainda desconhecidas). Calculam-se depois os deslocamentos correspondentes às forças hiperestáticas e impõe-se que sejam idênticos aos que se verificam na estrutura hiperestática em análise. O sistema de equações que daí resulta é o sistema resolvente do método das forças e a solução assegura que a deformada da estrutura-base seja idêntica à deformada da estrutura hiperestática em análise. Como o número de incógnitas do sistema resolvente depende do grau de hiperestatia da estrutura e todos os seus coeficientes são determinados calculando deslocamentos em estruturas isostáticas, estes dois conceitos são introduzidos nos Capítulos 4 e 5, respectivamente, antes de expor a estratégia e a sistematização do método das forças, no Capítulo 6.

É semelhante a organização adoptada para a apresentação do método dos deslocamentos. Neste método escolhem-se para incógnitas os deslocamentos livres nos nós da estrutura, os *deslocamentos indeterminados* da estrutura, e explora-se o facto de serem conhecidas as forças correspondentes. A estratégia do método consiste em definir a estrutura cinematicamente determinada correspondente à estrutura a analisar, isto é, a estrutura que se obtém quando se bloqueiam todos os deslocamentos indeterminados, a qual define a *estrutura-base*, e assegurar que as forças que nela se geram quando é actuada por cada um dos deslocamentos indeterminados e pelo carregamento dado recuperam o sistema de forças aplicado à estrutura em análise.

Portanto, para calcular os coeficientes do sistema resolvente do método dos deslocamentos é necessário conhecer as forças que se desenvolvem nos nós de uma peça linear sujeita a dois tipos de acções: a acção das cargas dadas quando são nulos os deslocamentos nodais e a acção independente de cada um dos deslocamentos nodais. Essa é a informação que se reúne no Capítulo 7. Para além disso, é necessário identificar as incógnitas do problema, isto é, quantos e quais são os deslocamentos nodais indeterminados da estrutura em análise. Esse problema, de determinar o *grau de indeterminação cinemática* de uma estrutura reticulada, é abordado no Capítulo 8. Com base nesta informação, apresenta-se no Capítulo 9 a estratégia e a sistematização do método dos deslocamentos.

Capítulo 2

Simetria e Anti-simetria

2.1 Introdução

São diversas as razões que justificam a opção pela construção de estruturas simétricas, isto é, estruturas com uma topologia (arranjo dos elementos estruturais), com condições de apoio e com propriedades geométricas e mecânicas simétricas em relação a um ponto, a um eixo ou a um plano.

Em regime linear, uma estrutura simétrica sujeita a uma acção simétrica responde de tal maneira que todas as grandezas vectoriais que caracterizam essa resposta mantêm essa propriedade de simetria. Complementarmente, se uma estrutura simétrica é sujeita a uma acção anti-simétrica o seu comportamento linear é também anti-simétrico.

Estes resultados são úteis de dois pontos de vista distintos. O primeiro é o de permitirem simplificar a análise do problema: basta resolver metade da estrutura e inferir, por simetria ou anti-simetria, o comportamento da outra metade da estrutura. O segundo aspecto que interessa relevar é o de permitir ao analista verificar os resultados obtidos e ajuizar se os erros que detecta nos resultados obtidos, em termos da simetria ou da anti-simetria esperada, resultam de insuficiências de precisão numérica ou de erros na caracterização do problema estrutural.

Começa-se neste capítulo por definir as três formas de simetria mais comuns, em relação a um ponto, a um eixo e a um plano, e caracterizam-se depois as condições que definem a simetria de uma estrutura reticulada. Os conceitos de simetria e anti-simetria são também utilizados para decompor uma acção em duas parcelas complementares, simétrica e anti-simétrica, explorando o princípio da sobreposição de efeitos, válido para a análise linear de estruturas. O comportamento das estruturas simétricas e as simplificações decorrentes do efeito de acções simétricas e anti-simétricas é depois analisado para a forma de simetria mais comum, a simetria em relação a um eixo. O capítulo termina com uma breve apreciação das vantagens e desvantagens do recurso às simplificações de simetria em análise estrutural.

2.2 Definições

As propriedades de um conjunto de quantidades, referido ao sistema de coordenadas $\mathbf{x}$ apresentam uma distribuição *simétrica* em relação a um novo sistema de coordenadas $\mathbf{y}$, com a mesma origem de $\mathbf{x}$, se essas propriedades se repetem em ambos os sistemas. O *elemento de simetria* poderá ser a origem do sistema (*simetria em relação a um ponto*), ao eixo x_j (*simetria em relação a um eixo*) ou ao plano $x_j = 0$ (*simetria em relação a um* *plano*), consoante a posição relativa entre os sistemas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

Ponto (origem):	$y_1 = -x_1;$	$y_2 = -x_2;$	$y_3 = -x_3.$
Eixo (x_3) :	$y_1 = -x_1;$	$y_2 = -x_2;$	$y_3 = +x_3.$
Plano $(x_3 = 0)$:	$y_1 = +x_1;$	$y_2 = +x_2;$	$y_3 = -x_3.$

Uma estrutura reticulada diz-se ser *simétrica* em relação a um ponto, a um eixo ou a um plano, quando existir em relação a esse elemento: a) Simetria da topologia, isto é, da distribuição das barras; b) Simetria na distribuição dos aparelhos de libertação interior e exterior; c) Simetria das propriedades geométricas e mecânicas entre cada elemento estrutural e a sua imagem. Os três casos de simetria estão ilustrados na figura 2.1, onde implicitamente se admite a condição de simetria das propriedades geométricas e mecânicas.

Uma solicitação f diz-se ser *simétrica* em relação a um ponto, eixo ou plano se a cada elemento referido ao sistema $\mathbf{x}$ corresponde um complemento referido ao sistema $\mathbf{y}$ tal que:

Ponto (origem):	$F_{y\,1} = -F_{x\,1};$	$F_{y\,2} = -F_{x\,2};$	$F_{y\,3} = -F_{x\,3}.$
Eixo (x_3) :	$F_{y\,1} = -F_{x\,1};$	$F_{y\,2} = -F_{x\,2};$	$F_{y\,3} = +F_{x\,3}.$
Plano $(x_3 = 0)$:	$F_{y\,1} = +F_{x\,1};$	$F_{y\,2} = +F_{x\,2};$	$F_{y\,3} = -F_{x\,3}.$

A relação complementar define a solicitação *anti-simétrica*:

Ponto (origem):	$F_{y\,1} = +F_{x\,1};$	$F_{y\,2} = +F_{x\,2};$	$F_{y\,3} = +F_{x\,3}.$
Eixo (x_3) :	$F_{y\,1} = +F_{x\,1};$	$F_{y\,2} = +F_{x\,2};$	$F_{y\,3} = -F_{x\,3}.$
Plano $(x_3 = 0)$:	$F_{y\,1} = -F_{x\,1};$	$F_{y\,2} = -F_{x\,2};$	$F_{y\,3} = +F_{x\,3}.$

A solicitação pode ser uma força generalizada (força ou momento) ou um deslocamento generalizado (deslocamento linear ou angular). Os três casos de simetria a anti-simetria estão representados na figura 2.2.

2.3 Decomposição da Solicitação

Como o princípio da sobreposição estabelece que a resposta de uma estrutura com comportamento linear é independente da ordem pela qual se aplicam as acções, qualquer solicitação assimétrica sobre uma estrutura simétrica pode ser decomposta em duas parcelas, uma simétrica e a outra anti-simétrica, em relação ao elemento de simetria da estrutura. Essa decomposição pode ser definida da maneira seguinte, como se ilustra na figura 2.3:

(a) a parcela simétrica é igual à soma da metade da solicitação com metade do seu complemento simétrico;

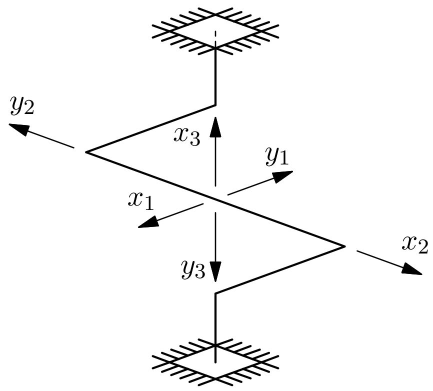
(b) a parcela anti-simétrica é igual à soma da metade da solicitação com metade do seu complemento anti-simétrico.

Exercício 2.1. Analise a decomposição de uma acção assimétrica nas parcelas simétrica e anti-simétrica para os seguintes casos:

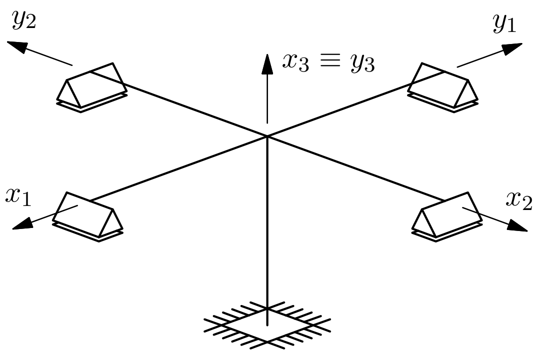
(i) variação de temperatura uniforme ao longo da secção da peça;

(ii) variação de temperatura linear ao longo da secção da peça;

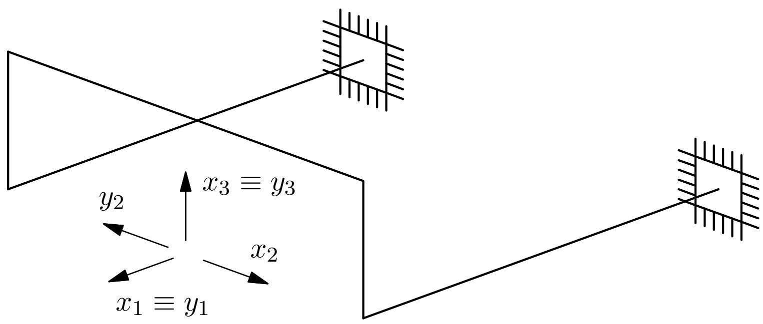
(iii) assentamentos de apoio.



(a) Simetria de ponto.

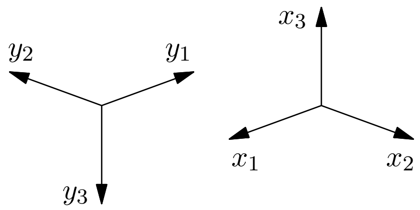


(b) Simetria de eixo.

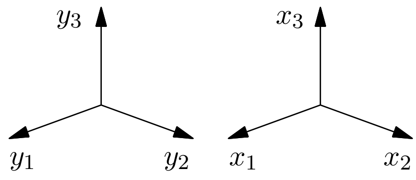


(c) Simetria de plano.

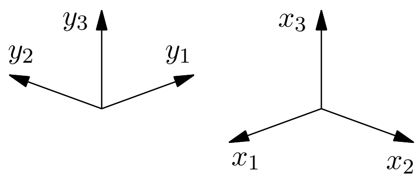
Figura 2.1: Os diferentes tipos de simetria.



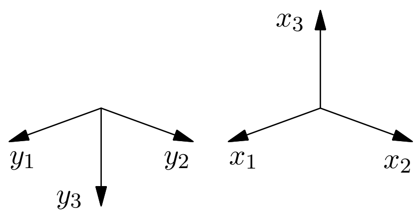
(a) Simetria de ponto.



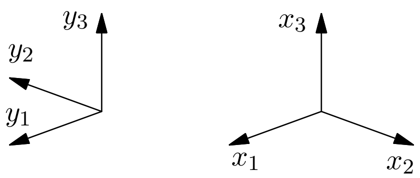
(b) Anti-simetria de ponto.



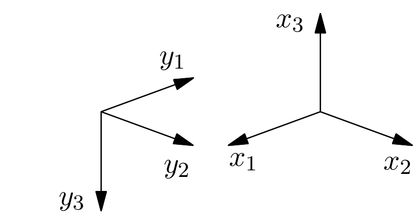
(c) Simetria de eixo.



(d) Anti-simetria de eixo.



(e) Simetria de plano.



(f) Anti-simetria de plano.

Figura 2.2: Simetria da solicitação.

2.4 Simetria Axial

A estrutura representada na figura 2.4 satisfaz as condições de simetria em relação ao eixo $x_3 \equiv y_3$, tendo-se optado por orientar os elementos estruturais em relação aos sistemas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (o que não é estritamente necessário). Este exemplo vai ser usado para caracterizar a resposta de uma estrutura com um eixo de simetria sujeita separadamente a acções simétricas e a acções anti-simétricas. Dessa caracterização vão resultar as condições que é necessário assegurar para analisar apenas metade da estrutura e para inferir, por considerações de simetria ou de anti-simetria, o comportamento da metade da estrutura não é analisada explicitamente.

2.4.1 Acção Simétrica

Da simetria da estrutura e da solicitação resulta que um ponto da estrutura e a sua imagem, por exemplo os pontos A e B na figura 2.5, sofrem deslocamentos iguais segundo uma direcção paralela ao eixo de simetria, sendo também iguais mas agora de sinais contrários as rotações e os deslocamentos segundo a direcção normal ao eixo.

Por outras palavras, é simétrico o campo de deslocamentos em estruturas simétricas simetricamente solicitadas. Em consequência das relações de compatibilidade, à simetria do campo de deslocamentos corresponde um campo de deformações simétrico. A simetria

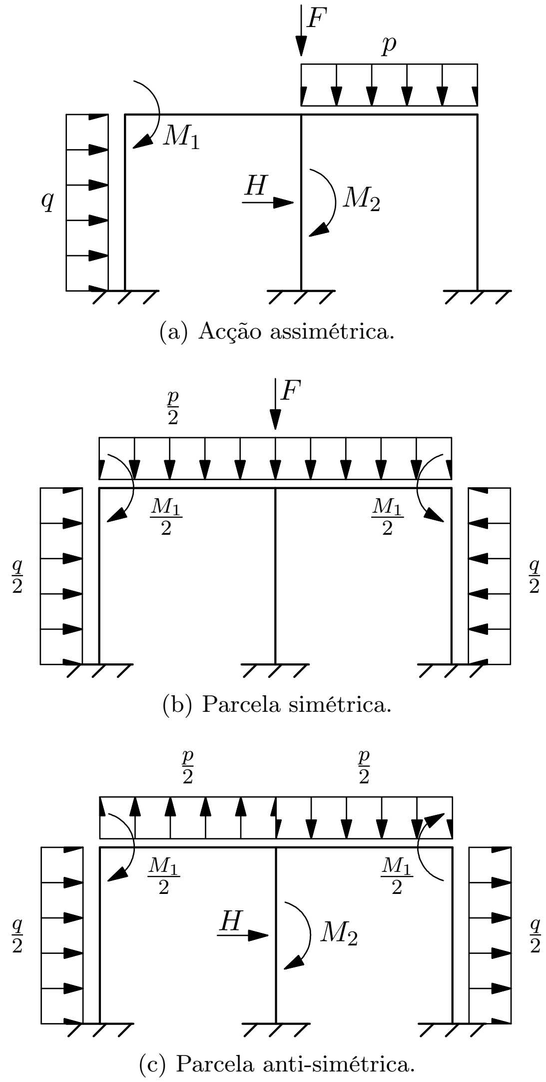


Figura 2.3: Decomposição de uma acção assimétrica.

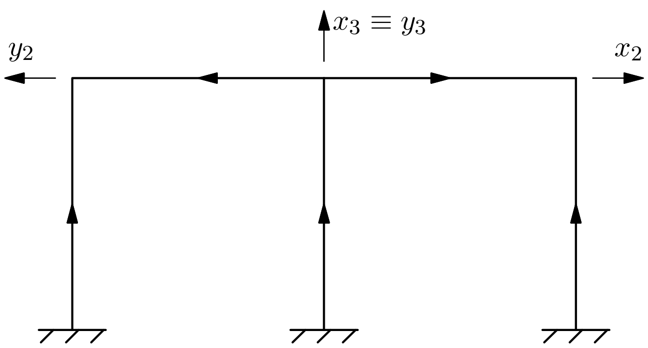


Figura 2.4: Pórtico simétrico em relação a um eixo.

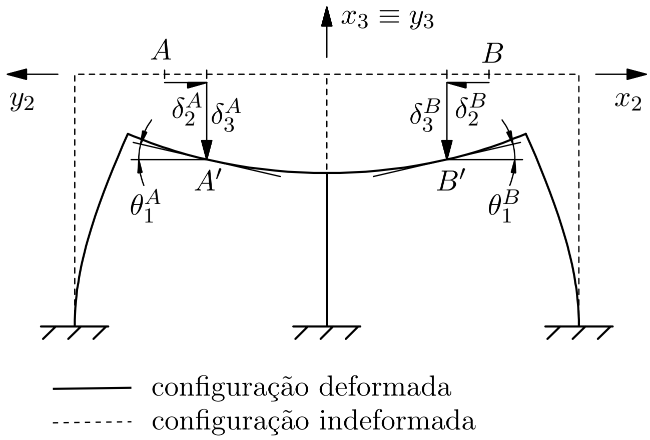


Figura 2.5: Simetria da deformada.

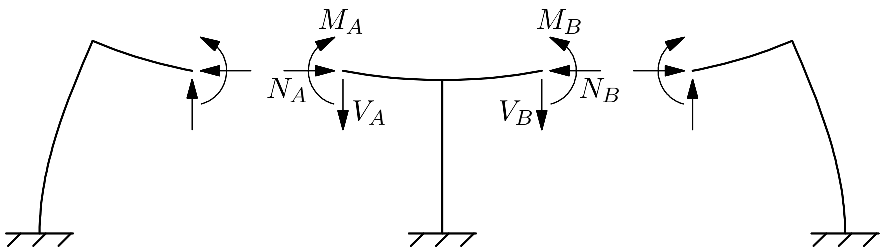


Figura 2.6: Simetria das forças internas.

dos campos de deslocamentos e de deformações é ilustrada na figura 2.5 e a do campo de esforços na figura 2.6.

A relação de elasticidade permitiria concluir que os campos de forças interiores são também simétricos, pois estão directamente associados às deformações compatíveis com os deslocamentos simétricos. Uma justificação mais intuitiva é que se o sistema de forças aplicado à estrutura é simétrico, também o são as reacções de apoio e os sistemas de forças interiores obtidos para qualquer diagrama de corpo livre (simétrico) da estrutura, como se ilustra na figura 2.6.

Conclui-se, portanto, e em consequência das convenções adoptadas na medição dos esforços, que os diagramas de momento flector são simétricos em traçado e que os diagramas de esforço axial e de esforço transverso são, respectivamente, simétricos e anti-simétricos em valor, independentemente da orientação adoptada para os elementos estruturais.

Com base nestes resultados, pode-se concluir sobre o movimento dos pontos sobre o eixo de simetria da estrutura e sobre as deformações e os esforços de peças que coincidam com esse eixo.

Como as rotações e os deslocamentos perpendiculares ao eixo de simetria têm sinais contrários, na vizinhança de pontos que existam sobre o eixo de simetria, como o ponto C da figura 2.5, a continuidade física da estrutura permite concluir que em estruturas simétricas simetricamente solicitadas, são nulas as rotações e os deslocamentos perpendiculares ao eixo de simetria em pontos da estrutura existentes sobre esse eixo. O deslocamento segundo o eixo de simetria será livre se, na estrutura dada, não estiver sujeito a uma ligação que impeça esse movimento.

É análogo o raciocínio que leva à caracterização do campo de esforços em peças coincidentes com o eixo de simetria da estrutura. Como os momentos e as forças perpendiculares ao eixo têm sinais contrários, a continuidade desses campos exige que sejam nulos os momentos flectores e os esforços transversos sobre o eixo de estruturas simétricas simetricamente solicitadas. O esforço axial será não nulo em todas as secções que não sejam afectadas por libertações de esforço axial que possam existir na estrutura dada.

Conclui-se, assim, que o cálculo de uma estrutura reticulada plana simétrica em relação a um eixo e simetricamente solicitada pode ser efectuado considerando apenas a metade da estrutura e da solicitação que ficam para um dos lados do eixo de simetria. A nova estrutura é idêntica à meia-estrutura no que se refere às características topológicas, mecânicas e geométricas, e está sujeita a apenas metade da solicitação dada.

No entanto, é necessário introduzir correcções sobre o eixo de simetria da meia-estrutura para assegurar que o seu comportamento isolado replique o comportamento que teria quando inserida na estrutura simétrica:

(a) às ligações que possam existir nos nós colocados sobre o eixo de simetria devem somar-se as ligações (rígidas) que impedem a rotação e o deslocamento perpendicular ao eixo;
(b) às libertações que possam existir nas barras colocadas sobre o eixo de simetria devem ser adicionadas as rótulas (perfeitas) necessárias e suficientes para assegurar que essas peças ficam apenas sujeitas à acção do esforço axial;
(c) aos elementos estruturais (barras e libertações ou ligações elásticas) que existam sobre o eixo de simetria é atribuída metade da rigidez axial das peças correspondentes da estrutura simétrica.

Esta última correcção decorre do facto de ser metade o valor das forças aplicadas segundo o eixo de simetria, assim como do esforço axial e das reacções em barras e apoios que coincidam com esse eixo. A redução para metade da rigidez axial assegura que o deslocamento axial na meia-estrutura é idêntico ao deslocamento axial que se verifica nos mesmos pontos da estrutura completa. É irrelevante o valor que se atribui à rigidez de flexão ou de corte desses elementos, por a condição de simetria assegurar que são nulos os esforços correspondentes. A aplicação deste processo de simplificação está ilustrada na figura 2.7.

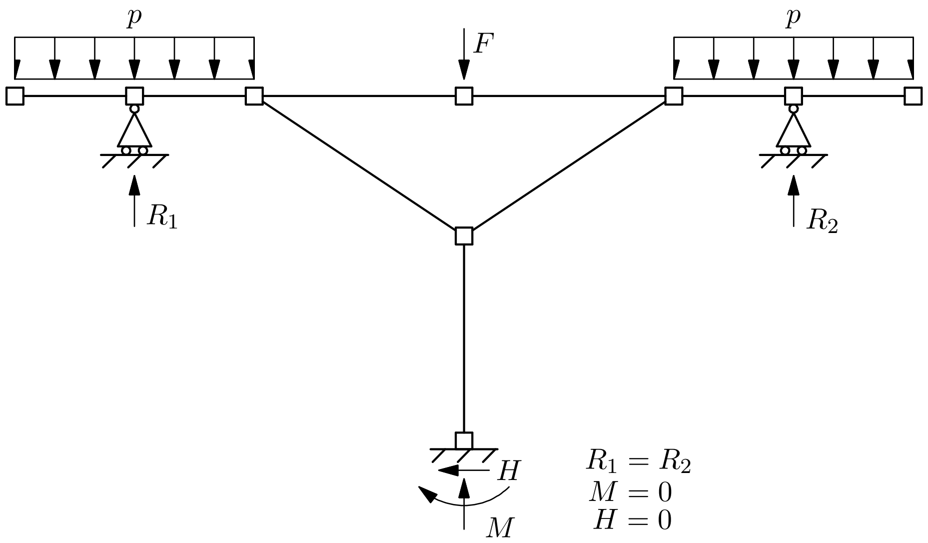
2.4.2 Acção Anti-Simétrica

Da simetria da estrutura e da anti-simetria da solicitação resulta que um ponto da estrutura e a sua imagem, por exemplo os pontos A e B na figura 2.8, sofrem rotações e deslocamentos perpendiculares ao eixo de simetria iguais, sendo também iguais mas de sinais contrários os deslocamentos segundo esse eixo.

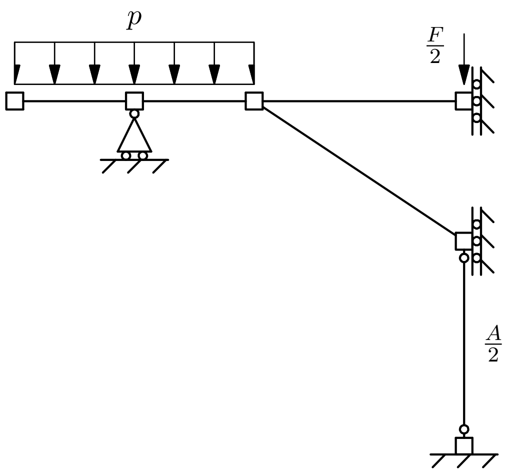
Pode, portanto, concluir-se que é anti-simétrico o campo de deslocamentos em estruturas simétricas anti-simetricamente solicitadas, assim como os campos das deformações. Conclui-se, também, que se o campo de forças (generalizadas) é anti-simétrico, também o são as reacções de apoio e os sistemas de forças interiores. A anti-simetria dos campos de deslocamentos e de deformações é ilustrada na figura 2.8, e a do campo de esforços na figura 2.9.

Em consequência das convenções adoptadas na medição dos esforços, os diagramas de momentos flectores são anti-simétricos em traçado e que os diagramas de esforço axial e de esforço transverso são, respectivamente, anti-simétricos e simétricos em valor, independentemente da orientação adoptada para os elementos estruturais.

Destas conclusões decorre a caracterização dos deslocamentos dos pontos sobre o eixo de simetria da estrutura e das deformações e dos esforços de peças que coincidam com



(a) Estrutura original.



(b) Estrutura após simplificação de simetria.

Figura 2.7: Simplificação de simetria.

esse eixo. O resultado é, naturalmente, complementar do obtido para o comportamento de estruturas simétricas sujeitas a acções simétricas.

Como os deslocamentos segundo o eixo de simetria de um ponto e da sua imagem têm sentidos opostos, conclui-se que em estruturas simétricas anti-simetricamente solicitadas são nulos os deslocamentos segundo o eixo de simetria em pontos da estrutura existentes sobre esse eixo. As rotações e os deslocamentos perpendiculares ao eixo são livres se, na estrutura dada, esses pontos não estiverem sujeitos ligações que impeçam esses movimentos.

Como as forças segundo o eixo de simetria, num ponto e na sua imagem, são iguais e têm sentidos opostos, são nulas as forças, e portanto também o esforço axial, em peças que coincidam com o eixo de simetria da estrutura e de anti-simetria do carregamento. Os momentos e as forças perpendiculares podem não ser nulos sobre o eixo, pelo que o mesmo sucede em relação aos momentos flectores e aos esforços transversos em secções de peças coincidentes com o eixo, desde que aí não existem as libertações correspondentes.

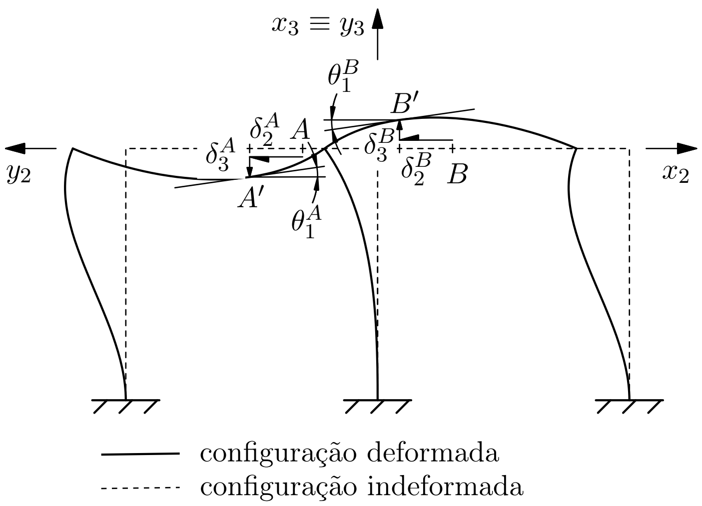


Figura 2.8: Antissimetria de deformada.

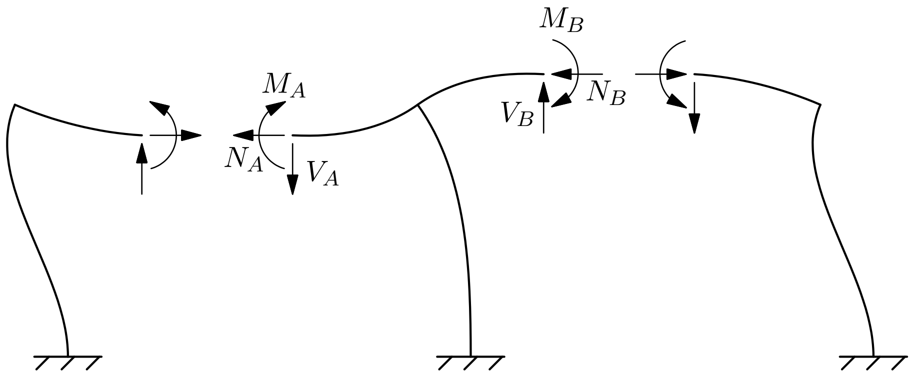


Figura 2.9: Antissimetria das forças internas.

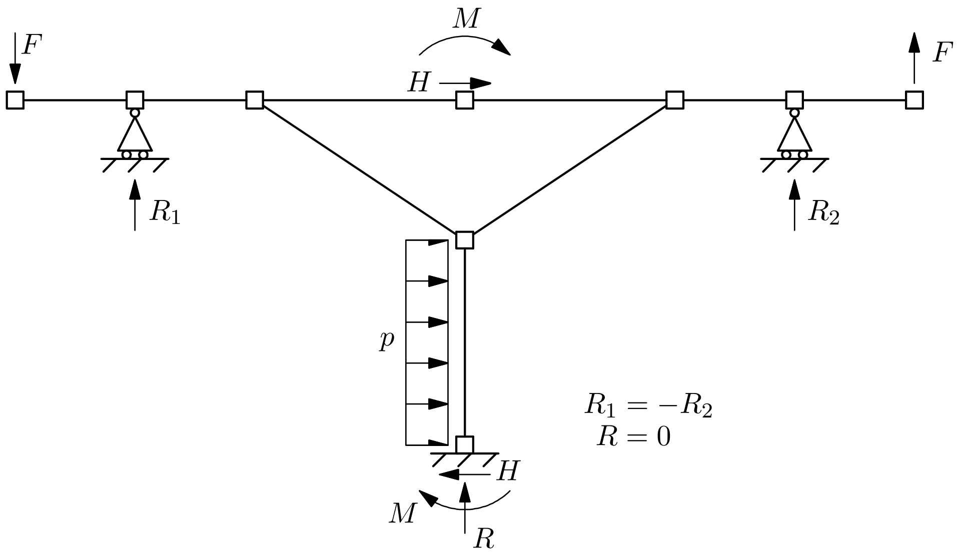
O cálculo de uma estrutura reticulada plana simétrica em relação a um eixo e antisimetricamente solicitada em relação a esse eixo também pode ser realizado considerando apenas a metade da estrutura e da solicitação que ficam para um dos lados do eixo. Como para o caso do carregamento simétrico, a nova estrutura é idêntica à meia-estrutura no que se refere às características topológicas, mecânicas e geométricas, e está sujeita a apenas metade da solicitação dada.

As correcções que são introduzidas sobre o eixo de simetria da meia-estrutura, ilustradas na figura 2.10, asseguram que se recupera o comportamento que teria se inserida na estrutura simétrica:

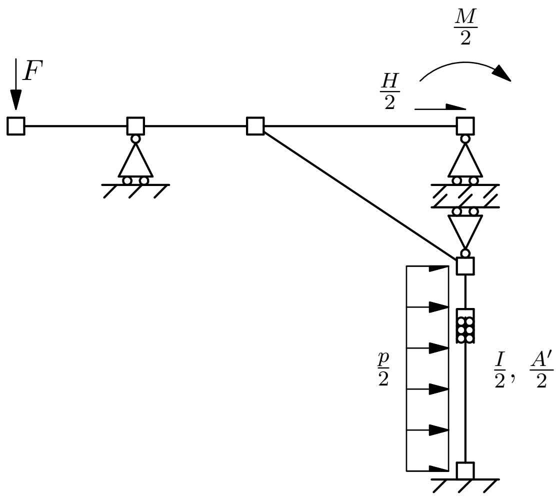
(a) às ligações que possam existir nos nós colocados sobre o eixo de simetria devem somar-se as ligações (rígidas) que impedem o deslocamento segundo o eixo de simetria da estrutura;

(b) às libertações que possam existir nas barras colocadas sobre o eixo de simetria devem ser adicionadas as libertações axiais (perfeitas) necessárias e suficientes para assegurar que nessas peças seja nulo o esforço axial;

(c) aos elementos estruturais (barras e libertações ou ligações elásticas) que existam sobre o eixo de simetria é atribuída metade da rigidez de flexão e de corte das peças correspondentes da estrutura simétrica.



(a) Estrutura original.



(b) Estrutura após simplificação de simetria.

Figura 2.10: Simplificação de antissimetria.

Esta última correcção também decorre da necessidade de assegurar que as peças sobre o eixo de simetria tenham a mesma deformação na meia-estrutura e na estrutura completa, tendo em atenção ser metade o valor dos momentos e das forças aplicadas perpendicularmente o eixo de simetria, assim como do momento flector e do esforço transversal e das reacções em barras e apoios que coincidam com esse eixo. É irrelevante o valor que se atribui à rigidez axial desses elementos, por a condição de simetria assegurar que é nulo o esforço correspondente nas barras coincidentes com o eixo de simetria.

2.5 Procedimento Geral

Os resultados apresentados na secção anterior representam a particularização dos seguintes teoremas para o caso da simetria estrutural em relação a um eixo:

simetria: uma solicitação simétrica aplicada a uma estrutura simétrica introduz na estrutura vectores de deslocamentos generalizados, forças internas generalizadas e reacções de apoio generalizadas com uma distribuição simétrica;

anti-simetria: uma solicitação anti-simétrica aplicada a uma estrutura simétrica introduz na estrutura vectores de deslocamentos generalizados, forças internas generalizadas e reacções de apoio generalizadas com uma distribuição anti-simétrica.

Para aplicar estes teoremas no cálculo de estruturas simétricas deve proceder-se da seguinte maneira:

1. decompor o carregamento nas parcelas simétrica e anti-simétrica;
2. definir a simplificação de simetria da estrutura, assegurando que:
   (a) os nós existentes sobre o eixo de simetria só podem ter deslocamentos segundo o eixo, se tal for permitido na estrutura original;
   (b) as barras sobre o eixo de simetria só podem estar sujeitas a esforço axial, se tal for permitido na estrutura original;
   (c) as barras e as libertações ou ligações elásticas existentes sobre o eixo de simetria têm metade da rigidez axial das que lhes está atribuída na estrutura dada;
3. aplicar a acção simétrica à simplificação de simetria da estrutura, resolver o problema de análise estrutural, determinando as reacções, os diagramas de esforços e a deformada;
4. recuperar a solução para a estrutura simétrica sujeita ao carregamento simétrico atendendo a que:
   (a) os esforços axiais nas barras e as reacções nos apoios existentes sobre o eixo de simetria são o dobro dos valores obtidos pela análise da meia-estrutura;
   (b) a distribuição das reacções é simétrica;
   (c) os diagramas de momentos flectores e esforços axiais são simétricos e o diagrama de esforço transverso é anti-simétrico;
   (d) a deformada da estrutura é simétrica;
5. definir a simplificação de anti-simetria da estrutura, assegurando que:
   (a) os nós existentes sobre o eixo de simetria não podem ter deslocamentos segundo o eixo, podendo rodar ou ter deslocamentos perpendiculares ao eixo se tal for permitido na estrutura original;
   (b) as barras sobre o eixo de simetria só podem estar sujeitas a momento flector e a esforço transverso, onde tal for permitido na estrutura original;
   (c) as barras e as libertações ou ligações elásticas existentes sobre o eixo de simetria têm metade da rigidez de flexão e de corte das que lhes está atribuída na estrutura dada;
6. aplicar a acção anti-simétrica à simplificação de anti-simetria da estrutura, resolver o problema de análise estrutural, determinando as reacções, os diagramas de esforços e a deformada;
7. recuperar a solução para a estrutura simétrica sujeita ao carregamento anti-simétrico atendendo a que:
   (a) os momentos flectores e os esforços transversos nas barras existentes sobre o eixo e os momentos de encastramento e as reacções perpendiculares ao eixo nos apoios existentes sobre o eixo são o dobro dos valores obtidos pela análise da meia-estrutura;

(b) a distribuição das reacções é anti-simétrica;

(c) os diagramas de momentos flectores e esforços axiais são anti-simétricos e o diagrama de esforço transverso é simétrico;

(d) a deformada da estrutura é anti-simétrica;

8. sobrepor as soluções simétrica e anti-simétrica para recuperar as reacções de apoio, os esforços e a deformada da estrutura simétrica sujeita ao carregamento assimétrico.

2.6 Generalização e Limitações

Interessa realçar dois aspectos sobre simetria de estruturas. O primeiro tem a ver com formas de simetria múltipla e o segundo com o que se pode chamar falsas condições de assimetria, tipicamente associadas à distribuição de apoios.

Os casos de simetria múltipla ocorrem quando a primeira simplificação da estrutura simétrica, por simetria ou anti-simetria da acção, expõe uma meia-estrutura equivalente que apresenta ainda outro elemento de simetria, ou uma sequência dessas situações. O processo de simplificação pode ser repetido até se esgotar a possibilidade de encontrar um outro elemento de simetria, como se mostra na figura 2.11.

Como se ilustra na figura 2.12, uma estrutura pode satisfazer todas as condições de simetria mas violar a que incide sobre as condições de apoio. Sempre que a Estática o permita, as ligações que violam a condição de simetria podem ser alteradas libertando as ligações e aplicando as reacções que aí se desenvolvem, eventualmente introduzindo as ligações que impeçam os movimentos de corpo rígido que a alteração feita possa ter permitido. A estrutura modificada pode ser analisada explorando as condições de simetria ou anti-simetria, sendo válidos todos os resultados obtidos relativos a reacções de apoio, esforços e deformações. No entanto, é necessário somar à deformada da estrutura os deslocamentos de corpo rígido que recompõem as condições de ligação da estrutura original.

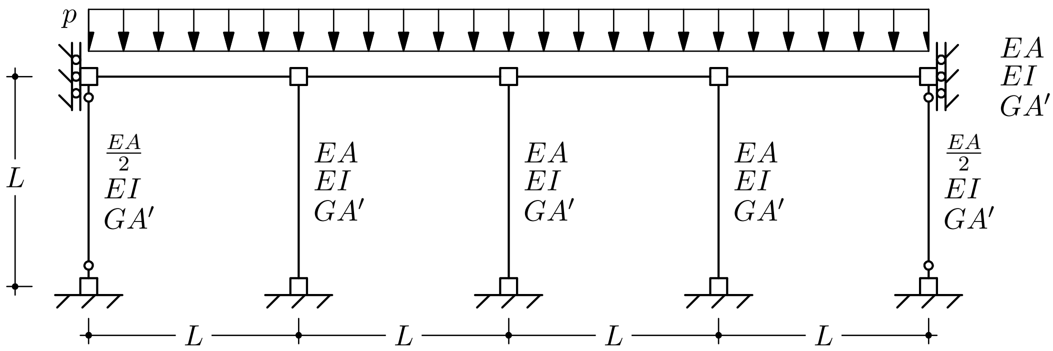
A possibilidade de poder substituir uma estrutura simétrica pela meia-estrutura equivalente traduz-se sempre por uma economia de cálculo, tanto mais significativa quanto maior for a complexidade topológica da estrutura original. Essa economia resulta da redução do número de barras e dos graus de indeterminação estática (α) e cinemática (β), os quais definem o número de variáveis e de equações do sistema resolvente quando se utiliza o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos, respectivamente. Quando certas simplificações não são utilizadas, verifica-se que a soma dos graus de indeterminação dos problemas simétrico e anti-simétrico recuperam o grau de indeterminação da estrutura original:

$$\alpha = \alpha_{\text{simetria}} + \alpha_{\text{anti-simetria}} \tag{2.1a}$$

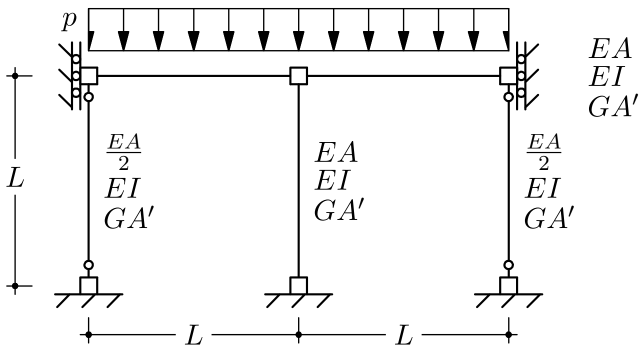
$$\beta = \beta_{\text{simetria}} + \beta_{\text{anti-simetria}} \tag{2.1b}$$

Com os meios de cálculo actualmente disponíveis, só se justifica o recurso às simplificações acima referidas se a estrutura simétrica está sujeita a apenas um tipo de carregamento, simétrico ou anti-simétrico, ou quando se deseja avaliar a coerência do modelo de cálculo utilizado.

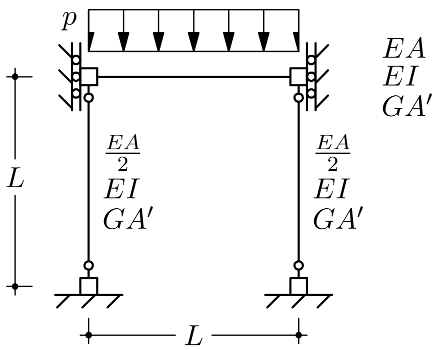
Quando os meios de cálculo são limitados e se pretende analisar uma estrutura simétrica sujeita à acção de uma solicitação assimétrica, é geralmente vantajoso separar a solicitação nas parcelas simétrica e anti-simétrica, por ser mais económico resolver cada um dos problemas, simétrico e anti-simétrico, do que o problema original, a dimensão do qual é, na melhor das hipóteses, cerca do dobro de qualquer dos problemas parcelares.



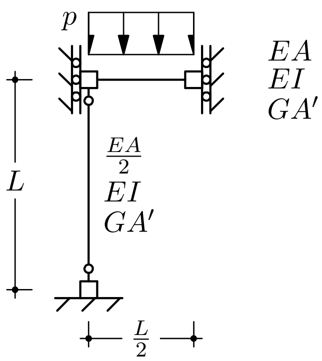
(a) Primeira simplificação.



(b) Segunda simplificação.

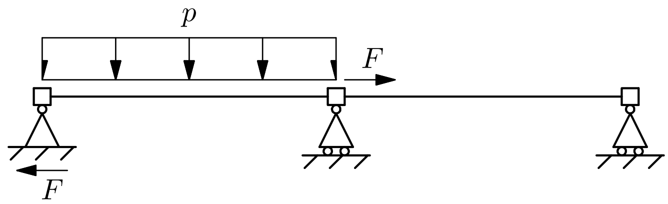


(c) Terceira simplificação.

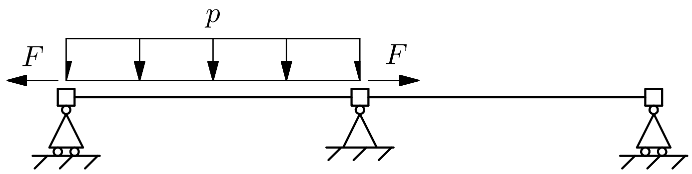


(d) Quarta simplificação.

Figura 2.11: Simplificação de simetria múltipla de pórtico.



(a) Estrutura assimétrica.



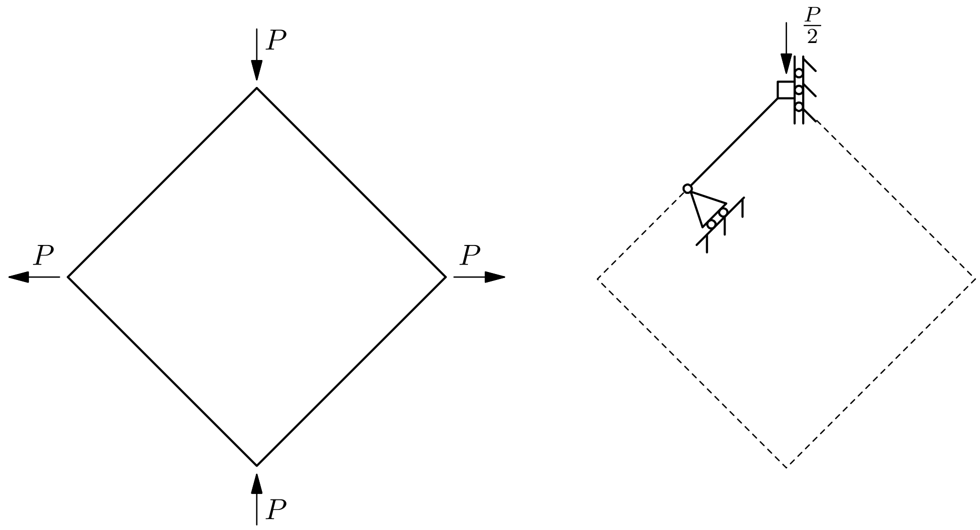
(b) Estrutura simétrica estaticamente equivalente.

Figura 2.12: Simplificação de uma estrutura assimétrica.

Finalmente, é importante lembrar que não se pode recorrer à separação das solicitações assimétricas actuando sobre estruturas simétricas quando se pretende simular o comportamento não linear da estrutura, por deixar então de ser válido o princípio da sobreposição. Em regime não-linear, o comportamento de uma estrutura simétrica pode não ser simétrico (ou anti-simétrico) quando sujeita a uma acção simétrica (anti-simétrica), tipicamente devido à possibilidade de bifurcação das configurações de equilíbrio.

Exercício 2.2. A peça quadrada de lado L representada na figura 2.13a é simétrica e estaticamente indeterminada, $\alpha = 3$, se se admitir que os deslocamentos de corpo rígido se encontram bloqueados. Verifique que, utilizando duas simplificações de simetria e uma simplificação de anti-simetria, se obtém a estrutura estaticamente determinada representada na figura 2.13b. Trace todos os diagramas de esforços da estrutura original.

Exercício 2.3. O pórtico simétrico representado na figura 2.14 tem características geométricas e mecânicas uniformes. Efectue todas as simplificações de simetria e anti-simetria possíveis.



(a) Original. (b) Após simplificações.

Figura 2.13: Estrutura quadrada.

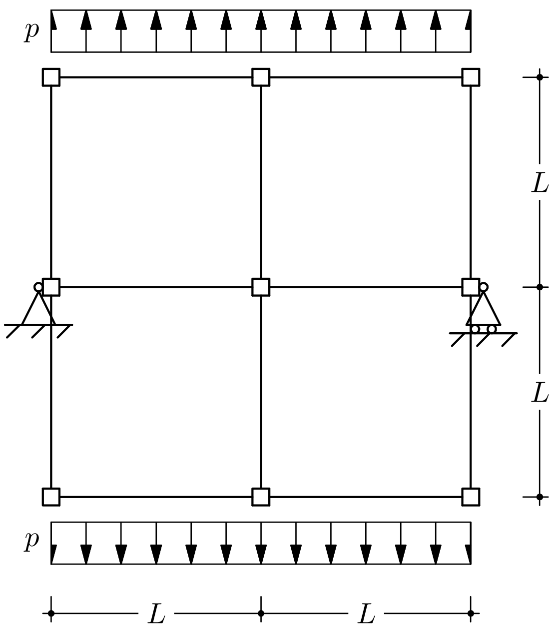


Figura 2.14: Pórtico simétrico.

Capítulo 3

Relações de Elasticidade

3.1 Introdução

Considere-se o pórtico plano representado na figura 3.1 e admita-se que a solicitação aí indicada é gradualmente introduzida. Para equilibrar o carregamento desenvolvem-se nos elementos estruturais forças internas ou *esforços*. Estes esforços provocam o aparecimento de *deformações* que se traduzem na alteração da geometria da estrutura.

As deformações que se desenvolvem nos elementos estruturais não são independentes dos esforços que neles existem. Pelo contrário, os esforços e as deformações estão associados por uma relação de causa-efeito que lhes é específica. Estas relações são designadas por *relações constitutivas* por dependerem essencialmente das propriedades mecânicas do material que constitui os elementos resistentes da estrutura. Quando, como aqui se admite, o material apresenta um comportamento elástico, estas relações são alternativamente designadas por relações de causalidade elástica ou, mais simplesmente, por *relações de elasticidade*.

O problema que em seguida se pretende abordar é o de estabelecer expressões gerais para as relações de elasticidade de peças lineares, que possam posteriormente ser utilizadas na análise de estruturas reticuladas. Essas relações vão ser expressas em termos dos esforços e das deformações *independentes* dos elementos estruturais, cuja noção a seguir se introduz.

Admita-se que uma peça linear é retirada de uma estrutura imediatamente antes e logo após a actuação da solicitação. O elemento genérico m, orientado da secção i para a secção j, representado na figura 3.2 pode ser identificado, por exemplo, com a barra AB do pórtico apresentado na figura 3.1.

Como a peça pertence a uma estrutura plana que se deforma no próprio plano, são suficientes três parâmetros para caracterizar o seu estado de deformação. Com base na representação dada na figura 3.2 pode de facto verificar-se que dos seis movimentos necessários para descrever a passagem da posição inicial, AB, para a posição final, $A'B'$, apenas três provocam a alteração da forma do elemento.

Para levar a peça da posição AB para a posição $A'B''$ basta introduzir sequencialmente as translações de corpo rígido d_1 e d_2, seguidas de uma rotação de corpo rígido, d_3. Como a peça permanece indeformada, recta e com um comprimento igual ao inicial, nenhum destes movimentos pode ser utilizado para caracterizar o estado de deformação. Todavia, para levar a peça da posição $A'B''$ para a posição final $A'B'$, torna-se necessário introduzir movimentos que provoquem a deformação da barra, como se ilustra mais detalhadamente na figura 3.3.

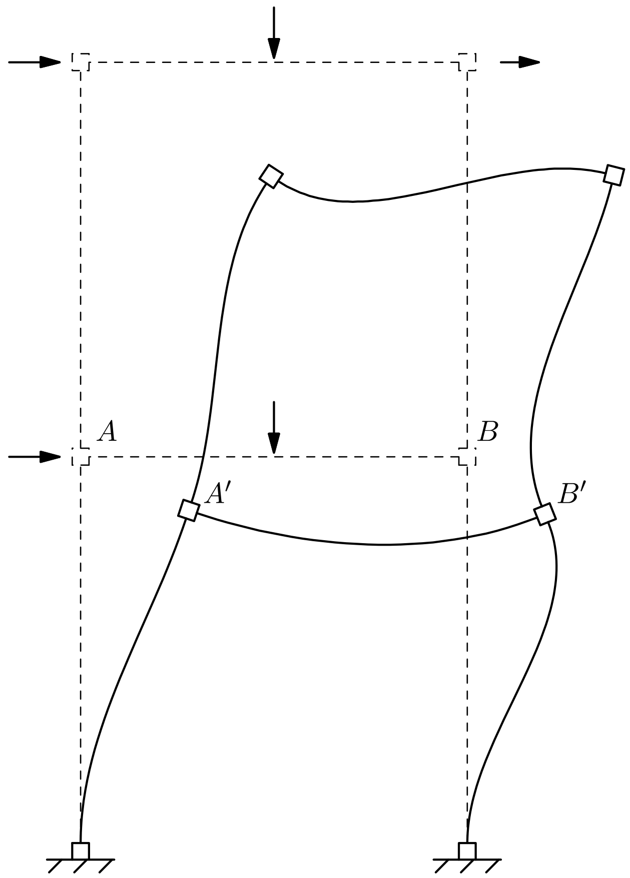


Figura 3.1: Configuração inicial e deformada de um pórtico plano.

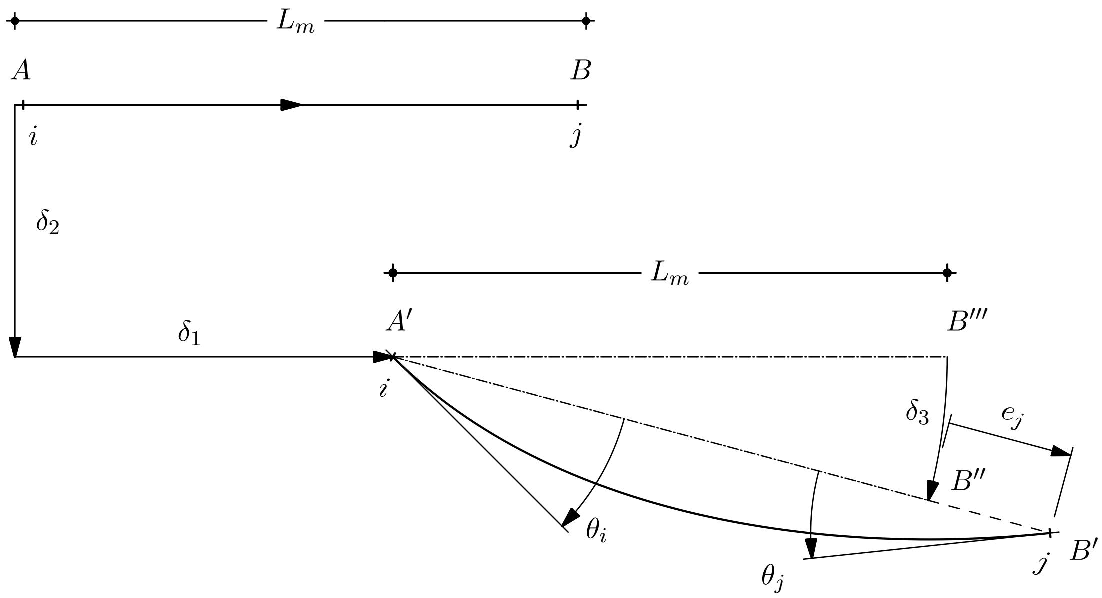


Figura 3.2: Peça destacada das configurações inicial e deformada de uma estrutura.

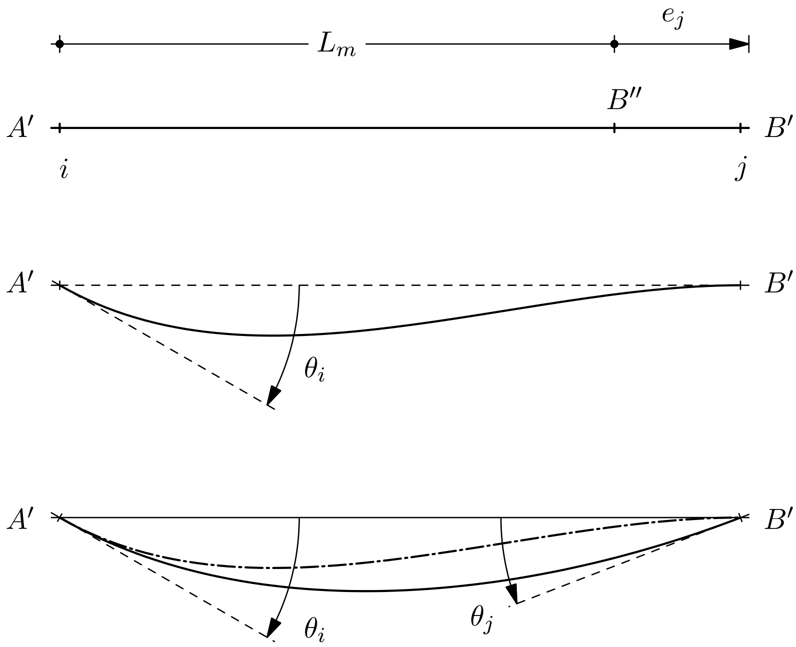


Figura 3.3: Movimentos que provocam deformação.

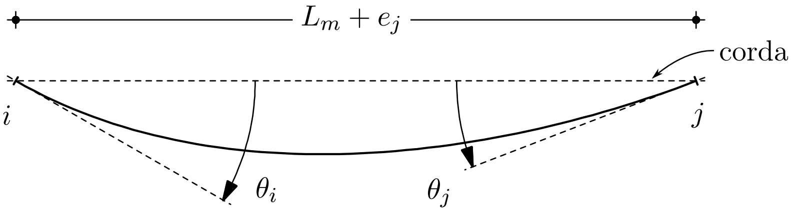


Figura 3.4: Deformações independentes.

Ao introduzir a extensão axial e_j consegue-se trazer o ponto B'' para a posição final B'. Basta agora introduzir sequencialmente as rotações θ_i e θ_j para recuperar a curvatura instalada na peça. Estes movimentos são organizados no *vector das deformações independentes*:

$$\mathbf{u}_m = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ e_j \end{Bmatrix}. \tag{3.1}$$

> **(D3.1)** As deformações independentes (3.1) são os parâmetros necessários e suficientes para caracterizar o estado de deformação de uma peça linear pertencente a uma estrutura plana que se deforme no próprio plano.

Como se ilustra na figura 3.4, as rotações θ_i e θ_j são medidas em relação à *corda* do elemento, isto é, o segmento de recta que une as secções extremas da peça deformada. A extensão axial e_j representa a diferença entre o comprimento da corda e o comprimento inicial da peça. Estes parâmetros de deformação são medidos positivamente de acordo com as convenções tradicionalmente adoptadas na Resistência de Materiais.

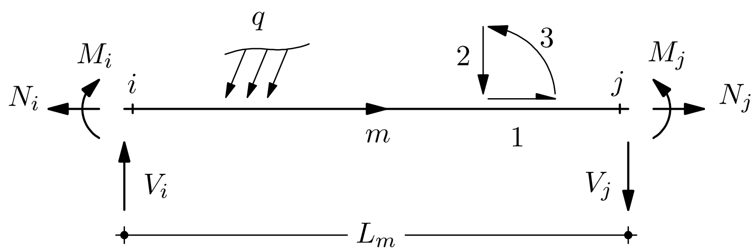


Figura 3.5: Diagrama de corpo livre.

Considere-se agora o problema de definir os parâmetros necessários e suficientes para caracterizar o campo de esforços que se desenvolve numa peça linear. Como se ilustra na figura 3.5 para manter a barra em equilíbrio depois de destacada da estrutura, é necessário aplicar nas secções de corte, as secções extremas i e j, as forças correspondentes ao conjunto de esforços libertados.

Entre todas as forças aplicadas ao elemento, apenas as cargas de vão, q, têm valores determinados. As seis forças de extremidade não são a priori conhecidas, sabendo-se no entanto que têm de satisfazer as três condições de equilíbrio no plano:

$$\begin{aligned} N_i =& N_j + Q_1 \\ V_i =& V_j + Q_2 \\ V_j =& \left(M_j - M_i + Q_3\right)/L. \end{aligned}$$

Nestas expressões gerais, Q_1 e Q_2 representam as resultantes das forças de vão q nas direcções 1 e 2, respectivamente, e Q_3 o momento resultante calculado na extremidade i, de acordo com o referencial local indicado na figura 3.5. Estas condições de equilíbrio mostram que só três das seis forças de extremidade são linearmente independentes. Por outras palavras, se se conhecerem três forças de extremidade, que não incluam simultaneamente os pares N_i e N_j ou V_i e V_j, torna-se possível calcular todas as outras, e portanto também os esforços em qualquer secção intermédia.

As forças de extremidade que vão ser utilizadas para descrever o campo de esforços numa peça linear são as correspondentes às deformações independentes (3.1), nomeadamente os momentos flectores nas secções extremas, M_i e M_j, e o esforço axial na secção j, N_j:

$$\mathbf{X}_m = \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ N_j \end{Bmatrix}. \tag{3.2}$$

> **(D3.2)** Os esforços independentes (3.2) são os parâmetros necessários e suficientes para caracterizar o estado de tensão numa peça linear pertencente a uma estrutura plana solicitada no próprio plano.

Note-se que os elementos do *vector dos esforços independentes* (3.2) são arrumados segundo a sequência adoptada para organizar as deformações correspondentes (3.1). Estes esforços são medidos positivamente no sentido indicado na figura 3.5 de acordo com a convenção tradicionalmente adoptada na Resistência de Materiais.

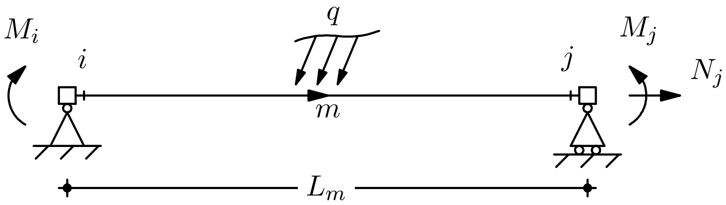


Figura 3.6: Viga simplesmente apoiada.

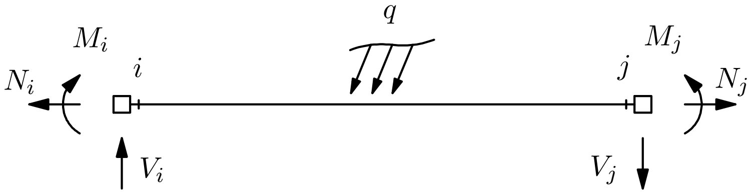


Figura 3.7: Barra estaticamente equivalente.

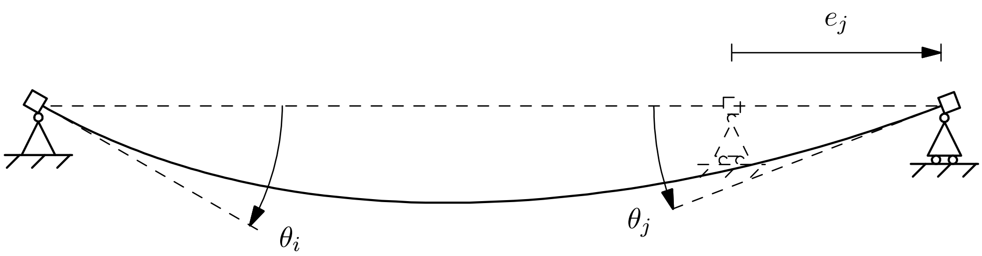


Figura 3.8: Deformações independentes na viga simplesmente apoiada.

3.2 Análise da Viga Simplesmente Apoiada

A análise do comportamento da viga simplesmente apoiada representada na figura 3.6 vai permitir estabelecer a relação que associa os esforços independentes $\mathbf{X}_m$ e as deformações elásticas correspondentes, $\mathbf{u}_m$, para uma qualquer peça de uma estrutura reticulada. Esta relação de causalidade entre os esforços e as deformações, a qual depende exclusivamente das características mecânicas e geométricas da peça, será posteriormente utilizada para caracterizar as relações constitutivas das estruturas reticuladas.

Como se ilustra na figura 3.7 a viga simplesmente apoiada é estaticamente equivalente à barra genérica representada na figura 3.5, pois está sujeita exactamente ao mesmo conjunto de forças aplicadas: as forças de extremidade dependentes, N_i, V_i e V_j, aparecem agora na forma de reacções de apoio.

Do ponto de vista cinemático, verifica-se que as condições de apoio escolhidas para o elemento típico impedem que se desenvolvam deslocamentos de corpo rígido. Além disso, como se pode verificar por comparação das deformadas representadas nas figuras 3.4 e 3.8, os deslocamentos que se desenvolvem nos extremos da viga identificam-se com os parâmetros escolhidos para descrever o campo de deformações nas peças lineares.

Na figura 3.9 indica-se a convenção adoptada para medir os esforços positivos numa secção genérica, de abcissa x, da viga simplesmente apoiada. Estes esforços podem ser calculados recorrendo às equações da Estática, encontrando-se as seguintes expressões:

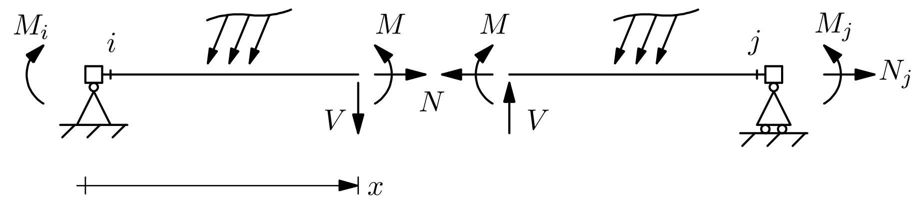


Figura 3.9: Convenção para a medição dos esforços.

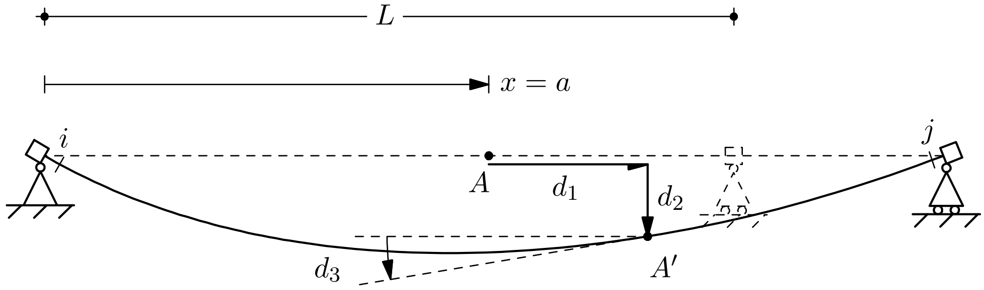


Figura 3.10: Componentes do deslocamento.

$$M(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) M_i + \frac{x}{L} M_j + M_0(x) \tag{3.3a}$$

$$V(x) = \frac{M_j - M_i}{L} + V_0(x) \tag{3.3b}$$

$$N(x) = N_j + N_0(x) \tag{3.3c}$$

Nas definições (3.3), as funções $M_0(x)$, $V_0(x)$ e $N_0(x)$ representam as distribuições de momento flector, esforço transverso e esforço axial provocados pela carga de vão, q, na ausência de forças de extremidade ($M_i = M_j = 0$, $N_j = 0$). Estas funções estão definidas na tabela 3.1, para as cargas de vão mais correntes.

Os valores das reacções de apoio indicadas na figura 3.7 podem ser obtidos por particularização dos resultados (3.3b) e (3.3c):

$$V_i = \frac{M_j - M_i}{L} + V_0(0) \tag{3.4a}$$

$$V_j = \frac{M_j - M_i}{L} + V_0(L) \tag{3.4b}$$

$$N_i = N_j + N_0(0). \tag{3.4c}$$

Na figura 3.10 representa-se uma deformada que satisfaz as condições de apoio da viga. Os deslocamentos do baricentro de uma secção de abcissa $x = a$ são definidos por:

$$d_k(a) = \int_0^L \chi\, \overline{M}_k \,\mathrm{d}x + \int_0^L \gamma\, \overline{V}_k \,\mathrm{d}x + \int_0^L \epsilon\, \overline{N}_k \,\mathrm{d}x \qquad \text{com } k = 1, 2, 3. \tag{3.5}$$

Se se admitir que a peça é de material elástico linear, na definição (3.5) os parâmetros,

$$\chi = \frac{M}{E\,I} + \chi_0 \tag{3.6a}$$

$$\gamma = \frac{V}{G\,A'} + \gamma_0 \tag{3.6b}$$

$$\epsilon = \frac{N}{E\,A} + \epsilon_0 \tag{3.6c}$$

representam a curvatura, a distorção média e a extensão axial das fibras baricentricas da secção de abcissa x, com área A, área reduzida de corte A' e momento de inércia I. Os parâmetros χ_0, γ_0 e ϵ_0 correspondem a deformações iniciais devidas, por exemplo, a variações de temperatura ou à acção do pré-esforço. E e G representam o módulo de elasticidade e o módulo de distorção do material, respectivamente. Nas expressões (3.6a) a (3.6c) as funções M, V e N definem as distribuições de momento flector, esforço transverso e de esforço axial provocados pela solicitação a que a peça está sujeita, enquanto as funções $\overline{M}_k$, $\overline{V}_k$ e $\overline{N}_k$ representam as distribuições que equilibram a força unitária correspondente ao deslocamento d_k.

Se se utilizar a informação contida na tabela 3.1, desprezando o efeito da deformabilidade devida ao esforço transverso, encontram-se as seguintes expressões para a definição (3.5):

$$d_1 = \int_0^a \epsilon \, \mathrm{d}x \tag{3.7a}$$

$$d_2 = \left(1 - \frac{a}{L}\right) \int_0^a \chi \, x \, \mathrm{d}x + \frac{a}{L} \int_a^L \chi \, (L - x) \, \mathrm{d}x \tag{3.7b}$$

$$d_3 = \frac{1}{L} \int_0^a \chi \, x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{L} \int_a^L \chi \, (L - x) \, \mathrm{d}x. \tag{3.7c}$$

3.3 Elemento de Pórtico Plano

Do campo de deslocamentos (3.7) são de particular interesse os que se desenvolvem nas secções extremas da viga simplesmente apoiada, indicados na figura 3.8. De acordo com essas definições, estes deslocamentos têm as seguintes expressões:

$$\theta_i = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{M}{E\,I} + \chi_0\right) (L - x) \, \mathrm{d}x \tag{3.8a}$$

$$\theta_j = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{M}{E\,I} + \chi_0\right) x \, \mathrm{d}x \tag{3.8b}$$

$$e_j = \int_0^L \left(\frac{N}{E\,A} + \epsilon_0\right) \mathrm{d}x. \tag{3.8c}$$

Se se admitir que a peça é homogénea e uniforme, e se se utilizarem as expressões (3.3a) e (3.3c) para as distribuições de esforços, encontram-se os seguintes resultados,

$$\theta_i = \left(\frac{L}{3\,E\,I}\right) M_i + \left(\frac{L}{6\,E\,I}\right) M_j + \overline{\theta}_i \tag{3.9a}$$

$$\theta_j = \left(\frac{L}{6\,E\,I}\right) M_i + \left(\frac{L}{3\,E\,I}\right) M_j + \overline{\theta}_j \tag{3.9b}$$

$$e_j = \left(\frac{L}{E\,A}\right) N_j + \overline{e}_j, \tag{3.9c}$$

em que,

$$\overline{\theta}_i = \int_0^L \left(\frac{M_0}{E\,I} + \chi_0\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right)\,\mathrm{d}x \tag{3.10a}$$

$$\overline{\theta}_j = \int_0^L \left(\frac{M_0}{E\,I} + \chi_0\right)\left(\frac{x}{L}\right)\,\mathrm{d}x \tag{3.10b}$$

$$\overline{e}_j = \int_0^L \left(\frac{N_0}{E\,A} + \epsilon_0\right)\,\mathrm{d}x, \tag{3.10c}$$

representam as parcelas dos deslocamentos devidos à acção das cargas de vão. Estas parcelas estão definidas na tabela 3.2 para as forças de vão mais correntes.

Se se organizar matricialmente os resultados (3.9), de acordo com as notações (3.7) e (3.3), encontra-se a seguinte expressão,

$$\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ e_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3\,E\,I} & \frac{L}{6\,E\,I} & 0 \\ \frac{L}{6\,E\,I} & \frac{L}{3\,E\,I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{E\,A} \end{bmatrix}_m \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{\theta}_i \\ \overline{\theta}_j \\ \overline{e}_j \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

ou, mais sinteticamente:

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{F}_m\,\mathbf{X}_m + \overline{\mathbf{u}}_m. \tag{3.12}$$

Esta expressão estabelece uma relação de causa-efeito entre os esforços independentes, e as cargas de vão que actuam no elemento, com as deformações independentes. Será posteriormente utilizada para caracterizar as relações de elasticidade das estruturas reticuladas.

O vector $\overline{\mathbf{u}}_m$ é designado por *vector das deformações independentes devidas às cargas de vão*. Pode verificar-se que a *matriz de flexibilidade* do elemento m,

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} \frac{L}{3\,E\,I} & \frac{L}{6\,E\,I} & 0 \\ \frac{L}{6\,E\,I} & \frac{L}{3\,E\,I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{E\,A} \end{bmatrix}_m \tag{3.13}$$

é simétrica e não-singular, isto é existe a matriz inversa $\mathbf{F}_m^{-1}$:

$$\mathbf{F}_m^T = \mathbf{F}_m, \qquad \mathbf{F}_m^{-1}\,\mathbf{F}_m = \mathbf{I}. \tag{3.14}$$

Nas figuras 3.11 a 3.12 estão representados os coeficientes que intervêm na definição (3.11) para as relações de elasticidade do elemento. Conclui-se pois que:

(D3.3) A coluna i da matriz de flexibilidade $\mathbf{F}_m$ representa as deformações independentes causadas pelo i-ésimo esforço independente unitário, quando todos os restantes são nulos, assim como a solicitação de vão.

(D3.4) O vector $\overline{\mathbf{u}}_m$ representa as deformações independentes que se desenvolvem no elemento devido à actuação das cargas de vão, quando são nulos todos os esforços independentes.

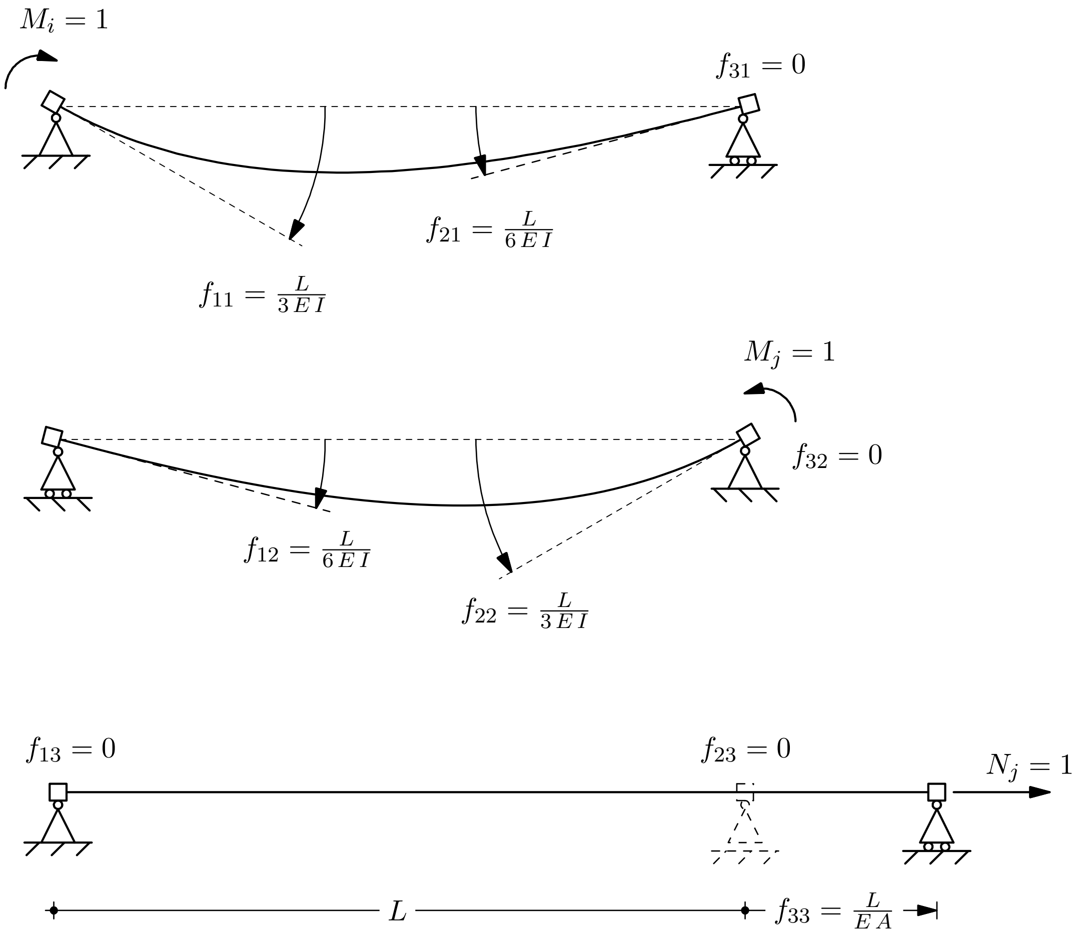


Figura 3.11: Identificação dos coeficientes da matriz de flexibilidade.

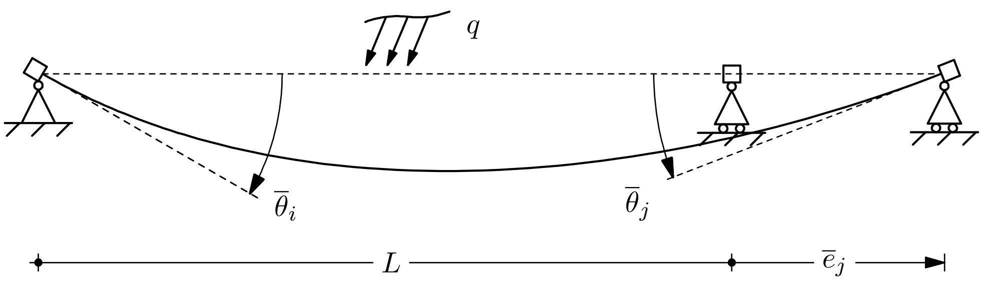


Figura 3.12: Identificação dos coeficientes do vector das deformações devidas à carga de vão.

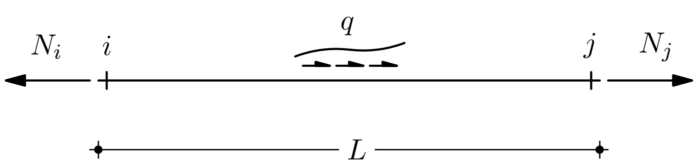


Figura 3.13: Elemento de treliça.

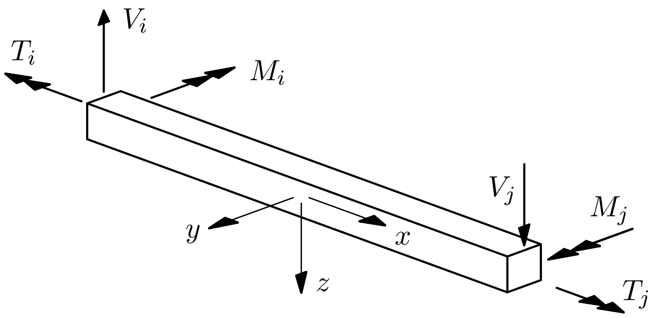


Figura 3.14: Elemento de grelha.

3.4 Elemento de Viga Contínua

Os elementos de viga contínua funcionam predominantemente à flexão. São também aplicados a peças em que a deformação axial é nula ou desprezável para o tipo de análise em causa. Consequentemente, a relação de elasticidade (3.12) simplifica-se para a seguinte forma, em que se controla apenas o modo de deformação por flexão:

$$\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3\,E\,I} & \frac{L}{6\,E\,I} \\ \frac{L}{6\,E\,I} & \frac{L}{3\,E\,I} \end{bmatrix}_m \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{\theta}_i \\ \overline{\theta}_j \end{Bmatrix}. \tag{3.15}$$

3.5 Elemento de Treliça

Os elementos de treliça caracterizam-se por estarem apenas sujeitos a esforço axial, pelo que os vectores dos esforços e das deformações independentes se reduzem a:

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} N_j \end{Bmatrix}_m, \qquad \mathbf{u}_m = \begin{Bmatrix} e_j \end{Bmatrix}. \tag{3.16}$$

Na relação de elasticidade (3.12), a matriz de flexibilidade do elemento toma agora a forma:

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} \frac{L}{E\,A} \end{bmatrix}_m. \tag{3.17}$$

3.6 Elemento de Grelha

Admita-se que o elemento recto e uniforme representado na figura 3.14 pertence a uma grelha que existe no plano horizontal xy e é solicitada por forças segundo a direcção ortogonal, z. Em consequência das restrições impostas à solicitação, os deslocamentos no plano xy e as rotações em torno do eixo z são nulos.

Nestas condições, para caracterizar o estado de tensão na peça basta considerar a flexão no plano xz e a torção em torno do eixo x. Na definição do vector dos esforços independentes inclui-se, portanto, os momentos flectores nas secções extremas, M_i e M_j, e o momento torsor numa delas, por exemplo, T_j:

$$\mathbf{X}_m = \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ T_j \end{Bmatrix}. \tag{3.18}$$

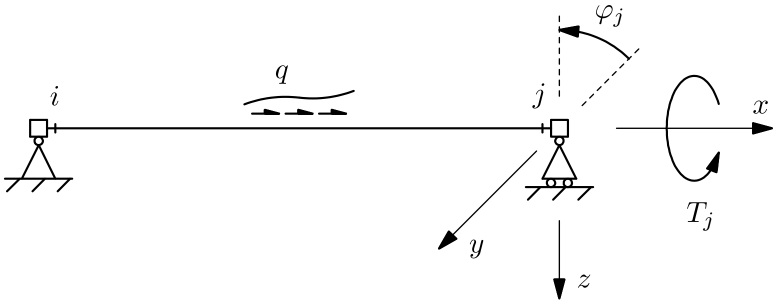


Figura 3.15: Rotação e momento de torção.

As deformações correspondentes aos esforços independentes (3.18) são, para além das rotações de flexão θ_i e θ_j medidas em relação à corda, a rotação de torção φ_j relativa entre as secções extremas,

$$\mathbf{u}_m = \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}, \tag{3.19}$$

como se ilustra na figura 3.15. Note-se que agora se admite que o apoio na extremidade i impede rotações em torno do eixo x.

Para que as condições de equilíbrio (3.3) e (3.4) possam ainda ser utilizadas para caracterizar o elemento de grelha, basta substituir as expressões para o esforço axial pelas que definem o modo de torção:

$$T(x) = T_j + T_0(x) \tag{3.20a}$$

$$T_i = T_j + T_0(0). \tag{3.20b}$$

Na definição (3.20a), a função $T_0(x)$ representa a distribuição de momento torsor provocada pela solicitação de vão. Esta função está definida na tabela 3.1 para as cargas de vão mais correntes.

A expressão (3.5) para o cálculo dos deslocamentos toma agora a forma,

$$d_k(a) = \int_0^L \chi\, \overline{M}_k \,\mathrm{d}x + \int_0^L \alpha\, \overline{T}_k \,\mathrm{d}x \qquad \text{com } k = 1, 2, 3 \tag{3.21}$$

em que,

$$\alpha = \frac{T}{G\,J} \tag{3.22}$$

representa o ângulo de torção, G é o módulo de distorção do material e J o factor de rigidez à torção da secção da peça.

Repetindo o procedimento anteriormente descrito para determinar agora as deformações independentes (3.19) encontra-se a seguinte definição para a matriz de flexibilidade do elemento de grelha:

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} \frac{L}{3\,E\,I} & \frac{L}{6\,E\,I} & 0 \\ \frac{L}{6\,E\,I} & \frac{L}{3\,E\,I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{G\,J} \end{bmatrix}_m . \tag{3.23}$$

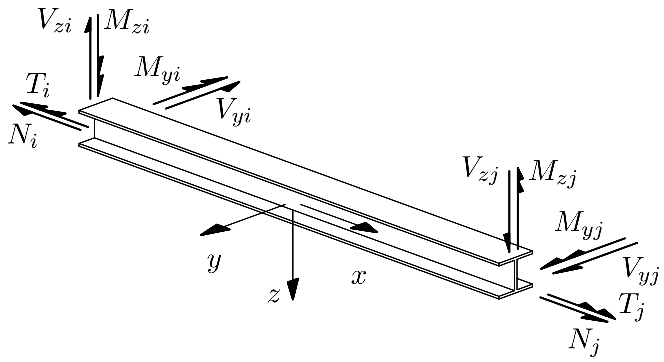


Figura 3.16: Peça de uma estrutura tridimensional.

O vector das deformações independentes associadas às cargas de vão, $\overline{\mathbf{u}}_m$, presente nas relações de elasticidade (3.12) passa a ser expresso por,

$$\overline{\mathbf{u}}_m = \begin{Bmatrix} \overline{\theta}_i \\ \overline{\theta}_j \\ \overline{\varphi}_j \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

em que:

$$\overline{\varphi}_j = \frac{1}{G\,J} \int_0^L T_0 \,\mathrm{d}x. \tag{3.25}$$

A rotação por torção (3.25) está definida na tabela 3.2 para as solicitações de vão anteriormente consideradas.

3.7 Elemento de Pórtico Tridimensional

O estudo do elemento tridimensional pode ser realizado recorrendo aos procedimentos anteriormente adoptados, desde que se admita não existir interacção entre os vários modos de deformação. Supõe-se aqui que a flexão no plano xy $\{xz\}$ introduz deslocamentos na direcção y $\{z\}$ e rotações segundo a direcção z $\{y\}$; a deformação axial apenas provoca o aparecimento de deslocamentos segundo o eixo da peça, x, e a torção provoca rotações no plano que lhe é perpendicular, yz.

Para caracterizar o campo de esforços são agora necessários 6 parâmetros: os momentos flectores nas secções extremas, o esforço axial e o momento torsor na secção j:

$$\mathbf{X}_m = \begin{Bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ \hdashline M_{yi} \\ M_{yj} \\ \hdashline N_j \\ \hdashline T_j \end{Bmatrix}. \tag{3.26}$$

Para que as restantes forças de extremidade apareçam como reacções da viga simplesmente apoiada, considera-se que a peça tem na secção i um apoio que impede os deslocamentos nas três direcções, x, y e z, e a rotação em torno do eixo x, e na secção j

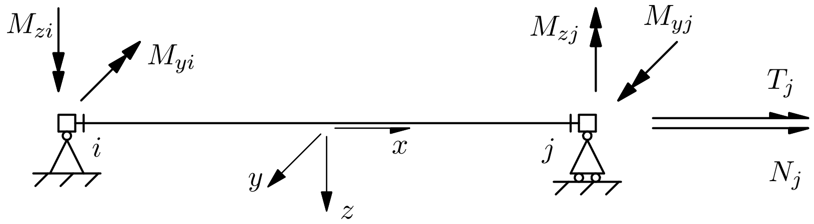


Figura 3.17: Viga simplesmente apoiada estaticamente equivalente.

um apoio móvel segundo a direcção x, o qual impede, portanto, os deslocamentos segundo as direcções y e z mas permite rotações em torno de qualquer dos eixos.

Os deslocamentos sofridos pelas secções extremas da peça continuam a ser utilizados para definir o vector das deformações independentes, o qual toma agora a seguinte expressão:

$$\mathbf{u}_m = \left\{ \begin{array}{c} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \hdashline \theta_{yi} \\ \theta_{yj} \\ \hdashline e_j \\ \hdashline \varphi_j \end{array} \right\}. \tag{3.27}$$

Para estabelecer as relações de elasticidade (3.12) para o elemento tridimensional, basta combinar os resultados anteriormente obtidos para o elemento de grelha e de pórtico plano, encontrando-se a seguinte expressão para a matriz de flexibilidade:

$$\mathbf{F}_m = \left[\begin{array}{cc:cc:c:c} \frac{L}{3EI_z} & \frac{L}{6EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{6EI_z} & \frac{L}{3EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \frac{L}{3EI_y} & \frac{L}{6EI_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{6EI_y} & \frac{L}{3EI_y} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EA} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ} \end{array} \right]_m \tag{3.28}$$

Os valores resumidos na tabela 3.2 podem ser utilizados para caracterizar o vector das deformações associadas às cargas de vão, $\overline{\mathbf{u}}_m$.

3.8 Acção da Temperatura

Quando a temperatura de um corpo se altera, o material que o constitui varia de volume. Se esta alteração do estado de deformação se verifica num corpo formado por materiais de diferente natureza, ou se o corpo está impedido de se deformar livremente por ligações que existam ao exterior, gera-se no seu interior um campo de tensões.

Na figura 3.18 está representada a viga simplesmente apoiada sujeita a uma variação de temperatura. Em cada ponto da secção transversal admite-se que a variação de temperatura é linear ao longo do eixo da peça:

$$\Delta T = \Delta T_i + (\Delta T_j - \Delta T_i)\frac{x}{L}. \tag{3.29}$$

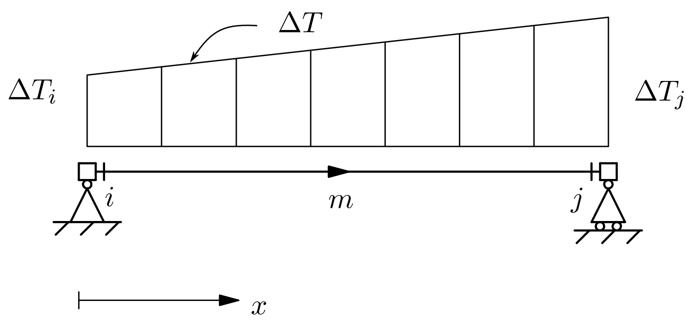


Figura 3.18: Variação de temperatura ao longo do eixo.

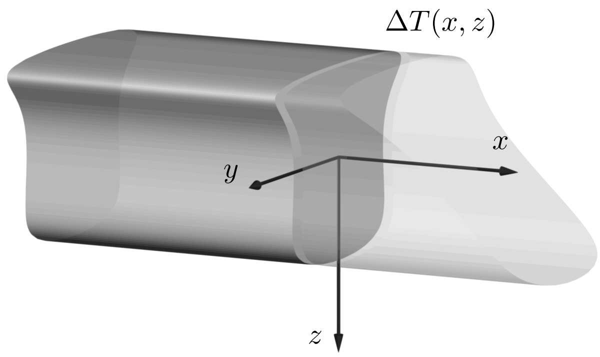


Figura 3.19: Variação de temperatura ao longo da secção.

Admite-se todavia, tal como se ilustra na figura 3.19, que em cada secção transversal, a temperatura é constante em pontos existentes em eixos paralelos à direcção principal y, mas linearmente variável ao longo da altura da secção. Dado que as condições de apoio permitem que a peça se deforme livremente, a variação de temperatura em causa não é acompanhada pelo desenvolvimento de esforços. Para o comportamento plano tem-se, pois:

$$M(x) = 0, \; V(x) = 0 \text{ e } N(x) = 0. \tag{3.30}$$

Se α_m representar o coeficiente de dilatação térmica do material, a extensão axial num ponto de coordenadas (x, y, z) é, por definição,

$$\epsilon(x, y, z) = \alpha_m \, \Delta T(x, z), \tag{3.31}$$

em que $\Delta T(x, z)$ representa a variação de temperatura nesse ponto.

É vantajoso separar a variação da temperatura ao longo da secção nas parcelas uniforme e linear, ou seja,

$$\Delta T(x, z) = \Delta T_U(x) + \frac{z}{h} \, \Delta T_L(x), \tag{3.32}$$

onde a primeira parcela representa a variação de temperatura no centro de rigidez da secção transversal e a segunda parcela traduz o gradiente térmico entre as fibras extremas, como se ilustra na figura 3.20.

Substituindo a expressão (3.32) em (3.31) obtém-se

$$\epsilon(x, y, z) = \epsilon_0 + z \, \chi_0, \tag{3.33}$$

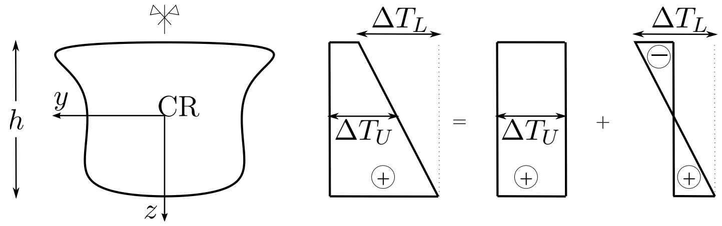


Figura 3.20: Parcelas uniforme e linear da variação de temperatura.

onde a curvatura e a extensão axial no centro de rigidez devidas à variação de temperatura são definidas por,

$$\chi_0 = \frac{\Delta T_L}{h}\,\alpha_m, \tag{3.34a}$$

$$\epsilon_0 = \Delta T_U\,\alpha_m. \tag{3.34b}$$

Para a variação linear (3.29) admitida tem-se

$$\chi_0 = \frac{\alpha_m}{h}\left[\Delta T_{Li} + (\Delta T_{Lj} - \Delta T_{Li})\frac{x}{L}\right], \tag{3.35a}$$

$$\epsilon_0 = \alpha_m\left[\Delta T_{Ui} + (\Delta T_{Uj} - \Delta T_{Ui})\frac{x}{L}\right]. \tag{3.35b}$$

Substituindo as expressões (3.35a) e (3.35b) nas definições (3.5) e repetindo o procedimento anteriormente descrito, encontram-se as deformações independentes devidas à variação de temperatura definidas na tabela 3.3.

3.9 Acção do Pré-Esforço

O pré-esforço de elementos estruturais é uma das técnicas mais frequentemente utilizadas para melhorar a capacidade resistente das estruturas. Definido o traçado do cabo e avaliadas as perdas, calculam-se as deformações independentes devidas à acção do pré-esforço a partir das definições (3.10) onde agora,

$$M_0 = t(x)\,e(x) \tag{3.36a}$$

$$N_0 = t(x), \tag{3.36b}$$

em que $t(x)$ representa o esforço no cabo e $e(x)$ a sua excentricidade.

Admita-se, por simplicidade, que a excentricidade do cabo é descrita por uma função polinomial,

$$e(x) = \sum_n e_n\,x^n, \tag{3.37}$$

e que o seu andamento é tal que o esforço axial pode ser considerado constante:

$$t(x) = t_0. \tag{3.38}$$

Substituindo os resultados (3.36) a (3.38) nas definições (3.10), encontram-se as seguintes expressões para as deformações devidas à acção do pré-esforço:

$$\bar{\theta}_i = \frac{t_0}{E\,I} \sum_n \frac{e_n\,L^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \tag{3.39a}$$

$$\bar{\theta}_j = \frac{t_0}{E\,I} \sum_n \frac{e_n\,L^{n+1}}{n+2} \tag{3.39b}$$

$$\bar{e}_j = \frac{t_0\,L}{E\,A}. \tag{3.39c}$$

Estes resultados estão particularizados na tabela 3.4 para os casos de andamento constante, linear e parabólico.

3.10 Aparelhos de Libertação Elástica

Descreveram-se anteriormente os 6 tipos básicos de aparelhos de libertação que podem ser utilizados para representar a ligação entre as peças que formam uma estrutura reticulada, ou dessas peças ao meio de fundação. Referiu-se então que essas libertações podiam ser perfeitas ou elásticas.

Esses aparelhos tinham um comportamento perfeito se os movimentos por eles permitidos se realizavam sem mobilizar qualquer tipo de resistência. Interessa agora considerar a possibilidade dessa resistência existir e se caracterizar por uma lei de comportamento elástico, linear.

Para representar este tipo de resposta, são acopladas molas, lineares ou angulares, aos aparelhos de libertação perfeita, as quais incorporam as propriedades mecânicas dos sistemas construtivos que pretendem simular. As relações constitutivas para estes aparelhos podem ser quantificadas na forma

$$u_i = F_i\,X_i + \bar{u}_i \tag{3.40}$$

em que F_i representa a flexibilidade da mola i. A deformação sofrida pela mola e a força que nela se desenvolve são representadas pelas variáveis u_i e X_i, respectivamente. A parcela $\bar{u}_i$ quantifica uma deformação que possa ter sido imposta no aparelho de libertação, por exemplo um assentamento de apoio.

3.11 Relações Constitutivas da Estrutura

As relações de elasticidade da estrutura a analisar podem ser definidas agrupando as relações constitutivas (3.12) e (3.40) associadas a cada um dos elementos resistentes que a compõem, de acordo com a numeração sequencial adoptada para identificar esses elementos.

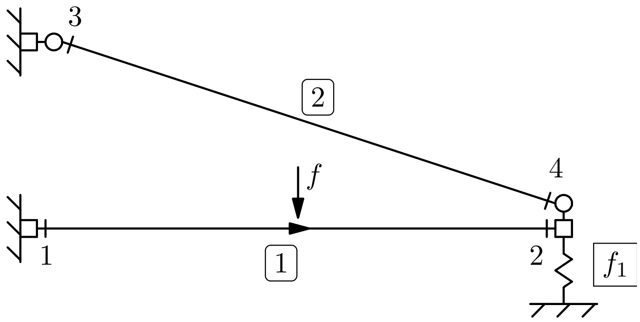


Figura 3.21: Estrutura reticulada plana com apoio elástico.

Definindo os vectores dos esforços e das deformações independentes da estrutura,

$$\mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_B \\ \hdashline X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_L \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_B \\ \hdashline u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_L \end{array} \right\} \tag{3.41}$$

onde B representa o número de barras em que a estrutura foi discretizada e L o número de aparelhos de libertação elástica nela existentes, encontra-se a seguinte expressão para as relações de elasticidade da estrutura

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\,\mathbf{X} + \overline{\mathbf{u}}. \tag{3.42}$$

em que o vector das deformações associadas às cargas de vão, $\overline{\mathbf{u}}$, é organizado de acordo com a convenção utilizada em (3.41) e a matrix de flexibilidade é diagonal por blocos:

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{cccc:cccc} \mathbf{F}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{F}_B & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & 0 & F_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & F_L \end{array} \right] \tag{3.43}$$

Como exemplo de aplicação, considere-se a estrutura plana, solicitada no próprio plano, representada na figura 3.21. Com base nos resultados anteriormente obtidos, encontra-se a seguinte expressão para as relações de elasticidade (3.42):

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ e_2 \\ \hdashline e_4 \\ \hdashline u_1 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc:c:c} \frac{L_1}{3\,E\,I_1} & \frac{L_1}{6\,E\,I_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_1}{6\,E\,I_1} & \frac{L_1}{3\,E\,I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_1}{E\,A_1} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \frac{L_2}{E\,A_2} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \\ \hdashline N_4 \\ \hdashline X_1 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \frac{f\,L_1^2}{16\,E\,I_1} \\ \frac{f\,L_1^2}{16\,E\,I_1} \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right\} \tag{3.44}$$

Caso se verifique existir, na estrutura a analisar, interacção entre a resposta de grupos de aparelhos de libertação elástica, para simular este comportamento basta introduzir na equação (3.43), na intersecção das linhas e das colunas respeitantes a esses aparelhos, os coeficientes que quantificam o processo de interacção.

3.12 Generalização das Relações de Elasticidade

Os resultados apresentados neste capítulo decorrem da aplicação de um forte conjunto de hipóteses simplificativas. Para além das hipóteses básicas de linearidade física e geométrica, admitiu-se que peça linear tem eixo recto e secção constante, que as secções planas se mantêm planas e que são desprezáveis as deformações de corte, como é típico da teoria das vigas. Admitiu-se também que o material estrutural é homogéneo e isotrópico, e que a geometria da secção transversal assegura o desacoplamento dos modos de deformação.

No entanto, este conjunto de hipóteses é válido para a maioria das aplicações práticas e permite obter expressões analíticas para os coeficientes da matriz de flexibilidade e do vector das deformações independentes devidas às cargas de vão, os quais são determinados uma única vez e tabelados para cálculo manual ou directamente programados para uso em cálculo automático. Existem, naturalmente, outras situações no âmbito deste conjunto de hipóteses que conduzem a expressões analíticas para as relações de elasticidade (3.12), as quais devem ser obtidas sempre que essas situações ocorram. Duas delas são as sugeridas nos exercícios seguintes para o modelo de viga com troços rígidos, muitas vezes utilizado para simular o forte reforço que se verifica nas zonas de ligação entre vigas e pilares, e para o modelo de vigas sobre fundação elástica.

Exercício 3.1. Admita que a viga representada na figura 3.6 é limitada, à esquerda e à direita, por troços rígidos à flexão e à deformação axial, com comprimentos a_m e b_m, respectivamente. Determine a expressão geral da matriz de rigidez presente nas relações de elasticidade (3.12) e do vector das deformações independentes para uma carga de vão uniformemente distribuída com intensidade q.

Exercício 3.2. Admita que a viga representada na figura 3.6 assenta sobre uma fundação elástica, o que é simulado admitindo que o deslocamento transversal numa secção é proporcional à força de reacção transversal à viga. A constante de proporcionalidade, f, representa o coeficiente de flexibilidade do meio de fundação, o qual se admite ser constante ao longo do vão da viga. Determine a expressão geral da matriz de rigidez presente nas relações de elasticidade (3.12) e do vector das deformações independentes para uma carga de vão uniformemente distribuída com intensidade q.

É possível, evidentemente, relaxar cada uma das hipóteses acima enumeradas para modelar aplicações específicas, por exemplo peças curvas, peças com secção variável ou peças formadas pela combinação de materiais com diferentes propriedades elásticas, como é típico em estruturas com peças mistas aço-betão. É também possível incluir o efeito da deformação do esforço transverso, o empenamento das secções ou a interacção entre os modos de deformação. Podem daí decorrer generalizações das definições para os esforços e para as deformações independentes. Por regra, os integrais presentes na definição que os relaciona, e que generaliza a definição (3.8), deixam de ter solução analítica, sendo necessário determinar caso a caso os valores dos coeficientes da matriz de flexibilidade e do vector das deformações independentes devidas às cargas de vão recorrendo a métodos de integração numérica, os quais são facilmente executáveis em computador.

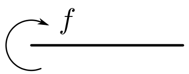
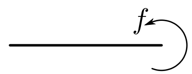
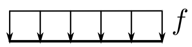
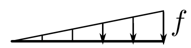
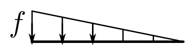
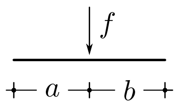
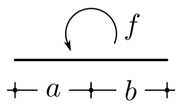
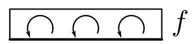
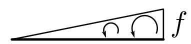
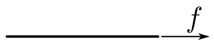
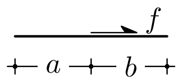
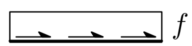
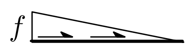
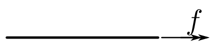
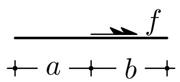
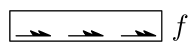
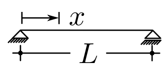
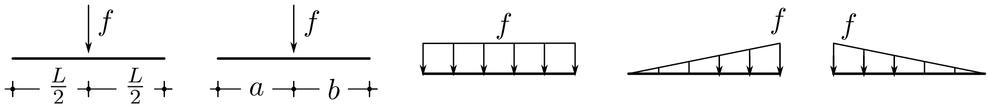
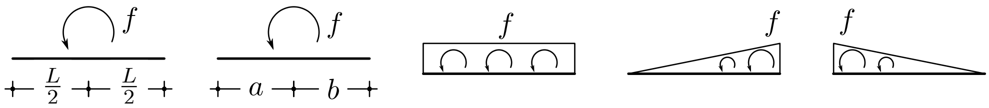
					
M_0	$f\,\left(1-\frac{x}{L}\right)$	$f\,\left(\frac{x}{L}\right)$	$\frac{1}{2}\,f\,\left(x\,L-x^2\right)$	$\frac{1}{6}\,f\,\left(x\,L-\frac{x^3}{L}\right)$	$\frac{1}{6}\,f\,\left(2\,x\,L-3\,x^2+\frac{x^3}{L}\right)$
V_0	$-\frac{f}{L}$	$\frac{f}{L}$	$\frac{1}{2}\,f\,(L-2\,x)$	$\frac{1}{6}\,f\,\left(L-3\,\frac{x^2}{L}\right)$	$\frac{1}{6}\,f\,\left(2\,L-6\,x+3\,\frac{x^2}{L}\right)$
					
M_0	$\begin{cases} f\,b\,\frac{x}{L} & ,\ 0\le x\le a \\ f\,a\,\left(1-\frac{x}{L}\right) & ,\ a\le x\le L \end{cases}$	$\begin{cases} f\,\frac{x}{L} & ,\ 0\le x\le a \\ f\,\left(-1+\frac{x}{L}\right) & ,\ a\le x\le L \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}\,f\,\left(x-\frac{x^2}{L}\right)$	$-\frac{1}{2}\,f\,\left(x-\frac{x^2}{L}\right)$
V_0	$\begin{cases} f\,\frac{b}{L} & ,\ 0\le x\le a \\ -f\,\frac{a}{L} & ,\ a\le x\le L \end{cases}$	$\frac{1}{L}$	f	$\frac{1}{2}\,f$	$\frac{1}{2}\,f$
					
N_0	f	$\begin{cases} f & ,\ 0\le x\le a \\ 0 & ,\ a\le x\le L \end{cases}$	$f\,(L-x)$	$\frac{1}{2}\,f\,\left(L-\frac{x^2}{L}\right)$	$\frac{1}{2}\,f\,\left(L-2\,x+\frac{x^2}{L}\right)$
					
T_0	f	$\begin{cases} f & ,\ 0\le x\le a \\ 0 & ,\ a\le x\le L \end{cases}$	$f\,(L-x)$	$\frac{1}{2}\,f\,\left(L-\frac{x^2}{L}\right)$	$\frac{1}{2}\,f\,\left(L-2\,x+\frac{x^2}{L}\right)$

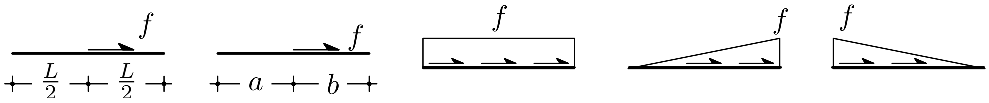
Tabela 3.1: Distribuições de esforços em viga simplesmente apoiada. Nota: .



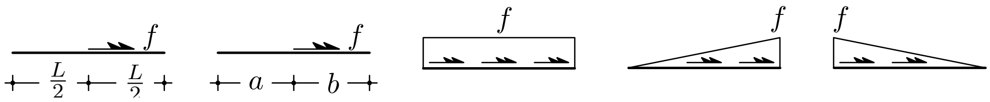
$\overline{\theta}_i$	$\frac{f\,L^2}{16\,E\,I}$	$\frac{f\,a\,b\,(L+b)}{6\,L\,E\,I}$	$\frac{f\,L^3}{24\,E\,I}$	$\frac{7\,f\,L^3}{360\,E\,I}$	$\frac{8\,f\,L^3}{360\,E\,I}$
$\overline{\theta}_j$	$\frac{f\,L^2}{16\,E\,I}$	$\frac{f\,a\,b\,(L+a)}{6\,L\,E\,I}$	$\frac{f\,L^3}{24\,E\,I}$	$\frac{8\,f\,L^3}{360\,E\,I}$	$\frac{7\,f\,L^3}{360\,E\,I}$



$\overline{\theta}_i$	$\frac{f\,L}{24\,E\,I}$	$\frac{f\left(L^2-3\,b^2\right)}{6\,L\,E\,I}$	0	$\frac{f\,L^2}{24\,E\,I}$	$-\frac{f\,L^2}{24\,E\,I}$
$\overline{\theta}_j$	$-\frac{f\,L}{24\,E\,I}$	$-\frac{f\left(L^2-3\,a^2\right)}{6\,L\,E\,I}$	0	$\frac{f\,L^2}{24\,E\,I}$	$-\frac{f\,L^2}{24\,E\,I}$



$\overline{e}_j$	$\frac{f\,L}{2\,E\,A}$	$\frac{f\,a}{E\,A}$	$\frac{f\,L^2}{2\,E\,A}$	$\frac{f\,L^2}{3\,E\,A}$	$\frac{f\,L^2}{6\,E\,A}$



$\overline{\varphi}_j$	$\frac{f\,L}{2\,G\,J}$	$\frac{f\,a}{G\,J}$	$\frac{f\,L^2}{2\,G\,J}$	$\frac{f\,L^2}{3\,G\,J}$	$\frac{f\,L^2}{6\,G\,J}$

Tabela 3.2: Deformações independentes devidas a forças de vão em viga simplesmente apoiada.

$\overline{\theta}_i$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L}{2\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L}{6\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L}{3\,h}$
$\overline{\theta}_j$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L}{2\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L}{3\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L}{6\,h}$

$\overline{e}_j$	$\alpha\,\Delta T_u\,L$	$\frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta T_u\,L$	$\frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta T_u\,L$

Tabela 3.3: Deformações independentes devidas a variações de temperatura em viga simplesmente apoiada.

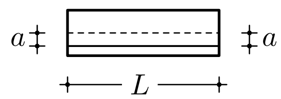
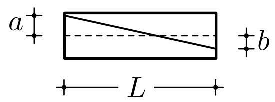
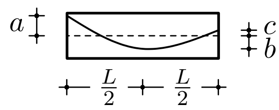
			
$\overline{\theta}_i$	$-\frac{t_0\, a\, L}{2\, E\, I}$	$\frac{t_0\, L\, (2\, a - b)}{6\, E\, I}$	$\frac{t_0\, L\, (a - b)}{6\, E\, I}$
$\overline{\theta}_j$	$-\frac{t_0\, a\, L}{2\, E\, I}$	$\frac{t_0\, L\, (a - 2\, b)}{6\, E\, I}$	$\frac{t_0\, L\, (c - b)}{6\, E\, I}$
$\overline{e}_j$	$-\frac{t_0\, L}{E\, A}$	$-\frac{t_0\, L}{E\, A}$	$-\frac{t_0\, L}{E\, A}$

Tabela 3.4: Deformações independentes devidas à acção do pré-esforço em viga simplesmente apoiada.

Capítulo 4

Indeterminação Estática

4.1 Introdução

Ao analisar o comportamento de uma estrutura sujeita a uma determinada acção, as incógnitas de natureza estática presentes no problema são as *reacções* que se desenvolvem nos aparelhos de apoio da estrutura e os *esforços* que se instalam nos elementos resistentes que a compõem. Quando a aplicação das equações da Estática origina o número de relações necessário e suficiente para calcular tanto as reacções de apoio como os esforços em qualquer secção da estrutura, a estrutura diz-se ser *isostática* ou *estaticamente determinada*. Se, pelo contrário, o número de equações disponíveis é insuficiente, a estrutura diz-se ser *hiperestática*, ou *estaticamente indeterminada*.

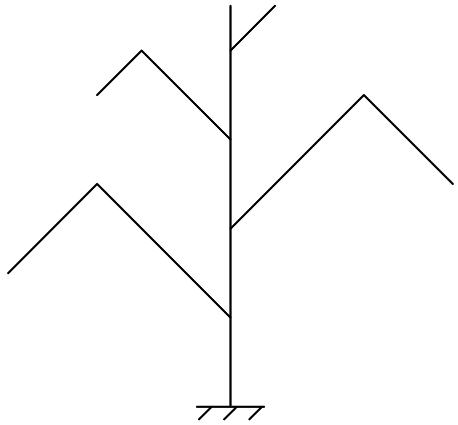
O conceito de isostatia é tradicionalmente ilustrado recorrendo a *estruturas arborescentes*, como a representada na figura 4.1a. A estrutura arborescente é uma peça contínua, isto é, sem libertações internas, com uma ligação ao meio de fundação por encastramento total, e que se caracteriza por existir um único caminho, sobre os elementos que a compõem, ligando qualquer par de secções; nenhuma barra se fecha sobre si própria. Como se ilustra na figura 4.1b, quando se aplica uma carga a uma estrutura arborescente, ela transmite-se através dos elementos que existem sobre o único caminho contínuo que liga o seu ponto de aplicação com a secção de encastramento. São nulos os esforços em todas as secções que não estejam contidos neste caminho.

A estrutura arborescente é *interiormente* isostática por ser possível calcular os esforços em qualquer secção recorrendo exclusivamente às equações da Estática. é também *exteriormente* isostática em consequência de a ligação por encastramento ser capaz de mobilizar o número e o tipo de reacções necessárias e suficientes para equilibrar qualquer solicitação. Uma vez que tanto as reacções de apoio como os esforços podem ser calculados recorrendo exclusivamente às equações da Estática, a estrutura arborescente diz-se ser *globalmente isostática*.

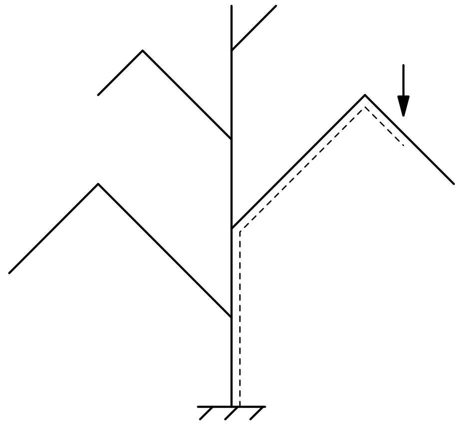
A hiperestatia de uma estrutura resulta de um excesso de ligações entre os elementos que a compõem, ou destes ao meio de fundação.

Se esse excesso se manifesta a nível das ligações dos elementos ao meio de fundação, a estrutura diz-se ser *exteriormente hiperestática*. é o que sucede com a estrutura arborescente com cada nova ligação ao exterior que se estabeleça. As equações da Estática deixam de ser suficientes para exprimir todas as reacções de apoio exclusivamente em função da solicitação.

Como se indica na figura 4.2a, quando se aplica uma carga à estrutura, ela transmite-se através de todas as barras que definam caminhos que unam o seu ponto de aplicação com

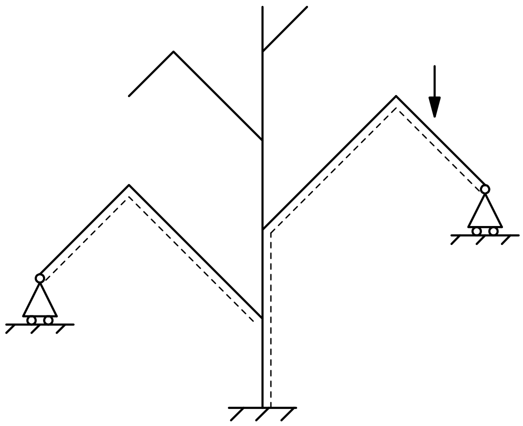


(a) Topologia.

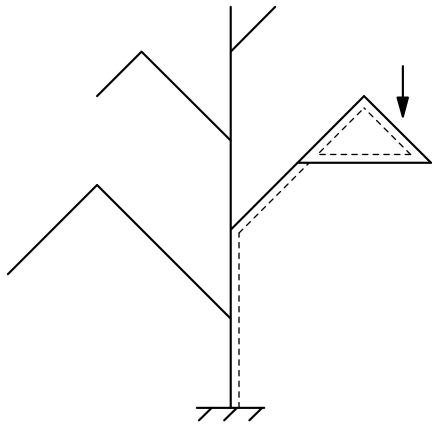


(b) Caminho de carga.

Figura 4.1: Estrutura arborescente.



(a) Hiperestatia exterior.



(b) Hiperestatia interior.

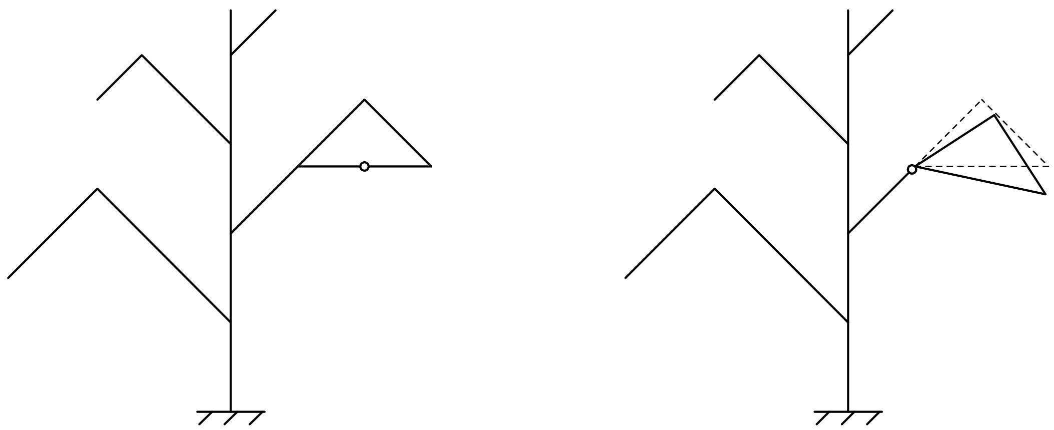
Figura 4.2: Causas de hiperestatia numa estrutura arborescente.

qualquer um dos pontos de fundação. Deixa portanto de existir um único caminho ligando a secção de aplicação da carga ao meio de fundação.

Se o excesso de ligações se verifica entre os próprios elementos estruturais, a estrutura diz-se ser *interiormente hiperestática.* é o que sucede com a estrutura arborescente quando se introduz um elemento adicional que feche uma malha, como se ilustra na figura 4.2b.

Ao fechar uma malha, passa a existir mais do que um caminho ligando uma secção da estrutura com qualquer outra contida na malha. A maneira como se transmitem os esforços nos elementos que formam a malha deixa de poder ser quantificada recorrendo exclusivamente às equações da Estática.

Por outro lado, quando a peça não é contínua, por cada libertação existente pode formular-se uma nova equação de equilíbrio: esta equação é a que obriga a ser nulo o esforço correspondente à libertação em causa. Cada libertação introduzida causa, pois, uma redução de um grau na hiperestatia da estrutura. Como se ilustra na figura 4.3b a localização da libertação não é arbitrária. Se a articulação for colocada fora da malha fechada, o sistema perde a sua capacidade resistente, transformando-se num mecanismo.



(a) Ligações bem distribuídas. (b) Ligações mal distribuídas.

Figura 4.3: Efeito das libertações internas.

4.2 Estruturas sem Libertações

Designa-se por *estrutura fundamental* uma estrutura contínua, isto é, sem libertações internas, e em que todas as ligações ao meio de fundação se realizam por encastramento total.

Se N_f representar o número de nós de fundação da estrutura, o número de reacções de apoio possíveis é dado por

$$r = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} N_f, \tag{4.1}$$

pois o encastramento pode mobilizar 3 reacções no caso de estruturas planas, solicitadas no próprio plano, e 6 reacções no caso de estruturas tridimensionais.

Se se atender a que é de 3 e 6 o número de equações fornecidas pela Estática em cada um destes casos, conclui-se que o *grau de hiperestatia exterior* da estrutura é dado por:

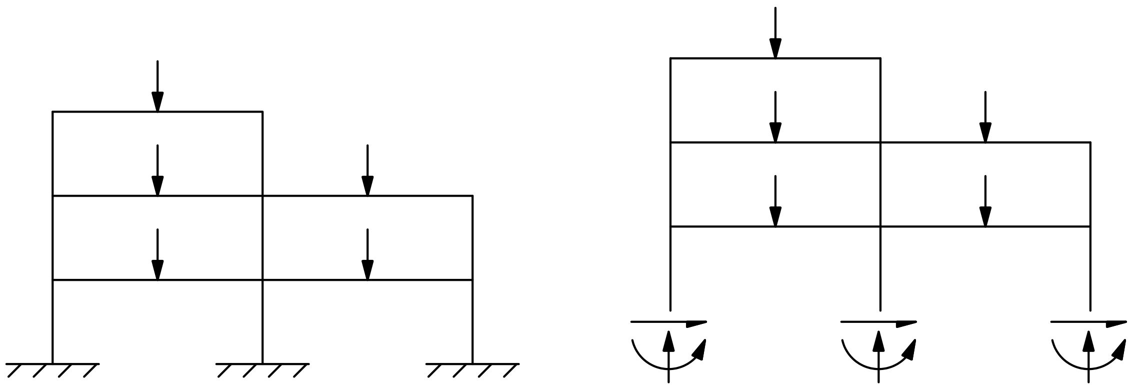
$$\alpha_e = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} (N_f - 1). \tag{4.2}$$

Uma estrutura diz-se ser exteriormente isostática quando $\alpha_e = 0$ e hiperestática do grau α_e, se $\alpha_e > 0$; se α_e for negativo, a estrutura diz-se ser hipoestática do grau $-\alpha_e$. Para a estrutura representada na figura 4.4 tem-se pois:

$$\alpha_e = 3 \times (3 - 1) = +6.$$

Na discussão da hiperestatia interior de uma estrutura supõem-se que, para além da solicitação, todas as reacções de apoio são conhecidas, como se ilustra na figura 4.4b. Admite-se também que as reacções e as cargas aplicadas estão em equilíbrio, isto é, que estão esgotadas todas as equações da Estática.

Verificou-se no estudo das estruturas arborescentes, que uma estrutura contínua é interiormente isostática quando não contém malhas fechadas. Uma malha fechada numa estrutura plana solicitada no próprio plano é 3 vezes hiperestática. De facto para abrir a malha é necessário introduzir um corte, o que equivale a libertar 3 esforços como se



(a) Apoios. (b) Reacções.

Figura 4.4: Hiperestatia exterior de estruturas sem libertações.

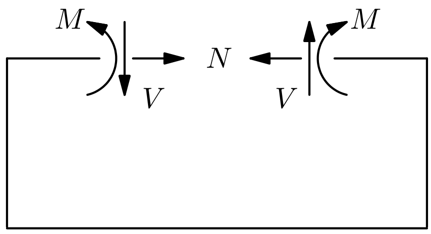
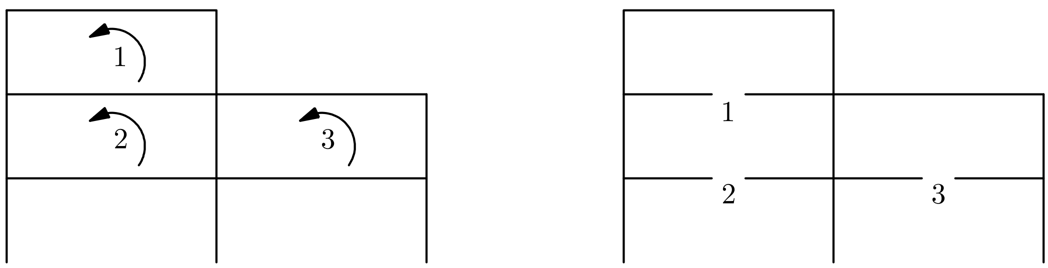


Figura 4.5: Hiperestatia de uma malha fechada.



(a) Malhas fechadas. (b) Malhas abertas.

Figura 4.6: Hiperestatia interior de estruturas sem libertações.

ilustra na figura 4.5. Se a malha pertencer a uma estrutura tridimensional, o corte liberta 6 esforços.

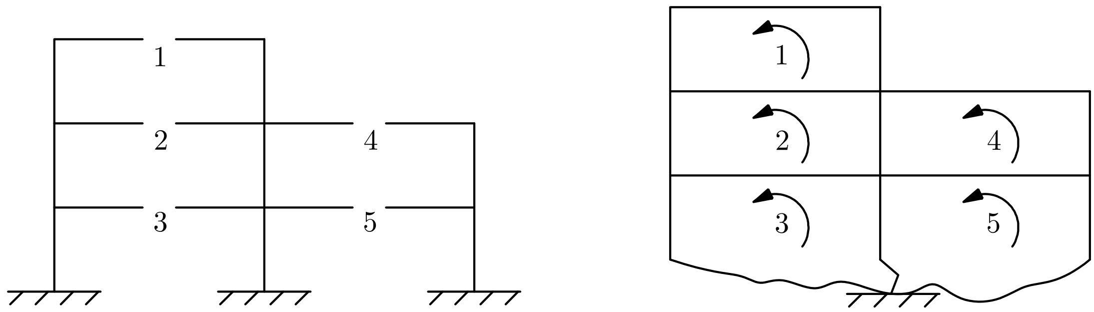
Conclui-se portanto que o *grau de hiperestatia interior* de uma estrutura contínua é definido por,

$$\alpha_i = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} C_i, \tag{4.3}$$

em que C_i representa o número de malhas fechadas que a estrutura contém, depois de desligada do meio de fundação. Da figura 4.6, conclui-se que para a estrutura em análise se tem:

$$\alpha_i = 3 \times 3 = +9.$$

Um processo correntemente utilizado para determinar o *grau de hiperestatia global*, α, de uma estrutura fundamental é o de a transformar em tantas estruturas arborescentes



(a) Decomposição em estruturas arborescentes. (b) Estrutura estaticamente equivalente.

Figura 4.7: Hiperestatia global de estruturas sem libertações.

quanto o número de nós de fundação.

Como cada estrutura arborescente é estaticamente determinada, se para realizar esta transformação é necessário introduzir C cortes, isto é libertar $\left\{ {3 \atop 6} \right\}$ C esforços, conclui-se que:

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} C. \tag{4.4}$$

Como se ilustra na figura 4.7 tem-se para o exemplo em consideração:

$$\alpha = 3 \times 5 = +15.$$

Um outro processo de determinar o grau de hiperestatia de uma estrutura é o que consiste em combinar resultados (4.2) e (4.3).

Se uma estrutura sem ligações ao exterior tem uma indeterminação estática α_i quando se encastram os N_f nós de fundação, aumenta-se o número de incógnitas em tantas quantas as reacções de apoio indeterminadas, α_i, ficando,

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i, \tag{4.5}$$

ou, de acordo com as definições (4.2) e (4.3):

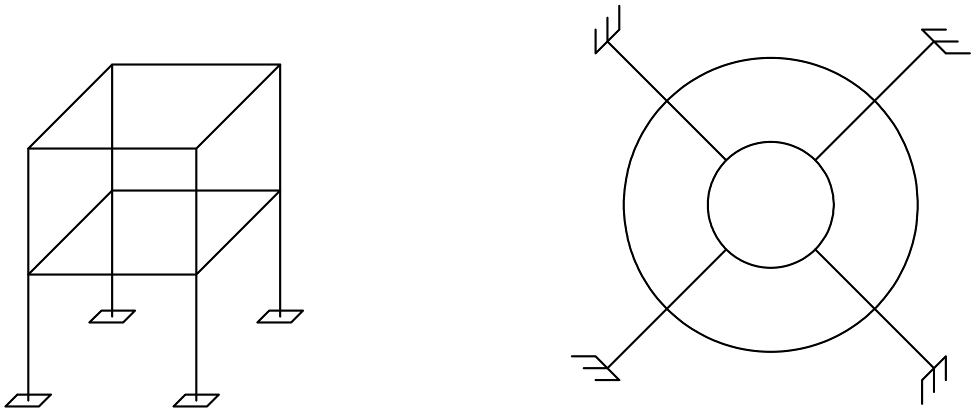
$$\alpha = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} (C_i + N_f - 1). \tag{4.6}$$

Comparando (4.6) com (4.4) conclui-se que:

$$C = C_i + N_f - 1. \tag{4.7}$$

A definição (4.7) mostra que em estruturas com apenas 1 nó de fundação, o número de cortes, C, é igual ao número de malhas fechadas, C_i. Esta relação sugere um método alternativo para determinar o número de cortes, C, sem transformar a estrutura fundamental em estruturas arborescentes, o que nem sempre é fácil de realizar.

O método consiste simplesmente em introduzir um novo e único nó de fundação ao qual são ligados os N_f nós de fundação da estrutura, os quais deixam de ser considerados como tal. O número de malhas fechadas que a estrutura modificada apresenta, define o número de cortes, C. Como se ilustra na figura 4.7b, as ligações ao novo nó de fundação não



(a) Pórtico tridimensional.

(b) Grafo do pórtico tridimensional.

Figura 4.8: Estruturas topologicamente idênticas.

podem ser efectuadas com cruzamentos entre as novas barras, os quais iriam introduzir, erradamente, novas malhas fechadas.

O método anteriormente descrito mostra claramente que o grau de indeterminação estática de uma estrutura fundamental depende apenas do processo de ligação, entre si e ao exterior, das barras que a formam. Em nada depende da forma e das dimensões dessas barras. Por outras palavras, ao grau de indeterminação estática interessa apenas a topologia da estrutura.

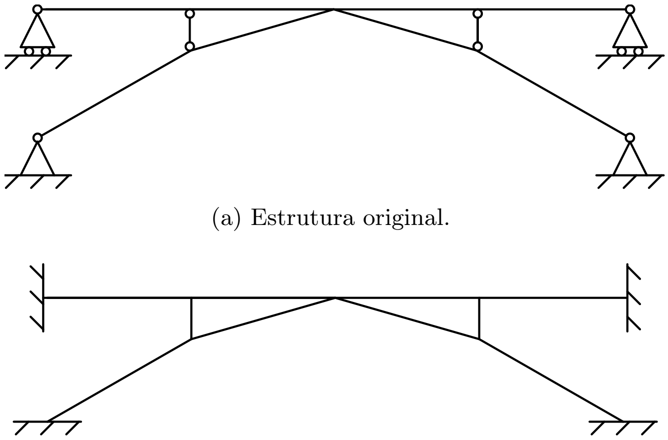
Esta propriedade pode ser vantajosamente utilizada no estudo de estruturas tridimensionais, ou mesmo no caso de estruturas planas com certa complexidade topológica, por permitir a substituição do modelo gráfico da estrutura por um outro em que se cuide apenas manter as propriedades topológicas da estrutura, o grafo da estrutura. Por exemplo, para o pórtico tridimensional representado na figura 4.8a em nada se diminui à informação sobre a sua topologia, se a estrutura for planificada, como se indica na figura 4.8b, desde que na nova representação topológica da estrutura se mantenha o mesmo número de nós e a mesma ligação entre eles.

Exercício 4.1. Verifique, usando os diferentes métodos anteriormente descritos, se a estrutura representada na figura 4.8a tem $\alpha_e = 18$, $\alpha_i = 30$ e $\alpha = 48$.

4.3 Estruturas com Libertações

A cada libertação existente numa estrutura, está associada uma nova equação de equilíbrio. Se a libertação for *externa*, isto é, entre os elementos estruturais e o meio de fundação, essa equação é a que obriga a ser nula a reacção de apoio correspondente. Se a libertação for *interna*, isto é entre os próprios elementos estruturais, a nova equação de equilíbrio é a que obriga a ser nulo o esforço libertado.

Uma estrutura com libertações pode ser reduzida a uma estrutura fundamental, bloqueando todas as libertações existentes, internas e externas, como se ilustra na figura 4.9. Como se mostra a seguir, os graus de hiperestatia de uma estrutura com libertações podem ser facilmente determinados a partir dos graus de hiperestatia da estrutura fundamental e



(a) Estrutura original.

(b) Estrutura fundamental.

Figura 4.9: Estrutura fundamental de uma estrutura com libertações.

do número de libertações que foram bloqueadas para a obter.

Se uma estrutura tiver L_e, libertações externas e a estrutura fundamental correspondente for α_e^* vezes hiperestática exteriormente, o grau de hiperestatia da estrutura em análise é dado por,

$$\alpha_e = \alpha_e^* - L_e,$$

pois existem agora menos L_e reacções de apoio indeterminadas. Recorrendo à definição (4.2), encontra-se:

$$\alpha_e = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} N_f - L_e. \tag{4.8}$$

Pode ser adoptado um procedimento análogo para determinar o grau de hiperestatia interior da estrutura. Se uma estrutura tiver L_i libertações internas e o grau de hiperestatia interior da estrutura fundamental correspondente for definido por (4.3) tem-se, para a estrutura em consideração,

$$\alpha_i = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} C_i - L_i, \tag{4.9}$$

por existirem agora menos L_i esforços indeterminados, ou, o que é equivalente, mais L_i equações de equilíbrio disponíveis.

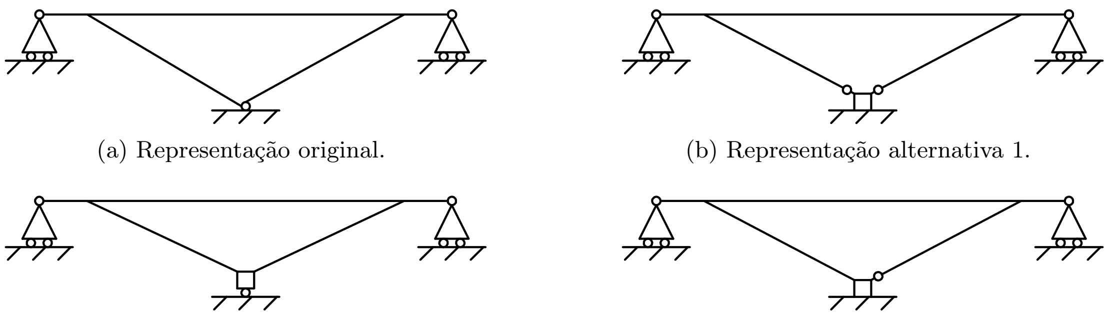
Para o grau de hiperestatia global, tem-se, da mesma maneira,

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix} C - L_e - L_i, \tag{4.10}$$

em que C representa o número de malhas fechadas existentes na estrutura fundamental correspondente.

Aplicando as definições acima à estrutura representada na figura 4.9a obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_e &= 3 \times (4-1) - 6 = +3 \\ \alpha_i &= 3 \times 2 - 4 = +2 \\ \alpha &= 3 \times 5 - 6 - 4 = +5. \end{aligned}$$



(a) Representação original. (b) Representação alternativa 1. (c) Representação alternativa 2. (d) Representação alternativa 3.

Figura 4.10: Representação dos aparelhos de libertação.

Os erros que se cometem no cálculo dos graus de hiperestatia de uma estrutura, resultam frequentemente de uma deficiente representação das ligações das barras entre si e à fundação. No caso representado na figura 4.10a, pode surgir a dúvida se as barras inclinadas se articulam entre si ou à fundação, ou ainda se uma encastra e à outra articula a fundação.

A maneira mais simples de evitar a má interpretação da representação gráfica de uma estrutura é a de trabalhar sobre o modelo discretizado. A introdução de nós a limitar as barras da estrutura, obriga a localizar as libertações de uma maneira inequívoca, como se mostra nas figuras 4.10b a 4.10d.

Exercício 4.2. Determine os graus de hiperestatia das estruturas representadas nas figuras 4.10b a 4.10d.

4.4 Determinação dos Graus de Hiperestatia

Enquanto o conceito de hiperestatia de uma estrutura não estiver perfeitamente assimilado, a determinação dos graus de indeterminação estática de uma estrutura deve ser realizada recorrendo a raciocínios que se baseiem exclusivamente no significado físico que essas quantidades representam.

A substituição da estrutura a analisar pela estrutura fundamental correspondente e a decomposição desta em estruturas arborescentes, é o método geral mais aconselhável para alcançar esse objectivo. Ultrapassada esta fase, interessa dispor de métodos que facilitem a determinação dos graus de hiperestatia, devendo então recorrer-se aos artifícios anteriormente descritos para a definição do número de malhas fechadas que a estrutura apresenta.

Esse método de determinação dos graus de hiperestatia de uma estrutura pode ser sistematizado da seguinte maneira:

Determinação do grau de hiperestatia

1. discretize a estrutura e determine o número de libertações exterior, L_e, e o de libertações internas, L_i;
2. determine o número de nós de fundação, N_f, e calcule o grau de hiperestatia exterior usando a definição (4.8);

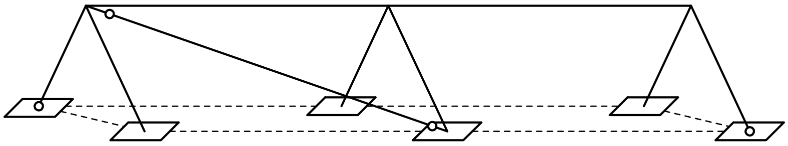


Figura 4.11: Estrutura tridimensional com rótulas esféricas.

3. bloqueie todas as libertações e planifique a estrutura sem introduzir novas intersecções entre as barras;
4. determine o número de malhas interiores fechadas, C_i, e calcule o grau de hiperestatia interior a partir da definição (4.9);
5. ligue todos os nós de fundação a um novo nó, evitando intersecções entre as barras fictícias assim introduzidas;
6. determine o número total de malhas fechadas, C, e calcule o grau de hiperestatia global através da definição (4.10);
7. confirme se os resultados obtidos verificam a condição (4.5).

A discretização da estrutura, sugerida no primeiro passo deste procedimento só é de facto necessária onde existam libertações, para clarificar a sua representação. A informação proveniente da discretização de toda a estrutura será no entanto utilizada quando mais adiante se apresentar um processo de automatização do cálculo dos graus de hiperestatia de uma estrutura.

Exercício 4.3. Determine os graus de hiperestatia da estrutura representada na figura 4.11. Admita que todas as articulações são esféricas.

Todos os resultados apresentados anteriormente baseiam-se na hipótese de todas as libertações, interiores e exteriores, serem perfeitas. Como o esforço numa libertação interior elástica é indeterminado, assim como a força numa libertação exterior elástica, este tipo de libertação não pode ser contabilizado na determinação dos graus de hiperestatia.

Exercício 4.4. Verifique a relação (2.1a) para as estruturas simétricas representadas nas figuras 2.13a e 2.3.

4.5 Natureza Vectorial dos Graus de Hiperestatia

É importante ter em atenção que tanto as reacções de apoio como os esforços nos elementos estruturais, são quantidades *vectoriais* e que esta informação não pode ser contemplada pelas definições (4.8) a (4.10), as quais envolvem apenas quantidades *escalares*. Se não se atender a este facto, pode cometer-se erros ao avaliar a hiperestatia de uma estrutura considerando apenas a informação produzida por essas expressões.

Na dedução das definições (4.8) a (4.10) esteve implícita a hipótese de que as equações de equilíbrio disponíveis eram *linearmente independentes* e não triviais para o carregamento dado, o que pode não suceder. Estas condições estão asseguradas no caso de estruturas sem libertações, pelo que as expressões (4.2), (4.3) e (4.4) são sempre válidas. Quando na estrutura se introduzem libertações, tanto o seu número como também o tipo e a localização podem destruir a independência linear das equações de equilíbrio disponíveis.

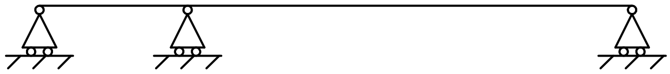


Figura 4.12: Hiperestatia dependente do tipo de carregamento.

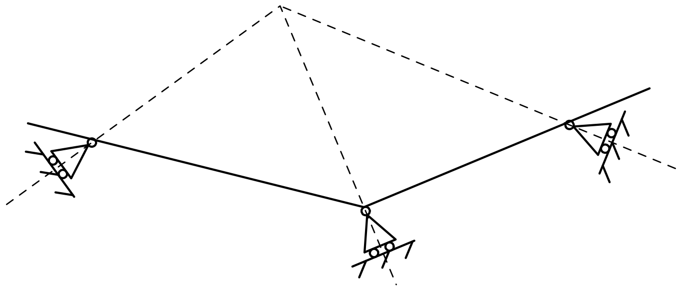


Figura 4.13: Estrutura com ligações mal distribuídas.

Destas limitações da aplicabilidade das definições (4.8) a (4.10), podem resultar conclusões falsas sobre a capacidade resistente do sistema em análise. Um sistema hipoestático não é necessariamente instável para todas as solicitações, assim como não é condição suficiente de estabilidade o sistema ser isostático ou hiperestático.

Este facto foi já ilustrado com o sistema representado na figura 4.3b. O sistema é isostático para solicitações que não afectem a malha fechada, mas comporta-se como um mecanismo para todas as forças que actuem sobre a malha, à excepção daquelas cujas linhas de acção contenham a articulação.

O sistema representado na figura 4.12 é hipoestático para todas as solicitações axiais, mas comporta-se como uma estrutura uma vez hiperestática para as solicitações que não incluam componentes axiais, pois neste caso uma das equações da Estática é identicamente satisfeita e, portanto, trivial. Todavia, como a fórmula (4.10) não reconhece o tipo e a orientação dos apoios nem a da solicitação, a informação que produziria era de que se tratava de uma estrutura isostática.

Exercício 4.5. No sistema representado na figura 4.13, os apoios móveis estão orientados de modo a que as suas linhas de acção coincidam num mesmo ponto. Discuta a aplicabilidade das fórmulas (4.8) a (4.10) para vários tipos de solicitação.

Outro tipo de situações em que as definições (4.8) a (4.10) produzem resultados falsos sobre a hiperestatia de uma estrutura, são as resultantes da impossibilidade de representar graficamente o comportamento de determinado tipo de elementos estruturais. Um caso típico, é o das estruturas atirantadas, como por exemplo a representada na figura 4.14.

Verifica-se, com frequência, que para introduzir no modelo gráfico da estrutura discretizada a informação de que no tirante ABC só existe esforço axial, se colocam as articulações adicionais indicadas na figura 4.15. No entanto, o que caracteriza o comportamento do tirante, é não só estar sujeito apenas a esforço axial como também o facto de esse esforço ser o mesmo em toda a peça, o que não está identificado na figura 4.15.

Se se aplicar a definição (4.6) à estrutura aí representada, encontra-se,

$$\alpha = +2,$$

quando o grau de hiperestatia global deve ser,

$$\alpha = +2 - 1,$$

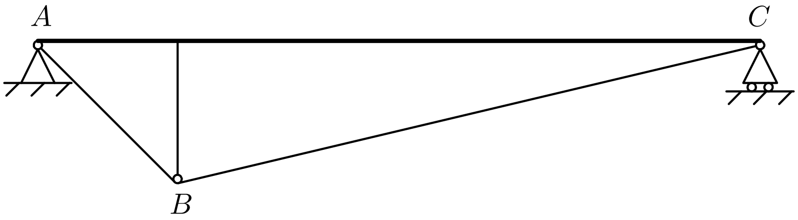


Figura 4.14: Viga reforçada com tirante.

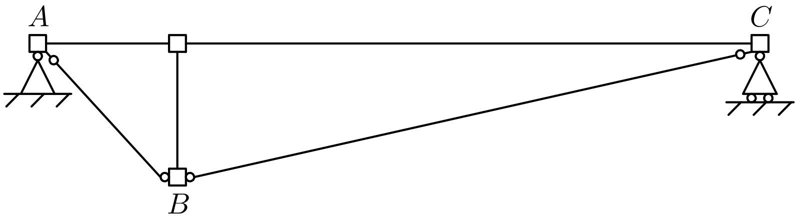


Figura 4.15: Viga reforçada em barras biarticuladas.

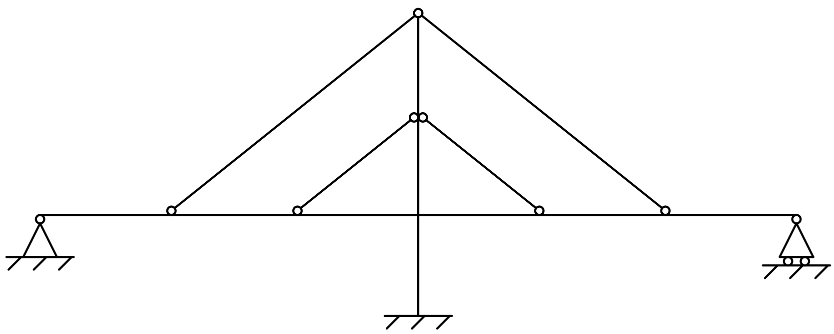


Figura 4.16: Modelo de ponte atirantada.

por existir mais uma equação de equilíbrio disponível, a que estabelece que o esforço axial em AB é o mesmo que em BC.

Exercício 4.6. Determine os graus de hiperestatia da estrutura representada na figura 4.16.

4.6 Utilização dos Graus de Hiperestatia

A sugestão de calcular separadamente os graus de hiperestatia exterior e interior e, independentemente, o grau de hiperestatia global não se justifica apenas pela importância de confirmar a determinação de uma informação fundamental para a análise de estruturas pelo método das forças. Justifica-se, também, pela informação que está contida em cada um desses resultados e pelas indicações que oferece para a posterior aplicação das equações da Estática.

Se a estrutura a analisar for isostática mas exteriormente hiperestática, a equação (4.8) escrita na forma,

$$\alpha_e = R - N > 0 \tag{4.11}$$

em que R representa o número de reacções, indica que apenas N reacções podem ser determinadas em função das restantes recorrendo às N equações da Estática linearmente independentes para o problema em análise. A equação (4.9), que terá como resultado,

$$\alpha_i = -\alpha_e \tag{4.12}$$

indica explicitamente quais são as equações adicionais que devem ser escritas e resolvidas para calcular as reacções que permanecem indeterminadas: as equações que asseguram serem nulos os esforços nas L_i libertações interiores da estrutura.

Se a estrutura for hiperestática, as equações (4.8) e (4.9) servem para dar uma informação geralmente segura sobre como tornar a estrutura estaticamente determinada: libertando α_e reacções de apoio e α_i esforços, de modo a tornar a estrutura exterior e interiormente isostática. Dada a sua natureza escalar, estas equações não podem indicar quais são as libertações que asseguram que não se formam mecanismos, globais ou parciais. Quando isso acontece, mas não foi detectado na inspecção da estrutura aparentemente tornada isostática, a Estática identifica esses mecanismos produzindo tantas equações impossíveis, reduzíveis à forma $1 = 0$, quanto os graus de liberdade do mecanismo activados pelo carregamento. Cada uma dessas equações traduz o facto de não ser possível equilibrar o sistema de forças em causa no mecanismo que foi inadvertidamente introduzido ao tentar tornar a estrutura isostática.

Capítulo 5

Análise de Estruturas Isostáticas

5.1 Introdução

Admita-se que as forças aplicadas à treliça isostática, representada na figura 5.1 crescem de zero até a um certo valor, de acordo com uma determinada lei de carga. Em cada instante, a função que se atribui à estrutura é a de resistir às forças aplicadas e de, simultaneamente, as transmitir ao meio de fundação.

A estrutura resiste às forças aplicadas convertendo-as em *esforços*, que distribui pelas barras que a compõem. Por sua vez, as barras transmitem os esforços ao meio de fundação, transformando-os nas *reacções* que se desenvolvem nos aparelhos de apoio. A maneira como as forças aplicadas se distribuem pelas barras e se transmitem ao meio de fundação é determinada pelas *condições de equilíbrio* da estrutura.

O crescimento dos esforços com as cargas aplicadas é acompanhado pelo aparecimento de *deformações* que traduzem as alterações verificadas nas dimensões iniciais das barras da estrutura. O valor das deformações depende do comportamento do material que constitui as barras, o qual se supõe ser caracterizado pelas *condições de elasticidade* anteriormente definidas.

A alteração das dimensões das barras é acompanhada por uma modificação da geometria inicial da estrutura, a qual pode ser descrita pelos *deslocamentos* sofridos pelos nós, como se ilustra na figura 5.2. A dependência entre as deformações nas barras e os

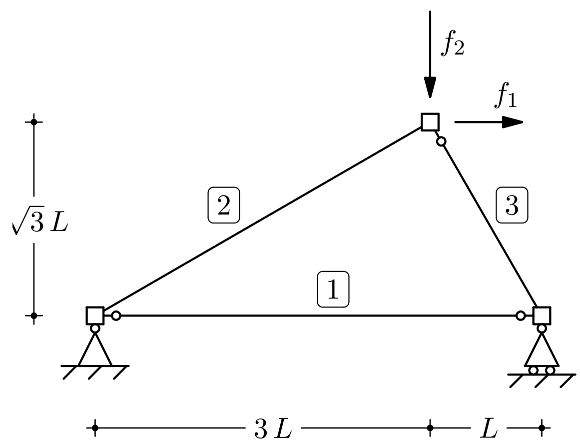


Figura 5.1: Treliça isostática.

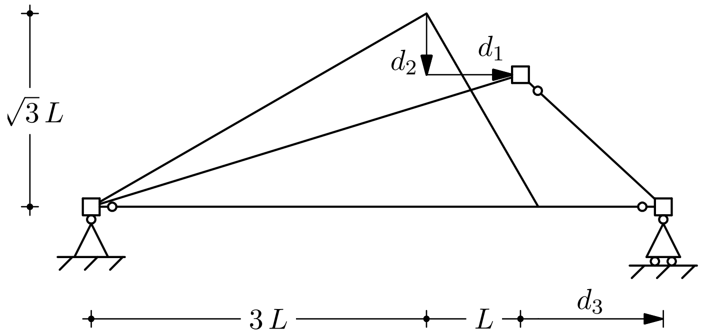


Figura 5.2: Posição inicial e posição deformada.

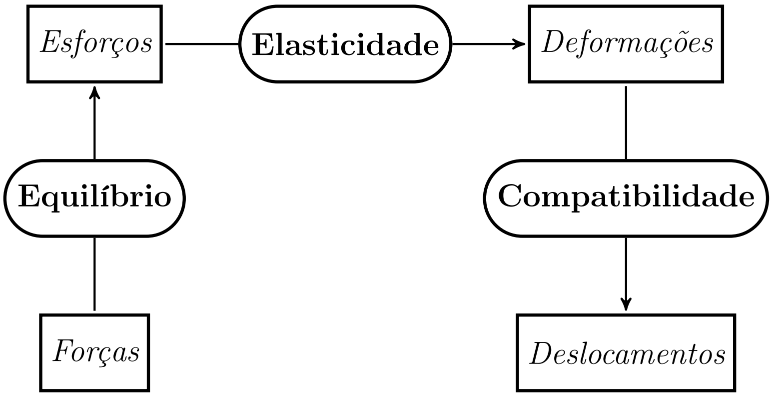


Figura 5.3: Esquema da análise de estruturas isostáticas.

deslocamentos nos nós é condicionada pelo modo de ligação das barras aos nós e destes ao meio de fundação, de maneira a satisfazer as condições de apoio da estrutura. Essa relação de dependência entre as deformações e os deslocamentos é determinada pelas *condições de compatibilidade* da estrutura.

No diagrama da figura 5.3 indicam-se as três condições fundamentais que é necessário satisfazer ao analisar o comportamento de uma estrutura, assim como as quantidades que elas relacionam. A sequência de cálculo que vai ser utilizada na análise de estruturas isostáticas está também aí indicada. Para uma dada solicitação, determinam-se os esforços nos elementos estruturais, recorrendo às condições de equilíbrio da estrutura. Conhecidos os esforços, as deformações nos elementos são determinadas impondo as condições que caracterizam o comportamento elástico do material. Definido o campo de deformações, os deslocamentos são calculados utilizando as condições de compatibilidade da estrutura.

5.2 Condições de Equilíbrio

As expressões que a seguir se apresentam têm como função representar numericamente as condições de equilíbrio de estruturas estaticamente determinadas. Na sua dedução, vai-se recorrer à *hipótese de linearidade geométrica*. Segundo esta hipótese, os deslocamentos e as deformações que se desenvolvem na estrutura, devido à solicitação, são tão pequenos que a deformada da estrutura se pode confundir com a sua configuração inicial. Sendo assim, as condições de equilíbrio podem ser impostas sobre a posição inicial da estrutura, e não sobre a estrutura deformada, como em rigor se deveria fazer.

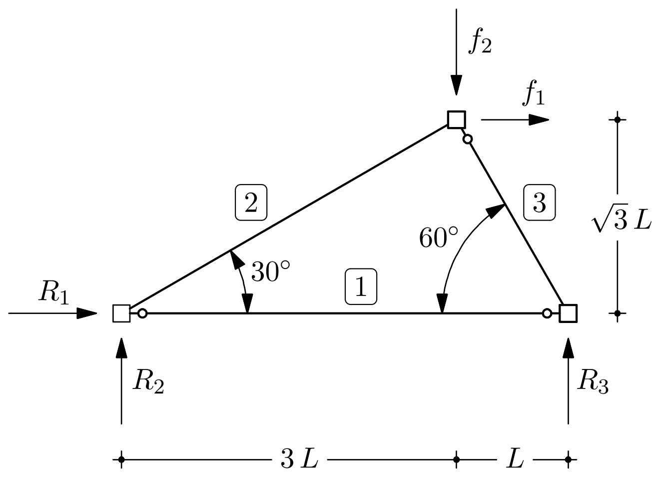


Figura 5.4: Diagrama de corpo livre da treliça.

O *equilíbrio exterior*, ou global, de uma estrutura, é verificado quando são nulas as resultantes de todas as forças a ela aplicadas, assim como as dos momentos produzidos num ponto arbitrário. As forças aplicadas incluem, para além da solicitação exterior, as reacções nos aparelhos de apoio que possam existir, como se ilustra na figura 5.4 para o exemplo da treliça.

Como a estrutura é exteriormente isostática, as reacções de apoio podem ser calculadas a partir das condições de equilíbrio global. Com a ajuda da figura 5.4 conclui-se que:

$$R_1 = (-1)\,f_1 + (0)\,f_2 \tag{5.1a}$$

$$R_2 = (-\sqrt{3}/4)\,f_1 + (1/4)\,f_2 \tag{5.1b}$$

$$R_3 = (+\sqrt{3}/4)\,f_1 + (3/4)\,f_2 \tag{5.1c}$$

A noção de *equilíbrio interior*, ou local, de uma estrutura é geralmente reduzida à de equilíbrio exterior, recorrendo-se para tal ao artifício de seccionar a estrutura em duas ou mais partes. Ao impor o equilíbrio global de cada uma dessas partes, os esforços nas secções de corte passam a ser tratados como forças exteriores.

A aplicação deste procedimento à estrutura em análise está ilustrada na figura 5.5. Os esforços axiais foram definidos de modo a garantir o equilíbrio de cada barra, tendo posteriormente sido transmitidos aos nós. Para determinar os esforços nas barras, basta agora impor o equilíbrio global das forças num mesmo nó:

$$N_1 = (+1/4)\,f_1 + (\sqrt{3}/4)\,f_2 \tag{5.2a}$$

$$N_2 = (+\sqrt{3}/2)\,f_1 + (-1/2)\,f_2 \tag{5.2b}$$

$$N_3 = (-1/2)\,f_1 + (-\sqrt{3}/2)\,f_2 \tag{5.2c}$$

Se se agruparem os esforços nas barras num vector,

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix},$$

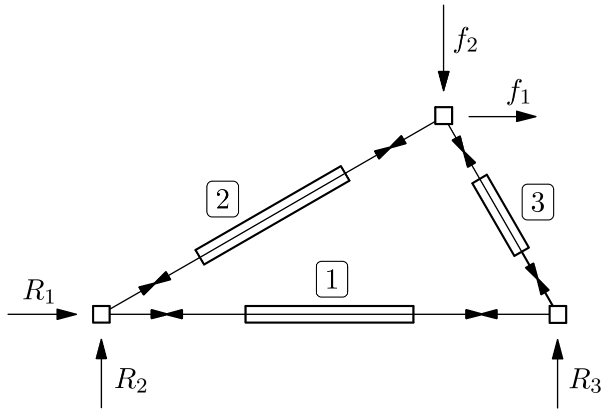


Figura 5.5: Diagrama de corpo livre dos nós e barras da treliça.

e se organizar de igual modo as forcas aplicadas,

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix},$$

o sistema (5.2) toma a seguinte forma:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}_0\,\mathbf{f} \tag{5.3}$$

em que

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

No caso geral, para determinar a *matriz de equilíbrio dos esforços*, $\mathbf{B}_0$, começa-se por discretizar a estrutura, e orientar e numerar sequencialmente os e elementos estruturais assim definidos.

Da identificação dos esforços independentes a considerar em cada elemento, resulta uma determinada organização para o *vector dos esforços* da estrutura:

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e \end{Bmatrix}. \tag{5.5}$$

Depois de identificar as c forças generalizadas aplicadas à estrutura, utilizando uma numeração sequencial, e de as ordenar no *vector das cargas*,

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_c \end{Bmatrix}, \tag{5.6}$$

calculam-se os coeficientes que formam as colunas da matriz de equilíbrio de esforços recorrendo à definição (5.3):

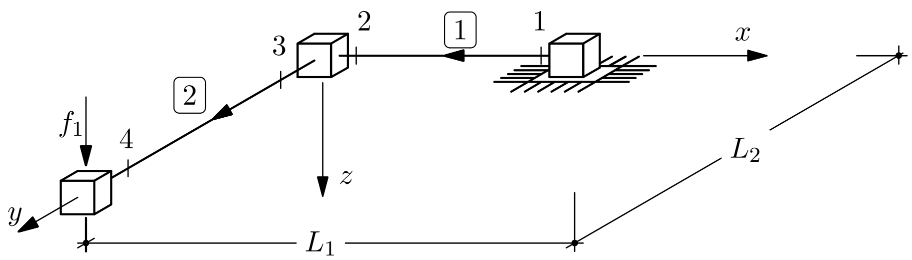


Figura 5.6: Elemento de grelha.

> **(D5.1)** A coluna i da matriz $\mathbf{B}_0$ representa os esforços independentes que se desenvolvem na estrutura para equilibrar a força generalizada $f_i = 1$, quando todas as restantes são nulas ($f_j = 0,\ j \neq i$).

Esta definição pode ser facilmente verificada comparando o resultado (5.4) com as expressões (5.2).

Exercício 5.1. Trace os diagramas dos esforços que equilibram o carregamento aplicado ao elemento de grelha representado na figura 5.6. Verifique que, quando os esforços independentes são definidos na forma (5.3), se tem:

$$\left\{\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ T_2 \\ \hdashline M_3 \\ M_4 \\ T_4 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c} -L_1 \\ 0 \\ -L_2 \\ \hdashline -L_2 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \left\{ f_1 \right\}. \tag{5.7}$$

Exercício 5.2. Com base nos diagramas de esforços, verifique se, para a estrutura plana, carregada no próprio plano, representada na figura 5.7, se tem:

$$\left\{\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \\ \hdashline M_3 \\ M_4 \\ \hdashline N_6 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -L & 1 & -a\,L \\ -2 & 1/L & -1-a \\ \hdashline -L & 1 & -a\,L \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 2\sqrt{2} & -\sqrt{2}/L & (1+a)\sqrt{2} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}\right\}. \tag{5.8}$$

Faz-se notar que se optou, no exercício proposto, por não controlar o esforço axial na secção 4, nem os momentos flectores nas secções extremas da barra biarticulada, por esses esforços independentes serem nulos. No entanto, as deformações independentes correspondentes podem não o ser.

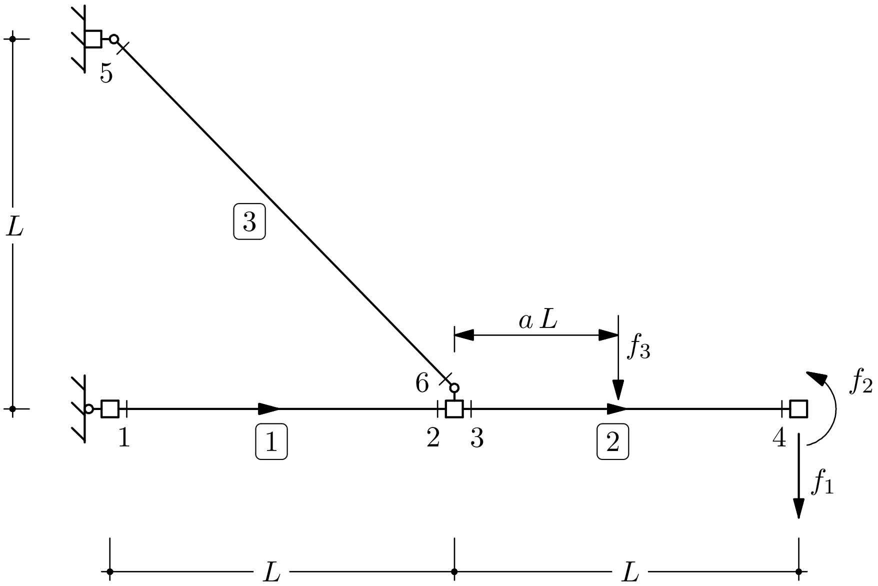


Figura 5.7: Viga com tirante.

5.3 Cálculo dos Esforços

A definição dos esforços independentes que se instalam numa estrutura através da condição de equilíbrio na forma (5.3) é útil quando se pretende analisar o efeito de várias combinações de carga. Nessas situações, o procedimento geral a adoptar é o seguinte:

Cálculo dos Esforços

1. discretize a estrutura, oriente e numere sequencialmente os e elementos assim definidos;
2. identifique os esforços independentes a considerar em cada elemento e organize o vector dos esforços (5.5);
3. identifique as c cargas aplicadas e organize o vector das cargas (5.6);
4. monte a matriz de equilíbrio, $\mathbf{B}_0$, aplicando sucessivamente a definição (D5.1);
5. para cada combinação de cargas, defina os coeficientes do vector das cargas $\mathbf{f}$ e calcule os esforços independentes, executando o produto matricial (5.3).

Conhecidos os esforços independentes associados a cada carregamento, os esforços em qualquer secção de estrutura podem ser calculados a partir das definições (3.3).

Exercício 5.3. Utilizando a definição (5.8), determine os diagramas de esforços que se desenvolvem na estrutura representada na figura 5.7 para o carregamento:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,L \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Em muitas aplicações pretende-se conhecer apenas os esforços que equilibram um único conjunto de cargas. Quando assim é, a determinação da matriz $\mathbf{B}_0$ deixa de ser justificável.

Todas as cargas são aplicadas *simultaneamente* à estrutura e as reacções de apoio e os diagramas de esforços são calculados impondo o equilíbrio da estrutura. Os coeficientes do vector $\mathbf{X}$ são então determinados, lendo os esforços independentes registados nos diagramas de esforços.

5.4 Cálculo das Deformações

Depois de seleccionar os esforços independentes e de os organizar no vector dos esforços (5.5), ficam implicitamente definidas as resultantes de deformação que devem ser adoptadas como independentes, assim como o modo como devem ser organizadas no *vector das deformações* da estrutura, $\mathbf{u}$. Este vector,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_e \end{Bmatrix}, \tag{5.9}$$

agrupa as deformações correspondentes aos esforços considerados como independentes, segundo a ordenação para eles adoptada.

Para a estrutura analisada no exercício (5.2) tem-se, portanto,

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ e_2 \\ \hdashline \theta_3 \\ \theta_4 \\ \hdashline e_6 \end{array} \right\}, \tag{5.10}$$

estando identificadas na figura 5.8 cada uma das deformações consideradas como independentes, de acordo com as convenções adoptadas no Capítulo 3.

Para calcular as deformações que se instalam na estrutura, recorre-se às relações de elasticidade (3.12),

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i\,\mathbf{X}_i + \overline{\mathbf{u}}_i, \tag{5.11}$$

de acordo com o seguinte procedimento:

Cálculo das Deformações

1. resuma num quadro as constantes geométricas e mecânicas que determinam o comportamento de cada elemento estrutural;
2. defina a matriz de flexibilidade, $\mathbf{F}_i$, de cada um dos e elementos estruturais, usando as definições apresentadas no Capítulo 3;
3. calcule a componente das deformações devidas às cargas de vão, $\overline{\mathbf{u}}_i$, recorrendo às tabelas 3.2 a 3.4;
4. forme o vector das deformações (5.9) introduzindo na definição geral (5.11) os resultados anteriormente obtidos.

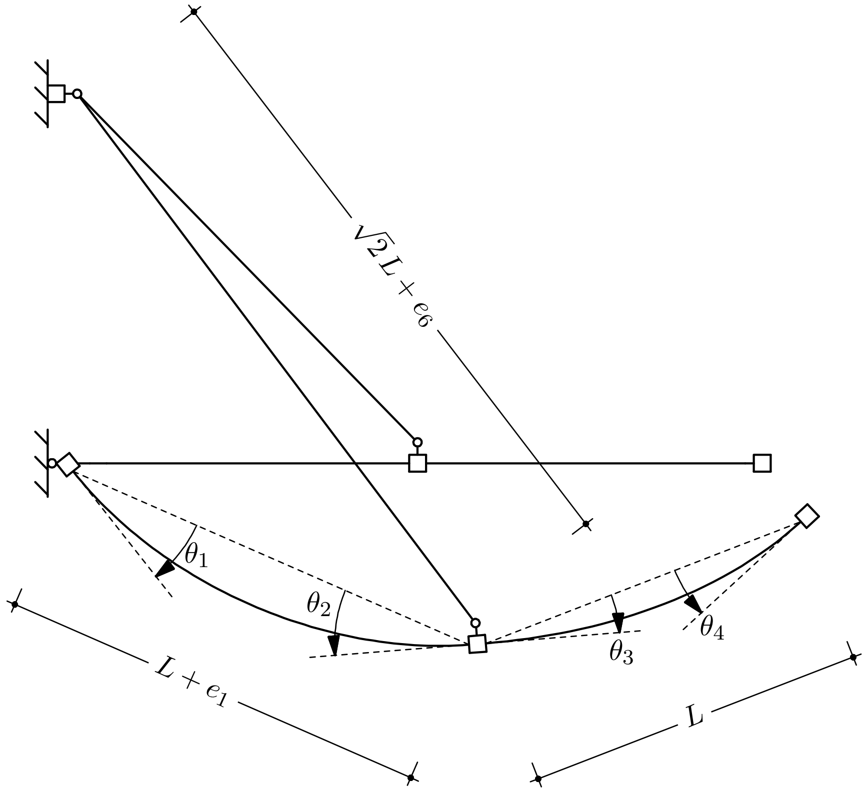


Figura 5.8: Deformada da viga com tirante.

Como exemplo de aplicação, considere-se a treliça representada na figura 5.1, cujas características geométricas e mecânicas são as resumidas no quadro seguinte:

i	1	2	3
L_i (m)	$4\,L$	$2\sqrt{3}\,L$	$2\,L$
$(E\,A)_i$ (kN)	$E\,A$	$E\,A$	$E\,A$

Da definição (3.17) tem-se,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{L}{E\,A}\begin{bmatrix}4\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_2 = \frac{L}{E\,A}\begin{bmatrix}2\sqrt{3}\end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{F}_3 = \frac{L}{E\,A}\begin{bmatrix}2\end{bmatrix},$$

encontrando-se,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix}1\\-3\\-1\end{Bmatrix} e, \tag{5.12}$$

com,

$$e = \frac{2\,L}{E\,A},$$

para o carregamento:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{Bmatrix}.$$

Note-se que $\overline{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0}$ por não existirem cargas de vão.

Exercício 5.4. Verifique se na estrutura representada na figura 5.7, se desenvolvem as deformações,

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} -2\,\theta \\ -4\,\theta \\ -2\,e \\ \hdashline -2\,\theta \\ -\theta \\ \hdashline 2\,e \end{array} \right\}, \tag{5.13}$$

em que,

$$\theta = \frac{f\,L^2}{12\,E\,I} \quad \text{e} \quad e = \frac{f\,L}{E\,A},$$

quando se aplica o carregamento,

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{c} f \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\},$$

e se consideram as seguintes constantes elásticas:

i	1	2	3
$(E\,I)_i$ $\left(\text{kN}\cdot\text{m}^2\right)$	$E\,I$	$2\,E\,I$	—
$(E\,A)_i$ (kN)	$E\,A$	—	$2\,E\,A$

5.5 Condições de Compatibilidade

Já se estudaram os processos de cálculo dos esforços e das deformações elásticas que se desenvolvem numa estrutura isostática, em resposta a uma dada solicitação. Para concluir a análise do comportamento da estrutura, é ainda necessário quantificar os deslocamentos que nela se verificam. Os deslocamentos são determinados a partir das condições de compatibilidade que os relacionam com as deformações que se instalam nos elementos estruturais.

As condições de compatibilidade são deduzidas recorrendo exclusivamente a considerações de ordem geométrica, explorando-se simultaneamente as simplificações decorrentes da *hipótese de linearidade geométrica*. Uma rotação, medida em radianos e representada num movimento ou numa deformação, é considerada infinitesimal se o seu quadrado (e, portanto, as potências de ordem superior), for desprezável face à unidade. Da expansão em série de Taylor em $\theta = 0$ do seno, coseno e tangente de um ângulo infinitesimal conclui-se que $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$ e $\tan\theta \simeq \theta$. De modo análogo, um deslocamento δ, ou um alongamento e, é considerado infinitesimal se o seu quadrado em relação ao comprimento característico da peça, $(\delta/L)^2$ ou $(e/L)^2$, é desprezável em relação à unidade.

Considere-se, por exemplo, que devido a uma determinada solicitação, se instalava o seguinte campo de deformações na treliça anteriormente considerada:

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} +a \\ +b \\ -c \end{array} \right\}.$$

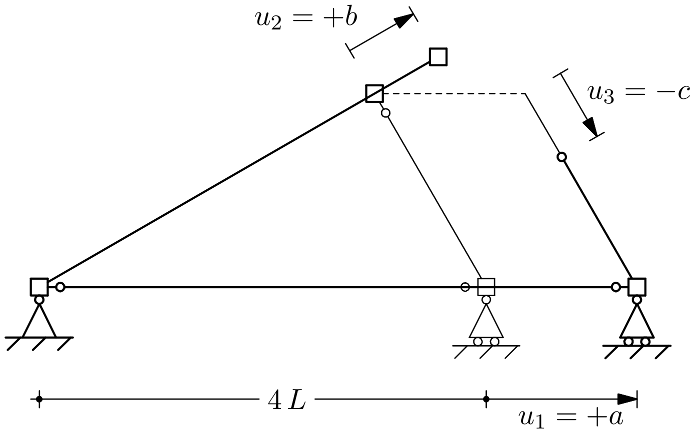


Figura 5.9: Imposição das deformações violando as condições de continuidade.

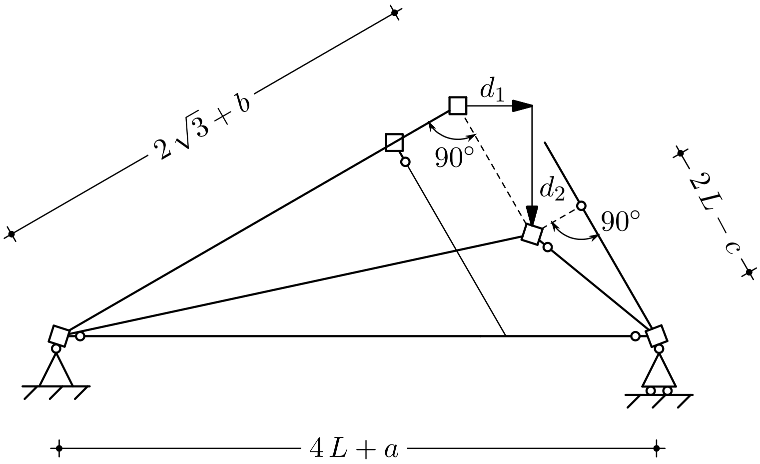


Figura 5.10: Imposição das deformações respeitando as condições de continuidade e de apoio.

Para facilitar a determinação da nova forma que a estrutura apresenta, começa-se por desligar as barras e introduzir as deformações dadas, como se ilustra na figura 5.9. Para tornar a ligar as barras 2 e 3, elas são rodadas em torno dos nós de fundação. Como essas rotações são infinitesimais, os arcos descritos pelas extremidades das peças 2 e 3 podem ser confundidos com as respectivas tangentes, como se indica na figura 5.10. Por outras palavras, na hipótese das deformações e dos deslocamentos serem infinitesimais, uma barra sujeita a deslocamentos perpendiculares ao eixo não sofre qualquer deformação axial.

As deformadas representadas nas figuras 5.8 e 5.10 são admissíveis, pois respeitam simultaneamente as condições de ligação dos nós ao meio de fundação, de continuidade dos elementos estruturais e da sua ligação aos nós. As *condições de fronteira* são satisfeitas quando os únicos movimentos verificados nos nós de fundação são os permitidos pelos aparelhos de apoio da estrutura. A *condição de continuidade* garante que secções vizinhas, antes da deformação da estrutura ter lugar, permanecem vizinhas depois da deformação se instalar.

A *condição de continuidade das ligações* das barras aos nós que as limitam pretende apenas assegurar que entre a secção extrema de uma peça e o nó que lhe é adjacente, só se

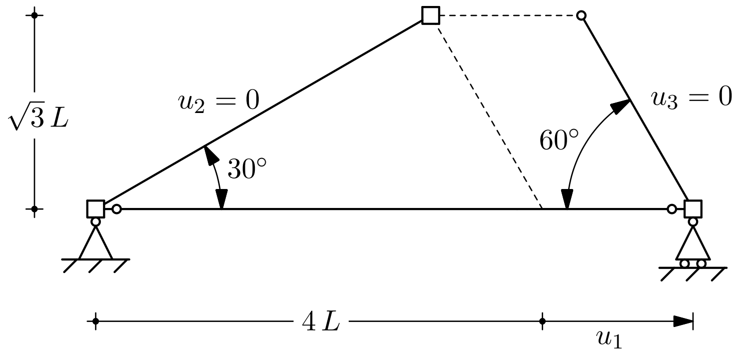


Figura 5.11: Imposição das deformações u_1 violando a condição de continuidade.

possam verificar os movimentos relativos permitidos pelos aparelhos de libertação interna que entre eles possam existir. A deformada representada na figura 5.9 não é admissível por violar esta condição.

A função das expressões que a seguir são apresentadas é a de representar numericamente as condições de compatibilidade acima referidas, de modo a relacionar os deslocamentos correspondentes às forças aplicadas à estrutura com as deformações que nela se desenvolvem. Define-se como *deslocamento correspondente* a uma força, o deslocamento d_i sofrido pelo ponto de aplicação da força f_i na direcção e sentido em que actua. Nas figuras 5.2 e 5.10 estão assinalados os deslocamentos correspondentes às duas forcas aplicadas à treliça representada na figura 5.1.

Para determinar as expressões das condições de compatibilidade, impõem-se à estrutura, e separadamente, cada uma das deformações independentes e constrói-se graficamente a deformada da estrutura que satisfaz as condições de fronteira e de continuidade de deformações e de ligação dos elementos estruturais. Os deslocamentos correspondentes às forças aplicadas são depois medidos sobre a deformada da estrutura que assim se obtém.

Como exemplo de aplicação, considere-se de novo a treliça isostática representada na figura 5.1. Para determinar o efeito da deformação axial na barra 1, começa-se por desligar duas das barras e introduzir a deformação u_1, como se ilustra na figura 5.11. Para compatibilizar a deformada, as barras 2 e 3 são rodadas de modo a conseguir a convergência das secções extremas. Como anteriormente se referiu, na hipótese das deformações e dos deslocamentos serem infinitesimais, esta operação é realizada deslocando as barras perpendicularmente ao seu eixo.

Na figura 5.12 está representada a deformada final da estrutura, assim como o triângulo que caracteriza o movimento do nó em que as forças f_1 e f_2 estão aplicadas; desse triângulo encontra-se a seguinte definição para os deslocamentos correspondentes:

$$\begin{cases} d_1 = (1/4)\,u_1 \\ d_2 = (\sqrt{3}/4)\,u_1 \end{cases}. \tag{5.14}$$

Nas figuras 5.13 e 5.14 representam-se as deformadas que se encontram ao impor separadamente, deformações axiais positivas nas barras 2 e 3, usando um process análogo ao anteriormente descrito. Das deformadas representadas nas figuras 5.13 e 5.14 encontram-se as seguintes expressões para os deslocamentos correspondentes às forças aplicadas à treliça:

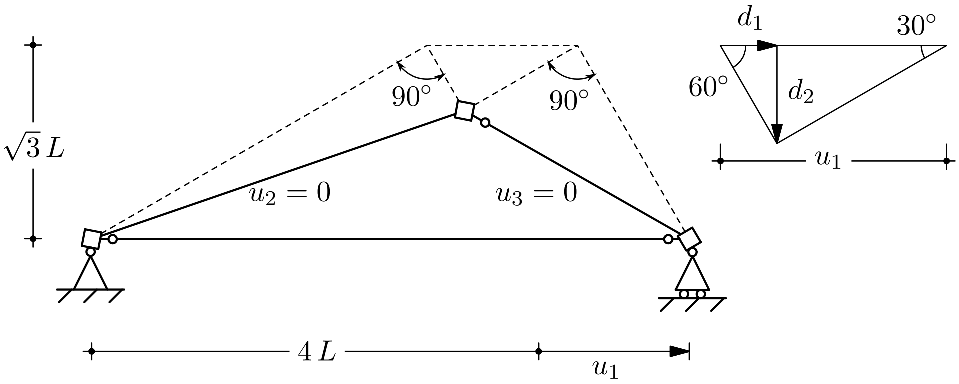


Figura 5.12: Efeito da deformação u_1.

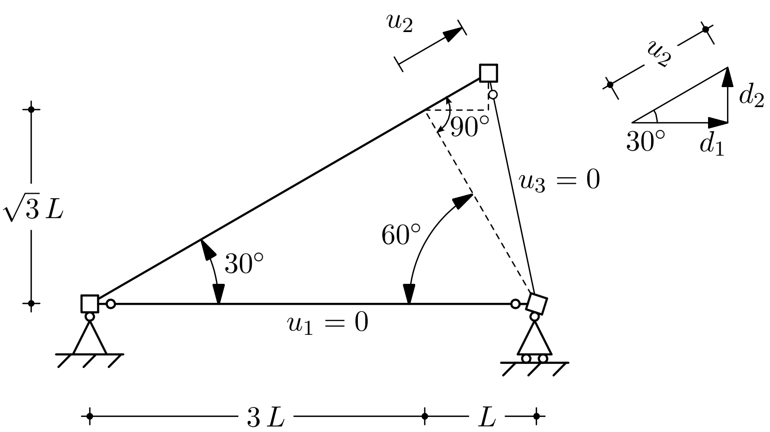


Figura 5.13: Efeito da deformação u_2.

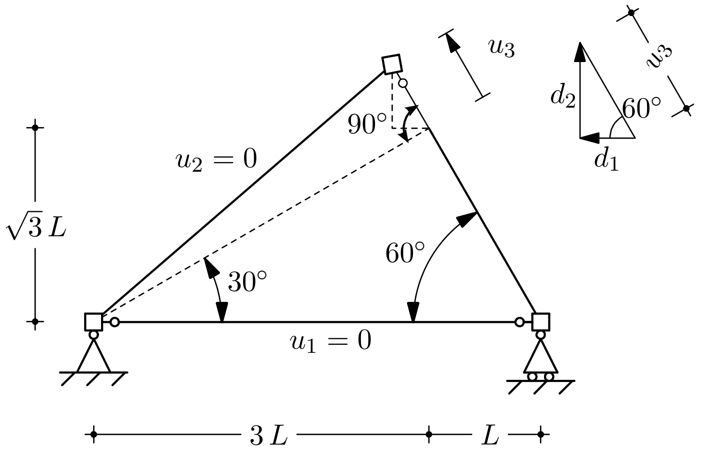


Figura 5.14: Efeito da deformação u_3.

$$\begin{cases} d_1 = (\sqrt{3}/2)\, u_2 \\ d_2 = (-1/2)\, u_2 \end{cases}, \tag{5.15}$$

e

$$\begin{cases} d_1 = (-1/2)\, u_3 \\ d_2 = (-\sqrt{3}/2)\, u_3 \end{cases}. \tag{5.16}$$

Sobrepondo os resultados (5.14) a (5.16), encontram-se as seguintes definições para os deslocamentos compatíveis com as deformações que se podem vir a desenvolver na estrutura,

$$\begin{cases} d_1 = (1/4)\, u_1 + (\sqrt{3}/2)\, u_2 + (-1/2)\, u_3 \\ d_2 = (\sqrt{3}/4)\, u_1 + (-1/2)\, u_2 + (-\sqrt{3}/2)\, u_3 \end{cases}.$$

ou, matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/4 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \tag{5.17}$$

No caso geral, as condições de compatibilidade de uma estrutura estaticamente determinada podem portanto ser expressas na forma

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}_0\, \mathbf{u}, \tag{5.18}$$

em que $\mathbf{C}_0$ representa a *matriz de compatibilidade*, e

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_c \end{Bmatrix}, \tag{5.19}$$

é o *vector dos deslocamentos*, que agrupa os deslocamentos correspondentes às forças generalizadas (5.6). As definições (5.14) a (5.17) mostram claramente que:

> **(D5.2)** A coluna i da matriz de compatibilidade $\mathbf{C}_0$ representa os deslocamentos $\mathbf{d}$ correspondentes às cargas aplicadas, $\mathbf{f}$, quando na estrutura se introduz o deslocamento relativo unitário correspondente à i-ésima deformação independente, e se mantêm nulas todas as restantes deformações independentes.

Evidentemente que ao impor uma deformação se deve garantir que sejam satisfeitas, simultaneamente, as condições de fronteira da estrutura (compatibilidade exterior) e de continuidade das deformações e das ligações internas (compatibilidade interior).

Para provocar uma dada deformação, basta introduzir na secção correspondente o aparelho de libertação que permite o movimento relativo que a caracteriza. A estrutura torna-se uma vez hipoestática, determinando-se a configuração do mecanismo correspondente impondo as condições de compatibilidade anteriormente descritas.

Na figura 5.15 representa-se o mecanismo gerado a partir da estrutura definida na figura 5.7 quando se articula a secção 2, a fim de provocar a deformação independente θ_2.

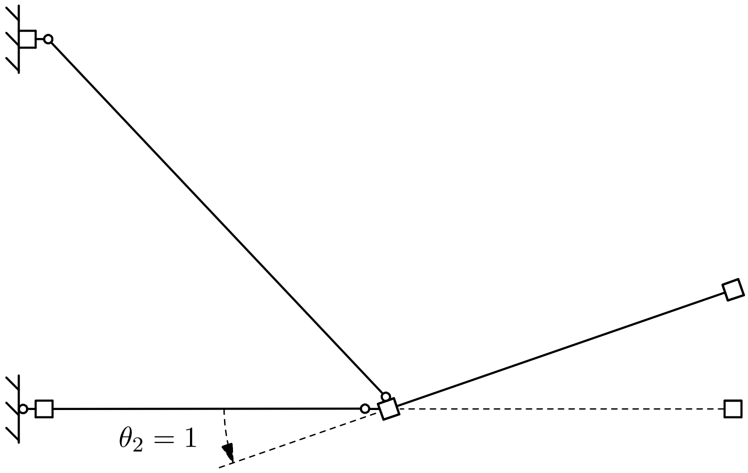


Figura 5.15: Efeito da deformação θ_2 na viga com tirante.

Por considerações de natureza puramente geométrica, pode verificar-se serem os seguintes os deslocamentos provocados por esta deformação:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ 1 \\ -a\,L \end{bmatrix} \theta_2. \tag{5.20}$$

Exercício 5.5. Verifique se a matriz de compatibilidade da estrutura representada figura 5.7, e para o carregamento aí indicado, tem a seguinte definição:

$$\mathbf{C}_0 = \left[\begin{array}{ccc:cc:c} 0 & -L & -2 & -L & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1/L & 1 & 1 & -\sqrt{2}/L \\ 0 & -a\,L & -1-a & -a\,L & 0 & (1+a)\sqrt{2} \end{array}\right]. \tag{5.21}$$

é importante sublinhar que, para implementar a definição (D5.2), basta introduzir qualquer deformada que garanta as condições de compatibilidade, exterior e interior, e que se caracterize por apenas a i-ésima deformação independente ser não nula. O resultado (5.20) podia ter sido obtido trabalhando, por exemplo, com a deformada representada na figura 5.16. O artifício de introduzir a libertação correspondente à deformação que se pretende impor, tem a vantagem de gerar um mecanismo que satisfaz automaticamente todas as condições necessárias à implementação da definição (D5.2).

5.6 Propriedades das Condições de Equilíbrio e de Compatibilidade

A análise dos resultados anteriormente obtidos, nomeadamente (5.4, 5.8) e (5.17, 5.21), mostra que são constantes os coeficientes das matrizes que definem as condições de equilíbrio e de compatibilidade. Por outras palavras,

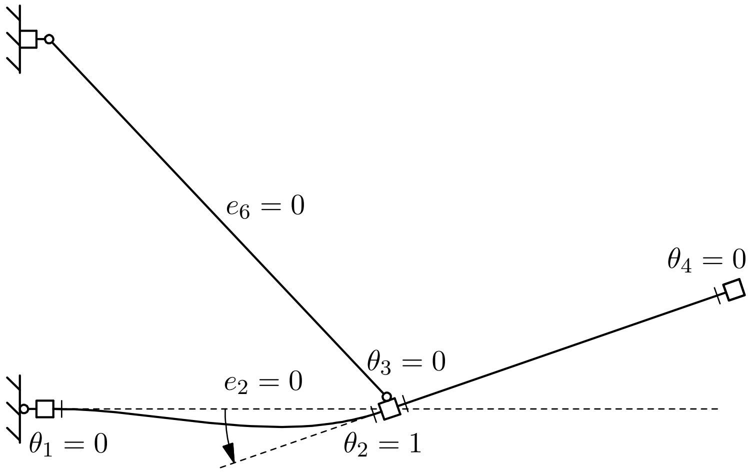


Figura 5.16: Efeito da deformação θ_2 na viga com tirante admitindo um comportamento elástico.

> **(P5.1)** As condições de equilíbrio (5.3) e de compatibilidade (5.18) são lineares.

Pode ainda verificar-se que essas constantes dependem apenas das propriedades topográficas da estrutura indeformada, isto é, da dimensão e da orientação inicial dos elementos estruturais. Como as constantes elásticas desses elementos não intervêm na definição das matrizes de equilíbrio e de compatibilidade, conclui-se que:

> **(P5.2)** As condições de equilíbrio (5.3) e de compatibilidade (5.18) são independentes das propriedades mecânicas dos elementos estruturais.

A terceira e última propriedade que interessa realçar, é a que exprime a relação existente entre as matrizes de equilíbrio, $\mathbf{B}_0$, e de compatibilidade, $\mathbf{C}_0$.

Como os resultados (5.4, 5.17) e (5.8, 5.21) o ilustram, a coluna {linha} i da matriz de equilíbrio, corresponde à linha {coluna} i da matriz de compatibilidade. é importante realçar que esta relação de transposição,

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{B}_0^T, \tag{5.22}$$

se manifesta apesar das matrizes $\mathbf{B}_0$ e $\mathbf{C}_0$ terem sido deduzidas independentemente uma da outra. De facto, a definição (D5.1) envolve unicamente conceitos da Estática, enquanto a definição (D5.2) se baseia exclusivamente em conceitos da Cinemática.

Esta propriedade, que permite escrever as condições de compatibilidade (5.18) na forma

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}_0^T\,\mathbf{u}, \tag{5.23}$$

é denominada *Dualidade entre a Estática e a Cinemática.* As condições de equilíbrio (5.3) e de compatibilidade (5.18) representam de facto transformações duais ou contragradientes; $(\mathbf{X}, \mathbf{u})$ e $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$ são os pares de variáveis duais.

Esta relação de dualidade pode ser enunciada da seguinte forma:

(P5.3) Se $\mathbf{B}'_i$ é o vector que define os esforços independentes $\mathbf{X}$ que equilibram a força $f'_i = 1$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}'_i\, f'_i, \tag{5.24}$$

então, o deslocamento d'_i, (correspondente à força f'_i), compatível com as deformações $\mathbf{u}$, (correspondentes aos esforços $\mathbf{X}$), é definido por:

$$d'_i = \mathbf{B}'^T_i\, \mathbf{u}. \tag{5.25}$$

Uma definição alternativa é a seguinte:

(P5.4) Se $\mathbf{C}'_i$, é o vector que define os deslocamentos $\mathbf{d}$ compatíveis com a deformação independente $u'_i = 1$,

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}'_i\, u'_i, \tag{5.26}$$

então, o esforço X'_i, (correspondente à deformação u'_i), em equilíbrio com as forças $\mathbf{f}$, (correspondentes aos deslocamentos $\mathbf{d}$), é definido por:

$$X'_i = \mathbf{C}'^T_i\, \mathbf{f}. \tag{5.27}$$

Pode provar-se que as propriedades acima descritas são consequência directa da hipótese de linearidade geométrica.

5.7 Cálculo dos Deslocamentos

A relação existente entre as matrizes de equilíbrio e de compatibilidade permite que, na análise do comportamento de uma estrutura, seja suficiente estabelecer uma das condições, a de equilíbrio (5.3) ou a de compatibilidade (5.18). Obtida uma, a outra pode ser estabelecida impondo a relação de dualidade. Como, na maioria das situações, é mais fácil deduzir as condições de equilíbrio do que as de compatibilidade, o cálculo de deslocamentos é geralmente realizado explorando a propriedade (P.5.3).

Conhecidas as deformações $\mathbf{u}$ provocadas pelos esforços $\mathbf{X}$ que equilibram a solicitação $\mathbf{f}$, o cálculo dos deslocamentos que se instalam na estrutura pode ser resumido no seguinte procedimento:

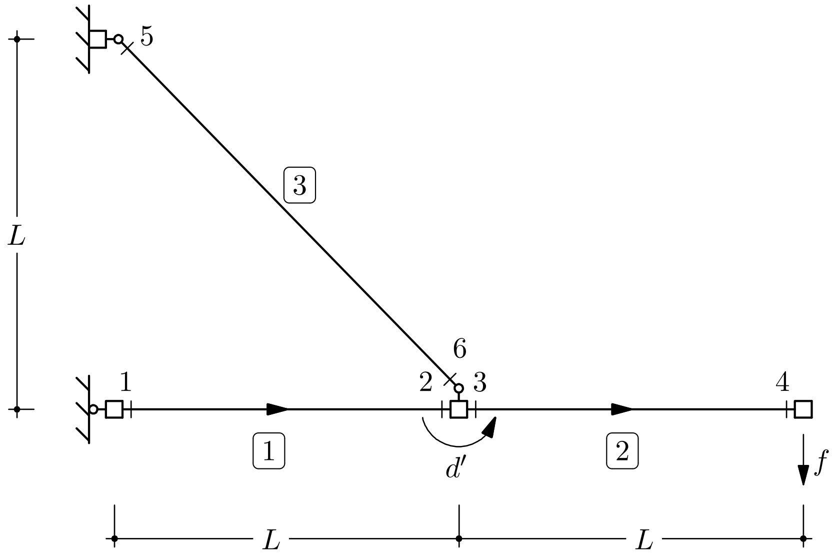


Figura 5.17: Cálculo da rotação d' na viga com tirante.

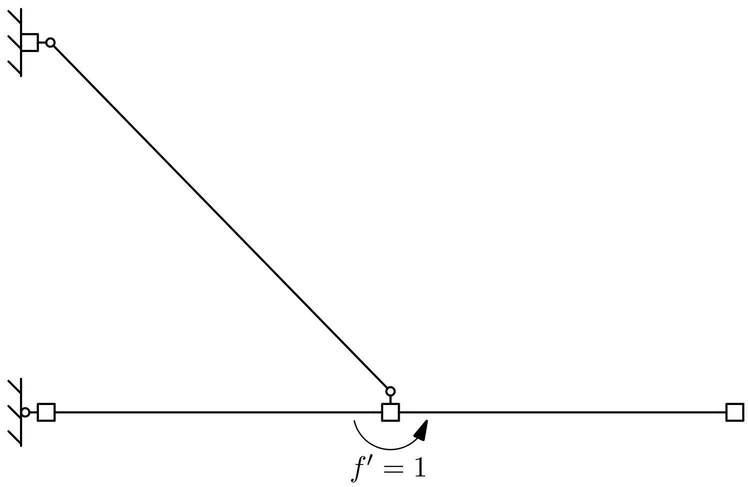


Figura 5.18: Momento unitário correspondente à rotação d'.

Cálculo dos Deslocamentos

1. para cada deslocamento pretendido, d'_i, defina a força correspondente, f'_i;
2. determine o vector $\mathbf{B}'_i$, definido por (5.24), isto é, os esforços que equilibram a solicitação $f'_i = 1$;
3. calcule o deslocamento d'_i recorrendo a definição (5.25).

Como exemplo de aplicação, considere-se o problema de determinar a rotação do nó em que convergem as três barras que formam a estrutura representada na figura 5.17. As deformações provocadas pelo carregamento aí indicado foram já calculadas no exercício 5.4.

Aplicando o carregamento fictício definido na figura 5.18, encontram-se os seguintes esforços independentes:

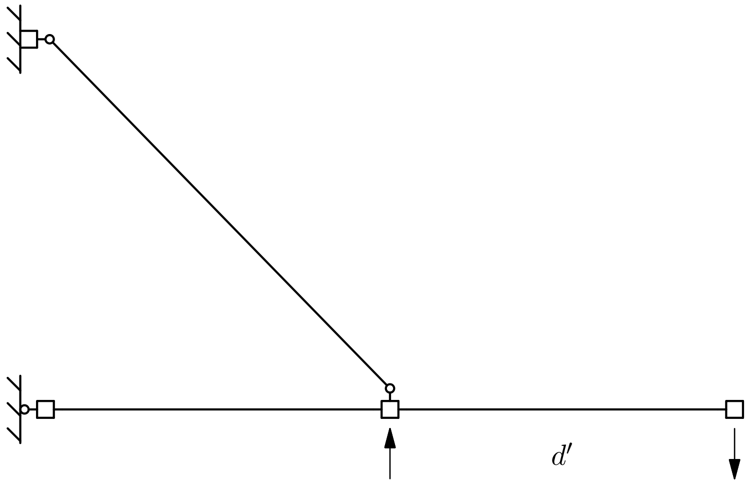


Figura 5.19: Deslocamento relativo na viga com tirante.

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L} \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \hdashline -\frac{\sqrt{2}}{L} \end{bmatrix}. \tag{5.28}$$

Substituindo este resultado na definição (5.25), com o campo de deformações (5.13), obtém-se finalmente:

$$d' = -4\,\theta - \frac{2(1+\sqrt{2})e}{L}.$$

Em muitas aplicações, para além dos deslocamentos absolutos de vários pontos da estrutura, interessa também conhecer deslocamentos relativos, lineares ou angulares, entre dois pontos, segundo determinada direcção e sentido. Neste caso a força correspondente, f_i', é o par de forças ou de momentos, aplicados nos dois pontos da estrutura cujo deslocamento relativo se pretende determinar, segundo a direcção e o sentido pretendidos. Por exemplo, o par de forças correspondentes ao deslocamento relativo d' definido na figura 5.19 é o representado na figura 5.20.

Exercício 5.6. Para a estrutura e carregamento representados na figura 5.17, verifique se o deslocamento vertical relativo entre os dois nós que limitam a barra 2 é definido por:

$$d' = 6\,\theta\,L + 2\,(1+\sqrt{2})\,e.$$

é importante salientar que as expressões (5.18), (5.23) ou (5.24) e (5.25) definem o deslocamento de pontos da estrutura em relação a posição final da *corda* dos elementos em que se situam. Dessas expressões só se obtém o deslocamento total de pontos que coincidam com uma das secções extremas de um dos elementos estruturais, isto é, com um dos nós de discretização da estrutura. Para calcular o deslocamento total de pontos existentes no eixo de um elemento, é necessário somar a parcela da definição (5.25) à parcela definida pela

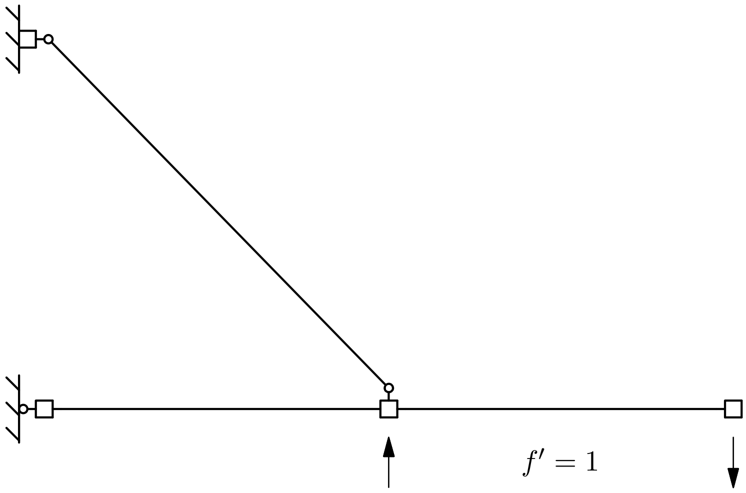


Figura 5.20: Forças unitárias correspondentes ao deslocamento relativo d'.

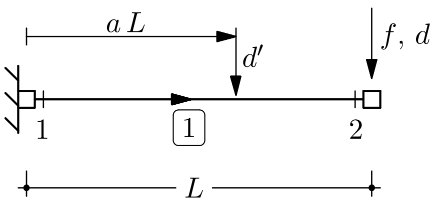


Figura 5.21: Cálculo de deslocamentos numa consola.

equação (3.7), que define os deslocamentos do ponto em relação à corda do elemento. Estas parcelas são designadas por parcela de corpo rígido e parcela elástica, respectivamente. A parcela decorrente da definição (5.25) é independente das propriedades mecânicas das peças, de acordo com a propriedade (P.5.2). Complementarmente, a parcela definida pela equação (3.7) foi determinada numa peça elástica em que se impedem os deslocamentos de corpo rígido, a viga simplesmente apoiada.

A soma da parcela elástica pode ser evitada se, ao discretizar a estrutura, forem colocados nós em todos os pontos onde se pretenda determinar deslocamentos. A desvantagem deste método alternativo é a de aumentar o número de barras no modelo da estrutura, o que se pode traduzir num aumento significativo das dimensões dos vectores e das matrizes envolvidas no processo de cálculo.

Exercício 5.7. Considere a consola representada na figura 5.21. Verifique se, para o carregamento indicado, a aplicação da definição (5.25) produz as seguintes expressões para os deslocamentos assinalados na mesma figura;

$$d = 2\,\theta\,L \text{ e } d' = 2\,a\,\theta\,L, \tag{5.29}$$

e representados na figura 5.22, em que:

$$\theta = \frac{f\,L^2}{6\,E\,I}.$$

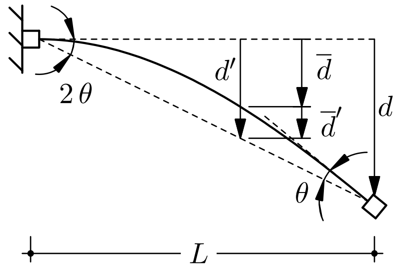


Figura 5.22: Parcela elástica, $\overline{d}'$, e de corpo rígido, d', do deslocamento $\overline{d}$.

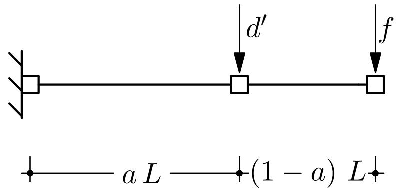


Figura 5.23: Discretização da consola em duas barras.

A definição (5.29) mostra claramente que d' representa o deslocamento medido em relação à corda; d' varia linearmente com a abcissa do ponto onde é medido. Pode verificar-se que o deslocamento total é dado por

$$\overline{d} = d' - \overline{d}',$$

em que $\overline{d}'$ representa a parcela elástica do deslocamento, ficando:

$$\overline{d} = a^2\,(3-a)\,\theta\,L. \tag{5.30}$$

Exercício 5.8. Recupere o resultado (5.30) usando a discretização indicada na figura 5.23.

5.8 Reacções e Assentamentos de Apoio

Seja r o número de reacções que se podem resolver nos aparelhos de apoio da estrutura em análise, as quais são identificadas por uma numeração sequencial, e organizadas no *vector das reacções de apoio*:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_r \end{Bmatrix}. \tag{5.31}$$

Um procedimento análogo ao adoptado para definir a condição de equilíbrio dos esforços (5.3) pode ser utilizado para exprimir matricialmente as reacções de apoio que equilibram as cargas $\mathbf{f}$ aplicadas à estrutura. A definição que se encontra tem a seguinte expressão geral,

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}_{0r}\,\mathbf{f}, \tag{5.32}$$

sendo fácil concluir que:

> **(D5.3)** A coluna i da matriz $\mathbf{B}_{0r}$, representa as reacções que se desenvolvem na estrutura para equilibrar a força generalizada $f_i = 1$, quando todas as restantes são nulas ($f_j = 0,\ j \neq i$).

Por exemplo, a definição (5.1) mostra que para a treliça representada na figura 5.1 e para a identificação das reacções de apoio dada na figura 5.4 se tem:

$$\mathbf{B}_{0r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix}. \tag{5.33}$$

Agrupando as definições de equilíbrio interno, (5.3), e de equilíbrio externo, (5.32), encontra-se a seguinte expressão geral das condições de equilíbrio da estrutura,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X} \\ \hdashline \mathbf{R} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_0 \\ \hdashline \mathbf{B}_{0r} \end{array} \right] \left\{ \mathbf{f} \right\}, \tag{5.34}$$

na qual se relacionam os três grupos de quantidades estáticas em jogo, nomeadamente as forças aplicadas, as reacções de apoio e os esforços independentes nos elemento estruturais.

Pode provar-se que, ao generalizar a condição de compatibilidade (5.23) para incluir o efeito dos *assentamentos* correspondentes às reacções de apoio (5.31),

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_r \end{Bmatrix}, \tag{5.35}$$

se continua a manifestar a relação de Dualidade entre a Estática e a Cinemática, na forma:

$$\mathbf{d} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B}_0^T & \mathbf{B}_{0r}^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \hdashline -\mathbf{r} \end{array} \right\}. \tag{5.36}$$

A condição de compatibilidade (5.36) pode ser escrita na seguinte forma equivalente:

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}_0^T\,\mathbf{u} - \mathbf{B}_{0r}^T\,\mathbf{r}. \tag{5.37}$$

Para o exemplo da treliça anteriormente considerado, o vector dos assentamentos de apoio tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix}.$$

Como se indica na figura 5.24, o assentamento r_i é considerado positivo no sentido atribuído à reacção R_i correspondente.

Exercício 5.9. Verifique, por considerações de ordem geométrica, a definição (5.36) com $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, usando o resultado (5.33).

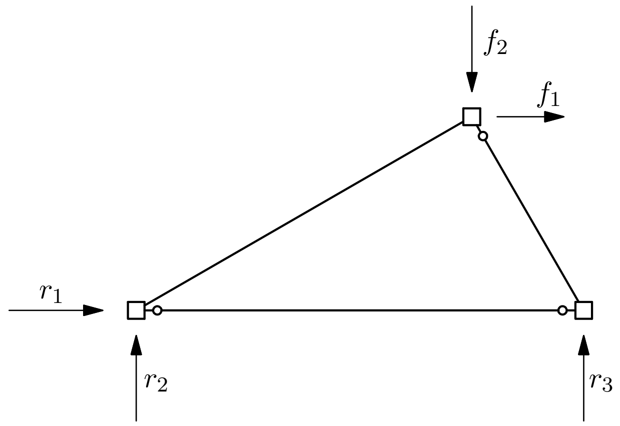


Figura 5.24: Deslocamentos correspondentes às reacções de apoio R_i.

5.9 Estruturas com Libertações Elásticas

Como já anteriormente se referiu, no modelo de estruturas reticuladas podem existir libertações elásticas, que são utilizadas para representar aparelhos realmente existentes na estrutura, ou para simular ligações elásticas entre as peças lineares, ou destas ao meio de fundação. Com as libertações exteriores, consegue-se simular os assentamentos sofridos por meios de fundação com comportamento elástico. Os aparelhos de libertação interna, menos frequentes, são utilizados para representar situações em que as ligações entre as barras não são rígidas.

No processo de análise estrutural, o tratamento dado aos aparelhos de libertação elástica é idêntico ao utilizado para os restantes elementos deformáveis, as peças lineares. Os aparelhos são identificados por uma numeração sequencial, sendo o comportamento de cada um deles caracterizado pela força da mola, X_i, e pela deformação que nela se instala, u_i. Estas quantidades são agora incorporadas nos vectores dos esforços e das deformações independentes, (5.5) e (5.9), respectivamente.

Como exemplo de aplicação, considere-se a estrutura representada na figura 5.25, obtida por modificação da inicialmente definida na figura 5.7. A mola linear 4 foi introduzida para simular a deformabilidade de fundação por acção de forças verticais, e a mola angular 5 para permitir uma rotação relativa entre as secções 2 e 3.

A condição de equilíbrio (5.8) toma agora a forma,

$$\left\{\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ N_2 \\ \hdashline M_3 \\ M_4 \\ \hdashline N_6 \\ \hdashline X_4 \\ \hdashline X_5 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -L & 1 & -a\,L \\ -2 & 1/L & -1-a \\ \hdashline -L & 1 & -a\,L \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 2\sqrt{2} & -\sqrt{2}/L & (1+a)\sqrt{2} \\ \hdashline 1 & -1/L & a \\ \hdashline -L & 1 & -a\,L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}\right\},$$

tendo-se admitido que a força na mola 4 é positiva quando for de tracção, e que o momento na mola 5 é positivo no sentido do do momento flector na secção 3.

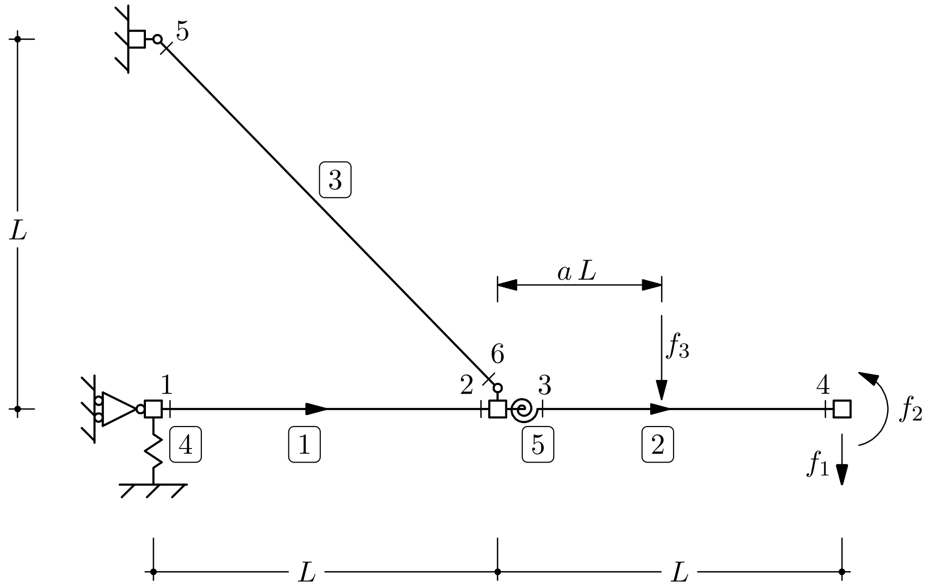


Figura 5.25: Viga com tirante e libertações elásticas.

O procedimento anteriormente descrito para o cálculo das deformações independentes continua a ser aplicável. As relações de elasticidade mantêm a expressão (5.11), em que para os aparelhos de libertação elástica, F_i, representa o coeficiente de flexibilidade da mola. A parcela correctiva, $\overline{u}_i$, é nula, podendo no entanto ser utilizada para simular uma deformação inicial na mola.

Exercício 5.10. Repita o exercício 5.4 considerando agora a estrutura representada na figura 5.25. Verifique se, quando se atribui aos elementos 4 e 5 os coeficientes de flexibilidade,

$$F_4 = \frac{L}{10\,E\,A}, \; F_5 = \frac{L}{60\,E\,I},$$

se obtém a seguinte definição para as deformações independentes:

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ e_2 \\ \hdashline \theta_3 \\ \theta_4 \\ \hdashline e_6 \\ \hdashline u_4 \\ \hdashline u_5 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -2\,\theta \\ -4\,\theta \\ -2\,e \\ \hdashline -2\,\theta \\ -\theta \\ \hdashline 2\,e \\ \hdashline e/10 \\ \hdashline -\theta/5 \end{array} \right\}.$$

Como a relação de Dualidade entre a Estática e a Cinemática se mantém, o procedimento anteriormente descrito para o cálculo dos deslocamentos não sofre qualquer alteração.

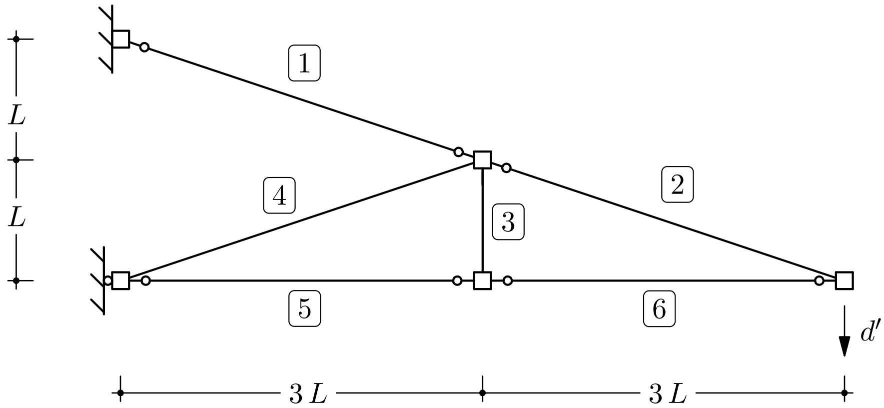


Figura 5.26: Asna sujeita a variação de temperatura.

Exercício 5.11. Repita o exercício 5.6, considerando a estrutura representada na figura 5.25. Utilizando os resultados do exercício anterior, verifique se agora se tem:

$$d' = 6,2\,\theta\,L + 2\,(1,05 + \sqrt{2})\,e.$$

5.10 Acção da Temperatura

Quando se analisou o comportamento da viga simplesmente apoiada, chamou-se a atenção para o facto das variações de temperatura produzirem deformações mas não provocarem o aparecimento de esforços. Este modo de comportamento é típico das estruturas estaticamente determinadas.

Se a variação de temperatura for a única solicitação a que uma estrutura isostática está sujeita ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$), os esforços independentes e as reacções de apoio são nulos,

$$\mathbf{X} = \mathbf{0}, \;\; \mathbf{R} = \mathbf{0}, \tag{5.38}$$

e as deformações independentes reduzem-se às provocadas pela variação de temperatura definidas na tabela 3.3:

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}. \tag{5.39}$$

Conhecidas as deformações independentes, os deslocamentos na estrutura devidos aos gradientes térmicos podem ser determinados usando o procedimento anteriormente descrito.

Como exemplo de aplicação, considere-se a asna representada na figura 5.26 e admita-se que os elementos 1 e 2 sofrem um aumento uniforme de temperatura de t graus centígrados.

Se α representar o coeficiente de dilatação térmica desses elementos, as deformações provocadas por esta solicitação têm a seguinte definição,

$$\mathbf{u} = \theta \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{5.40}$$

em que, de acordo com os resultados resumidos na tabela 3.3:

$$\theta = \sqrt{10}\,\alpha\, t\, L.$$

Para calcular o deslocamento d' sofrido pelo vértice da asna, basta aplicar aí a carga unitária correspondente, encontrando-se a seguinte distribuição de esforços:

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} +\sqrt{10} \\ +\sqrt{10} \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Substituindo este resultado na definição (5.25), com o campo de deformações (5.40), obtém-se finalmente:

$$d' = 2\sqrt{10}\,\theta. \tag{5.41}$$

Exercício 5.12. Admita que os elementos 1 e 2 da estrutura representada na figura 5.17 têm uma secção transversal de altura h e um coeficiente de dilatação térmica de $\alpha/°\mathrm{C}$. Se, em vez da solicitação aí indicada, se estabelecer um gradiente térmico de $t°\mathrm{C}$ entre a face superior e a face inferior desses elementos, verifique se a rotação d' toma o seguinte valor:

$$d' = \frac{\alpha\, t\; L}{h}.$$

5.11 Acção de Deformações Iniciais e do Pré-esforço

Uma das solicitações a que uma estrutura pode estar sujeita é a da acção de deformações iniciais nos elementos que a compõem. Estas deformações podem ter origem diversa, mas as mais frequentes são as que resultam de erros cometidos no fabrico dos elementos estruturais, ou mesmo na sua montagem durante a construção da estrutura.

Tal como a variação de temperatura, esta solicitação não provoca o aparecimento de tensões em estruturas estaticamente determinadas. As expressões (5.38) e (5.39) continuam a ser aplicáveis, utilizando-se agora o vector $\overline{\mathbf{u}}$ para quantificar as deformações iniciais da estrutura. No exemplo anteriormente considerado, é fácil verificar que o deslocamento do vértice da asna continua a ser definido pela expressão (5.41), se o parâmetro θ, presente na definição das deformações independentes (5.40), for agora utilizado para representar o erro no comprimento inicial dos elementos 1 e 2.

A acção do pré-esforço numa estrutura corresponde a uma deformação imposta, devendo por isso ser quantificada recorrendo ao vector das deformações iniciais, $\overline{\mathbf{u}}$. Na tabela 3.4 apresenta-se a definição dos coeficientes deste vector para diferentes leis de pré-esforço. As condições (5.38) permanecem válidas, devendo no entanto notar-se que, nas estruturas isostáticas, o pré-esforço provoca o aparecimento de tensões iniciais, apesar de serem nulos os esforços independentes.

Capítulo 6

Método das Forças

6.1 Introdução

O método das Forças foi concebido para realizar a análise de estruturas hiperestáticas recorrendo exclusivamente aos conhecimentos necessários para caracterizar o comportamento de estruturas estaticamente determinadas. Para alcançar este objectivo, no método das forças explora-se o artifício de substituir a estrutura a analisar por uma estrutura isostática equivalente, denominada *estrutura-base*. Esta equivalência é imposta simultaneamente a dois níveis, estático e cinemático, obrigando a estrutura-base a apresentar distribuições de esforços e de deformações idênticas às que se desenvolvem na estrutura hiperestática.

A viga encastrada-apoiada representada na figura 6.1 vai ser utilizada para introduzir, de uma maneira simplificada, os conceitos em que o método das forças se baseia. Trata-se de uma estrutura uma vez hiperestática exteriormente, isto é, a aplicação das equações da Estática só permite exprimir as reacções de apoio, representadas na figura 6.2, em função do momento aplicado, se se admitir que uma das reacções é conhecida.

Se, por exemplo, se atribuir um valor à reacção no apoio móvel,

$$R_4 = p, \tag{6.1}$$

encontram-se as seguintes expressões para as reacções de encastramento, de acordo com o

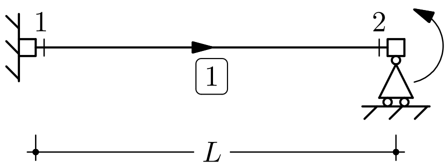


Figura 6.1: Consola apoiada.

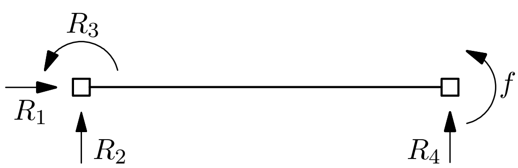


Figura 6.2: Diagrama de corpo livre.

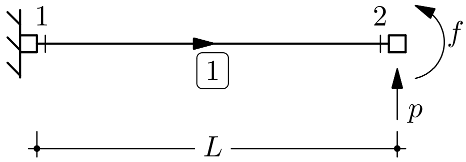


Figura 6.3: Estrutura-base sujeita ao carregamento dado e à força hiperestática.

diagrama de corpo livre representado na figura 6.2:

$$R_1 = (0)\, p + (0)\, f \tag{6.2a}$$

$$R_2 = (-1)\, p + (0)\, f \tag{6.2b}$$

$$R_3 = (-L)\, p + (-1)\, f \tag{6.2c}$$

As reacções (6.2) são as que se desenvolvem na consola que se obtém desligando o apoio móvel e aplicando aí a força indeterminada p, na direcção e sentido da reacção R_4, como se ilustra na figura 6.3. Como a consola é uma estrutura estaticamente determinada, os esforços em qualquer secção transversal da peça podem ser calculados recorrendo apenas às condições da Estática. Seleccionando para esforços independentes os momentos flectores nas secções extremas, por ser zero o esforço axial para o carregamento considerado, a condição de equilíbrio (5.3) toma o seguinte aspecto:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} L & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} p \\ \hdashline f \end{Bmatrix}, \tag{6.3}$$

onde se distinguem os efeitos da força hiperestática p e do carregamento f, ou, mais explicitamente:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \\ 0 \end{Bmatrix} p + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} f.$$

Este resultado e as ilustrações das figuras 6.1 e 6.2 mostram claramente que se transferiu para o carregamento de uma estrutura isostática , a estrutura-base, a indeterminação da estrutura hiperestática que lhe deu origem.

No caso geral de uma estrutura α vezes hiperestática, a expressão da condição de equilíbrio (6.3) toma a forma,

$$\mathbf{X} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B} & \mathbf{B}_0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \hdashline \mathbf{f} \end{Bmatrix}, \tag{6.4}$$

ou

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\,\mathbf{p} + \mathbf{B}_0\,\mathbf{f}, \tag{6.5}$$

em que,

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_\alpha, \end{Bmatrix}, \tag{6.6}$$

é o *vector das forças hiperestáticas*, ou indeterminadas. O vector dos esforços independentes, $\mathbf{X}$, e o das cargas, $\mathbf{f}$, continuam a ter as expressões (5.5) e (5.6), respectivamente.

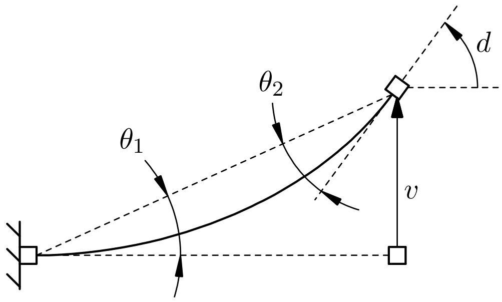


Figura 6.4: Deformada da consola.

A definição (6.4) pode ser obtida por generalização da condição de equilíbrio (5.3), que foi deduzida quando se realizou o estudo das estruturas isostáticas. Para o fazer, basta distinguir duas parcelas no vector do carregamento da estrutura-base, uma correspondente às forças hiperestáticas e a outra à solicitação dada. é fácil verificar que para o exemplo em análise se tem:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} L \\ 0, \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

As deformações independentes que se desenvolvem na estrutura-base podem ser calculadas substituindo nas relações de elasticidade (3.42),

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\,\mathbf{X} + \bar{\mathbf{u}}, \tag{6.8}$$

a definição (6.5) encontrada para os esforços independentes:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\,\mathbf{B}\,\mathbf{p} + \mathbf{F}\,\mathbf{B}_0\,\mathbf{f} + \bar{\mathbf{u}}. \tag{6.9}$$

Se se admitir que a viga encastrada-apoiada tem uma rigidez à flexão $E\,I$, constante, encontra-se a seguinte expressão para a definição (6.9),

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3\,E\,I} \\ \frac{L^2}{6\,E\,I} \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} \frac{L}{2\,E\,I} \\ \frac{L}{2\,E\,I} \end{bmatrix} f, \tag{6.10}$$

por não existirem cargas de vão ($\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$). De acordo com a definição (3.13), a matriz de flexibilidade do elemento tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{F} = \frac{L}{6\,E\,I} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

As deformações independentes estão assinaladas na deformada da consola, representada na figura 6.4. A deformada aí representada é admissível pois satisfaz as condições de fronteira e de continuidade das deformações ao longo da peça, assim como de ligação aos nós que a limitam.

Na figura 6.4 estão também identificados os deslocamentos correspondentes às forças aplicadas à consola. São eles o deslocamento v correspondente à força hiperestática p e a rotação d correspondente ao momento aplicado f. Estes deslocamentos são definidos pelas condições de compatibilidade, associadas às condições de equilíbrio (6.3), as quais tomam a seguinte expressão,

$$\begin{Bmatrix} v \\ \hdashline d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ \hdashline 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \tag{6.11}$$

Figura 6.5: Deformada da consola apoiada.

de acordo com a relação de Dualidade entre a Estática e a Cinemática (5.22).

No caso geral de uma estrutura α vezes hiperestática, a condição de compatibilidade associada à condição de equilíbrio (6.4) tem a seguinte definição,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \hdashline \mathbf{d} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}^T \\ \hdashline \mathbf{B}_0^T \end{array} \right] \mathbf{u}, \tag{6.12}$$

em que,

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_\alpha \end{array} \right\}, \tag{6.13}$$

é o *vector das descontinuidades* que agrupa os deslocamentos correspondentes às forças hiperestáticas $\mathbf{p}$. O vector das deformações independentes, $\mathbf{u}$, e o dos deslocamentos $\mathbf{d}$ correspondentes às cargas $\mathbf{f}$, continuam a ter as expressões (5.9) e (5.19), respectivamente.

Substituindo o resultado (6.10) em (6.11) encontra-se:

$$v = \left[\frac{L^3}{3\,E\,I} \right] p + \left[\frac{L^2}{2\,E\,I} \right] f \tag{6.14a}$$

$$d = \left[\frac{L^2}{2\,E\,I} \right] p + \left[\frac{L}{E\,I} \right] f. \tag{6.14b}$$

No caso geral, a definição para os deslocamentos correspondentes às forças hiperestáticas na estrutura-base, tem a seguinte expressão,

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}^T \, \mathbf{F} \, \mathbf{B} \, \mathbf{p} + \mathbf{B}^T \, \left(\mathbf{F} \, \mathbf{B}_0 \, \mathbf{f} + \overline{\mathbf{u}} \right), \tag{6.15}$$

como se pode verificar por substituição da definição (6.9) para as deformações independentes na condição de compatibilidade (6.12).

Definido o comportamento da estrutura-base, põe-se agora o problema de adaptar as condições de equilíbrio (6.5), de elasticidade (6.8) e de compatibilidade (6.12), de modo a torná-las também válidas para a consola apoiada.

No exemplo em consideração, para que a condição de equilíbrio interno (6.3) da consola represente também a da viga encastrada-apoiada, é necessário satisfazer a hipótese inicial (6.1). Por outras palavras, se à força hiperestática p se atribui a intensidade da reacção que se desenvolve no apoio móvel, R_4, a estrutura-base torna-se *estaticamente equivalente* à estrutura hiperestática que lhe deu origem.

O problema centra-se portanto na identificação do factor que determina a intensidade da reacção no apoio móvel da viga encastrada-apoiada. Para responder a esta questão basta comparar as deformadas da estrutura hiperestática e da estrutura-base, representadas nas figuras 6.5 e 6.4, respectivamente.

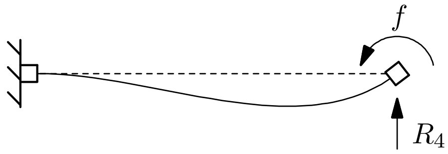


Figura 6.6: Deformada da consola para $p = R_4$.

O que distingue estas duas deformadas é o deslocamento v ser livre na estrutura-base, enquanto na viga encastrada-apoiada está impedido:

$$v = 0. \tag{6.16}$$

Esta condição mostra claramente que a função da reacção R_4 é a de permitir a estrutura absorver o momento aplicado, f, sem que o nó apoiado se desloque na direcção da ligação imposta pelo apoio móvel, como se ilustra na figura 6.6.

Portanto, para que as condições de compatibilidade (6.11) sejam também válidas para a viga encastrada-apoiada, isto é, para que a estrutura-base seja *cinematicamente equivalente* à estrutura hiperestática que lhe deu origem, basta impor que a força p seja tal que a condição (6.16) se verifique. Impondo esta condição no resultado (6.14a),

$$\left[\frac{L^3}{3\,E\,I}\right] p + \left[\frac{L^2}{2\,E\,I}\right] f = 0,$$

obtém-se uma equação que permite calcular o valor da força hiperestática,

$$p = -\frac{3\,f}{2\,L}, \tag{6.17}$$

ficando deste modo levantada a indeterminação estática da estrutura em análise.

Substituindo o resultado (6.17) em (6.1), (6.2) e em (6.3), encontram-se as seguintes expressões para as reacções de apoio e para os esforços independentes na viga encastrada--apoiada:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2\,L} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2\,L} \end{Bmatrix} f, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} f. \tag{6.18}$$

As deformações independentes e a rotação correspondente ao momento aplicado podem ser determinados substituindo o resultado (6.17) nas definições (6.10) e (6.14b), respectivamente:

$$\mathbf{u} = \frac{f\,L}{4\,E\,I} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad d = \frac{f\,L}{4\,E\,I}. \tag{6.19}$$

Exercício 6.1. Trace os diagramas de momentos flectores e de esforços transversos na viga encastrada-apoiada representada na figura 6.1 recorrendo aos resultados (6.18). Assinale na deformada representada na figura 6.5 as deformações independentes (6.19).

No caso geral, a *condição de equivalência cinemática* (6.16) entre a estrutura-base e a estrutura hiperestática que lhe deu origem, toma a forma,

$$\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}, \tag{6.20}$$

em que $\overline{\mathbf{v}}$ é o vector que define os deslocamentos correspondentes às forças indeterminadas, $\mathbf{p}$, na estrutura hiperestática.

Ao impor a condição (6.20) na definição (6.15) dos deslocamentos que se desenvolvem na estrutura-base

$$\mathbf{B}^T\,\mathbf{F}\,\mathbf{B}\,\mathbf{p} + \mathbf{B}^T\,(\mathbf{F}\,\mathbf{B}_0\,\mathbf{f} + \overline{\mathbf{u}}) = \overline{\mathbf{v}}, \tag{6.21}$$

obtém-se um sistema de tantas equações quanto o número de forças hiperestáticas.

Como as incógnitas do sistema resolvente (6.21) são forças generalizadas, internas ou externas, este método de análise de estruturas hiperestáticas é correntemente designado por *método das forças*. A designação alternativa, menos frequente, de *método da equação de compatibilidade*, resulta da equação resolvente ser estabelecida compatibilizando os deslocamentos correspondentes às forças hiperestáticas que se podem instalar na estrutura-base, com aqueles que realmente se verificam na estrutura hiperestática.

6.2 Equação do Método das Forças

No método de análise anteriormente descrito, uma estrutura hiperestática começa por ser transformada numa estrutura estaticamente determinada, libertando tantas ligações quanto o seu grau de hiperestatia. A estrutura-base que assim se obtém é, em seguida, tornada estaticamente equivalente à estrutura hiperestática aplicando-lhe, para além da solicitação real, $\mathbf{f}$, as forças generalizadas $\mathbf{p}$ correspondentes às libertações introduzidas.

Nas condições de equilíbrio (6.5) que daí resultam, podem distinguir-se duas parcelas,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_0, \tag{6.22}$$

em que uma define o efeito das forças hiperestáticas

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{B}\,\mathbf{p}, \tag{6.23}$$

e a outra o da solicitação dada:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}_0\,\mathbf{f}, \tag{6.24}$$

A parcela $\mathbf{X}_0$ é designada por *solução particular* da condição de equilíbrio, por representar uma das possíveis distribuições de esforços que equilibram o carregamento $\mathbf{f}$ na estrutura hiperestática. A parcela $\mathbf{X}_c$ é por sua vez designada por *solução complementar* por ter como função corrigir a solução particular, tendo em conta o efeito das forças hiperestáticas. é também corrente designar as quantidades definidas pelos vectores $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{X}_c$ por esforços isostáticos e hiperestáticos, respectivamente.

Como as propriedades geométricas e mecânicas da estrutura-base são conhecidas, pois são idênticas às da estrutura hiperestática que lhe deu origem, torna-se possível exprimir as deformações que nela se desenvolvem devido à acção de cada uma das parcelas do carregamento, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{f}$. Se, na definição (6.9), se introduzirem as identificações (6.23) e (6.24), encontra-se

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_0, \tag{6.25}$$

em que

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{F}\,\mathbf{X}_c,$$

ou

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{F}\,\mathbf{B}\,\mathbf{p}, \tag{6.26}$$

e

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{F}\,\mathbf{X}_0 + \overline{\mathbf{u}}, \tag{6.27}$$

Na definição (6.26) supôs-se que as forças hiperestáticas estão aplicadas em libertações adjacentes aos nós de discretização da estrutura, de modo a garantir que não intervêm na definição das deformações associadas às cargas de vão, $\overline{\mathbf{u}}$. é importante sublinhar que esta limitação decorre da opção de se ter estabelecido as relações de elasticidade para barras sem libertações no vão. A informação resumida nas tabelas apresentadas no Capítulo 3 só é válida para peças contínuas.

As definições (6.22) e (6.25) mostram claramente que a indeterminação estática da estrutura a analisar é transferida para o carregamento da estrutura-base. De facto, as forças $\mathbf{p}$ têm ponto de aplicação e direcção conhecidos, mas a sua intensidade é indeterminada.

A intensidade das forças hiperestáticas é calculada obrigando a estrutura-base a tornar--se cinematicamente equivalente à estrutura hiperestática.

Para o fazer, entre todos os deslocamentos definidos pelas condições de compatibilidade (6.12) interessa seleccionar os correspondentes às forças hiperestáticas, pois é conhecido o valor (6.20) que tomam na estrutura em análise.

Os deslocamentos correspondentes às forças hiperestáticas que se desenvolvem na estrutura-base podem também ser decompostos nas parcelas associadas as soluções complementar e particular,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_0, \tag{6.28}$$

bastando para tal introduzir na definição (6.15) as identificações (6.24) e (6.27), ficando

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{B}^T\,\mathbf{u}_0, \tag{6.29}$$

e

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{B}^T\,\mathbf{u}_c,$$

ou

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{F}_*\,\mathbf{p}, \tag{6.30}$$

em que

$$\mathbf{F}_* = \mathbf{B}^T\,\mathbf{F}\,\mathbf{B}, \tag{6.31}$$

representa a *matriz de flexibilidade* da estrutura-base. é uma matriz quadrada, com dimensão igual ao grau de hiperestatia da estrutura a analisar, e que se caracteriza por ser simétrica

$$\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_*^T, \tag{6.32}$$

e não-singular, isto é, existe a matriz inversa, $\mathbf{F}_*^T$, tal que:

$$\mathbf{F}_*^{-1}\,\mathbf{F}_* = \mathbf{I}. \tag{6.33}$$

As equações necessárias e suficientes para resolver a indeterminação estática da estrutura em análise, são obtidas impondo que a intensidade das forças hiperestáticas seja tal que essas forças sofram na estrutura-base os mesmos deslocamentos que apresentam na estrutura hiperestática, tal como a condição (6.20) o exige. Introduzindo as identificações (6.29) e (6.31) no sistema (6.21), encontra-se finalmente a seguinte expressão para a equação do método das forças:

$$\mathbf{F}_*\,\mathbf{p} + \mathbf{v}_0 = \overline{\mathbf{v}}. \tag{6.34}$$

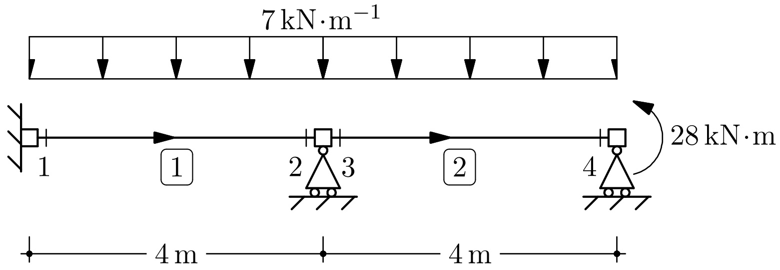


Figura 6.7: Viga contínua encastrada.

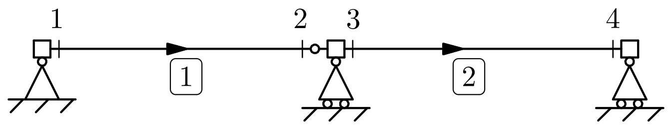


Figura 6.8: Estrutura-base da viga contínua encastrada.

Para ilustrar os passos da dedução anteriormente descrita e identificar claramente o significado de cada uma das parcelas associadas às soluções, complementar e particular nela intervenientes, considere-se a viga contínua encastrada representada na figura 6.7.

Os esforços independentes a considerar na análise desta estrutura são os momentos flectores nas secções extremas das peças que a constituem por ser nulo o esforço axial em qualquer delas:

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \hdashline M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}. \tag{6.35}$$

Esta estrutura é duas vezes hiperestática exteriormente e isostática interiormente. Para a tornar globalmente isostática, basta portanto introduzir duas libertações.

Uma estrutura-base possível é a representada na figura 6.8. Para obter esta estrutura articula-se o nó de encastramento (libertação exterior) e introduz-se uma rótula entre a secção 2 e o nó que lhe é adjacente (libertação interior). A viga contínua encastrada é assim substituída por duas vigas simplesmente apoiadas com um apoio comum.

Na figura 6.9 está representado o carregamento a que a estrutura-base deve ser sujeita de modo a poder ficar estaticamente equivalente à estrutura que lhe deu origem. O momento no nó de encastramento, p_1, e o momento flector na secção 2, p_2, são as forças hiperestáticas escolhidas:

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}. \tag{6.36}$$

Na figura 6.10 representa-se uma deformada cinematicamente admissível para a estrutura-base, pois satisfaz as condições de fronteira e de continuidade das deformações ao longo das peças, assim como as de ligação das peças aos nós que as limitam.

Como nessa figura se indica, as deformações correspondentes aos esforços independen-

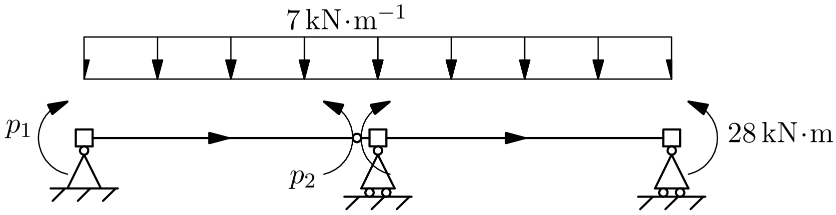


Figura 6.9: Acção do carregamento e das forças hiperestáticas.

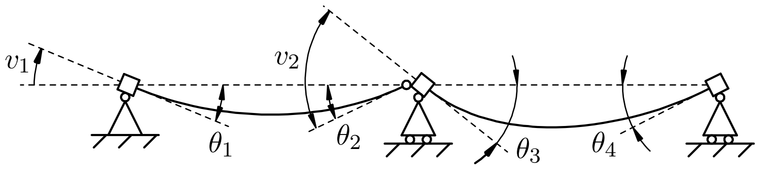


Figura 6.10: Deformada da estrutura-base.

tes (6.35) são as rotações das secções extremas medidas em relação à corda das peças:

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \hdashline \theta_3 \\ \theta_4 \end{array} \right\} . \tag{6.37}$$

Na figura 6.10 estão assinalados os deslocamentos correspondentes às forças hiperestáticas (6.36), nomeadamente a rotação do nó inicialmente encastrado, v_1, e a rotação relativa entre a secção 2 e o nó que lhe é adjacente, v_2:

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right\} . \tag{6.38}$$

Definidas as variáveis fundamentais do problema, interessa agora analisar o comportamento da estrutura-base separando e efeito do carregamento real do das forças hiperestáticas, de modo a esclarecer o significado das soluções complementar e particular anteriormente referidas.

Como se ilustra na figura 6.11, para definir a solução particular são aplicadas simultaneamente todas as solicitações conhecidas à estrutura-base, tal como anteriormente se fez ao analisar as estruturas isostáticas. Do diagrama de momentos flectores representado na mesma figura encontra-se a seguinte definição para os esforços independentes associados à solução particular (6.24):

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \hdashline M_3 \\ M_4 \end{array} \right\}_0 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 28 \end{array} \right\} . \tag{6.39}$$

No caso geral tem-se, pois, que:

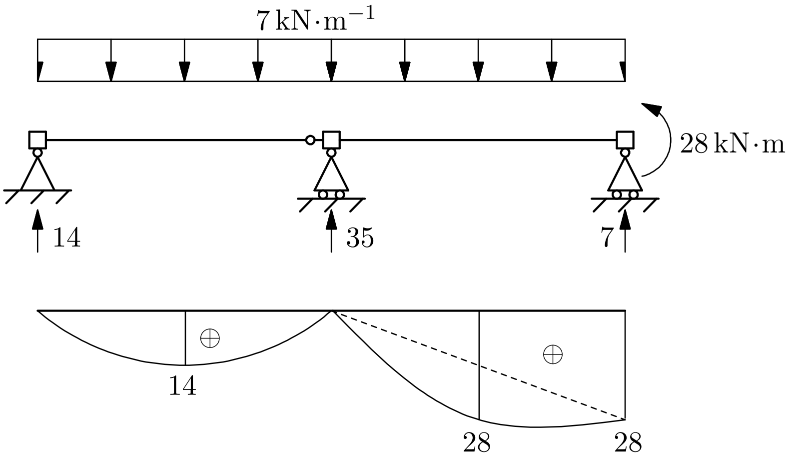


Figura 6.11: Efeito do carregamento.

> **(D6.1)** O vector $\mathbf{X}_0$ representa os esforços independentes que equilibram as forças $\mathbf{f}$ aplicadas simultaneamente à estrutura-base, quando são nulas todas as forças hiperestáticas ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$).

Conhecidos os esforços independentes, pode-se em seguida determinar as deformações correspondentes. Se se admitir que os elementos da viga têm uma rigidez à flexão EI, constante, encontra-se a partir da definição (3.13) e (3.43) a seguinte expressão para a matriz de flexibilidade das peças:

$$\mathbf{F} = \frac{4}{6\,EI} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]. \tag{6.40}$$

A parcela das deformações devidas às cargas de vão, a força uniformemente distribuída de intensidade $7\,\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$, pode ser determinada a partir da tabela 3.2, encontrando-se:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{7 \cdot 4^3}{24\,EI} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array} \right\}. \tag{6.41}$$

Substituindo os resultados (6.39) a (6.41) na definição (6.27), encontra-se a seguinte expressão para as deformações independentes associadas à solução particular:

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \hline \theta_3 \\ \theta_4 \end{array} \right\}_0 = \frac{56}{3\,EI} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 2 \\ 3 \end{array} \right\}. \tag{6.42}$$

O resultado (6.42) está representado na figura 6.12, concluindo-se facilmente que:

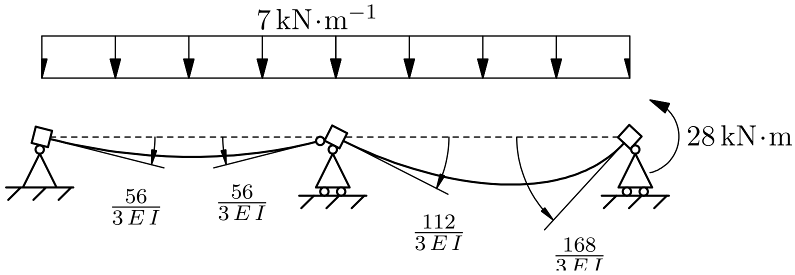


Figura 6.12: Deformada devida ao carregamento.

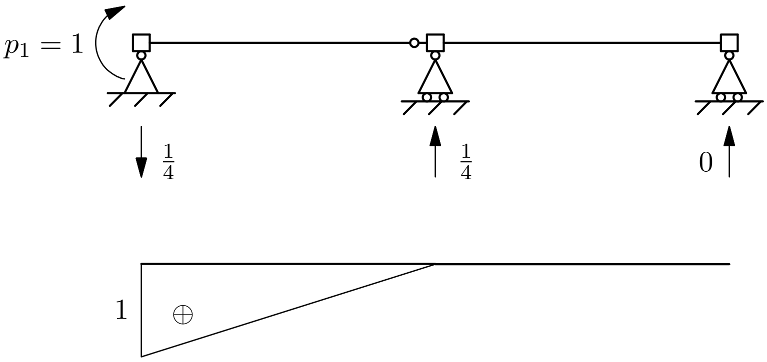


Figura 6.13: Efeito da força hiperestática p_1.

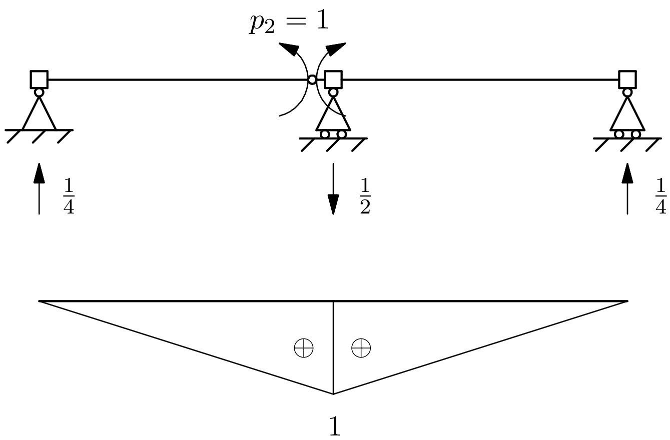


Figura 6.14: Efeito da força hiperestática p_2.

(D6.2) O vector $\mathbf{u}_0$ representa as deformações independentes provocadas na estrutura-base pela solicitação dada, $\mathbf{f}$, quando todas as forças hiperestáticas são nulas ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$).

O procedimento anteriormente descrito pode agora ser repetido para a solução complementar. Como a intensidade das forças hiperestáticas $\mathbf{p}$ não é ainda conhecida, cada uma destas forças é aplicada separadamente à estrutura-base, como se ilustra nas figuras 6.13 e 6.14. Com base nos diagramas de momentos flectores definidos nessas figuras encontra-se a seguinte expressão para a condição de equilíbrio (6.23) associada à solução

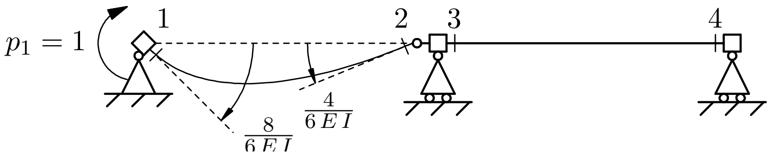


Figura 6.15: Deformada devida à força hiperestática p_1.

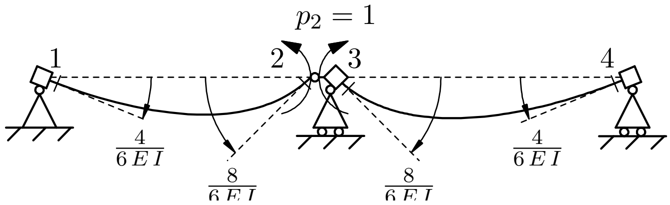


Figura 6.16: Deformada devida à força hiperestática p_2.

complementar:

$$\left\{\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \hdashline M_3 \\ M_4 \end{array}\right\}_c = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array}\right\}. \tag{6.43}$$

No caso geral tem-se, pois, que:

> **(D6.3)** A coluna i matriz de equilíbrio $\mathbf{B}$, representa os esforços independentes que se desenvolvem na estrutura-base para equilibrar a força hiperestática, $p_i = 1$, quando todas as restantes são nulas ($p_j = 0,\ j \neq i$), assim como todas as que definem o carregamento dado ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

As deformações independentes causadas pelas forças hiperestáticas estão representadas nas figuras 6.15 e 6.16. Foram calculadas substituindo na definição (6.26) a matriz de flexibilidade das barras (6.40) e a matriz de equilíbrio presente na definição (6.43):

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \hdashline \theta_3 \\ \theta_4 \end{array}\right\}_c = \frac{4}{6\,E\,I} \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hdashline 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array}\right\}. \tag{6.44}$$

A representação da definição (6.26) para o exemplo em consideração permite concluir que:

> **(D6.4)** A coluna i matriz de equilíbrio $(\mathbf{F}\,\mathbf{B})$, representa as deformações independentes provocadas na estrutura-base pela força hiperestática, $p_i = 1$, quando todas as restantes são nulas ($p_j = 0,\ j \neq i$), assim como as forças aplicadas ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

Conhecidas as deformações na estrutura-base causadas por cada um dos carregamentos, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{f}$, podem agora ser determinados os deslocamentos (6.38) correspondentes às forças

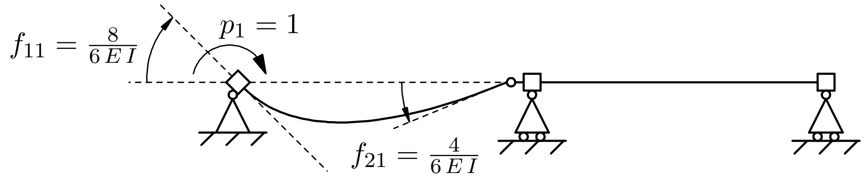


Figura 6.17: Descontinuidades devidas à força hiperestática p_1.

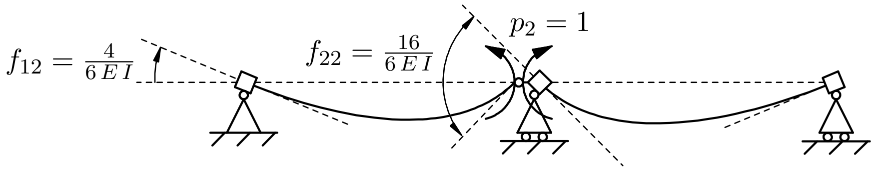


Figura 6.18: Descontinuidades devidas à força hiperestática p_2.

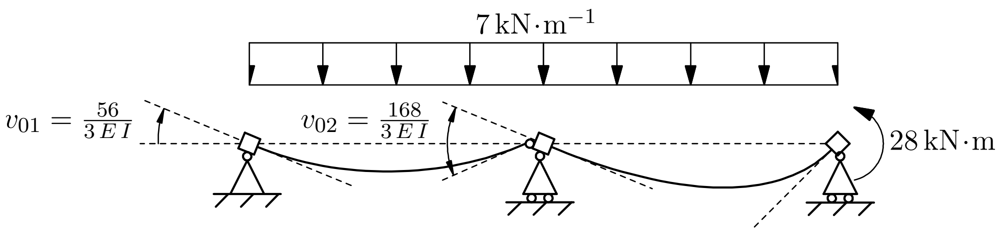


Figura 6.19: Descontinuidades devidas ao carregamento.

hiperestáticas. Atendendo à definição da matriz **B** presente na condição de equilíbrio (6.43) para a solução complementar e de acordo com a condição de compatibilidade (6.12), estes deslocamentos têm a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \hdashline \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}.$$

Substituindo nesta expressão as definições (6.42) e (6.44), encontradas para as deformações associadas às soluções particular e complementar, encontra-se finalmente:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}_0 = \frac{56}{3\,E\,I} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{6.45a}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}_c = \frac{4}{6\,E\,I} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}. \tag{6.45b}$$

Comparando estes resultados, ilustrados nas figuras 6.17 a 6.19, com as expressões gerais (6.29) e (6.2), conclui-se que:

> **(D6.5)** O coeficiente f_{ij} da matriz de flexibilidade F_* representa o deslocamento v_i na estrutura-base provocado pela força hiperestática $p_j = 1$, quando todas as restantes são nulas ($p_k = 0,\ k \neq j$), assim como a solicitação dada ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

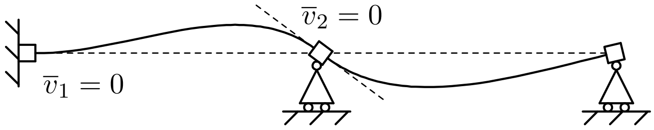


Figura 6.20: Imposição das condições de continuidade da estrutura hiperestática.

(D6.6) O coeficiente v_{i0} do vector das descontinuidades, $\mathbf{v}_0$, representa o deslocamento v_i na estrutura-base provocado pela solicitação dada, $\mathbf{f}$, quando todas as forças hiperestáticas são nulas ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$).

Os deslocamentos que se desenvolvem na estrutura-base devido à acção simultânea dos carregamentos $\mathbf{p}$ e $\mathbf{f}$, indicados na figura 6.10, são obtidos sobrepondo os resultados (6.45), de acordo com a definição (6.28):

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{4}{6\,E\,I} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} + \frac{56}{3\,E\,I} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}. \tag{6.46}$$

Para determinar o valor das forças hiperestáticas, basta agora impor que os deslocamentos (6.46) sejam iguais aos que se verificam na viga contínua encastrada. Na figura 6.20 está representada uma deformada que satisfaz as condições de compatibilidade, exterior e interior desta estrutura. O que distingue esta deformada da representada na figura 6.10 para a estrutura-base, é que as descontinuidades estão impedidas por imposição das condições de fronteira ($\overline{v}_1 = 0$) e de continuidade das ligações das barras aos nós ($\overline{v}_2 = 0$).

Para obter a equação do método das forças (6.34), basta impor estas condições nas definições (6.46):

$$\frac{4}{6\,E\,I} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} + \frac{56}{3\,E\,I} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{6.47}$$

Exercício 6.2. Com base nos resultados obtidos no exercício 5.2, verifique se a equação do método das forças para a estrutura representada na figura 6.21 tem a seguinte expressão, quando se adoptam as forças hiperestáticas indicadas na figura 6.22.

$$\frac{L}{E\,I} \begin{bmatrix} 1,1208\,L^2 & 1,0604\,L \\ 1,0604\,L & 1,4469 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} + \frac{L}{E\,I} \begin{Bmatrix} -0,2271\,L^2 \\ -0,1135\,L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Utilize as constantes elásticas definidas o quadro abaixo indicado, em que $A = 2500\,I/L^2$:

i	E_i $(\mathrm{kN \cdot m^2})$	I_i $(\mathrm{m^4})$	A_i $(\mathrm{m^2})$
1	E	I	A
2	E	I	A
3	E	—	$\frac{A}{100}$

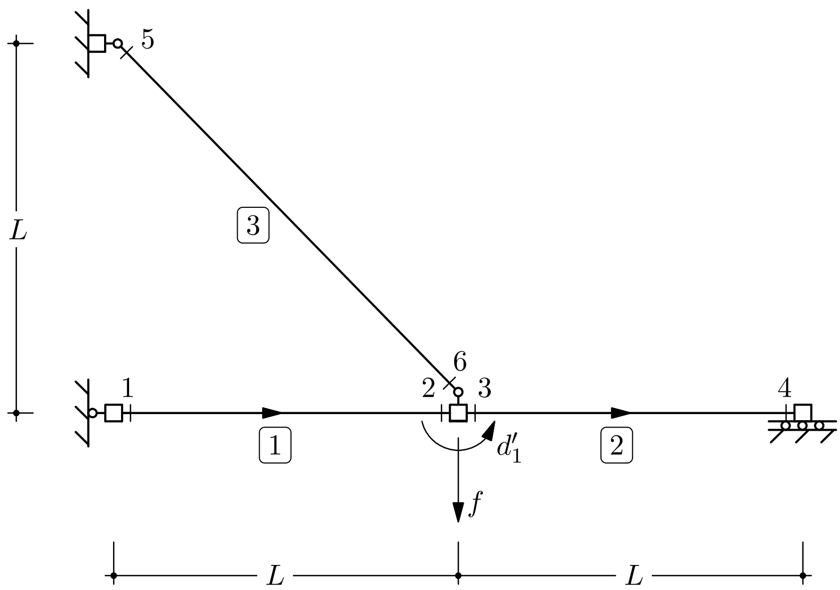


Figura 6.21: Viga com tirante hiperestática.

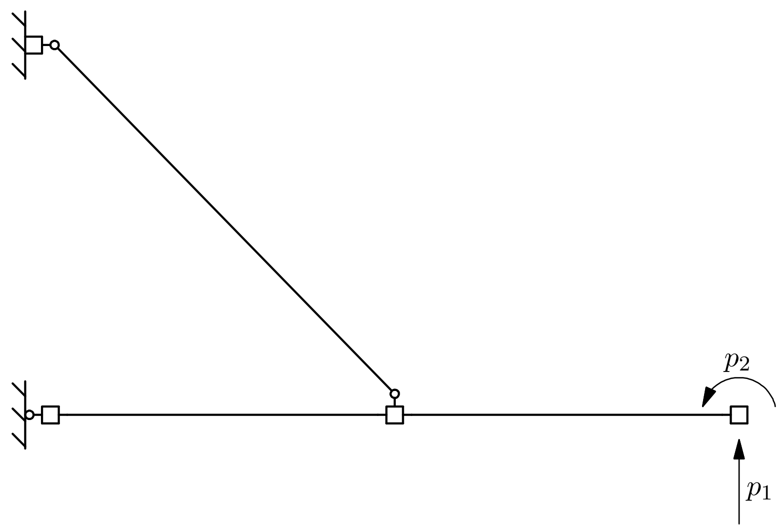


Figura 6.22: Estrutura-base.

6.3 Montagem da Equação do Método das Forças

As dimensões das matrizes e dos vectores que intervêm na montagem da equação do método das forças (6.34) estão definidas no quadro abaixo indicado. O parâmetro σ representa o número de esforços e de deformações considerados como independentes e α o grau de hiperestatia da estrutura.

Número de	$\mathbf{X}_0$	$\mathbf{F}$	$\bar{\mathbf{u}}$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{F}_*$
Linhas	σ	σ	σ	σ	σ	α	α
Colunas	1	σ	1	1	α	1	α

Quadro 5.1: Dimensões dos operadores.

Os resultados aí resumidos mostram que as matrizes e vectores de cálculo têm dimensões apreciáveis, mesmo no caso de estruturas muito simples, como aliás se pode verificar em qualquer um dos exercícios anteriormente propostos. Todavia, uma grande parte das operações realizadas é desnecessária, pois há uma percentagem elevada de coeficientes nulos nas matrizes e nos vectores nelas intervenientes. No problema da viga contínua encastrada, o vector dos esforços associados à solução particular (6.39) e a matriz de flexibilidade das barras (6.40), ilustram bem este facto.

Esta situação pode ser superada se a matriz de flexibilidade da estrutura-base, $\mathbf{F}_*$, e o vector das descontinuidades associado a solução particular, $\mathbf{v}_0$, forem calculados com base na contribuição de cada elemento estrutural, e não por substituição directa nas expressões (6.27), (6.29) e (6.31) das matrizes e vectores definidos para toda a estrutura.

Para individualizar a contribuição de cada elemento estrutural, começa-se por escrever as condições de equilíbrio (6.22) e (6.23) na forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_e \end{bmatrix} \mathbf{p} + \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{10} \\ \mathbf{X}_{20} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{e0} \end{Bmatrix} \tag{6.48}$$

de acordo com a organização adoptada para o vector dos esforços independentes. Para o elemento genérico i, tem-se pois:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{ci} + \mathbf{X}_{0i}, \;\; i = 1, 2, \ldots, e \tag{6.49}$$

com

$$\mathbf{X}_{ci} = \mathbf{B}_i \, \mathbf{p}, \;\; i = 1, 2, \ldots, e. \tag{6.50}$$

Exercício 6.3. Para o exemplo da viga contínua encastrada e com base nos resultados (6.39) e (6.43), verifique se se tem:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{01} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{X}_{02} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 28 \end{Bmatrix}.$$

Se na condição de elasticidade (6.8) para o elemento i,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i\,\mathbf{X}_i + \overline{\mathbf{u}}_i, \tag{6.51}$$

se introduzirem os resultados (6.49) e (6.50), encontra-se a seguinte decomposição para os resultados (6.25) a (6.27):

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{ci} + \mathbf{u}_{0i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, e \tag{6.52a}$$
$$\mathbf{u}_{ci} = \mathbf{F}_i\,\mathbf{X}_{ci}, \qquad i = 1, 2, \ldots, e \tag{6.52b}$$
$$\mathbf{u}_{0i} = \mathbf{F}_i\,\mathbf{X}_{0i} + \overline{\mathbf{u}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, e \tag{6.52c}$$

Exercício 6.4. Para o exemplo da viga contínua encastrada, verifique se se tem:

$$\mathbf{u}_{01} = \frac{56}{3\,E\,I}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\ \mathbf{u}_{02} = \frac{56}{3\,E\,I}\begin{Bmatrix}2\\3\end{Bmatrix},$$

usando directamente a definição (6.52c).

Se, na condição de compatibilidade (6.12), se introduzir a expressão usada (6.48) para a matriz de equilíbrio $\mathbf{B}$ e se se atender à definição (5.9) para o vector das deformações independentes, encontra-se:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_2^T & \ldots\mathbf{B}_e^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_1\\\mathbf{u}_2\\\vdots\\\mathbf{u}_e\end{Bmatrix},$$

ou

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{e}\mathbf{B}_i^T\,\mathbf{u}_i. \tag{6.53}$$

As expressões alternativas para as definições (6.31) e (6.29) da matriz de flexibilidade da estrutura-base e do vector das descontinuidades associadas à solução particular, são obtidas substituindo (6.50) e (6.52) em (6.53), encontrando-se,

$$\mathbf{F}_* = \sum_{i=1}^{e}\mathbf{F}_{*i}, \tag{6.54}$$

com

$$\mathbf{F}_{*i} = \mathbf{B}_i^T\,\mathbf{F}_i\,\mathbf{B}_i, \tag{6.55}$$

e

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^{e}\mathbf{v}_{0i}, \tag{6.56}$$

com

$$\mathbf{v}_{0i} = \mathbf{B}_i^T\,\mathbf{u}_{0i}. \tag{6.57}$$

Exercício 6.5. Com base nas definições (6.55) e (6.57) verifique se para a viga contínua encastrada se tem:

$$\mathbf{F}_{*1} = \frac{4}{6\,E\,I}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}_{*2} = \frac{4}{6\,E\,I}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{01} = \frac{4}{6\,E\,I}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_{02} = \begin{Bmatrix}0\\ 2\end{Bmatrix}.$$

Assinale estes resultados nas figuras 6.17 a 6.19.

As dimensões das matrizes e vectores intervenientes nas definições (6.55) e (6.57) estão resumidas no quadro 5.2, para os vários tipos de elementos estruturais. é manifesta a redução nas dimensões das matrizes e dos vectores com que agora se tem de operar.

	Elemento de Treliça	Elemento de Grelha	Elemento de Pórtico	
			Plano	Tridimensional
$\mathbf{B}_i$	$1 \times \alpha$	$3 \times \alpha$	$3 \times \alpha$	$6 \times \alpha$
$\mathbf{F}_i$	1×1	3×3	3×3	6×6
$\mathbf{u}_{i0}$	1×1	3×1	3×1	6×1

Quadro 5.2: Dimensões dos operadores.

O processo de montagem da equação do método das forças (6.34), pode ser resumido nos seguintes passos:

Montagem da Equação do Método das Forças

1. determine os graus de indeterminação estática interior, exterior e global da estrutura;
2. seleccione as α forças hiperestáticas $\mathbf{p}$ e identifique os deslocamentos correspondentes, $\overline{\mathbf{v}}$;
3. discretize a estrutura e oriente e numere sequencialmente os elementos que a compõem;
4. identifique, para cada elemento, os esforços e as deformações a considerar como independentes;
5. organize os vectores dos esforços (5.5) e das deformações independentes (5.9);
6. resuma num quadro as constantes geométricas e elásticas que determinam o comportamento de cada elemento estrutural;
7. defina, para cada elemento, a matriz de flexibilidade $\mathbf{F}_i$, e o vector das deformações devidas às cargas de vão, $\overline{\mathbf{u}}_i$, usando as definições apresentadas no Capítulo 3 e os resultados resumidos nas tabelas 3.2 a 3.4;
8. monte a matriz de equilíbrio associada às forças hiperestáticas, $\mathbf{B}$, aplicando sucessivamente a definição (D6.1);
9. determine os esforços associados à solução particular da condição de equilíbrio, $\mathbf{X}_0$, recorrendo à definição (D6.2);
10. identifique as parcelas da matriz $\mathbf{B}$ e do vector $\mathbf{X}_0$ associadas a cada um dos elementos estruturais, de acordo com a partição (6.48);
11. para cada elemento, determine:

(a) as deformações na estrutura-base associadas à solução particular, usando a definição (6.52c);

(b) a contribuição para as descontinuidades na estrutura-base associadas à solicitação dada, $\mathbf{f}$, recorrendo à definição (6.57);

(c) a contribuição para a matriz de flexibilidade da estrutura-base, aplicando a definição (6.55);

12. combine os resultados anteriormente obtidos de acordo com as definições (6.54) e (6.56) e estabeleça a equação do método das forças (6.34).

Exercício 6.6. Repita o exercício 6.2 usando o procedimento acima descrito.

6.4 Cálculo dos Esforços

Para levantar a indeterminação estática da estrutura em análise, basta resolver o sistema (6.34),

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}_*^{-1} \left(\overline{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_0 \right),$$

usando um método de solução de sistemas lineares simétricos. Em particular, para o problema da viga contínua encastrada, encontra-se para o sistema (6.47) a seguinte solução:

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -20 \end{Bmatrix}. \tag{6.58}$$

Depois de determinadas as forças hiperestáticas, o cálculo dos esforços independentes na estrutura em análise realiza-se da seguinte maneira:

Determinação dos Esforços Independentes

1. calcule a parcela dos esforços independentes associada à solução complementar aplicando a definição (6.50);
2. determine os esforços independentes combinando o resultado anterior com a parcela associada à solução particular, $\mathbf{X}_0$, de acordo com a definição (6.49).

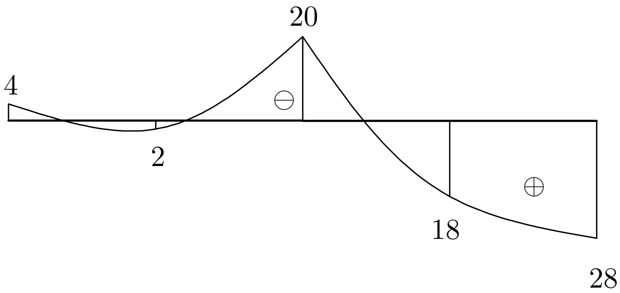
A aplicação deste procedimento ao exemplo da viga contínua encastrada, usando o resultado (6.58) e os definidos no exercício 6.3, produz as seguintes expressões:

$$\mathbf{X}_{c1} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -20 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{X}_{c2} = \begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

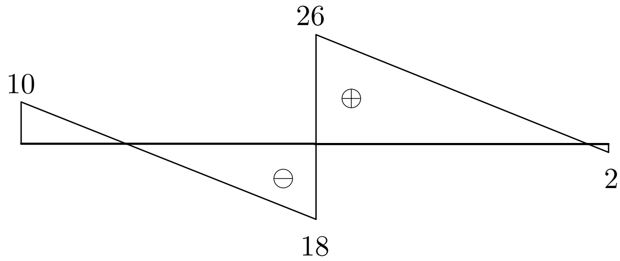
$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} -4 \\ -20 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} -20 \\ +28 \end{Bmatrix}.$$

Conhecidos os esforços independentes que se instalam na estrutura, os esforços em qualquer secção podem ser calculados usando as definições (3.3) apresentadas no Capítulo 3, as quais foram obtidas quando se caracterizou o comportamento dos elementos estruturais.

Um processo alternativo consiste em combinar directamente os diagramas de esforços que foram determinados ao equilibrar as forças hiperestáticas $\mathbf{p}$ e o carregamento $\mathbf{f}$, na



(a) Diagrama de momento flector.



(b) Diagrama de esforço transverso.

Figura 6.23: Diagramas de esforços na viga contínua encastrada.

estrutura-base. Se E_i representar o diagrama de esforços que equilibra a força hiperestática $p_i = 1$ e E_0 o que equilibra a solicitação $\mathbf{f}$, tem-se então:

$$E = \sum_{i=1}^{\alpha} E_i\, p_i + E_0. \tag{6.59}$$

Exercício 6.7. Verifique, utilizando o método da sobreposição de efeitos definido pela expressão (6.59), se os diagramas de momento flector e de esforço transverso na viga contínua encastrada são os representados nas figuras 6.23a e 6.23b, respectivamente. Baseie-se no resultado (6.58) e na informação contida nas figuras 6.10 a 6.12.

Exercício 6.8. Determine os diagramas de momento flector, esforço transverso e esforço axial na estrutura representada na figura 6.21, devidos ao carregamento aí indicado. Verifique se os esforços independentes são os seguintes:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1903\,L \\ -0,3909 \\ \hdashline 0,1903\,L \\ -0,2285\,L \\ \hdashline 0,5528 \end{bmatrix}.$$

6.5 Cálculo dos Deslocamentos

Conhecidos os esforços independentes numa estrutura hiperestática, a determinação dos deslocamentos que nela se desenvolvem realiza-se recorrendo a um procedimento análogo ao utilizado na análise de estruturas estaticamente determinadas.

Começa-se por calcular as deformações independentes, sugerindo-se para tal o seguinte procedimento:

Determinação das Deformações Independentes

1. calcule as deformações independentes devidas aos esforços hiperestáticos recorrendo às relações de elasticidade (6.52b);
2. sobreponha o resultado anteriormente obtido à parcela das deformações independentes associada à solução particular, $\mathbf{u}_0$, de acordo com a definição (6.52a).

Exercício 6.9. Aplique o procedimento acima descrito para calcular as deformações independentes que se desenvolvem na viga continua encastrada anteriormente analisada. Assinale os resultados obtidos,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{32}{3\,E\,I}\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{32}{3\,E\,I}\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix},$$

na deformada representada na figura 6.20.

Exercício 6.10. Verifique se, para o exemplo representado na figura 6.21 se tem:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{L^2}{E\,I}\begin{Bmatrix} 31{,}72 \cdot 10^{-3} \\ 63{,}44 \cdot 10^{-3} \\ -156{,}36 \cdot 10^{-6}\,L \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{L^2}{E\,I}\begin{Bmatrix} 25{,}35 \cdot 10^{-3} \\ -44{,}45 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

e

$$\mathbf{u}_3 = \frac{L^2}{E\,I}\begin{Bmatrix} 31{,}27 \cdot 10^{-3}\,L \end{Bmatrix}.$$

O processo mais simples para estabelecer as condições de compatibilidade que relacionam os deslocamentos que se pretende calcular, $\mathbf{d}'$, com as deformações independentes, é o que consiste em explorar a propriedade (P.5.3), resultante da relação de Dualidade entre a Estática e a Cinemática.

Se se pretender individualizar a contribuição de cada elemento da estrutura, a expressão (5.25) deve ser escrita na forma,

$$d'_i = \sum_{j=1}^{e} \mathbf{B}'^{T}_{ji}\,\mathbf{u}_j, \tag{6.60}$$

em que, de acordo com a definição (5.24), o vector $\mathbf{B}'_{ji}$, representa os esforços independentes no elemento j, $\mathbf{X}'_j$, que equilibram a força nodal $f'_i = 1$, correspondente ao deslocamento pretendido, d'_i. Interessa desde já chamar a atenção para o seguinte facto:

> **(P6.1)** A força generalizada f_i', correspondente ao deslocamento pretendido, $\mathbf{d}_i'$, pode ser equilibrada em qualquer estrutura-base, não necessariamente isostática, obtida a partir da estrutura em análise.

Esta propriedade, que também se aplica a forças hiperestáticas e carregamento e que adiante será provada, facilita a determinação dos deslocamentos, por permitir equilibrar as cargas correspondentes nas estruturas-base mais apropriadas, isto é, naquelas em que é mais simples a determinação dos esforços que as equilibram.

Como exemplo de aplicação, considere-se o problema de calcular a rotação d_1' do nó de convergência das três barras que formam a estrutura representada na figura 6.21. Se se equilibrar o momento unitário correspondente na estrutura-base representada na figura 6.22, encontra-se a seguinte definição para os esforços independentes,

$$\mathbf{B}_{11}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_{21}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \text{e} \ \mathbf{B}_{31}' = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{L} \end{bmatrix}, \tag{6.61}$$

de acordo com o resultado (5.28) obtido ao analisar o carregamento representado na figura 5.18.

Substituindo na expressão (6.60) o resultado (6.61) e a distribuição de deformações definidas no exercício 6.10, encontra-se,

$$d_1' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 31{,}72 \cdot 10^{-3} \\ 63{,}44 \cdot 10^{-3} \\ -156{,}36 \cdot 10^{-6}\, L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{L^2}{E\,I} \begin{Bmatrix} 25{,}35 \cdot 10^{-3} \\ -44{,}45 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{L} \end{bmatrix} \frac{L^2}{E\,I} \begin{Bmatrix} 31,27 \cdot 10^{-3}\, L \end{Bmatrix}$$

ou,

$$d_1' = 19,10 \cdot 10^{-3} \frac{L^2}{E\,I} \,\text{rad}. \tag{6.62}$$

Um processo alternativo é o que consiste em equilibrar o momento unitário f_1' na estrutura-base representada na figura 6.24, encontrando-se,

$$d_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 31{,}72 \cdot 10^{-3} \\ 63{,}44 \cdot 10^{-3} \\ -156{,}36 \cdot 10^{-6}\, L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \frac{L^2}{E\,I} \begin{Bmatrix} 25{,}35 \cdot 10^{-3} \\ -44{,}45 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \frac{L^2}{E\,I} \begin{Bmatrix} 31,27 \cdot 10^{-3}\, L \end{Bmatrix}$$

ou,

$$d_1' = 19,10 \cdot 10^{-3} \frac{L^2}{E\,I} \,\text{rad},$$

recuperando-se deste modo o resultado (6.62)

Exercício 6.11. Para o carregamento indicado na figura 6.21, verifique se se obtém o seguinte valor,

$$d = 44,45 \cdot 10^{-3} \frac{L^3}{E\,I} \,\text{m}$$

para o deslocamento correspondente à força f, quando se utiliza:

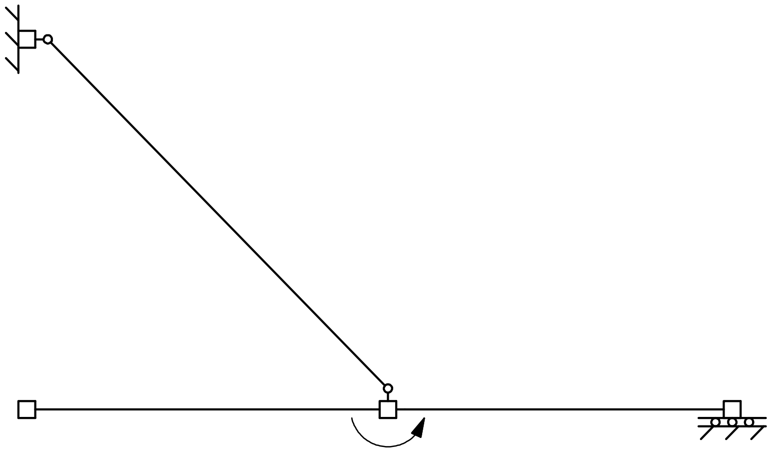


Figura 6.24: Estrutura-base alternativa.

(a) a distribuição de esforços que equilibra a força $f = 1$ na estrutura-base representada na figura 6.22;
(b) a distribuição de esforços na estrutura hiperestática encontrada no exercício 6.8, com $f = 1$.

Como se referiu durante o estudo das estruturas isostáticas, a expressão (6.60) só define o deslocamento total do centro de gravidade de secções que coincidam com os nós de discretização. Quando tal não sucede, o resultado produzido por essa expressão caracteriza apenas a parcela do deslocamento medido em relação à corda do elemento. O procedimento que então se seguiu, para evitar o cálculo da parcela do deslocamento da corda do elemento em relação à sua deformada, foi o de introduzir nós em todas as secções cujos deslocamentos se pretende determinar.

A aplicação directa deste procedimento a estruturas hiperestáticas dificulta desnecessariamente o processo de cálculo, por se poder traduzir num aumento significativo das dimensões das matrizes e vectores intervenientes na montagem (6.54) e (6.56) da equação do método das forças (6.34). De facto por cada nó adicional introduzido na discretização da estrutura, aumenta-se também em uma unidade o número de elementos estruturais, cada um dos quais está associado a matrizes e vectores com as dimensões indicadas no quadro 5.2.

A resolução da hiperestatia da estrutura, assim como a determinação dos esforços e das deformações independentes, deve pois ser realizada com o menor número possível de nós. Ultrapassada esta fase, a discretização da estrutura pode então ser alterada para passar a incluir as secções cujos deslocamentos se pretendem calcular, devendo-se para tal modificar o vector dos esforços e das deformações independentes das barras afectadas pela nova discretização. Para cada secção cujos deslocamentos se pretende calcular, este procedimento pode ser assim resumido:

Determinação dos Deslocamentos

1. introduza no modelo da estrutura o nó correspondente à secção em causa. Se esse nó não existir na discretização utilizada até aí, realize as seguintes adaptações:
   (a) defina os coeficientes dos vectores dos esforços independentes nas duas barras criadas pela introdução do novo nó;

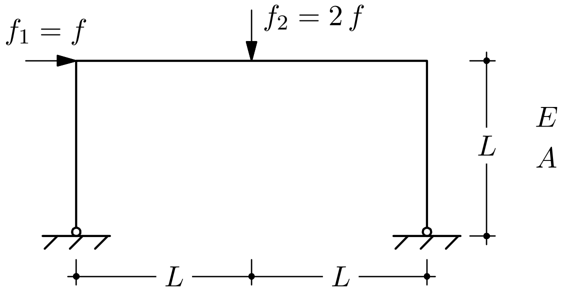


Figura 6.25: Pórtico biarticulado.

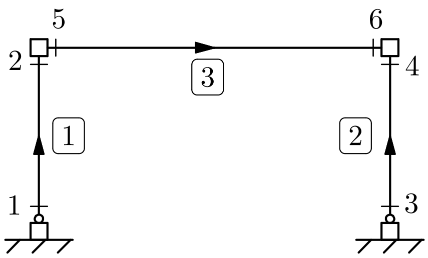


Figura 6.26: Discretização e orientação.

(b) para essas barras, defina a matriz de flexibilidade $\mathbf{F}_i$, e o vector das deformações devidas às solicitações de vão, $\overline{\mathbf{u}}_i$;

(c) calcule as deformações independentes nos novos elementos, recorrendo às relações de elasticidade (6.51);

2. defina a força f_i' correspondente ao deslocamento d_i' a calcular;
3. equilibre essa força na estrutura-base mais apropriada, e determine o vector dos esforços independentes $\mathbf{B}_i'$;
4. Calcule o deslocamento usando a definição (6.60).

Como exemplo de aplicação, considere-se o pórtico biarticulado representado na figura 6.25. Resolvendo a estrutura para a discretização indicada na figura 6.26, encontram-se as seguintes definições para os esforços independentes,

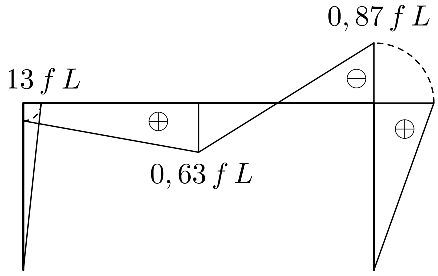
$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,13\,L \\ -0,50 \end{Bmatrix} f, \;\; \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,87\,L \\ -1,5 \end{Bmatrix} f, \;\; \mathbf{X}_3 = \begin{Bmatrix} 0{,}13\,L \\ -0{,}87\,L \\ -0{,}87 \end{Bmatrix} f, \tag{6.63}$$

e para as deformações correspondentes:

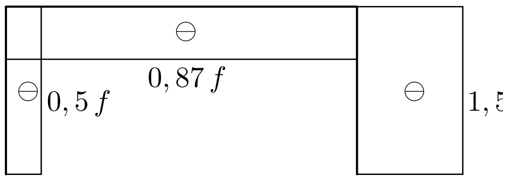
$$\mathbf{u}_1 = \frac{f\,L^2}{6\,E\,I}\begin{Bmatrix} 0,13 \\ 0,26\,L \\ -L/40 \end{Bmatrix}, \; \mathbf{u}_2 = \frac{f\,L^2}{6\,E\,I}\begin{Bmatrix} 0,87 \\ 1,74 \\ -3\,L/40 \end{Bmatrix}, \; \mathbf{u}_3 = \frac{f\,L^2}{6\,E\,I}\begin{Bmatrix} 1,78 \\ -0,22 \\ -1,74\,L/20 \end{Bmatrix}. \tag{6.64}$$

Nas figuras 6.27a e 6.27b estão representados os diagramas de momento flector e de esforço axial na estrutura.

Suponha-se agora que se pretende determinar a rotação d_1' sofrida pelo ponto aplicação da força f_2. A nova discretização a adoptar é a indicada na figura 6.28. Na figura 6.29 está representada a estrutura-base escolhida para equilibrar o momento $f_1' = 1$ correspondente à rotação pretendida, encontrando-se:



(a) Diagrama de momento flector.



(b) Diagrama de esforço axial.

Figura 6.27: Diagramas de esforços no pórtico biarticulado.

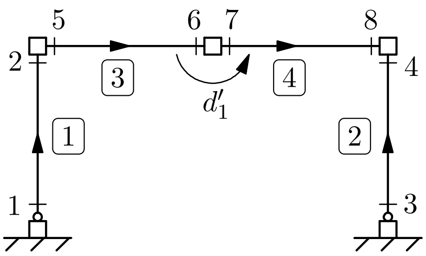


Figura 6.28: Introdução do nó correspondente à força f_2.

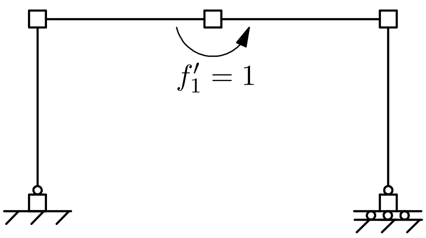


Figura 6.29: Força unitária correspondente à rotação d'_1.

$$\mathbf{B}'_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2L} \end{bmatrix}, \mathbf{B}'_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2L} \end{bmatrix}, \mathbf{B}'_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}'_{41} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.65}$$

De acordo com os diagramas representados nas figuras 6.27a e 6.27b, é a seguinte a definição dos esforços independentes nos dois novos elementos,

$$\mathbf{X}_3 = \begin{Bmatrix} 0{,}13\,L \\ 0{,}63\,L \\ -0{,}87 \end{Bmatrix} f, \quad \mathbf{X}_4 = \begin{Bmatrix} 0{,}63\,L \\ -0{,}87\,L \\ -0{,}87 \end{Bmatrix} f,$$

encontrando-se as seguintes expressões para as deformações correspondentes:

$$\mathbf{u}_3 = \frac{f\,L^2}{6\,E\,I} \begin{Bmatrix} 0,89 \\ 1,39 \\ -87\,L/20 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \frac{f\,L^2}{6\,E\,I} \begin{Bmatrix} 0,39 \\ -1,11 \\ -87\,L/20 \end{Bmatrix}. \tag{6.66}$$

Combinando os resultados (6.64) e (6.66) com (6.65), de acordo com a definição (6.60),encontra-se a seguinte expressão para a rotação pretendida:

$$d'_1 = \frac{19}{240} \frac{f\,L^2}{E\,I} \text{ rad.} \tag{6.67}$$

Exercício 6.12. Recupere o resultado (6.67) com base nos seguintes métodos alternativos:
(a) usando a discretização indicada na figura 6.28;
(b) usando a discretização indicada na figura 6.26 e corrigindo o resultado com a parcela da rotação relativa entre o elemento 3 deformado e a sua corda.

6.6 Reacções e Assentamentos de Apoio

Um procedimento análogo ao adoptado para definir a condição de equilíbrio dos esforços (6.4), pode ser utilizado para exprimir matricialmente as reacções de apoio em estruturas hiperestáticas. A definição que se encontra tem a seguinte expressão geral,

$$\mathbf{R} = \left[\ \mathbf{B}_r \ \vdots \ \mathbf{B}_{0r}\ \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \cdots \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix}, \tag{6.68}$$

ou

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}_r\,\mathbf{p} + \mathbf{R}_0, \tag{6.69}$$

com

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{B}_{0r}\,\mathbf{f}. \tag{6.70}$$

As definições (D6.3) e (D6.1) podem ser utilizadas para identificar os coeficientes da matriz $\mathbf{B}_r$, e do vector $\mathbf{R}_0$, bastando para tal aí ler reacções de apoio em vez de esforços independentes.

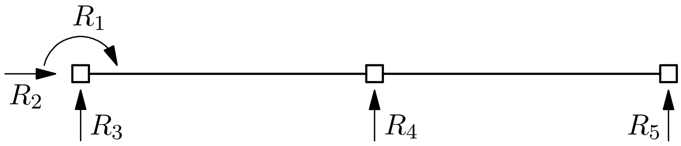


Figura 6.30: Reacções de apoio na viga contínua encastrada.

Para o exemplo de viga encastrada-apoiada representada na figura 6.1, as expressões (6.1) e (6.2) mostram que se tem:

$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -L \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Exercício 6.13. Verifique se para a viga contínua encastrada representada na figura 6.7 e para a identificação definida na figura 6.30, se tem:

$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \\ 35 \\ 7 \end{Bmatrix}. \tag{6.71}$$

Baseie-se nos resultados resumidos nas figuras 6.11 , 6.13 e 6.14.

Se se agrupar as definições de equilíbrio interno (6.4) e externo (6.68), encontra-se a seguinte expressão geral para as condições de equilíbrio da estrutura:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \hdashline \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B} & \mathbf{B}_0 \\ \hdashline \mathbf{B}_r & \mathbf{B}_{0r} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \hdashline \mathbf{f} \end{Bmatrix}. \tag{6.72}$$

De acordo com a relação de Dualidade entre a Estática e a Cinemática, é a seguinte a expressão das condições de compatibilidade da estrutura, associadas às condições de equilíbrio (6.72):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \hdashline \mathbf{d} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B}^T & \mathbf{B}_r^T \\ \hdashline \mathbf{B}_0^T & \mathbf{B}_{0r}^T \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \hdashline -\mathbf{r} \end{bmatrix}. \tag{6.73}$$

Esta definição generaliza a anteriormente utilizada, (6.12), para passar a incluir o efeito dos assentamentos, $\mathbf{r}$, correspondentes às reacções de apoio $\mathbf{R}$ que se possam verificar na estrutura.

Repetindo o procedimento anteriormente descrito para obter a equação do método das forças conclui-se que a expressão (6.34) se generaliza para,

$$\mathbf{F}_* \, \mathbf{p} + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{0r} = \overline{\mathbf{v}}, \tag{6.74}$$

em que o termo,

$$\mathbf{v}_{0r} = -\mathbf{B}_r^T \, \mathbf{r}, \tag{6.75}$$

quantifica agora o efeito dos assentamentos de apoio:

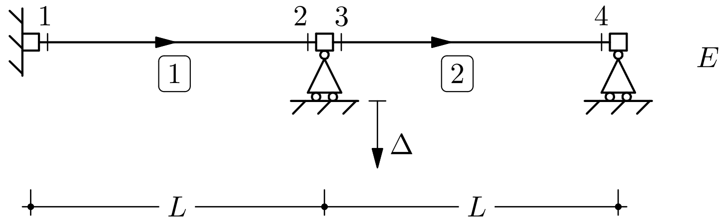


Figura 6.31: Assentamento de apoio na viga contínua encastrada.

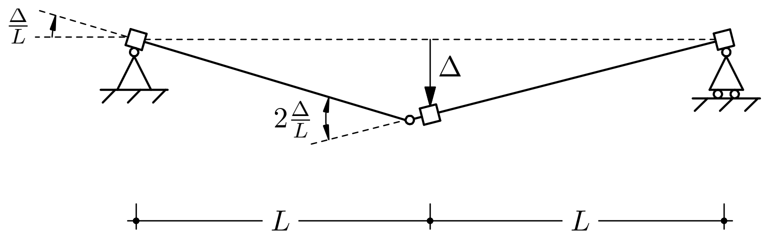


Figura 6.32: Assentamento de apoio na estrutura-base.

(D6.7) O i-ésimo coeficiente do vector $\mathbf{v}_{0r}$, representa a descontinuidade v_i na estrutura-base provocada pelos assentamentos de apoio $\mathbf{r}$, quando são nulas todas as restantes solicitações ($\mathbf{p} = \mathbf{0},\ \mathbf{f} = \mathbf{0}$).

Como exemplo de aplicação, considere-se o problema de determinar os esforços que se instalam na viga contínua encastrada, representada na figura 6.7, quando se impõe um assentamento Δ no apoio intermédio, como se indica na figura 6.31.

Como se ilustra na figura 6.32, quando numa estrutura-base isostática se introduz um assentamento de apoio, não se desenvolvem nela quaisquer esforços, pelo que se tem:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{0},\ \mathbf{R}_0 = \mathbf{0},\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{0},\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}. \tag{6.76}$$

Estes resultados podem ser verificados fazendo $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ em (6.24), (6.70), (6.27) e (6.29).

Da deformada representada na figura 6.32, conclui-se que os deslocamentos correspondentes às forças hiperestáticas, identificados na figura 6.10, têm a seguinte expressão:

$$\mathbf{v}_{0r} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Delta}{L} \\ -2\,\frac{\Delta}{L} \end{array} \right\}. \tag{6.77}$$

Este resultado pode ser recuperado recorrendo à definição geral (6.70). Para tal, basta utilizar a definição encontrada no exercício 6.13 para a matriz $\mathbf{B}_r$, e notar que o assentamento de apoio indicado na figura 6.31 tem a seguinte expressão,

$$\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta \\ 0 \end{array} \right\}, \tag{6.78}$$

de acordo com a numeração adoptada na figura 6.30 para as reacções correspondentes.

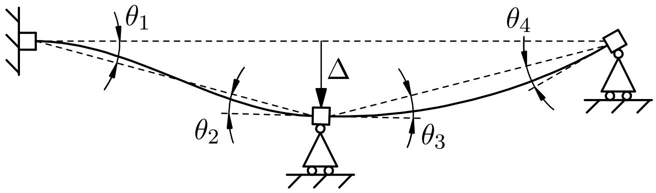


Figura 6.33: Deformada devida ao assentamento de apoio.

Exercício 6.14. Para o exemplo em consideração, verifique se as deformações independentes que se desenvolvem na estrutura, representadas na figura 6.33, têm a seguinte expressão:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} \end{Bmatrix} \Delta, \ \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{5}{14} \\ \frac{5}{28} \end{Bmatrix} \Delta. \tag{6.79}$$

O procedimento geral para o cálculo de deslocamentos, anteriormente descrito, continua a ser aplicável, devendo agora basear-se na generalização da definição (6.60) para passar a incluir o efeito de eventuais assentamentos nos apoios da estrutura:

$$d_i' = \sum_{j=1}^{e} \mathbf{B}_{ji}'^T \mathbf{u}_j - \mathbf{B}_{ri}'^T \mathbf{r}. \tag{6.80}$$

Nesta definição, o vector $\mathbf{B}_{ri}'$, representa as reacções $\mathbf{R}$ que se instalam nos apoios da estrutura-base para equilibrar a força generalizada $f_i' = 1$, correspondente ao deslocamento pretendido. Pode também verificar-se que a parcela,

$$d_{ri}' = -\mathbf{B}_{ri}'^T \mathbf{r} \tag{6.81}$$

representa o deslocamento r_i' que se instala na estrutura-base ao impor os deslocamentos nos apoios $\mathbf{r}$.

Se, para o exemplo da viga continua encastrada, se pretender determinar a rotação do apoio em que se verifica o assentamento Δ, tem-se,

$$\mathbf{B}_{11}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_{21}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{r1}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \tag{6.82}$$

como se pode verificar a partir da informação contida na figura 6.34. Substituindo estes resultados na expressão (6.80), juntamente com (6.78) e a definição dada no exercício 6.14 para o campo de deformações, obtém-se:

$$d_1' = \frac{3}{28} \Delta.$$

Exercício 6.15. Substituia os resultados (6.78) e (6.82) na definição (6.81) e verifique a interpretação dada a esta parcela usando a deformada representada na figura 6.32.

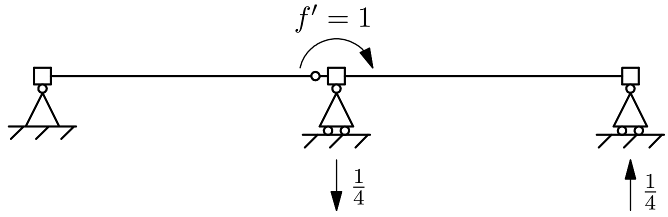


Figura 6.34: Momento unitário correspondente à rotação.

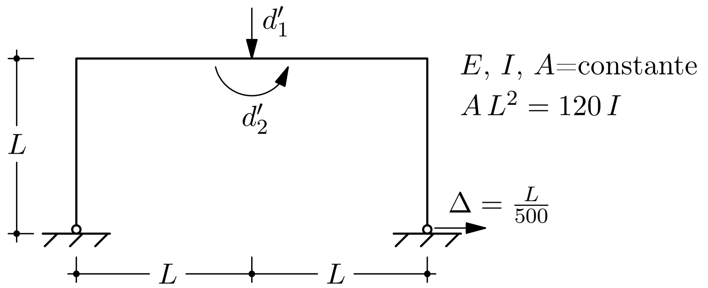


Figura 6.35: Assentamento de apoio em pórtico biarticulado.

Exercício 6.16. Para a estrutura representada na figura 6.35 e para a solicitação aí indicada, determine:

(a) as reacções de apoio;

(b) os diagramas de esforços;

(c) os deslocamentos d'_1 e d'_2.

As estruturas-base usadas anteriormente para analisar estruturas sujeitas a assentamentos de apoio obrigam à determinação da contribuição dessa acção para o vector das descontinuidades através do termo definido pela equação (6.75). Tal decorre da opção de nenhuma das forças hiperestáticas seleccionadas coincidir com a reacção associada ao movimento no apoio. Quando, pelo contrário, as reacções de apoio correspondentes aos assentamentos são escolhidas para forças hiperestáticas, o termo $\mathbf{v}_{0r}$ na equação resolvente é nulo, passando a listar-se no vector $\bar{\mathbf{v}}$ os deslocamentos correspondentes às reacções listadas no vector das forças hiperestáticas, $\mathbf{p}$. O vector $\mathbf{v}_0$ será nulo se a estrutura não estiver sujeita a qualquer outra acção.

Exercício 6.17. Repita o exercício anterior tomando como uma das forças hiperestáticas a reacção horizontal correspondente ao deslocamento delta no apoio.

Um outro processo de simular o efeito de assentamentos de apoio, menos prático mas talvez mais intuitivo, é o de libertar na estrutura as ligações correspondentes aos assentamentos e aplicar aí as reacções de apoio (ainda indeterminadas), reduzindo a hiperestatia da estrutura em tantos graus quanto o número de assentamentos. A estrutura é resolvida em função dessas reacções de apoio, as quais são posteriormente determinadas calculando os deslocamentos correspondentes e igualando-os aos assentamentos impostos.

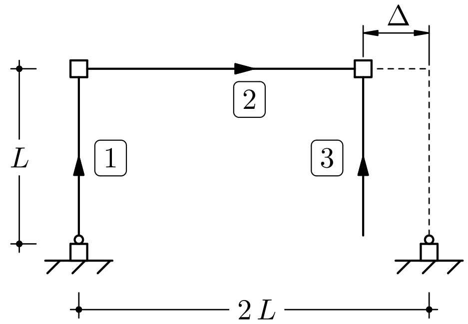


Figura 6.36: Erro no comprimento da viga.

6.7 Variações de Temperatura e Deformações Iniciais

Como anteriormente se referiu, em estruturas estaticamente determinadas as variações de temperatura produzem deformações nos elementos resistentes mas não provocam o aparecimento de esforços. Ao analisar pelo método das forças o efeito de uma variação de temperatura sobre uma estrutura hiperestática, as condições (5.38) e (5.39) mantêm-se portanto válidas se a estrutura-base for estaticamente determinada:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}, \;\; \mathbf{R}_0 = \mathbf{0}, \;\; \mathbf{u}_0 = \overline{\mathbf{u}}. \tag{6.83}$$

Estas condições são também válidas para o caso de a estrutura estar sujeita à acção do pré-esforço ou de nela existirem deformações iniciais com origem diversa. Tal como antes, todas estas solicitações são caracterizadas através do vector das deformações associadas às cargas de vão, $\overline{\mathbf{u}}$.

A análise do comportamento da estrutura processa-se de maneira análoga à anteriormente descrita, com a simplificação adicional da definição (6.57) para as descontinuidades na estrutura-base, se reduzir à forma:

$$\mathbf{v}_{i0} = \mathbf{B}_i^T \, \overline{\mathbf{u}}_i. \tag{6.84}$$

O cálculo dos esforços independentes e das reacções de apoio é também mais simples, em consequência de serem nulas as parcelas associadas à solução particular.

Como exemplo de aplicação, suponha-se que ao montar o pórtico representado na figura 6.35 se chega à conclusão que as secções extremas dos pilares não alinham com os aparelhos de apoio, já construídos, em consequência da viga ter sido fabricada com um comprimento inferior ao previsto, como se ilustra na figura 6.36. Imagine-se que, para restabelecer o alinhamento dos pilares, a viga é sujeita a um aumento uniforme de temperatura de

$$t = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\alpha\, L}$$

graus centígrados, em que α representa o coeficiente de dilatação térmica. Quando a viga recupera a temperatura inicial desenvolve-se na estrutura uma distribuição de momentos flectores idêntica à representada na figura 6.37, em que:

$$m = \frac{60}{161} \frac{\Delta\, E\, I}{L^2}.$$

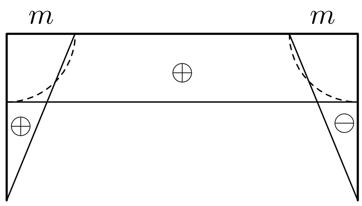


Figura 6.37: Diagrama de momentos flectores causados pelo erro de montagem.

Este resultado pode ser obtido, se se admitir que na estrutura se instala uma variação de temperatura associada ao seguinte campo de deformações:

$$\overline{\mathbf{u}}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \ \overline{\mathbf{u}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \overline{\mathbf{u}}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta \end{Bmatrix}. \tag{6.85}$$

Exercício 6.18. O processo de correcção acima descrito também pode ser simulado imaginando que se aplica uma força na base do pilar fazendo-a coincidir com o apoio e estabelecendo a ligação. Mostre que a solução obtida seria a mesma e justifique essa constatação.

Exercício 6.19. Suponha que a viga contínua encastrada representada na figura 6.7 tem uma secção transversal bi-simétrica de altura h e um coeficiente de dilatação térmica α/°C. Se, em vez da solicitação aí indicada, se estabelecer um gradiente térmico de t°C entre a face superior e a face inferior da viga, verifique se nela se instalam esforços independentes definidos por

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \end{Bmatrix} m, \ \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \end{Bmatrix} m, \tag{6.86}$$

em que:

$$m = \frac{6}{7} \frac{\alpha\, t\, E\, I}{h}.$$

Exercício 6.20. Suponha que, por um erro de montagem, o ângulo entre as barras 2 e 3 dó pórtico anteriormente considerado, deixava de ser de 90°. Verifique que, como se indica na figura 6.38, se esse erro for simulado como uma rotação inicial na secção 4,

$$\overline{\mathbf{u}}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \ \overline{\mathbf{u}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \overline{\mathbf{u}}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

se encontra a seguinte definição para os esforços independentes que se instalam na estrutura,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m \\ 0 \end{Bmatrix}, \ \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ m \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{X}_3 = \begin{Bmatrix} -m \\ -m \\ -\dfrac{m}{L} \end{Bmatrix}$$

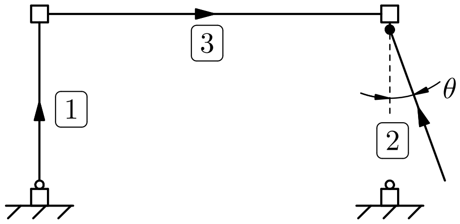


Figura 6.38: Erro no alinhamento do pilar.

$E,\ I,\ A$=constante, $t_0 = 2000\,\text{kN}$

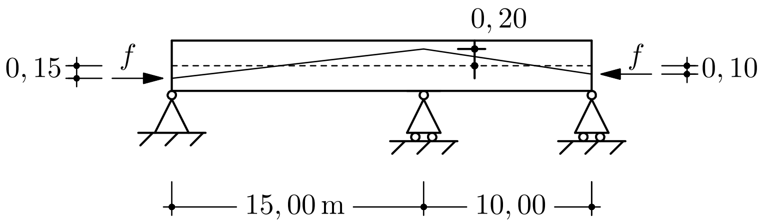


Figura 6.39: Esquema de viga pré-esforçada.

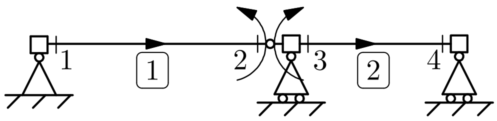


Figura 6.40: Estrutura base de viga contínua.

em que:

$$m = \frac{60}{161}\,\frac{\theta\,E\,I}{L}.$$

Como exemplo de aplicação da análise do efeito do pré-esforço, considere-se a viga contínua de dois tramos representada na figura 6.39. Por simplicidade, supõe-se que o cabo do pré-esforço tem o andamento linear aí indicado. Se, como se indica na figura 6.40, se escolher para força hiperestática o momento flector na secção vizinha ao apoio intermédio, obtém-se,

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

encontrando-se a seguinte definição para a matriz de flexibilidade:

$$\mathbf{F}_* = \frac{50}{6\,E\,I}\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

De acordo com os resultados resumidos na tabela 3.4, as deformações impostas na estrutura-base devidas ao pré-esforço têm a seguinte expressão:

$$\mathbf{u}_{01} = \frac{1}{E\,I}\begin{Bmatrix} -500 \\ 1250 \end{Bmatrix},\ \mathbf{u}_{02} = \frac{1}{E\,I}\begin{Bmatrix} 1000 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Estas deformações estão assinaladas na figura 6.41, de onde se pode concluir que:

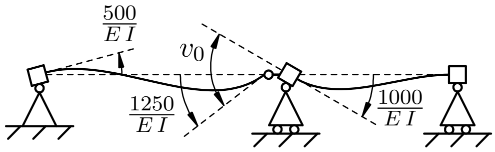


Figura 6.41: Deformada da estrutura-base devida ao pré-esforço.

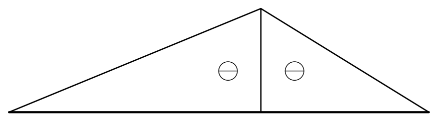


Figura 6.42: Momentos flectores devidos à força hiperestática p.

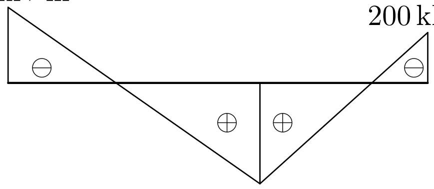


Figura 6.43: Momentos flectores na estrutura-base.

$$\mathbf{v}_0 = \frac{2250}{EI}\left\{1\right\}.$$

Substituindo os resultados acima obtidos na equação do método das forças (6.34), encontra-se o seguinte valor para o momento que anula a descontinuidade na estrutura--base:

$$p = -270\,\mathrm{kN\cdot m}.$$

Na figura 6.42 representa-se o diagrama de momento flector provocado pelo momento hiperestático. O diagrama de momentos flector na viga contínua, representado na figura 6.44, é obtido combinando esta distribuição com a dada na figura 6.43, na qual se definem os momentos flectores na estrutura-base devidos a acção do pré-esforço sobre as secções de betão.

6.8 Estruturas com Elementos Rígidos

Tem-se suposto até agora que a ligação entre as peças lineares se reduz ao ponto que define a intersecção dos seus eixos. Na realidade, esta ligação realiza-se por meio de nós com

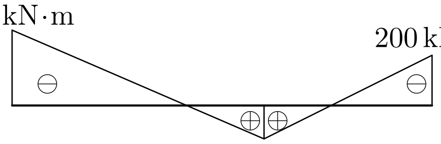
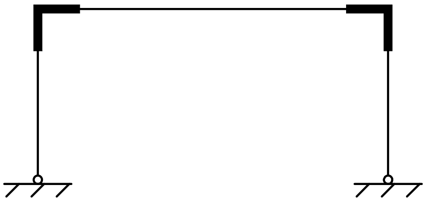
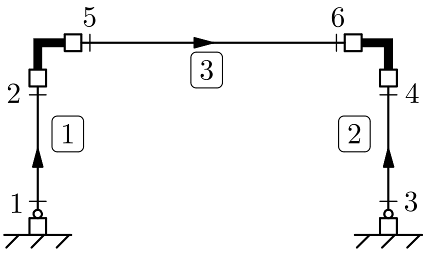


Figura 6.44: Momentos flectores na viga contínua pré-esforçada.



(a) Modelo.



(b) Discretização.

Figura 6.45: Barras com troços rígidos.

dimensão finita e com uma rigidez muito superior à das peças que limitam. O comprimento destes nós, que se podem considerar rígidos, podem ser da ordem de 5% do das peças lineares. Esta situação é simulada introduzindo no modelo da estrutura troços rígidos com comprimentos iguais aos das ligações que se pretende representar, como se ilustra na figura 6.45.

Se se limitarem os troços rígidos com nós de discretização, a análise deste tipo de estruturas pode ser processada usando o método anteriormente descrito; os troços rígidos, não necessariamente rectos, são tratados como elementos indeformáveis.

Exercício 6.21. Analise a estrutura representada na figura 6.25, supondo agora que as peças são limitadas por troços rígidos, como se ilustra na figura 6.45. Se se admitir que todas as peças são axialmente indeformáveis e que têm os seguintes comprimentos efectivos,

$$L_1 = L_2 = 0,95\,L,\;\; L_3 = 1,8\,L,$$

verifique ser a seguinte a definição que se encontra para os esforços independentes:

$$\mathbf{X}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0,081 \\ -0,5/L \end{array} \right\} f\,L, \quad \mathbf{X}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0,869 \\ -1,5/L \end{array} \right\} f\,L \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_3 = \left\{ \begin{array}{c} 0,136 \\ -0,764 \\ -0,914/L \end{array} \right\} f\,L.$$

O método tradicional de discretização das estruturas, com nós nos pontos de intersecção dos eixos das peças lineares, pode ainda ser utilizado na análise de estruturas com troços rígidos. Para o fazer, basta passar a medir os esforços e as deformações independentes nas secções extremas dos troços deformáveis. Para comprimento dos elementos com troços rígidos deve ser adoptado o comprimento efectivo do troço deformável.

Exercício 6.22. Repita o exercício anterior, usando agora a discretização indicada na figura 6.46.

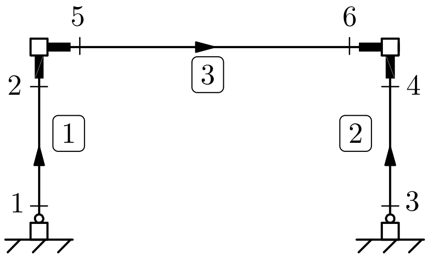


Figura 6.46: Discretização em peças deformáveis com troços rígidos.

Na análise de estruturas reticuladas, é corrente desprezar a deformação axial e a deformação por torção nas peças em que a deformação por flexão seja predominante. Na análise de pórticos rectangulares sujeitos a forças gravíticas, por exemplo, é frequente desprezar a deformação axial em todas as vigas que constituem a estrutura.

Para implementar esta hipótese, basta considerar como infinita a rigidez axial da secção transversal das peças cuja deformação axial se pretende desprezar: $E\,A_i = \infty$.

Como se pode verificar pela definição (3.13) da matriz de flexibilidade, esta condição obriga a deformação axial a ser nula, apesar de em tais peças se poder instalar um esforço axial diferente de zero. Um procedimento equivalente a este, mas que se traduz na redução das dimensões das matrizes e vectores intervenientes na análise da estrutura, é o que consiste em deixar de incluir o esforço axial e a deformação correspondente, na definição dos vectores dos esforços e das deformações independentes das peças axialmente indeformáveis. Depois de resolvida a indeterminação estática da estrutura, o esforço axial nas peças axialmente indeformáveis é calculado através das condições de equilíbrio da estrutura.

Considerações análogas às anteriormente feitas são aplicáveis no caso de se pretender desprezar a deformação por torção. De facto, para anular esta componente de deformação, basta considerar ser infinito o factor de rigidez à torçãodas peças em questão, como se pode verificar pela definição (3.22): $G\,J_i = \infty$.

Exercício 6.23. Admita que é desprezável a deformação axial em todas peças que constituem o pórtico representado na figura 6.25. Verifique se os esforços e as deformações independentes passam a ter os seguintes valores:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,125 \\ -0,5/L \end{Bmatrix} f\,L, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,875 \\ -1,5/L \end{Bmatrix} f\,L, \qquad \mathbf{X}_3 = \begin{Bmatrix} 0,125 \\ -0,875 \\ -0,875/L \end{Bmatrix} f\,L,$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{6}\frac{f\,L^2}{E\,I}\begin{Bmatrix} 0,125 \\ 0,250 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{6}\frac{f\,L^2}{E\,I}\begin{Bmatrix} 0,875 \\ 1,75 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{6}\frac{f\,L^2}{E\,I}\begin{Bmatrix} 1,75 \\ -0,25 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Exercício 6.24. Com base nos resultados do exercício anterior, verifique se a rotação (6.67) passa a tomar o seguinte valor:

$$d_1' = \frac{1}{12}\frac{f\,L^2}{E\,I}\,\text{rad}.$$

Outra situação que interessa considerar é a das peças rígidas, isto é, peças em que todas as componentes de deformação são nulas ou desprezáveis. Para representar esta situação, basta igualar a zero todos os coeficientes do vector das deformações independentes,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

ou, o que é equivalente, tornar nulos todos os coeficientes da matriz de flexibilidade das peças nessas condições:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

As definições (6.52c) e (6.55) mostram que estas peças não contribuem para a montagem da equação do método das forças, não intervindo também no cálculo de deslocamentos (6.80).

Exercício 6.25. Verifique se os esforços e as deformações independentes encontrados no exercício 6.23 passam a ter os seguintes valores,

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5/L \end{Bmatrix} f\,L, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -1,5/L \end{Bmatrix} f\,L, \qquad \mathbf{X}_3 = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -0,5/L \end{Bmatrix} f\,L,$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{6}\,\frac{f\,L^2}{E\,I} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 1,0 \\ -L/40 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{6}\,\frac{f\,L^2}{E\,I} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 1,0 \\ -3\,L/40 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

quando se admite que é rígida a viga do pórtico representado na figura 6.25.

Esta hipótese é frequentemente utilizada na análise de pórticos rectangulares sujeitos a forças horizontais. As deformações nas vigas, incluindo as de flexão, são tão pequenas que estas peças podem ser consideradas como rígidas. O mesmo sucede nas estruturas de edifícios. A grande rigidez dos pisos no seu plano, justifica a hipótese de só os pilares serem considerados como deformáveis, quando a estrutura é sujeita a solicitações horizontais.

Exercício 6.26. Determine os esforços independentes que se instalam nos pilares da estrutura representada na figura 6.47 quando se supõe que a laje é rígida. Determine ainda as 6 componentes do deslocamento sofrido pelo centro de gravidade da laje. Admita que os pilares têm características geométricas e mecânicas idênticas e que se ligam ao meio de fundação por articulações esféricas.

Os esforços associados a modos deformáveis (elásticos) são sempre determinados, mas os esforços associados a modos indeformáveis podem permanecer indeterminados após a análise da estrutura. Tal sucede quando o arranjo dos modos indeformáveis é tal que invalida a hipótese de serem linearmente independentes as descontinuidades $\mathbf{v}$ correspondentes às forças hiperestáticas $\mathbf{p}$, independentemente do sistema-base escolhido.

Essa situação é exposta quando a equação resolvente do método das forças produz um sistema de equações (6.34) indeterminado mas possível, o qual, após condensação, pode

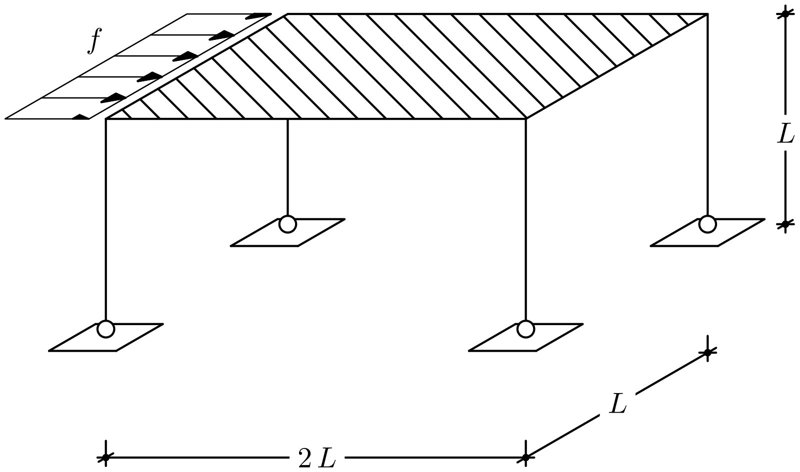


Figura 6.47: Pórtico com piso rígido sujeito a cargas laterais.

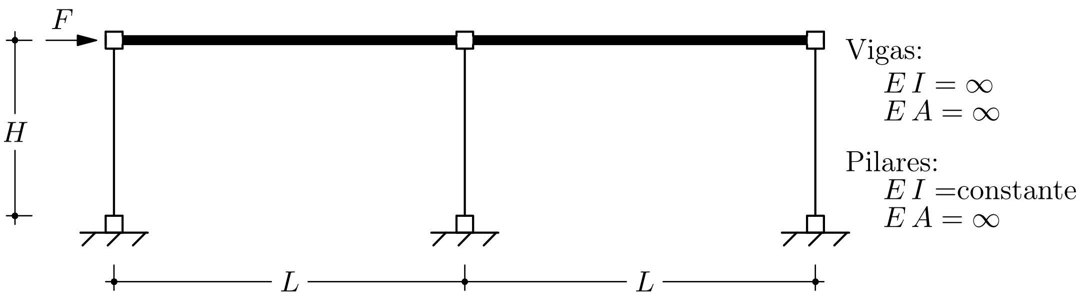


Figura 6.48: Pórtico com viga rígida sujeito a carga lateral.

ser sempre reduzido à forma seguinte, em que $\mathbf{I}$ é a matriz de identidade:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Este sistema mostra que α_1 forças hiperestáticas $\mathbf{p}_1$ dependem das restantes $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$ forças hiperestáticas $\mathbf{p}_2$, cujo valor permanece indeterminado. As deformações e os deslocamentos são determinados em todas as peças da estrutura, mas os esforços associados a modos indeformáveis podem permanecer indeterminados, o mesmo sucedendo às reacções de apoio que deles dependam através das condições de equilíbrio da estrutura.

Exercício 6.27. Os pilares do pórtico plano com piso rígido representado na figura 6.48 são axialmente indeformáveis e têm a mesma rigidez à flexão, $E\,I$ $(\mathrm{kN \cdot m^2})$. Resolva a estrutura para a carga indicada tomando como uma das forças hiperestáticas a reacção vertical num apoio. Determine os diagramas de esforços e a deformada da estrutura.

6.9 Trabalho e Energia

Chamou-se anteriormente a atenção para o facto da equação (6.72) representar estritamente uma condição de equilíbrio entre as forças hiperestáticas e as forças dadas, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{f}$, e os esforços independentes e as reacções que provocam na estrutura, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{R}$. Por outro lado, a equação (6.73) define estritamente uma condição de compatibilidade entres os deslocamentos correspondentes às forças hiperestáticas e às forças dadas, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{d}$, e as deformações e deslocamentos correspondentes aos esforços independentes e às reacções, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{r}$. Entre os pares de variáveis duais $(\mathbf{X}, \mathbf{u})$, $(\mathbf{R}, \mathbf{r})$, $(\mathbf{p}, \mathbf{v})$ e $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$ não existe necessariamente uma relação de causa-efeito, pois as equações de equilíbrio (6.72) e de compatibilidade (6.73) são independentes das relações constitutivas dos elementos estruturais, definidas pela equação (6.8) no presente contexto.

O produto interno das equações de equilíbrio (6.72) e de compatibilidade (6.73) produz o seguinte resultado, em que são introduzidos os índices E e C para identificar os termos necessariamente relacionados por condições de equilíbrio e de compatibilidade, respectivamente:

$$\mathbf{X}_E^T\,\mathbf{u}_C = \mathbf{p}_E^T\,\mathbf{v}_C + \mathbf{f}_E^T\,\mathbf{d}_C + \mathbf{R}_E^T\,\mathbf{r}_C \tag{6.87}$$

Esta equação traduz o *princípio dos trabalhos virtuais*, ou, em rigor, o teorema dos trabalhos virtuais, pois essa relação foi deduzida e não postulada. Estabelece simplesmente que são idênticos os trabalhos das forças interiores e das forças interiores realizados por um (qualquer) sistema de esforços e forças equilibrado e um (qualquer) sistema de deformações e deslocamentos compatíveis correspondente. Se o sistema compatível for o que realmente existe na estrutura, o sistema equilibrado pode ser qualquer, dito virtual, e a equação (6.87) representa o *teorema das forças virtuais*. Pode ser assim interpretado o procedimento aqui descrito para determinar deslocamentos em estruturas hiperestáticas, ou isostáticas, como se fez no capítulo anterior. Se, pelo contrário, o sistema equilibrado for o que realmente existe na estrutura, o sistema compatível pode ser virtual e a equação (6.87) representa o *teorema dos deslocamentos virtuais*, podendo ser utilizada para calcular esforços ou reacções.

Como a matriz de flexibilidade da estrutura, definida pela equação (6.31), é positiva definida, a solução da equação do método das forças, definida pelas expressões alternativas (6.21) e (6.34), pode ser recuperada resolvendo o seguinte problema de minimização:

$$\text{Min } \Pi = \frac{1}{2}\,\mathbf{p}^T\,\mathbf{F}_*\,\mathbf{p} + \mathbf{p}^T\,\left(\mathbf{v}_0 - \overline{\mathbf{v}}\right). \tag{6.88}$$

Na realidade, é na solução deste problema que se baseia a estratégia de grande parte dos métodos iterativos para a solução de sistemas lineares, os quais são frequentemente adoptados na solução de sistemas com grandes dimensões. Se se utilizarem as definições dadas para a matriz de flexibilidade da estrutura e para o vector das descontinuidades devidas ao carregamento, conclui-se que o funcional presente no problema (6.88) define a *energia potencial complementar* da estrutura,

$$\Pi = E - \overline{W}$$

em que E e $\overline{W}$ representam, respectivamente, a energia de deformação da estrutura e o trabalho realizado pelos deslocamentos impostos,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\,\mathbf{X}^T\,(\mathbf{u} + \overline{\mathbf{u}}) \\ \overline{W} &= \mathbf{R}^T\,\mathbf{r} + \mathbf{p}^T\,\overline{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

designadamente os assentamentos de apoio, $\mathbf{r}$, e as descontinuidades na estrutura hiperestática, $\overline{\mathbf{v}}$. O trabalho realizado pelas forças impostas, $\mathbf{f}$, tem a seguinte expressão,

$$W = \mathbf{f}^T\,\mathbf{d} \tag{6.89}$$

pelo que a expressão (6.87) para o teorema dos trabalhos virtuais pode ser escrita na seguinte forma:

$$E = W + \overline{W}.$$

Quando o coeficiente f_i do vector de forças, $\mathbf{f}$, representa uma força generalizada, por exemplo uma carga distribuída ou uma qualquer combinação de forças, a definição (6.89) mostra que o deslocamento generalizado correspondente, d_i, definido pela equação de compatibilidade (6.73), representa o trabalho realizado pela força generalizada unitária, $f_i = 1$.

6.10 Generalização da Formulação

Na apresentação do método das forças aqui seguida utilizou-se sempre a mesma estrutura-base para definir a equação resolvente (6.34). Essa opção foi escolhida para facilitar a compreensão da estratégia em que o método se baseia, mas complica a automatização do método, isto é, a sua programação em computador. Essa sistematização depende, fundamentalmente, de uma lógica que permita determinar automaticamente as matrizes que definem os esforços e as reacções que equilibram as forças hiperestáticas e as forças aplicadas, presentes na equação (6.72). Tendo esta informação, são facilmente programáveis todas as outras operações necessárias, designadamente a determinação dos coeficientes da equação resolvente (6.34), a solução dessa equação e a realização das operações de pós-processamento, de determinação e representação de esforços, reacções e deslocamentos.

A geração automática dessas matrizes é relativamente fácil quando se tipifica a topologia da estrutura, por exemplo a de vigas contínuas, de pórticos simples, como os usados em passagens superiores, ou de estruturas porticadas regulares. Todavia, quando se pretende programar o cálculo das matrizes de equilíbrio para estruturas reticuladas com uma qualquer topologia e com uma qualquer distribuição de libertações, interiores ou exteriores, torna-se necessário generalizar o conceito do método das forças em detrimento de uma interpretação física imediata das operações envolvidas.

Esta ideia já foi sugerida quando se mostrou que, depois de resolvida a hiperestatia da estrutura usando uma mesma estrutura-base, era possível calcular os deslocamentos recorrendo a qualquer outra estrutura-base. A justificação dessa possibilidade é simples: sendo única a solução de problemas física e geometricamente lineares, isto é, os esforços, as deformações e os deslocamentos na estrutura hiperestática, essa solução pode ser obtida usando diferentes estruturas-base, pelo que nada impede que se use uma para estabelecer a equação do método das forças e outra para determinar os deslocamentos, depois de conhecer os esforços e as deformações.

É a generalização deste conceito que está na base da automatização do método das forças. Estritamente em termos de um problema de álgebra linear, é sempre possível substituir o sistema de forças hiperestáticas, o vector $\mathbf{p}$ na equação de equilíbrio (6.72), por uma combinação linearmente independente dessas forças, definidas na forma,

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}\,\widetilde{\mathbf{p}}$$

sendo as descontinuidades associadas ao novo sistema de forças hiperestáticas, que pode deixar de ter uma interpretação física imediata, definidas pela relação,

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{T}^T\,\mathbf{v}$$

para assegurar a invariância da transformação,

$$\mathbf{p}^T\,\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{p}}^T\,\widetilde{\mathbf{v}}$$

ou, por outras palavras, a relação de dualidade, pois as equações (6.72) e (6.73) passam a ter as seguinte expressões, em que $\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\,\mathbf{T}$ e $\widetilde{\mathbf{B}}_r = \mathbf{B}_r\,\mathbf{T}$

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{X}\\ \hdashline \mathbf{R}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c}\widetilde{\mathbf{B}} & \mathbf{B}_0\\ \hdashline \widetilde{\mathbf{B}}_r & \mathbf{B}_{0r}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\widetilde{\mathbf{p}}\\ \hdashline \mathbf{f}\end{array}\right\} \tag{6.90a}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\widetilde{\mathbf{v}}\\ \hdashline \mathbf{d}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c}\widetilde{\mathbf{B}}^T & \widetilde{\mathbf{B}}_r^T\\ \hdashline \mathbf{B}_0^T & \mathbf{B}_{0r}^T\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{u}\\ \hdashline -\mathbf{r}\end{array}\right\} \tag{6.90b}$$

A lógica da automatização do método passa agora pelo cálculo directo das matrizes de equilíbrio usando conceitos que exploram as propriedades das estruturas fundamentais e das estruturas arborescentes descritas no Capítulo 4. Essa lógica combina, essencialmente, conceitos da Teoria dos Grafos, para definir os caminhos de transmissão das cargas, e da Estática, para calcular os esforços independentes e as reacções de apoio.

Para incluir o efeito das libertações perfeitas, a condição de equilíbrio (6.90a) é escrita na forma,

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{X}\\ \hdashline \mathbf{R}\\ \hdashline \mathbf{X}_L\\ \hdashline \mathbf{R}_L\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c}\widetilde{\mathbf{B}} & \mathbf{B}_0\\ \hdashline \widetilde{\mathbf{B}}_r & \mathbf{B}_{0r}\\ \hdashline \widetilde{\mathbf{B}}_L & \mathbf{B}_{0L}\\ \hdashline \widetilde{\mathbf{B}}_{rL} & \mathbf{B}_{0rL}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\widetilde{\mathbf{p}}\\ \hdashline \mathbf{f}\end{array}\right\} \tag{6.91}$$

em que o vector $\mathbf{X}_L$ define os esforços impostos nas libertações interiores e vector $\mathbf{R}_L$ define as forças impostas nas libertações exteriores, sendo ambos tipicamente nulos. A dimensão do vector das incógnitas hiperestáticas, $\widetilde{\mathbf{p}}$, é agora o grau de hiperestatia da estrutura fundamental, sendo a função das novas equações do sistema a de reduzir essa hiperestatia para a da estrutura em análise, tal como se referiu no Capítulo 4.

A relação de dualidade mantém-se, tomando a condição de compatibilidade (6.90b) a forma seguinte, em que os vectores $\mathbf{u}_L$ e $\mathbf{r}_L$ definem os deslocamentos relativos nas libertações interiores e os deslocamentos nas libertações exteriores, e que constituem incógnitas do problema:

$$\left\{\begin{array}{c}\widetilde{\mathbf{v}}\\ \hdashline \mathbf{d}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c;{2pt/2pt}c;{2pt/2pt}c}\widetilde{\mathbf{B}}^T & \widetilde{\mathbf{B}}_r^T & \widetilde{\mathbf{B}}_L^T & \widetilde{\mathbf{B}}_{rL}^T\\ \hdashline \mathbf{B}_0^T & \mathbf{B}_{0r}^T & \mathbf{B}_{0L}^T & \mathbf{B}_{0rL}^T\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{u}\\ \hdashline -\mathbf{r}\\ \hdashline \mathbf{u}_L\\ \hdashline -\mathbf{r}_L\end{array}\right\} \tag{6.92}$$

Mantendo-se a definição (6.8) para as relações de elasticidade, generalizadas para incluir o efeito das libertações elásticas, a nova expressão para a equação resolvente do método das forças (6.34) é obtida utilizando o mesmo processo: as relações de elasticidade (6.8) são substituídas na condição de compatibilidade (6.92), os esforços independentes são eliminados impondo as condições de equilíbrio (6.91) e adicionam-se as condições que impõem explicitamente os esforços e as forças nas libertações perfeitas. O sistema que se obtém permanece simétrico e positivo definido,

$$\left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c;{2pt/2pt}c}\widetilde{\mathbf{F}}_* & \mathbf{B}_L^T & \mathbf{B}_{rL}^T\\ \hdashline \mathbf{B}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \hdashline \mathbf{B}_{rL} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{p}\\ \hdashline \mathbf{u}_L\\ \hdashline -\mathbf{r}_L\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\widetilde{\mathbf{v}} - \widetilde{\mathbf{v}}_0\\ \hdashline \mathbf{X}_L - \mathbf{X}_{0L}\\ \hdashline \mathbf{R}_L - \mathbf{R}_{0L}\end{array}\right\},$$

encontrando-se as seguintes expressões para cada um dos seus termos:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{F}}_* &= \widetilde{\mathbf{B}}^T\,\mathbf{F}\,\widetilde{\mathbf{B}} \\
\widetilde{\mathbf{v}}_0 &= \widetilde{\mathbf{B}}^T\,\left(\mathbf{F}\,\mathbf{B}_0\,\mathbf{f} + \overline{\mathbf{u}}\right) - \widetilde{\mathbf{B}}_r^T\,\mathbf{r} \\
\mathbf{X}_{0L} &= \mathbf{B}_{0L}\,\mathbf{f} \\
\mathbf{R}_{0L} &= \mathbf{B}_{0rL}\,\mathbf{f}
\end{aligned}
$$

Capítulo 7

Análise da Viga Biencastrada

7.1 Introdução

Tal como no método das forças, na análise estrutural pelo método dos deslocamentos, uma estrutura reticulada é interpretada como um sistema de peças lineares que se ligam entre si, e ao meio de fundação, através dos nós que as limitam. O que distingue o método dos deslocamentos é o facto de nele se escolher para incógnitas do problema os deslocamentos sofridos pelos nós de discretização da estrutura.

A informação necessária à implementação deste método consiste essencialmente na descrição do comportamento de um elemento estrutural em função dos deslocamentos dos nós de extremidade, assim como da solicitação de vão a que possa estar sujeito. Essa informação é apresentada neste capítulo, sendo escrita e interpretada de forma a permitir uma primeira formulação do método dos deslocamentos.

Considere-se o pórtico representado na figura 7.1 e suponha-se que é actuado por uma solicitação que provoca a deformada aí indicada. Na figura 7.2 representa-se um elemento típico, ao qual se associou um referencial local, $\mathbf{x}$. Os nós que limitam este tipo de elemento podem sofrer deslocamentos e rotações no plano da estrutura a que o elemento pertence, e estar sujeitos a forças e a momentos contidos nesse plano.

Admita-se que esse elemento era retirado da estrutura imediatamente antes e logo após a solicitação actuar. As configurações inicial e final do elemento estão designadas na figura 7.3 por AB e $A'B'$, respectivamente.

O movimento sofrido pelo elemento pode ser descrito pelos deslocamentos q_1 a q_6 aí indicados, os quais são medidos em relação ao referencial local do elemento. Estes deslocamentos são organizados no *vector dos deslocamentos nodais* do elemento, de acordo com a numeração sequencial utilizada para os identificar:

$$\mathbf{q}_m = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_6 \end{Bmatrix}_m . \tag{7.1}$$

Os deslocamentos nodais que é necessário definir para caracterizar o movimento de uma peça linear dependem da maneira como esta peça se liga aos restantes elementos da estrutura e ao meio de fundação.

Na configuração deformada, $A'B'$, o elemento está sujeito à solicitação de vão, $\mathbf{f}$, e às forças Q_1 a Q_6 que é preciso aplicar nos nós de extremidade, para manter o elemento em

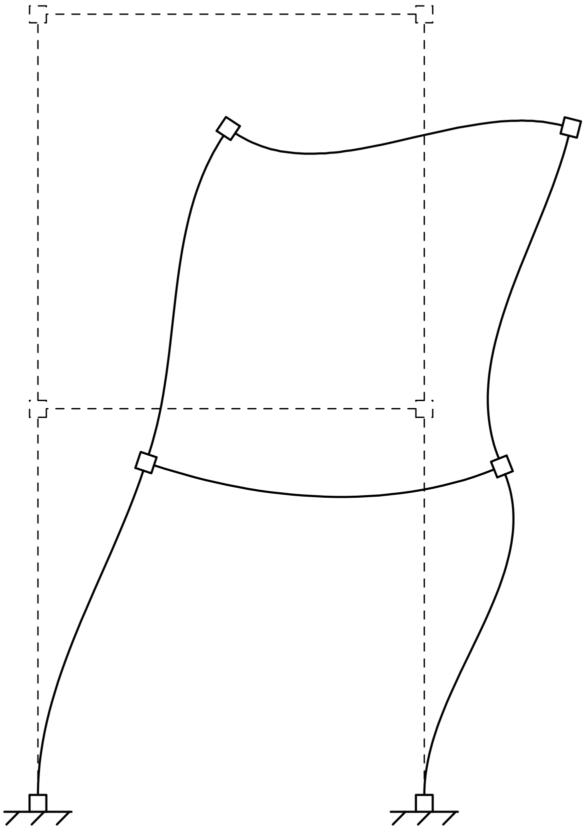


Figura 7.1: Pórtico plano.

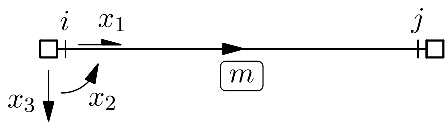


Figura 7.2: Peça linear.

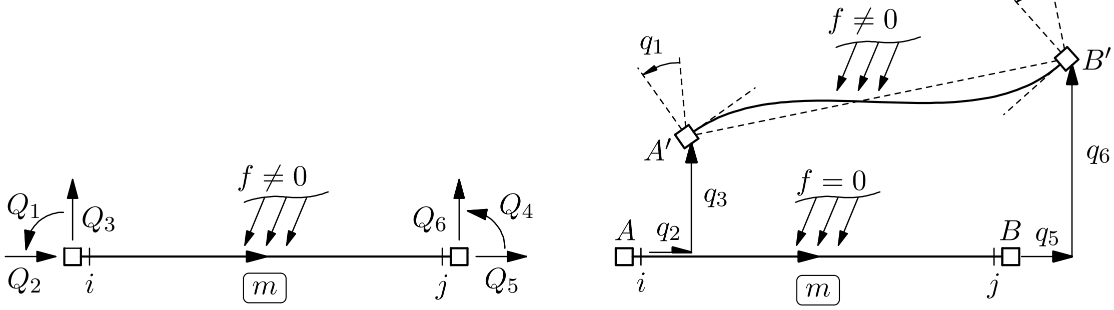


Figura 7.3: Deslocamentos e forças nodais.

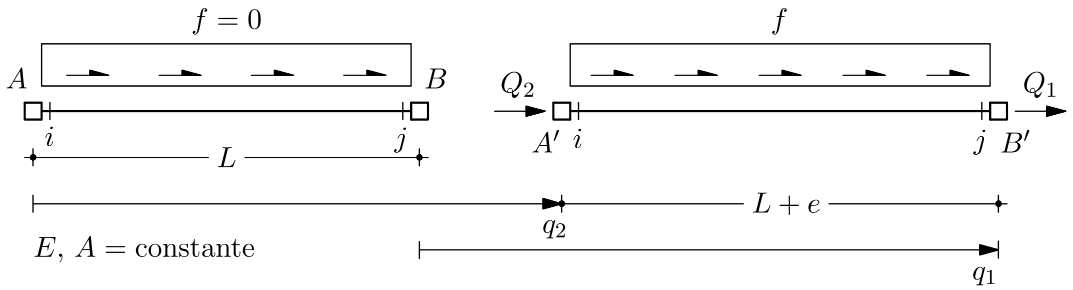


Figura 7.4: Deslocamentos e forças nodais.

equilíbrio, depois de desligado da estrutura. Estas forças, correspondentes aos deslocamentos nodais (7.1) e medidas por isso no mesmo referencial, são organizadas no *vector das forças nodais* do elemento:

$$\mathbf{Q}_m = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_6 \end{Bmatrix}_m , \tag{7.2}$$

No caso geral, os vectores dos deslocamentos e das forças nodais de um elemento m têm pois as seguintes expressões,

$$\mathbf{q}_m = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_\beta \end{Bmatrix}_m , \quad \mathbf{Q}_m = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_\beta \end{Bmatrix}_m , \tag{7.3}$$

em que β_m representa o número de deslocamentos nodais do elemento. Se estes deslocamentos forem linearmente independentes, isto é, se nenhum deles puder ser expresso como uma combinação linear dos restantes, o elemento diz-se ter um *grau de indeterminação cinemática* β_m.

7.2 Equação Fundamental do Método dos Deslocamentos

Como exemplo de introdução, considere-se o elemento representado na figura 7.4. Admita-se, como antes, que esse elemento era retirado de uma estrutura imediatamente antes e logo após a solicitação actuar. Por simplicidade, admita-se ainda que o elemento está sujeito apenas a solicitações axiais e que nele só se verificam movimentos no sentido do eixo. Este elemento tem $\beta = 2$ graus de indeterminação cinemática, pelo que os vectores dos deslocamentos e das forças nodais (7.3) tomam o seguinte aspecto, de acordo com a notação usada na figura 7.4:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}. \tag{7.4}$$

Na concepção em que se baseia o método dos deslocamentos, a transição do elemento da posição inicial, AB, para a posição final, $A'B'$, é devida à actuação simultânea de dois

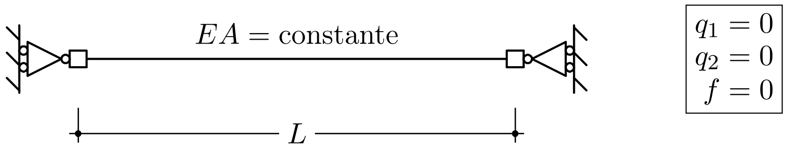
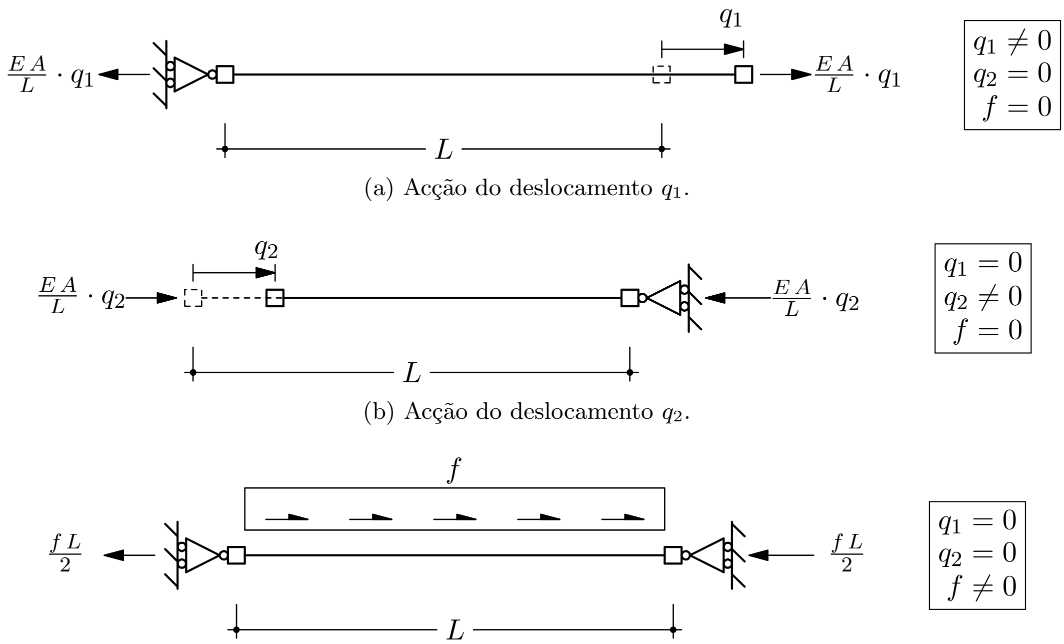


Figura 7.5: Elemento-base.



(a) Acção do deslocamento q_1.

(b) Acção do deslocamento q_2.

(c) Acção das cargas de vão.

Figura 7.6: Análise da estrutura-base.

grupos de solicitações, nomeadamente os deslocamentos nodais q_1 e q_2, e a carga de vão, f.

Para analisar separadamente o efeito de cada uma destas solicitações, começa-se por impedir os deslocamentos independentes q_1 e q_2 e por anular a solicitação de vão, de modo a simular a condição que inicialmente se verifica no elemento:

$$q_1 = 0, \;\; q_2 = 0, \;\; f = 0.$$

O elemento nestas condições, representado na figura 7.5, é cinematicamente determinado ($\beta = 0$) e é denominado *elemento-base.*

Para quantificar o efeito do deslocamento q_1, liberta-se a ligação correspondente e impõe-se à peça o deslocamento pretendido, como se indica na figura 7.6a. As forças Q_1 e Q_2 provocadas por esta solicitação são pois:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} \end{bmatrix} q_1. \tag{7.5}$$

Se se utilizar um procedimento análogo para analisar o efeito do deslocamento q_2, como se ilustra na figura 7.6b, encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} \\ \frac{EA}{L} \end{bmatrix} q_2. \tag{7.6}$$

Quando, por sua vez, se aplica à peça a carga de vão, mantendo no entanto nulos os deslocamentos independentes, como se indica na figura 7.6c, desenvolvem-se nos apoios forças definidas por:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{f\,L}{2} \\ -\frac{f\,L}{2} \end{Bmatrix}. \tag{7.7}$$

Sobrepondo os efeitos das três acções, (7.5) a (7.7), encontra-se a seguinte expressão para as forças nodais:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E\,A}{L} & -\frac{E\,A}{L} \\ -\frac{E\,A}{L} & \frac{E\,A}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{f\,L}{2} \\ -\frac{f\,L}{2} \end{Bmatrix}. \tag{7.8}$$

É importante chamar a atenção para o facto de que na definição (7.8) para as forças nodais estão implícitas as condições fundamentais de *equilíbrio*, de *compatibilidade* e de *elasticidade* do elemento.

Fisicamente, a definição (7.8) representa uma equação de equilíbrio nodal, pois quantifica as forças Q_1 e Q_2 que mantêm o elemento equilibrado quando é sujeito a qualquer uma das solicitações, q_1, q_2 e f, e portanto também à sua acção combinada. Tal facto pode ser verificado nas figuras 7.6a a 7.6c ou a partir da definição (7.8), a qual mostra que se verificam as duas únicas condições de equilíbrio não triviais para este problema:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = 0, & \text{se } f = 0 \\ Q_1 + Q_2 + f\,L = 0, & \text{se } f \neq 0 \end{cases}$$

A definição (7.8) foi obtida recorrendo também condições de compatibilidade do elemento. Nas deformadas representadas nas figuras 7.6a a 7.6c verifica-se a continuidade das deformações e as condições de ligação do elemento aos nós são respeitadas.

Nessa definição está também implícita a condição de elasticidade pois os resultados parciais (7.5) a (7.7) foram obtidos admitindo que o elemento tem um comportamento elástico-linear.

No caso geral do elemento m de uma estrutura reticulada, a expressão (7.8) toma o seguinte aspecto,

$$\mathbf{Q}_m = \mathbf{K}_{*m}\,\mathbf{q}_m + \mathbf{Q}_{0m}. \tag{7.9}$$

em que $\mathbf{q}_m$ representa o vector dos deslocamentos nodais *independentes* do elemento m e $\mathbf{Q}_m$ o das forças nodais correspondentes, de acordo com as definições (7.3).

A matriz $\mathbf{K}_{*m}$ é designada por *matriz de rigidez* do elemento e o vector $\mathbf{Q}_{0m}$ por *vector de forças de fixação*. Estas designações resultam da interpretação do significado físico dos coeficientes da matriz $\mathbf{K}_{*m}$ e do vector $\mathbf{Q}_{0m}$. As expressões (7.8) e (7.9) permitem de facto concluir que:

- O coeficiente k_{ij} da matriz de rigidez $\mathbf{K}_{*m}$, representa a força nodal Q_i que se desenvolve no elemento m, quando a ele se aplica o deslocamento nodal independente $q_j = 1$ e se mantêm nulos todos os restantes ($q_k = 0,\ k \neq j$), assim como a solicitação de vão ($\mathbf{f} = 0$).
- O coeficiente Q_{0i}, do vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_{0m}$, representa a força nodal Q_i que se desenvolve no elemento m, quando a ele se aplica a solicitação de vão e se mantêm nulos todos os deslocamentos nodais independentes ($\mathbf{q}_m = 0$).

Se se recorrer à noção de *elemento-base*, isto é do elemento livre de solicitações de vão e com todos os deslocamentos nodais independentes bloqueados, as definições acima tomam a seguinte expressão:

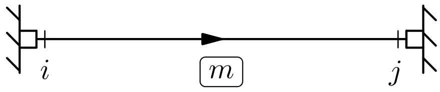
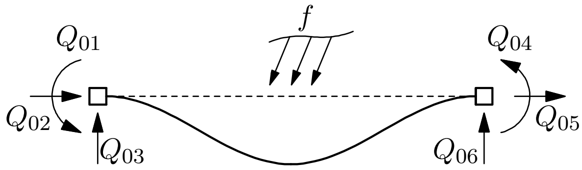
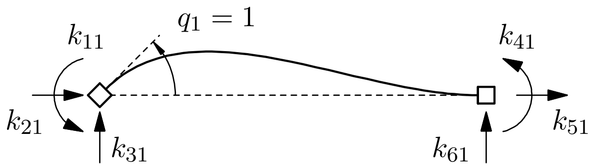


Figura 7.7: Viga biencastrada.



(a) Forças nodais de fixação.



(b) Forças nodais devido ao deslocamento $q_1 = 1$.

Figura 7.8: Forças nodais na viga biencastrada.

> **(D7.1)** A coluna i da matriz de rigidez, $\mathbf{K}_{*m}$, representa as forças nodais (7.3) que se desenvolvem no elemento-base, quando nele se impõe o deslocamento $q_i = 1$.

> **(D7.2)** O vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_{0m}$, representa as forças nodais (7.3) que se desenvolvem no elemento-base, quando a ele se aplica a solicitação de vão.

O elemento-base das estruturas planas solicitadas no próprio plano é a viga biencastrada representada na figura 7.7. Este elemento é obtido bloqueando os 6 deslocamentos nodais identificados na figura 7.3.

Na figura 7.8a ilustra-se a definição (D7.2) para o vector das forças de fixação e na figura 7.8b indicam-se as forças nodais que representam a primeira coluna da matriz de rigidez do elemento, de acordo com a definição (D7.1). Note-se que para qualquer das duas solicitações aí representadas, o elemento é cinematicamente determinado pois são conhecidos os valores que tomam todos os deslocamentos nodais.

Como adiante se poderá verificar, a equação resolvente da análise de uma estrutura do método dos deslocamentos é estabelecida combinando as equações (7.9) associadas aos vários elementos que a constituem, de modo a garantir o equilíbrio dos nós de discretização. Depois de conhecidos os deslocamentos nodais da estrutura, torna-se possível determinar os esforços, as deformações e os deslocamentos em qualquer secção transversal da estrutura, assim como as reacções que se desenvolvem nos aparelhos de apoio.

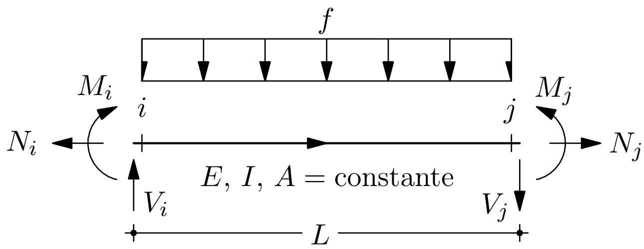


Figura 7.9: Esforços nas secções extremas.

7.3 Reformulação das Relações de Elasticidade

Põe-se agora a questão de encontrar um método expedito que permita calcular os coeficientes da matriz de rigidez, $\mathbf{K}_{*m}$, associada aos deslocamentos nodais, $\mathbf{q}_m$, assim como os do vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_{0m}$, presentes na equação (7.9).

Neste momento, a expressão mais simples de que se dispõe para caracterizar o comportamento de elementos lineares elásticos é a formulação de flexibilidade (3.12) das relações de elasticidade:

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{F}_m\,\mathbf{X}_m + \overline{\mathbf{u}}_m. \tag{7.10}$$

Nesta expressão, que foi estabelecida analisando o elemento simplesmente apoiado representado na figura 3.6, os coeficientes da matriz de flexibilidade $\mathbf{F}_m$ representam as deformações independentes causadas pelos esforços independentes unitários, na ausência de solicitações de vão. O efeito destas solicitações é quantificado no vector das deformações adicionais, $\overline{\mathbf{u}}_m$.

Utilizando o resultado (3.12) e recorrendo à tabela 3.2, encontra-se a seguinte expressão para as relações de elasticidade (7.10) do elemento representado na figura 7.9:

$$\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ e_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3\,E\,I} & \frac{L}{6\,E\,I} & 0 \\ \frac{L}{6\,E\,I} & \frac{L}{3\,E\,I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{E\,A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{f\,L^3}{24\,E\,I} \\ \frac{f\,L^3}{24\,E\,I} \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{7.11}$$

Quando se estabeleceram as relações de elasticidade (7.10), chamou-se a atenção para o facto da matriz de flexibilidade $\mathbf{F}_m$, ser simétrica e não-singular. Existe portanto a inversa dessa matriz,

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{F}_m^{-1}, \tag{7.12}$$

a qual é também simétrica. Se se pré-multiplicar a relação (7.10) pela inversa da matriz de flexibilidade (7.12) encontra-se, depois de reagrupar os termos da equação, a seguinte expressão alternativa para as relações de elasticidade do elemento:

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{K}_m\,\mathbf{u}_m + \overline{\mathbf{X}}_m, \tag{7.13}$$

em que

$$\overline{\mathbf{X}}_m = -\mathbf{K}_m\,\overline{\mathbf{u}}_m. \tag{7.14}$$

A matriz $\mathbf{K}_m$, é designada por matriz de rigidez do elemento associada às deformações independentes. O vector $\overline{\mathbf{X}}_m$ é designado por vector dos esforços de fixação, por representar os esforços independentes que se desenvolvem no elemento quando a ele se aplica

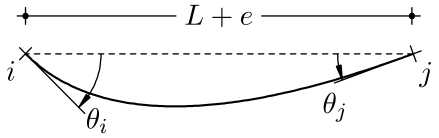


Figura 7.10: Deformações independentes.

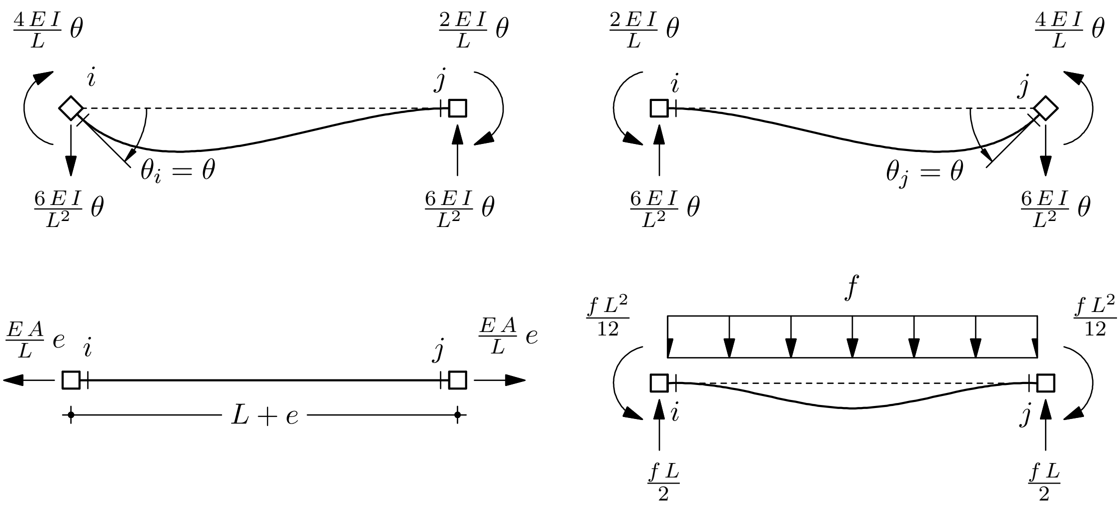


Figura 7.11: Acção das deformações independentes e das cargas de vão.

a solicitação de vão e se mantêm nulas todas as deformações independentes. Estas interpretações estão ilustradas na figura 7.11 para o caso de elementos de estruturas planas solicitadas no próprio plano.

Se as definições (7.12) e (7.14) forem aplicadas, obtém-se, com base na relação de flexibilidade (7.11), a seguinte expressão para a *formulação de rigidez* (7.13) das relações de elasticidade:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ N_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{2EI}{L} & 0 \\ -\frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ e_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{fL^2}{12} \\ -\frac{fL^2}{12} \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{7.15}$$

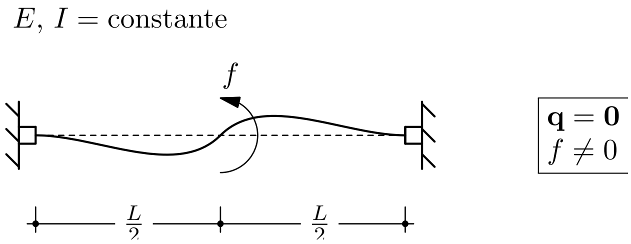
Como se pode verificar pelas deformadas traçadas na figura 7.11, na formulação de rigidez (7.13) das relações de elasticidade utiliza-se como elemento finito a peça biencastrada representada na figura 7.7.

A identificação dos esforços e das deformações e a definição da matriz de rigidez em termos das deformações estão apresentadas na tabela 7.1, resumindo-se nas tabelas 7.3 a 7.5 os esforços de fixação determinados para diferentes cargas de vão.

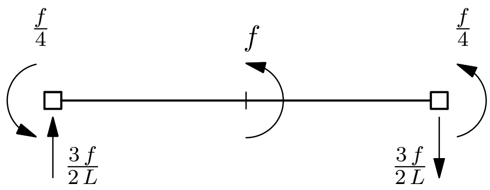
É com base nesses resultados que serão determinados os coeficientes da matriz de rigidez associada aos deslocamentos nodais independentes, $\mathbf{q}_m$, e do vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_{0m}$, presentes na expressão (7.9).

Exercício 7.1. A formulação de rigidez (7.13) para o elemento representado na figura 7.4 tem a seguinte definição:

$$N_j = \left(\frac{EA}{L}\right) e_j + \left(-\frac{fL^2}{2}\right).$$



(a) Solicitação.



(b) Forças de fixação.

Figura 7.12: Elemento-base de estrutura plana.

Utilize esta expressão para calcular as forças nodais indicadas nas figuras 7.6a a 7.6c.

Exercício 7.2. Utilize os resultados apresentados na figura 7.11 para quantificar os coeficientes da primeira coluna da matriz de rigidez associada aos deslocamentos nodais independentes do elemento de estrutura plana solicitada no próprio plano. Baseie-se na identificação indicada na figura 7.8b.

7.4 Definição do Vector das Forças de Fixação

Na figura 7.12a está representada a deformada que se desenvolve num elemento de estrutura plana, quando se aplica a solicitação de vão aí indicada ao elemento-base, de acordo com a definição (D7.2).

As forças que se desenvolvem nos nós do elemento para equilibrar esta solicitação estão indicadas na figura 7.12b, e foram obtidas a partir dos resultados resumidos na tabela 7.3. De acordo com a convenção indicada na figura 7.3, é a seguinte a definição do vector das forças de fixação:

$$\mathbf{Q}_{0m} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{f}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{2}\frac{f}{L} \\ \hdashline \frac{f}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{f}{L} \end{array} \right\}_m . \tag{7.16}$$

A determinação dos coeficientes do vector das forças de fixação para este ou outro tipo de elemento, sujeitos a esta ou outra solicitação de vão, não oferece pois qualquer dificuldade. Basta combinar a informação apresentada nas tabelas 7.3 a 7.5 para as solicitações

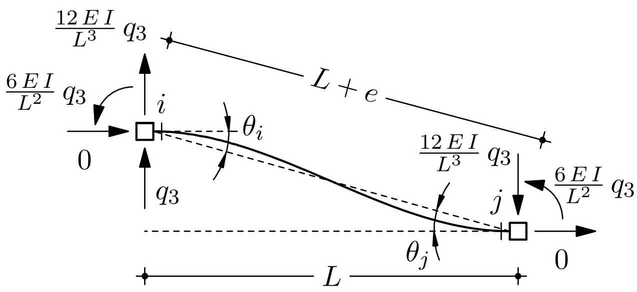


Figura 7.13: Deslocamento nodal transversal.

em questão e organizá-la de acordo com a convenção adoptada para identificar as forças nodais do elemento em causa. Os resultados que assim se obtêm estão resumidos nas tabelas 7.6 a 7.8.

Exercício 7.3. Verifique, com base na informação dada na figura 7.11, se para um elemento de estrutura plana sujeito a uma carga uniformemente distribuída transversal, o vector das forças de fixação tem a seguinte definição:

$$\mathbf{Q}_{0m} = \frac{f\,L^2}{12} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \frac{6}{L} \\ \hdashline -1 \\ 0 \\ \frac{6}{L} \end{array} \right\}_m . \tag{7.17}$$

7.5 Definição da Matriz de Rigidez

Na tabela 7.9 estão representadas as deformadas que se obtêm quando, no elemento--base das estruturas planas solicitadas no próprio plano, se introduzem separadamente cada um dos seis deslocamentos nodais indicados na figura 7.3. Para provocar essas deformadas, é necessário aplicar ao elemento as forças nodais auto-equilibradas que aí se indicam.

As forças nodais que se desenvolvem ao impôr as rotações e os deslocamentos axiais aos nós do elemento-base podem ser determinadas directamente a partir da informação contida na figura 7.11, a qual foi obtida a partir da formulação de rigidez (7.15) das relações de elasticidade. Esta expressão pode também ser utilizada para determinar as forças nodais que provocam os deslocamentos nodais transversais ao eixo do elemento.

Na figura 7.13 representa-se o efeito do deslocamento q_3. Se se admitir que o deslocamento imposto é infinitesimal,

$$\tan\left(\frac{q_3}{L}\right) \simeq \frac{q_3}{L},\ (q_3)^2 \simeq 0,$$

da deformada aí traçada conclui-se que:

$$\theta_i = -\frac{q_3}{L},\ \theta_j = \frac{q_3}{L},\ e_j = 0. \tag{7.18}$$

Substituindo o resultado (7.18) em (7.15), com $f = 0$ pois não existem cargas de vão, encontra-se a seguinte definição para os esforços independentes:

$$\begin{aligned} M_i &= -\frac{6\,E\,I}{L^2}\,q_3, \\ M_j &= +\frac{6\,E\,I}{L^2}\,q_3, \\ N_j &= 0. \end{aligned}$$

O esforço transverso nas secções extremas é calculado de maneira a garantir o equilíbrio do elemento:

$$\begin{aligned} V_i &= +\frac{12\,E\,I}{L^3}\,q_3, \\ V_j &= +\frac{12\,E\,I}{L^3}\,q_3. \end{aligned}$$

A expressão da matriz de rigidez do elemento de pórtico plano pode agora ser obtida, organizando na forma (7.9) todos os resultados apresentados na tabela 7.9, de acordo com a definição (D7.1):

$$\mathbf{K}_{*m} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \\ \hdashline \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} \end{array}\right]_m . \tag{7.19}$$

Os resultados resumidos nas tabelas 7.23 a 7.27 para os restantes elementos-tipo podem ser obtidos repetindo o procedimento anteriormente descrito.

Exercício 7.4. Verifique a definição dada na tabela 7.25 para a matriz de rigidez do elemento da grelha.

7.6 Efeito das Libertações Internas

O problema que agora se pretende analisar é o das alterações que se verificam na definição dos coeficientes da matriz associada aos deslocamentos nodais do elemento, $\mathbf{K}_{*m}$, assim como dos do vector das forças nodais de fixação, $\mathbf{Q}_{0m}$, quando no elemento estrutural se passam a incorporar aparelhos de libertação.

Em consequência do critério de discretização que aqui tem sido utilizado, os aparelhos de libertação que possam existir numa estrutura estão sempre na vizinhança de um nó, coincidindo pois com as secções extremas dos elementos estruturais.

Na figura 7.14 representa-se o caso do elemento-base de estruturas planas com uma articulação na vizinhança da secção j, e na tabela 7.13 apresentam-se as deformadas que se desenvolvem no elemento-base quando se aplicam separadamente cada um dos deslocamentos nodais.

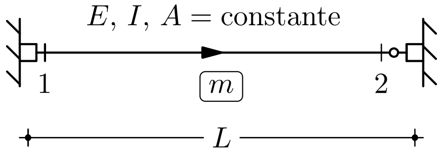
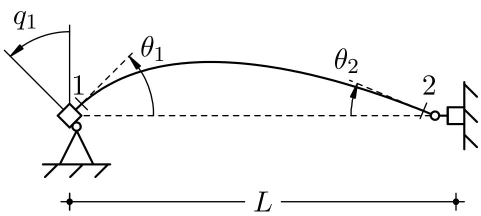
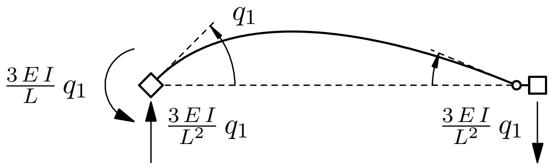


Figura 7.14: Barra encastrada-rotulada.



(a) Deformada.



(b) Forças nodais.

Figura 7.15: Efeito da rotação nodal q_1.

As forças que se desenvolvem nos nós do elemento ao provocar cada um desses movimentos podem ser determinadas aplicando um procedimento análogo ao adoptado na análise do elemento sem libertações internas.

Considere-se, por exemplo, o efeito da rotação nodal, q_1, a qual introduz no elemento a deformada representada na figura 7.15a, e que é caracterizada pelas seguintes deformações independentes:

$$\theta_i = -q_1,\ e_j = 0. \tag{7.20}$$

A rotação na secção j não é conhecida mas pode ser calculada se se atender a que o efeito da articulação é o de anular o momento flector nessa secção:

$$M_j = 0. \tag{7.21}$$

Substituindo as condições (7.20) e (7.21) na relação de elasticidade (7.15), com $f = 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \theta_j &= -\frac{1}{2}\,q_1, \\ M_i &= -\frac{3\,E\,I}{L}\,q_1, \\ N_j &= 0. \end{aligned}$$

Na figura 7.15b indicam-se as forças nodais que equilibram os esforços independentes acima definidos.

De acordo com a definição (D7.1) e com base nos resultados resumidos na tabela 7.13, encontra-se a seguinte expressão para a matriz de rigidez do elemento representado na

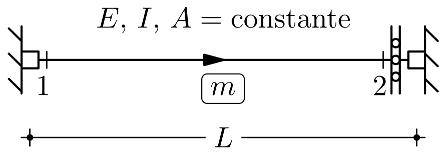


Figura 7.16: Barra encastrada-encastramento deslizante.

figura 7.14:

$$\mathbf{K}_{*m} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{3EI}{L} & 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{array}\right]_m . \tag{7.22}$$

Em consequência da condição (7.21), na quarta linha da matriz de rigidez todos os coeficientes são nulos, o que implica ser nulo o momento no nó da direita,

$$Q_4 = 0,$$

para qualquer das solicitações consideradas. A quarta coluna da matriz também tem coeficientes nulos por a rotação nodal q_4 não introduzir esforços na barra devido à presença da articulação na vizinhança do nó.

Os resultados obtidos para a viga encastrada num nó e com uma libertação de esforço transverso e de esforço axial no outro nó de continuidade estão resumidos nas tabelas 7.17 e 7.18, respectivamente. O caso particular da barra biarticulada está resumido na tabela 7.19. Como aí se indica, na hipótese da linearidade geométrica só os deslocamentos axiais introduzem esforços nas barras, os quais se consideram inferiores aos que provocam a encurvadura da peça.

Exercício 7.5. Verifique os valores representados na tabela 7.17 para as forças nodais que se desenvolvem no elemento-base representado na figura 7.16, quando se introduzem cada um dos deslocamentos nodais. Note que agora se deve impor a condição de ser nulo o esforço transverso na secção j, o que se traduz na seguinte relação entre os momentos flectores nas secções extremas, por ser nulo o carregamento de vão:

$$M_i = M_j,$$

Considere-se agora o problema da definição dos coeficientes do vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_{0m}$, em elementos com libertações internas.

Na figura 7.17 representa-se o elemento-base da figura 7.14 sujeito a uma carga transversal uniformemente distribuída, de intensidade f. De acordo com a definição (D7.2), as forças que se desenvolvem nos nós do elemento definem os coeficientes do vector das forças de fixação.

A deformada do elemento é caracterizada por,

$$\theta_i = 0, \; e_j = 0, \tag{7.23}$$

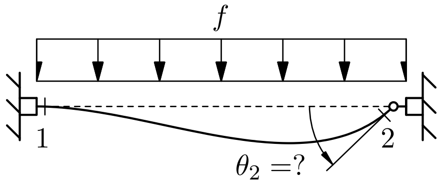


Figura 7.17: Barra encastrada-rotulada com carga de vão.

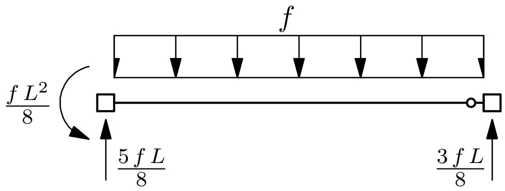


Figura 7.18: Forças nodais de fixação na barra encastrada-rotulada.

e o campo de esforços pela condição:

$$M_j = 0. \tag{7.24}$$

Substituindo os resultados (7.23) e (7.24) na formulação de rigidez (7.15), obtida para o elemento sujeito à carga distribuída representado na figura 7.9, encontram-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \theta_j =& \frac{f\,L^3}{48\,E\,I}, \\ M_i =& -\frac{f\,L^2}{8}, \\ N_j =& 0. \end{aligned}$$

Na figura 7.18 indicam-se as forças nodais que equilibram os esforços acima referidos. De acordo com a organização (7.3), o vector das forças de fixação tem pois a seguinte definição:

$$\mathbf{Q}_{0m} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{f\,L^2}{8} \\ 0 \\ \frac{5\,f\,L}{8} \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \frac{3\,f\,L}{8} \end{array} \right\}_m . \tag{7.25}$$

O procedimento acima descrito pode ser utilizado para analisar o efeito de outros tipos de libertações internas. Nas tabelas 7.10 a 7.12 e 7.14 a 7.16 definem-se as forças de fixação associadas às solicitações mais correntes.

Exercício 7.6. Verifique os valores apresentados na figura 7.19 para as forças nodais que se desenvolvem no elemento representado na figura 7.16.

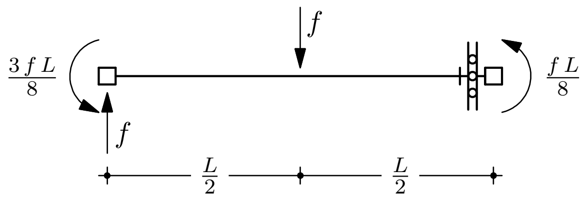
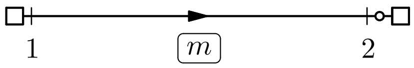
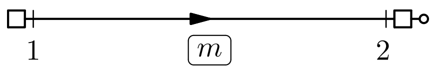


Figura 7.19: Forças nodais de fixação na barra encastrada-encastrada deslizante.



(a) Articulação no interior do elemento-base.



(b) Articulação no exterior do elemento-base.

Figura 7.20: Elemento-base com articulação.

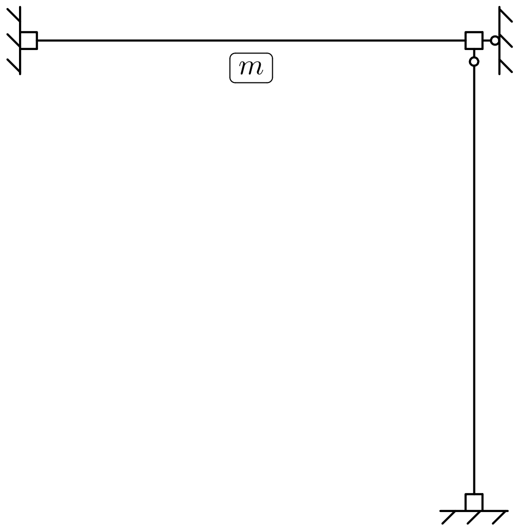


Figura 7.21: Libertações interiores e exteriores.

7.7 Deslocamentos Nodais Dependentes

Uma questão que também interessa considerar é a de saber como são afectados os resultados anteriormente obtidos quando os aparelhos de libertação, em vez de existirem no interior do elemento, passam a existir fora dele, continuando no entanto na vizinhança dos nós de extremidade.

Na figura 7.20 ilustra-se a diferença das duas situações que se pretendem comparar, para o caso da libertação se tratar de uma articulação. Como se sugere na figura 7.21, as libertações externas podem ocorrer quer na ligação de um elemento ao meio de fundação, quer na sua ligação a um outro elemento da estrutura em que existam libertações internas.

Como adiante se verificará, a posição da libertação reflecte-se apenas na definição dos deslocamentos independentes do elemento. Os campos de esforços serão no entanto idênticos, assim como as forças nodais, quer a libertação seja interior ou exterior ao elemento.

O elemento de estrutura plana representado na figura 7.22 vai ser utilizado para ilustrar estes factos. De acordo com as definições (7.17) e (7.19), a equação geral (7.9) para as

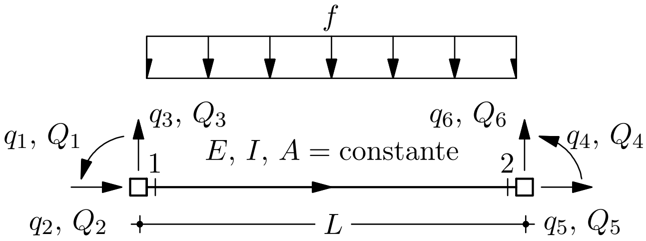


Figura 7.22: Elemento de estrutura plana.

forças nodais do elemento toma o seguinte aspecto:

$$\left\{\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \hdashline Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{4\,E\,I}{L} & 0 & \frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{2\,E\,I}{L} & 0 & -\frac{6\,E\,I}{L^2} \\ 0 & \frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\,A}{L} & 0 \\ \frac{6\,E\,I}{L^2} & 0 & \frac{12\,E\,I}{L^3} & \frac{6\,E\,I}{L^2} & 0 & -\frac{12\,E\,I}{L^3} \\ \hdashline \frac{2\,E\,I}{L} & 0 & \frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{4\,E\,I}{L} & 0 & -\frac{6\,E\,I}{L^2} \\ 0 & -\frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & \frac{E\,A}{L} & 0 \\ -\frac{6\,E\,I}{L^2} & 0 & -\frac{12\,E\,I}{L^3} & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & 0 & \frac{12\,E\,I}{L^3} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \hdashline q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \frac{f\,L^2}{12} \\ 0 \\ \frac{f\,L}{2} \\ \hdashline -\frac{f\,L^2}{12} \\ 0 \\ \frac{f\,L}{2} \end{array}\right\}. \tag{7.26}$$

Considere-se agora a possibilidade do elemento ter uma articulação no nó da direita, como se ilustra na figura 7.20b. Para que o nó articulado esteja em equilíbrio torna-se necessário garantir que seja nulo o momento a ele aplicado:

$$Q_4 = 0. \tag{7.27}$$

Introduzindo esta condição na expressão (7.26), encontra-se a seguinte relação entre os deslocamentos nodais e a solicitação de vão:

$$0 = \frac{E\,I}{L}\left[(2)\,q_1 + (0)\,q_2 + \left(\frac{6}{L}\right)\,q_3 + (4)\,q_4 + (0)\,q_5 + \left(-\frac{6}{L}\right)\,q_6\right] + \left(-\frac{f\,L^2}{12}\right).$$

Esta equação pode agora ser resolvida em função do deslocamento correspondente à força nodal que foi anulada, encontrando-se a seguinte definição para a rotação q_4:

$$q_4 = \left(-\frac{1}{2}\right)\,q_1 + (0)\,q_2 + \left(-\frac{3}{2\,L}\right)\,q_3 + (0)\,q_5 + \left(\frac{3}{2\,L}\right)\,q_6 + \left(\frac{f\,L^2}{48\,E\,I}\right). \tag{7.28}$$

Substituindo esta expressão em (7.26), encontra-se a seguinte definição para as forças nodais no elemento articulado:

$$\left\{\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \hdashline Q_5 \\ Q_6 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc:cc} \frac{3\,E\,I}{L} & 0 & \frac{3\,E\,I}{L^2} & 0 & -\frac{3\,E\,I}{L^2} \\ 0 & \frac{E\,A}{L} & 0 & -\frac{E\,A}{L} & 0 \\ \frac{3\,E\,I}{L^2} & 0 & \frac{3\,E\,I}{L^3} & 0 & -\frac{3\,E\,I}{L^3} \\ \hdashline 0 & -\frac{E\,A}{L} & 0 & \frac{E\,A}{L} & 0 \\ -\frac{3\,E\,I}{L^2} & 0 & -\frac{3\,E\,I}{L^3} & 0 & \frac{3\,E\,I}{L^3} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \hdashline q_5 \\ q_6 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \frac{f\,L^2}{8} \\ 0 \\ \frac{5\,f\,L}{8} \\ \hdashline 0 \\ \frac{3\,f\,L}{8} \end{array}\right\}. \tag{7.29}$$

Nesta definição deixa-se de incluir o momento nodal Q_4, por se saber ser nulo, e omite-se também a rotação correspondente, por ter sido eliminado através da definição (7.28); a rotação q_4 deixa de ser considerada como deslocamento independente.

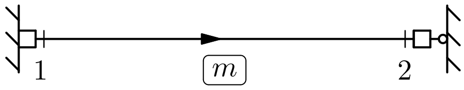


Figura 7.23: Barra encastrada-apoiada.

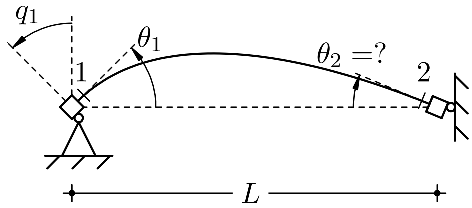


Figura 7.24: Acção da rotação nodal q_1.

A rotação q_4 é de facto um deslocamento *dependente* pois pode ser determinada a partir dos restantes deslocamentos nodais, e da solicitação de vão, recorrendo à definição (7.28). Consequentemente, na caracterização do elemento-base a rotação q_4 não deve ser impedida, como se ilustra na figura 7.23.

Se a este elemento-base se aplicar o procedimento anteriormente descrito para determinar os coeficientes da matriz de rigidez, $\mathbf{K}_m$, e do vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_{0m}$, recuperam-se os resultados presentes na expressão (7.29).

Exercício 7.7. Na figura 7.24 representa-se a deformada do elemento-base da figura 7.23, quando se impõe a rotação nodal q_1. Verifique se as forças nodais no elemento coincidem com os coeficientes da primeira coluna da matriz de rigidez definida na expressão (7.29). Baseie os cálculos na formulação de rigidez (7.15) das relações de elasticidade e note que as condições (7.20) e (7.21) permanecem válidas.

Se se compararem os resultados (7.22) e (7.25), obtidos para o elemento com a libertação indicado na figura 7.20a, com os resultados (7.29) deduzidos para o elemento com a libertação externa representado na figura 7.20b, conclui-se que as forças nodais são as mesmas. Os elementos são de facto estaticamente equivalentes pois em qualquer deles se verificam as condições (7.21), (7.24) e (7.27) de andamento dos momentos na vizinhança do nó da direita do elemento.

Esta equivalência estática continua a verificar-se para qualquer outro tipo de aparelho de libertação, para este ou outro tipo de elemento estrutural. Por esta razão, as tabelas 7.6 a 7.16, 7.13 a 7.19 são válidas para elementos com as libertações indicadas, quer elas lhe sejam interiores ou exteriores.

A posição das libertações afecta todavia o movimento que os nós do elemento podem sofrer, como por exemplo, as deformadas representadas nas figuras 7.15 e 7.24 o ilustram. Quando a articulação é interior, a rotação q_4 deve ser considerada como independente, por não poder ser determinada em função dos restantes deslocamentos, apesar dessa rotação não introduzir esforços no elemento. Quando a articulação é exterior ao elemento, a rotação q_4 *não pode* ser considerada como independente, pelo que deve estar livre quando ao elemento se aplicam as solicitações, sejam elas as cargas de vão ou os restantes deslocamentos nodais.

7.8 Aplicação a diferentes elementos estruturais

A equação fundamental do método dos deslocamentos é escrita na forma (7.9) independentemente do tipo de elemento estrutural considerado, designadamente de pórtico ou de treliça, de estruturas planas ou tridimensionais, de viga contínua ou de grelha. O vector $\mathbf{q}_m$ reúne os deslocamentos nodais tomados como independentes e o vector $\mathbf{Q}_m$, as forças nodais correspondentes, mantendo-se as interpretações (D7.1) e (D7.2) para os coeficientes da matriz de rigidez do elemento, $\mathbf{K}_{*m}$, e do vector das forças nodais de fixação, $\mathbf{Q}_{0m}$.

Os resultados anteriormente obtidos para o elemento de pórtico plano, resumidos nas tabela 7.2 para a matriz de rigidez e nas tabelas 7.6 a 7.8 para o vector das forças de fixação, são aqui adaptados aos elementos estruturais que caracterizam os seguintes tipos de estruturas reticuladas: vigas contínuas, treliças, grelhas e pórticos tridimensionais. O processo anteriormente descrito para simular o efeito de libertações perfeitas, interiores ou exteriores, é directamente aplicável às situações a seguir analisadas.

7.8.1 Elemento de viga contínua

Como se estabeleceu no Capítulo 4 e se representa na tabela 7.20, os momentos de extremidade e as rotações das secções extremas medidas em relação à corda, definem os esforços e as deformações independentes de um elemento de viga contínua. Para caracterizar o movimento de uma peça deste tipo é suficiente controlar as rotações dos nós de extremidade e os deslocamentos desses nós perpendiculares ao eixo da peça, isto é, os deslocamentos q_1, q_3, q_4 e q_6 na representação da figura 7.3. Como se indica na tabela 7.21, a matriz de rigidez do elemento é obtida eliminando as linhas e colunas da matriz de rigidez do elemento de pórtico plano, definida na tabela 7.2, associadas às forças e deslocamentos nodais, respectivamente. O vector das forças de fixação é definido a partir da informação resumida nas tabelas 7.6 a 7.8 , de acordo com a numeração definida na tabela 7.21 para as variáveis nodais.

7.8.2 Elemento de treliça

O movimento de uma peça biarticulada é definido pelas translações dos nós de extremidade, pois a rotação de um nó, de uma estrutura articulada, é determinado pela rotação da única barra que encastra nesse nó. Portanto, nas peças de estruturas planas (tridimensionais) controlam-se apenas duas (três) forças e dois (três) deslocamentos por nó. Os esforços e as deformações independentes estão definidos na tabela 7.23 e a matriz de rigidez na tabela 7.24. A numeração aí adoptada é a utilizada na quantificação do vector das forças de fixação devidas a cargas de vão, para as acções axiais resumidas nas tabelas 7.6 a 7.8.

Exercício 7.8. Defina o vector das forças nodais de fixação para um elemento de treliça sujeito às cargas de vão representadas nas figuras 7.9 (força transversal uniformemente distribuída) e 7.12b (momento aplicado a meio vão).

7.8.3 Elemento de grelha

Os esforços e as deformações independentes de um elemento de grelha, representado na figura 3.14, estão definidos na tabela 7.24. Este tipo de elemento é análogo ao elemento de

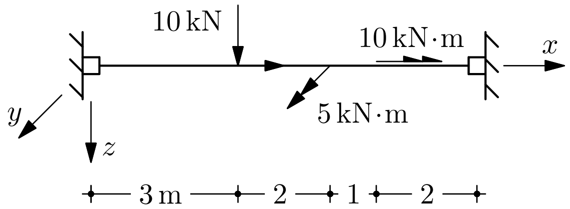


Figura 7.25: Elemento de grelha sujeito a cargas de vão.

pórtico plano, com a diferença de ser agora necessário controlar o modo de torção em vez do modo de deformação axial. São necessários três deslocamentos por nó para descrever o movimento de um elemento de grelha. Dois movimentos provocam a flexão da peça, designadamente a translação perpendicular ao plano da estrutura e a rotação segundo um eixo existente nesse plano e ortogonal ao eixo da peça. O terceiro movimento provoca a torção da peça e é definido pela rotação do nó segundo o seu eixo. A matriz de rigidez do elemento de grelha está definida na tabela 7.25, continuando válida a informação resumida nas tabelas 7.6 a 7.8 para definir o vector das forças nodais de fixação, usando agora os carregamentos que provocam a flexão e a torção da peça.

Exercício 7.9. Na figura 7.25 representa-se um elemento de grelha. Para a solicitação aí indicada, verifique se é a seguinte a definição para o vector das forças de fixação:

$$\mathbf{Q}_{0m} = \left\{ \begin{array}{c} -2,5\,\mathrm{kN\cdot m} \\ 13,3594\,\mathrm{kN\cdot m} \\ -7,7148\,\mathrm{kN} \\ \hdashline -7,5\,\mathrm{kN\cdot m} \\ -6,6406\,\mathrm{kN\cdot m} \\ -2,2852\,\mathrm{kN} \end{array} \right\}_m .$$

7.8.4 Elemento de pórtico tridimensional

O elemento de pórtico tridimensional é obtido combinado os elementos de pórtico plano e de grelha. Os esforços e as deformações independentes estão definidos na tabela 7.26 e a numeração adoptada na identificação dos seis deslocamentos e forças por nó está definida na tabela 7.27, onde se define também a matriz de rigidez do elemento. Os resultados resumidos nas tabelas 7.6 a 7.8 continuam a ser válidos para a determinação do vector das forças nodais de fixação, desde que se respeite as hipóteses que lhes estão inerentes, designadamente que uma dada acção só introduz esforços segundo o plano em que actua.

Exercício 7.10. Defina o vector das forças nodais de fixação para a peça tridimensional definida na figura 7.26 e discuta a utilização da matriz de rigidez definida na tabela 7.27 na análise dessa peça.

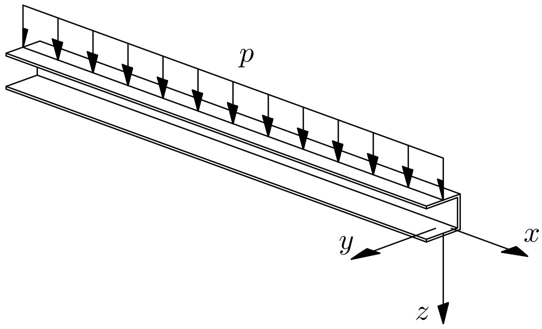
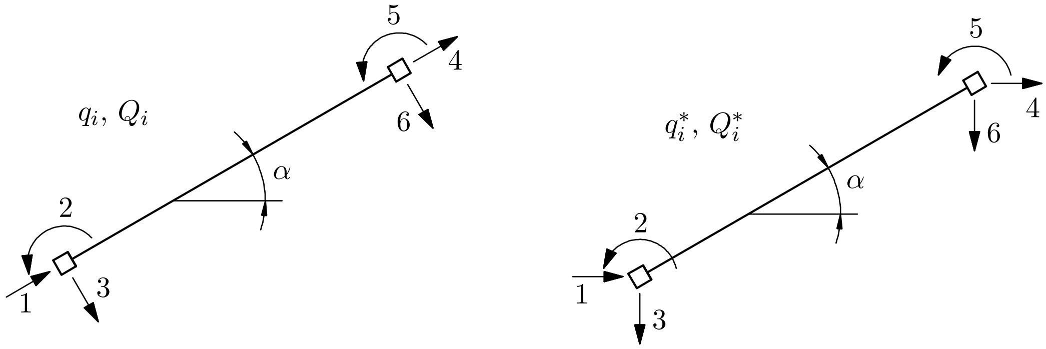


Figura 7.26: Viga em U sujeita a uma força transversal uniformemente distribuída.



(a) No referencial da barra.

(b) No referencial da estrutura.

Figura 7.27: Deslocamentos e forças nodais.

7.9 Generalização dos resultados

Como adiante se irá verificar, e com a excepção da análise de vigas contínuas e de outros casos particulares, a aplicação do método dos deslocamentos exige que a equação fundamental (7.9) seja expressa em termos de deslocamentos e forças nodais referidos a um referencial que não corresponde ao referencial local da barra, como se ilustra na figura 7.27 para os deslocamentos e forças nodais q_i^* e Q_i^*.

O problema que se põe é a definição da equação em função do novo conjunto de variáveis, na forma,

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{K}^* \, \mathbf{q}^* + \mathbf{Q}_0^*. \tag{7.30}$$

em que se omite o índice de identificação da barra, m, para simplificar a notação. Deve-se sublinhar que se mantém a interpretação dada pelas definições (D7.2) e (D7.1), agora em termos das novas variáveis.

Para obter a equação (7.30) a partir da equação (7.9) é conveniente exprimi-las na seguinte forma,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{01} \\ \mathbf{Q}_{02} \end{Bmatrix} \tag{7.31a}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{*1} \\ \mathbf{Q}_{*2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^* & \mathbf{K}_{12}^* \\ \mathbf{K}_{21}^* & \mathbf{K}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^* \\ \mathbf{q}_2^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{01}^* \\ \mathbf{Q}_{02}^* \end{Bmatrix} \tag{7.31b}$$

em que o índice i identifica os vectores dos deslocamentos e forças nodais do nó i do elemento (índices 1 a 3 para $i = 1$ e índices 4 a 6 para $i = 2$). Recorda-se que a matriz de rigidez é simétrica:

$$\mathbf{K}_{21} = \mathbf{K}_{12}^T.$$

A mudança de coordenadas dos deslocamentos e das forças nodais tem a mesma expressão geral,

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{R}\,\mathbf{q}_i^* \tag{7.32a}$$

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{R}\,\mathbf{Q}_i^* \tag{7.32b}$$

onde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

tendo a matriz de rotação a propriedade de ser uma matriz ortogonal:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T.$$

Esta propriedade garante que o trabalho dos deslocamentos nodais sobre as forças nodais é independente do referencial de medida,

$$\mathbf{q}_i^T\,\mathbf{Q}_i = (\mathbf{R}\,\mathbf{q}_i^*)^T\,(\mathbf{R}\,\mathbf{Q}_i^*) = \mathbf{q}_i^{*T}\,\mathbf{Q}_i^*$$

sendo esta relação muito útil para simplificar o cálculo manual de estruturas utilizando o método dos deslocamentos.

Os resultados (7.31) e (7.32) permitem obter facilmente a expressão da matriz de rigidez e do vector das forças de fixação no novo sistema de coordenadas:

$$\mathbf{K}_{ij}^* = \mathbf{R}^T\,\mathbf{K}_{ij}\,\mathbf{R} \tag{7.33a}$$

$$\mathbf{Q}_{0i}^* = \mathbf{R}^T\,\mathbf{Q}_{0i} \tag{7.33b}$$

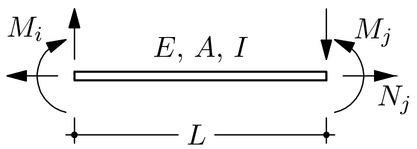
Os resultados aqui apresentados aplicam-se aos elementos estruturais anteriormente analisados, assim como aos diferentes casos de barras com libertações.

Exercício 7.11. Determine a matriz de rigidez em coordenadas globais do elemento de pórtico plano representado na figura 7.27b usando os resultados (7.19) e (7.33a) e recupere o mesmo resultado trabalhando a informação dada na tabela 7.9. Admita que a barra tem comprimento L, rigidez de flexão $E\,I$ e rigidez axial $E\,A$.

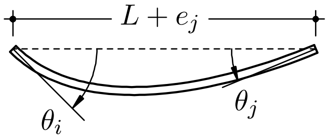
Exercício 7.12. Repita o exercício anterior para determinar o vector das forças de fixação para uma carga transversal uniformemente distribuída, trabalhando agora com os resultados (7.17) e (7.33b), e com a informação da tabela 7.6.

Exercício 7.13. Determine a expressão da matriz de rotação para os elementos de treliça, grelha e pórtico tridimensional e verifique para cada um dos casos a propriedade (7.9).

Esforços Independentes



Deformações Independentes

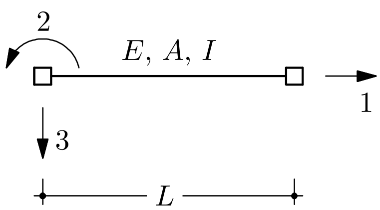


Matriz de Rigidez

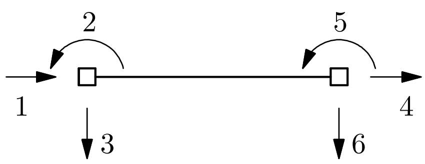
$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{4\,E\,I}{L} & -\frac{2\,E\,I}{L} & 0 \\ -\frac{2\,E\,I}{L} & \frac{4\,E\,I}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E\,A}{L} \end{bmatrix}$$

Tabela 7.1: Esforços e deformações independentes em elemento de pórtico plano.

Características



Forças e Deslocamentos Nodais



Matriz de Rigidez

$$\mathbf{K}_* = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\,A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\,E\,I}{L} & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & 0 & \frac{2\,E\,I}{L} & \frac{6\,E\,I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{12\,E\,I}{L^3} & 0 & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & -\frac{12\,E\,I}{L^3} \\ \hline -\frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & \frac{E\,A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\,E\,I}{L} & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & 0 & \frac{4\,E\,I}{L} & \frac{6\,E\,I}{L^2} \\ 0 & \frac{6\,E\,I}{L^2} & -\frac{12\,E\,I}{L^3} & 0 & \frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{12\,E\,I}{L^3} \end{array}\right]$$

Tabela 7.2: Elemento de pórtico plano.

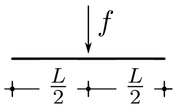
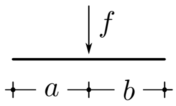
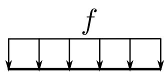
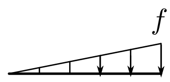
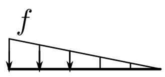
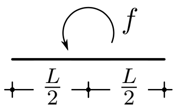
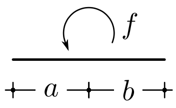
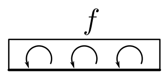
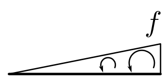
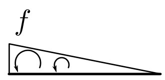
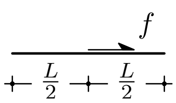
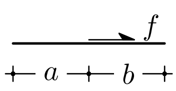
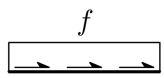
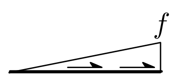
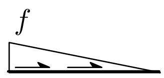
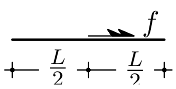
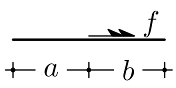
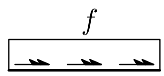
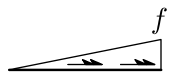
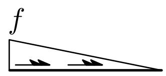
					
M_i	$-\frac{f\,L}{8}$	$-\frac{f\,a\,b^2}{L^2}$	$-\frac{f\,L^2}{12}$	$-\frac{f\,L^2}{30}$	$-\frac{f\,L^2}{20}$
M_j	$-\frac{f\,L}{8}$	$-\frac{f\,a^2\,b}{L^2}$	$-\frac{f\,L^2}{12}$	$-\frac{f\,L^2}{20}$	$-\frac{f\,L^2}{30}$
					
M_i	$-\frac{f}{4}$	$-\frac{f\,b\,(2\,a-b)}{L^2}$	0	$-\frac{f\,L}{12}$	$\frac{f\,L}{12}$
M_j	$\frac{f}{4}$	$\frac{f\,a\,(2\,b-a)}{L^2}$	0	$-\frac{f\,L}{12}$	$\frac{f\,L}{12}$
					
N_j	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,a}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{3}$	$-\frac{f\,L}{6}$
					
T_j	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,a}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{3}$	$-\frac{f\,L}{6}$

Tabela 7.3: Esforços de fixação devidos a forças de vão.

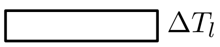
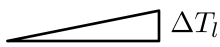
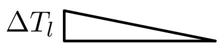
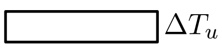
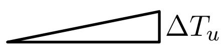
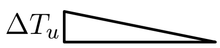
			
M_i	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$	0	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$
M_j	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$	0
			
N_j	$-\alpha\,\Delta T_u\,E\,A$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$

Tabela 7.4: Esforços de fixação devidos a variações de temperatura.

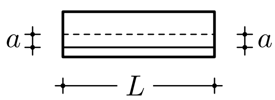
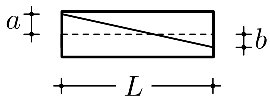
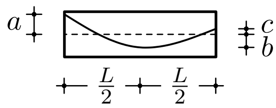
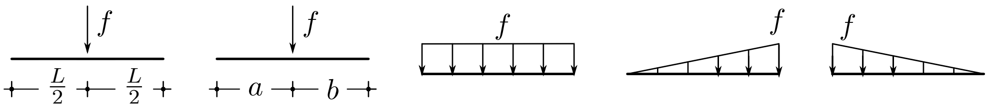
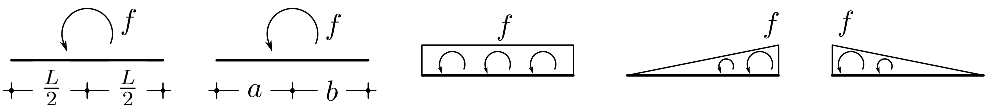
			
M_i	$t_0\,a$	$-t_0\,a$	$-\frac{(2\,a-b-c)\,t_0}{3}$
M_j	$t_0\,a$	$t_0\,b$	$-\frac{(2\,c-b-a)\,t_0}{3}$
M_j	t_0	t_0	t_0

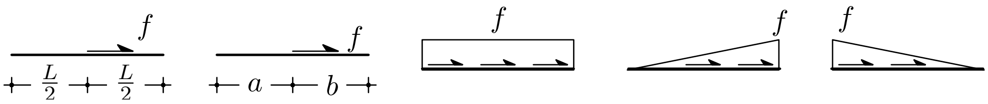
Tabela 7.5: Esforços de fixação devidos à acção do pré-esforço.



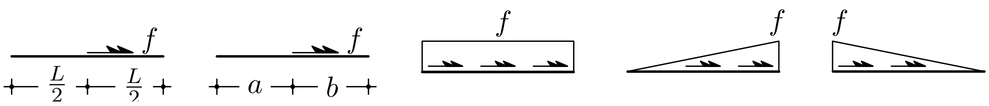
M_A	$\frac{f\,L}{8}$	$\frac{f\,a\,b^2}{L^2}$	$\frac{f\,L^2}{12}$	$\frac{f\,L^2}{30}$	$\frac{f\,L^2}{20}$
M_B	$-\frac{f\,L}{8}$	$-\frac{f\,a^2\,b}{L^2}$	$-\frac{f\,L^2}{12}$	$-\frac{f\,L^2}{20}$	$-\frac{f\,L^2}{30}$
V_A	$\frac{f}{2}$	$\frac{f\,b^2\,(3\,a+b)}{L^3}$	$\frac{f\,L}{2}$	$\frac{3\,f\,L}{20}$	$\frac{7\,f\,L}{20}$
V_B	$\frac{f}{2}$	$\frac{f\,a^2\,(a+3\,b)}{L^3}$	$\frac{f\,L}{2}$	$\frac{7\,f\,L}{20}$	$\frac{3\,f\,L}{20}$



M_A	$\frac{f}{4}$	$\frac{f\,b\,(2\,a-b)}{L^2}$	0	$\frac{f\,L}{12}$	$-\frac{f\,L}{12}$
M_B	$\frac{f}{4}$	$\frac{f\,a\,(2\,b-a)}{L^2}$	0	$-\frac{f\,L}{12}$	$\frac{f\,L}{12}$
V_A	$\frac{3\,f}{2\,L}$	$\frac{6\,f\,a\,b}{L^3}$	f	$\frac{f}{2}$	$\frac{f}{2}$
V_B	$-\frac{3\,f}{2\,L}$	$-\frac{6\,f\,a\,b}{L^3}$	$-f$	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f}{2}$



N_A	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,b}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{6}$	$-\frac{f\,L}{3}$
N_B	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,a}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{3}$	$-\frac{f\,L}{6}$



T_A	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,b}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{6}$	$-\frac{f\,L}{3}$
T_B	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,a}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{3}$	$-\frac{f\,L}{6}$

Tabela 7.6: Forças de fixação devidas a cargas de vão em barra biencastrada.

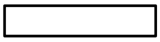
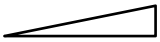
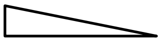
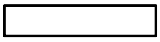
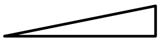
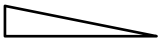
	 ΔT_l	 ΔT_l	ΔT_l 
M_A	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$	0	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$
M_B	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$	0
V_A	0	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{L\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{L\,h}$
V_B	0	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{L\,h}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{L\,h}$
	 ΔT_u	 ΔT_u	ΔT_u 
N_A	$\alpha\,\Delta T_u\,E\,A$	$\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$
N_B	$-\alpha\,\Delta T_u\,E\,A$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$

Tabela 7.7: Forças de fixação devidas à acção da temperatura em barra biencastrada.

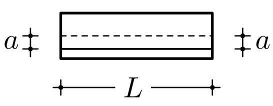
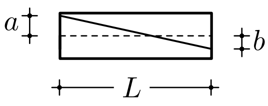
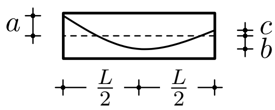
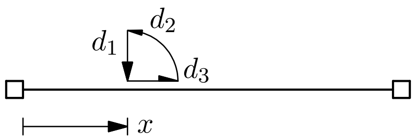
			
M_A	$-t_0\,a$	$t_0\,a$	$\frac{(2\,a-b-c)\,t_0}{3}$
M_B	$t_0\,a$	$t_0\,b$	$\frac{-(2\,c-b-a)\,t_0}{3}$
V_A	0	$\frac{(a+b)\,t_0}{L}$	$\frac{(a-c)\,t_0}{L}$
V_B	0	$\frac{-(a+b)\,t_0}{L}$	$-\frac{(a-c)\,t_0}{L}$
N_A	$-t_0$	$-t_0$	$-t_0$
N_B	t_0	t_0	t_0

Tabela 7.8: Forças de fixação devidas à acção do pré-esforço em barra biencastrada.



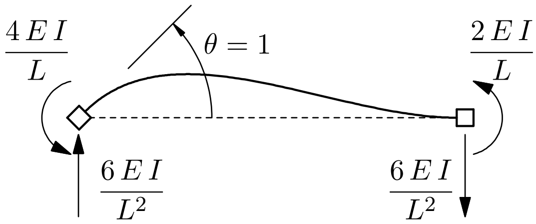
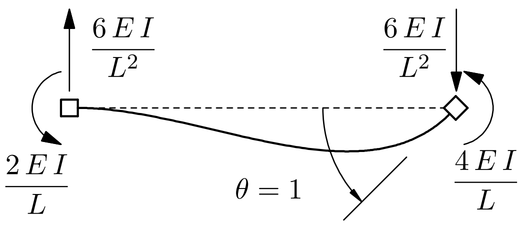
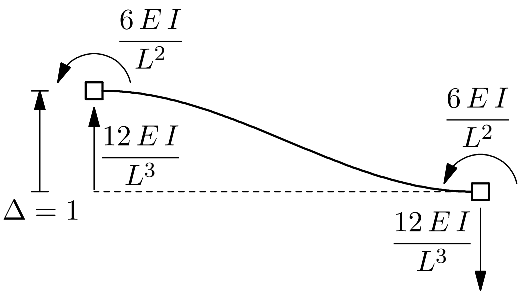
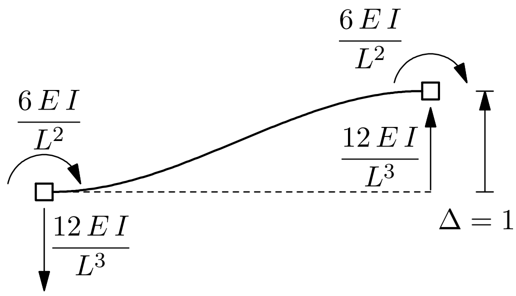
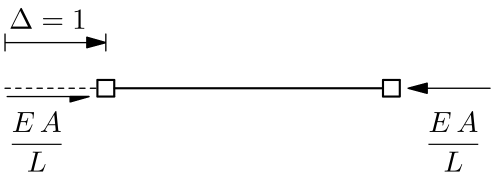
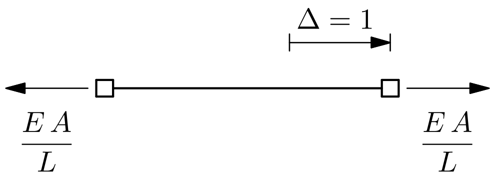
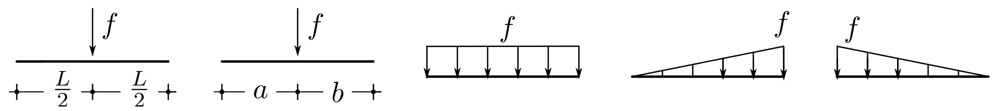
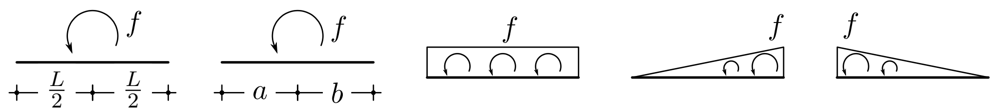
 $d_1 = -x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}$ $d_2 = 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}$	 $d_1 = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}$ $d_2 = -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}$
 $d_1 = -1 + \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$ $d_2 = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}$	 $d_1 = -\frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$ $d_2 = \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}$
 $d_3 = 1 - \frac{x}{L}$	 $d_3 = \frac{x}{L}$

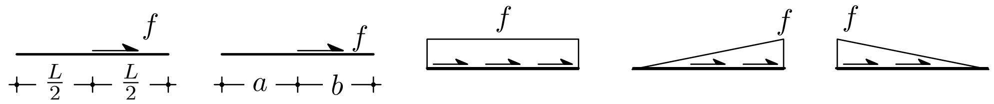
Tabela 7.9: Acção de deslocamentos nodais em barra biencastrada.



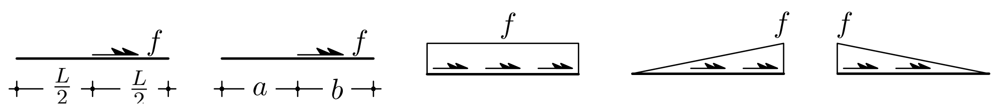
M_A	$\frac{3\,f\,L}{16}$	$\frac{f\,a\,b\,(L+b)}{2\,L^2}$	$\frac{f\,L^2}{8}$	$\frac{7\,f\,L^2}{120}$	$\frac{8\,f\,L^2}{120}$
V_A	$\frac{11\,f}{16}$	$\frac{f\,b\left(3\,L^2-b^2\right)}{2\,L^3}$	$\frac{5\,f\,L}{8}$	$\frac{27\,f\,L}{120}$	$\frac{48\,f\,L}{120}$
V_B	$\frac{5\,f}{16}$	$\frac{f\,a^2\,(3\,L-a)}{2\,L^3}$	$\frac{3\,f\,L}{8}$	$\frac{33\,f\,L}{120}$	$\frac{12\,f\,L}{120}$
θ_B	$\frac{f\,L^2}{32\,E\,I}$	$\frac{f\,a^2\,b}{4\,E\,I\,L}$	$\frac{f\,L^3}{48\,E\,I}$	$\frac{f\,L^3}{80\,E\,I}$	$\frac{f\,L^3}{120\,E\,I}$



M_A	$\frac{f}{8}$	$\frac{f\left(L^2-3\,b^2\right)}{2\,L^2}$	0	$\frac{f\,L}{8}$	$-\frac{f\,L}{8}$
V_A	$\frac{9\,f}{8\,L}$	$\frac{3\,f\,a\,(L+b)}{2\,L^3}$	f	$\frac{5\,f}{8}$	$\frac{3\,f\,L}{8}$
V_B	$-\frac{9\,f}{8\,L}$	$-\frac{3\,f\,a\,(L+b)}{2\,L^3}$	$-f$	$-\frac{5\,f}{8}$	$-\frac{3\,f\,L}{8}$
θ_B	$-\frac{f\,L}{16\,E\,I}$	$-\frac{f\,a\,(2\,b-a)}{4\,E\,I\,L}$	0	$\frac{f\,L^2}{48\,E\,I}$	$-\frac{f\,L^2}{48\,E\,I}$



N_A	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,b}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{6}$	$-\frac{f\,L}{3}$
N_B	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,a}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{3}$	$-\frac{f\,L}{6}$



T_A	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,b}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{6}$	$-\frac{f\,L}{3}$
T_B	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,a}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{3}$	$-\frac{f\,L}{6}$

Tabela 7.10: Forças de fixação devidas a cargas de vão em barra encastrada-rotulada.

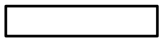
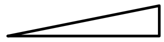
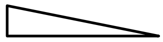
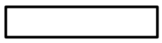
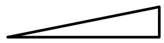
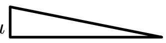
	 ΔT_l	 ΔT_l	ΔT_l 
M_A	$\frac{3\,\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$
V_A	$\frac{3\,\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,L\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,L\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{L\,h}$
V_B	$-\frac{3\,\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,L\,h}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,L\,h}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{L\,h}$
θ_B	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L}{4\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L}{4\,h}$	0
	 ΔT_u	 ΔT_u	ΔT_u 
N_A	$\alpha\,\Delta T_u\,E\,A$	$\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$
N_B	$-\alpha\,\Delta T_u\,E\,A$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$

Tabela 7.11: Forças de fixação devidas à acção da temperatura em barra encastrada--rotulada.

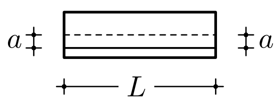
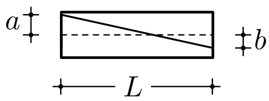
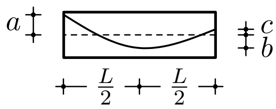
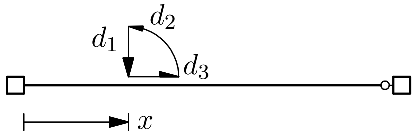
			
M_A	$-\frac{3\,t_0\,a}{2}$	$\frac{t_0\,(2\,a-b)}{2}$	$\frac{t_0\,(a-b)}{2}$
V_A	$-\frac{3\,t_0\,a}{2\,L}$	$\frac{t_0\,(2\,a-b)}{2\,L}$	$\frac{t_0\,(a-b)}{2\,L}$
V_B	$\frac{3\,t_0\,a}{2\,L}$	$-\frac{t_0\,(2\,a-b)}{2\,L}$	$-\frac{t_0\,(a-b)}{2\,L}$
N_A	$-t_0$	$-t_0$	$-t_0$
N_B	t_0	t_0	t_0
ΔT_B	$-\frac{t_0\,a\,L}{4\,E\,I}$	$-\frac{t_0\,b\,L}{4\,E\,I}$	$\frac{t_0\,(2\,c-b-a)\,L}{12\,E\,I}$

Tabela 7.12: Forças de fixação devidas à acção do pré-esforço em barra encastrada-rotulada.



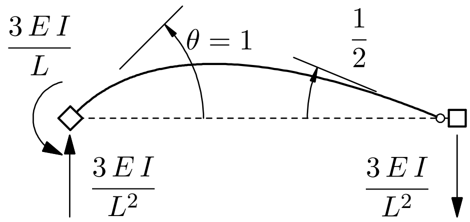
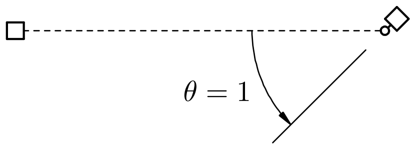
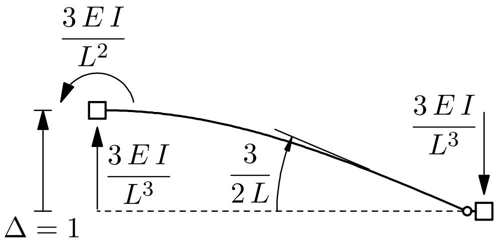
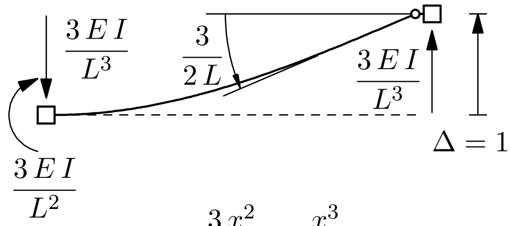
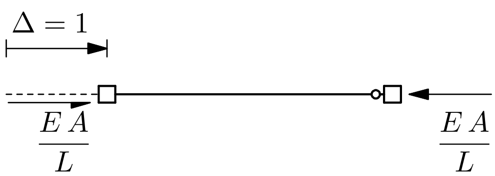
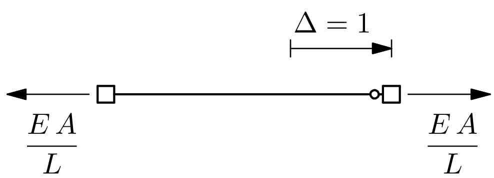
 $d_1 = -x + \frac{3\,x^2}{L} - \frac{x^3}{2\,L^2}$ $d_2 = 1 - \frac{3\,x}{L} + \frac{3\,x^2}{2\,L^2}$	(não introduz esforços)  $d_1 = 0$ $d_2 = 0$
 $d_1 = -1 + \frac{3\,x^2}{2\,L^2} - \frac{x^3}{2\,L^3}$ $d_2 = -\frac{3\,x}{L^2} + \frac{3\,x^2}{2\,L^3}$	 $d_1 = -\frac{3\,x^2}{2\,L^2} + \frac{x^3}{2\,L^3}$ $d_2 = \frac{3\,x}{L^2} - \frac{3\,x^2}{2\,L^3}$
 $d_3 = 1 - \frac{x}{L}$	 $d_3 = \frac{x}{L}$

Tabela 7.13: Acção de deslocamentos nodais em barra encastrada-rotulada.

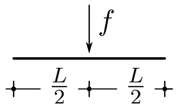
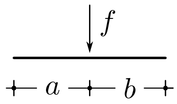
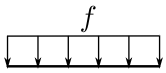
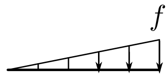
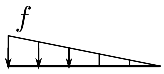
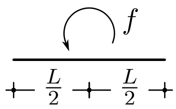
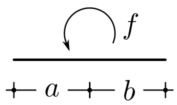
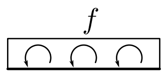
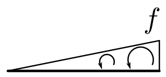
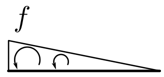
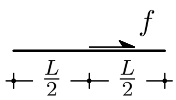
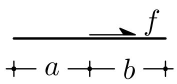
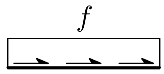
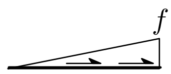
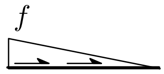
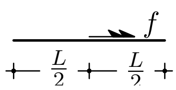
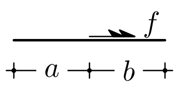
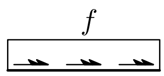
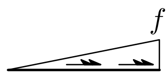
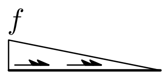
					
M_A	$\frac{3\,f\,L}{8}$	$\frac{f\,a\,(b+L)}{2\,L}$	$\frac{f\,L^2}{3}$	$\frac{5\,f\,L^2}{24}$	$\frac{3\,f\,L^2}{24}$
M_B	$\frac{f\,L}{8}$	$\frac{f\,a^2}{2\,L}$	$\frac{f\,L^2}{6}$	$\frac{3\,f\,L^2}{24}$	$\frac{f\,L^2}{24}$
V_A	f	f	$f\,L$	$\frac{f\,L}{2}$	$\frac{f\,L}{2}$
Δ_B	$\frac{f\,L^3}{24\,E\,I}$	$\frac{f\,a^2\,(a+3\,b)}{12\,E\,I}$	$\frac{f\,L^4}{24\,E\,I}$	$\frac{7\,f\,L^4}{240\,E\,I}$	$\frac{3\,f\,L^4}{240\,E\,I}$
					
M_A	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,b}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{6}$	$-\frac{f\,L}{3}$
M_B	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,a}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{3}$	$-\frac{f\,L}{6}$
V_A	0	0	0	0	0
Δ_B	$-\frac{f\,L^2}{8\,E\,I}$	$-\frac{f\,a\,b}{2\,E\,I}$	$\frac{f\,L^3}{12\,E\,I}$	$\frac{f\,L^3}{24\,E\,I}$	$-\frac{f\,L^3}{24\,E\,I}$
					
N_A	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,b}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{6}$	$-\frac{f\,L}{3}$
N_B	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,a}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{3}$	$-\frac{f\,L}{6}$
					
T_A	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,b}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{6}$	$-\frac{f\,L}{3}$
T_B	$-\frac{f}{2}$	$-\frac{f\,a}{L}$	$-\frac{f\,L}{2}$	$-\frac{f\,L}{3}$	$-\frac{f\,L}{6}$

Tabela 7.14: Forças de fixação devidas a cargas de vão em barra encastrada-encastrada deslizante.

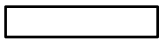
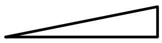
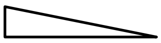
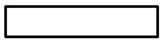
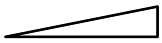
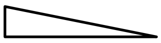
	 ΔT_l	 ΔT_l	ΔT_l 
M_A	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,h}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,h}$
M_B	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{h}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,h}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,E\,I}{2\,h}$
V_A	0	0	0
Δ_B	0	$\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L^2}{12\,h}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_l\,L^2}{12\,h}$
	 ΔT_u	 ΔT_u	ΔT_u 
N_A	$\alpha\,\Delta T_u\,E\,A$	$\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$	$\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$
N_B	$-\alpha\,\Delta T_u\,E\,A$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$	$-\frac{\alpha\,\Delta T_u\,E\,A}{2}$

Tabela 7.15: Forças de fixação devidas à acção da temperatura em barra encastrada--encastrada deslizante.

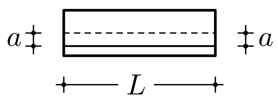
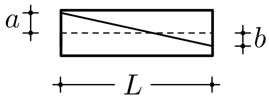
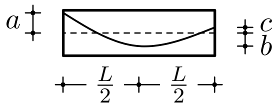
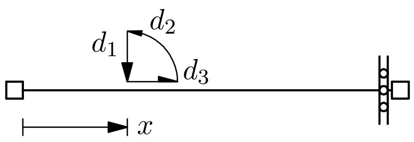
			
M_A	$-t_0\,a$	$\frac{t_0\,(a-b)}{2}$	$\frac{t_0\,(a-2\,b+c)}{6}$
M_B	$t_0\,a$	$-\frac{t_0\,(a-b)}{2}$	$-\frac{t_0\,(a-2\,b+c)}{6}$
V_A	0	0	0
N_A	$-t_0$	$-t_0$	$-t_0$
N_B	t_0	t_0	t_0
Δ_B	0	$-\frac{t_0\,(a+b)\,L^2}{12\,E\,I}$	$-\frac{t_0\,(a-c)\,L^2}{12\,E\,I}$

Tabela 7.16: Forças de fixação devidas à acção do pré-esforço em barra encastrada-encastrada deslizante.



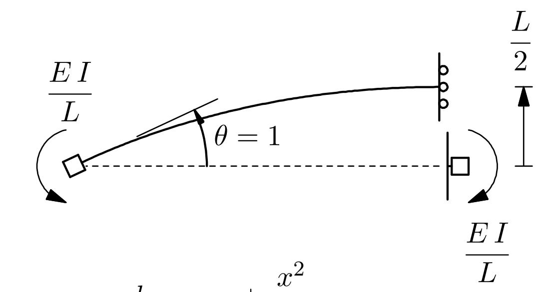
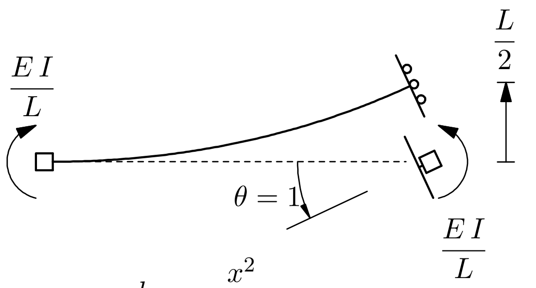
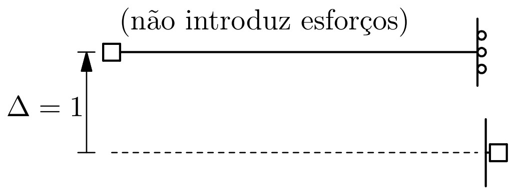
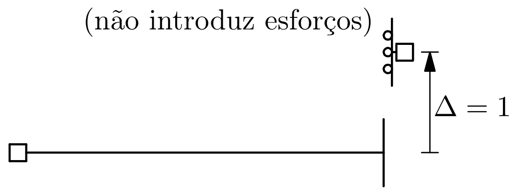
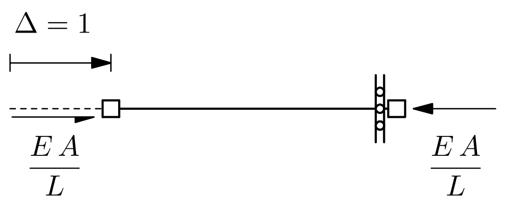
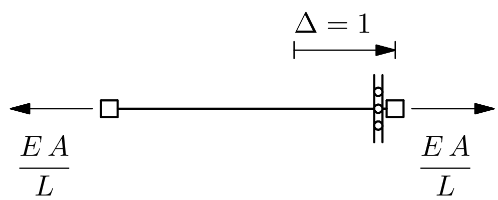
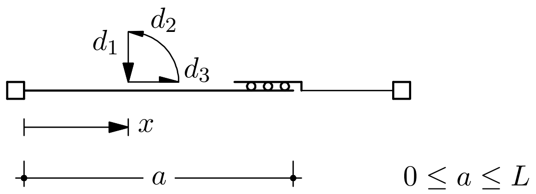
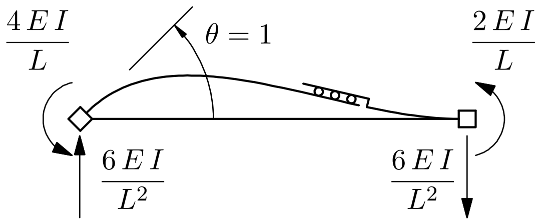
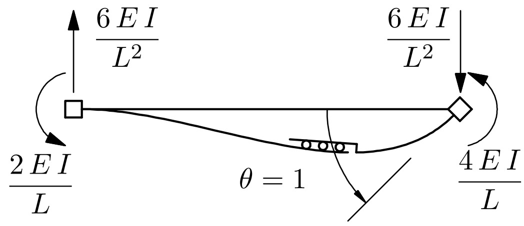
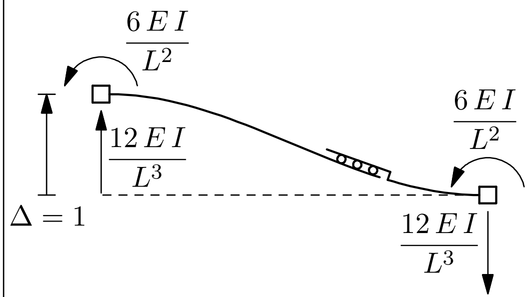
 $d_1 = -x + \frac{x^2}{2\,L}$ $d_2 = 1 - \frac{x}{L}$	 $d_1 = -\frac{x^2}{2\,L}$ $d_2 = \frac{x}{L}$
 $d_1 = -1$ $d_2 = 0$	 $d_1 = 0$ $d_2 = 0$
 $d_3 = 1 - \frac{x}{L}$	 $d_3 = \frac{x}{L}$

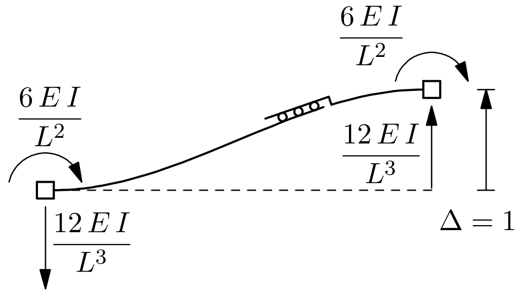
Tabela 7.17: Acção de deslocamentos nodais em barra encastrada-encastrada deslizante.



<table>
<tr>
<td>


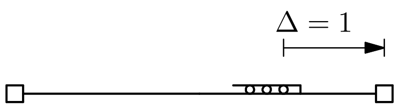
$$d_1 = -x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}$$
$$d_2 = 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}$$
</td>
<td>


$$d_1 = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}$$
$$d_2 = -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>


$$d_1 = -1 + \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$
$$d_2 = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}$$
</td>
<td>


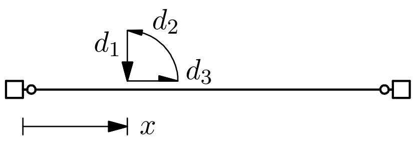
$$d_1 = -\frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$
$$d_2 = \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
(não introduz esforços)

$$d_3 = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases}$$
</td>
<td>
(não introduz esforços)



$$d_3 = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ 1 & \text{se } x > a \end{cases}$$
</td>
</tr>
</table>

Tabela 7.18: Acção de deslocamentos nodais em barra com libertação de esforço normal.



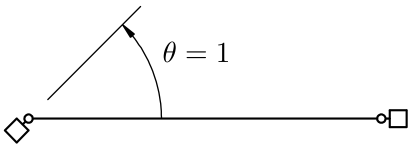
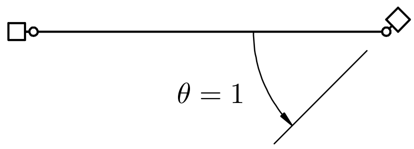
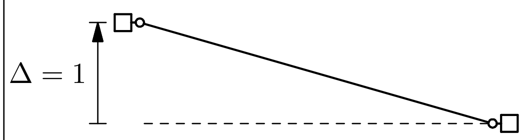
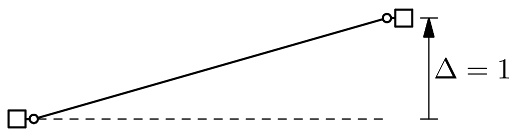
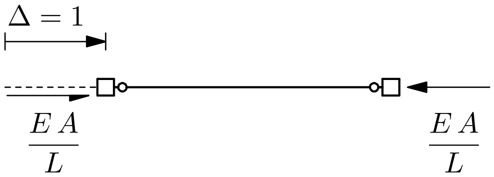
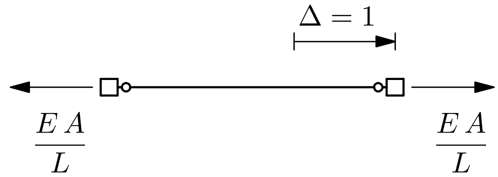
(não introduz esforços)  $d_1 = 0$ $d_2 = 0$	(não introduz esforços)  $d_1 = 0$ $d_2 = 0$
(não introduz esforços)  $d_1 = -1 + \dfrac{x}{L}$ $d_2 = -\dfrac{1}{L}$	(não introduz esforços)  $d_1 = -\dfrac{x}{L}$ $d_2 = \dfrac{1}{L}$
 $d_3 = 1 - \dfrac{x}{L}$	 $d_3 = \dfrac{x}{L}$

Tabela 7.19: Acção de deslocamentos nodais em barra biarticulada.

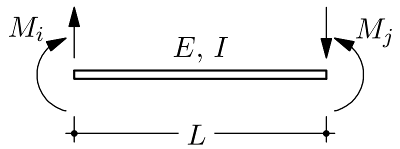
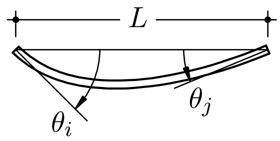
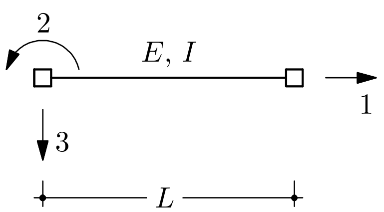
<table>
<tr><td>Esforços Independentes</td><td>Matriz de Rigidez</td></tr>
<tr><td>
</td><td rowspan="4">$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{4\,E\,I}{L} & -\frac{2\,E\,I}{L} \\ -\frac{2\,E\,I}{L} & \frac{4\,E\,I}{L} \end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Deformações Independentes</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

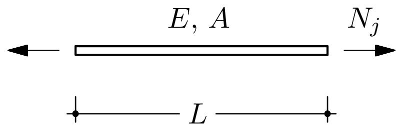
Tabela 7.20: Esforços e deformações independentes em elemento de viga contínua.

<table>
<tr><td>Características</td><td>Forças e Deslocamentos Nodais</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Matriz de Rigidez

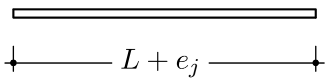
$$\mathbf{K}_* = \left[\begin{array}{cc:cc} \frac{4\,E\,I}{L} & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{2\,E\,I}{L} & \frac{6\,E\,I}{L^2} \\ -\frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{12\,E\,I}{L^3} & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & -\frac{12\,E\,I}{L^3} \\ \hdashline \frac{2\,E\,I}{L} & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{4\,E\,I}{L} & \frac{6\,E\,I}{L^2} \\ \frac{6\,E\,I}{L^2} & -\frac{12\,E\,I}{L^3} & \frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{12\,E\,I}{L^3} \end{array}\right]$$</td></tr>
</table>

Tabela 7.21: Elemento de viga contínua.

Esforços Independentes



Deformações Independentes

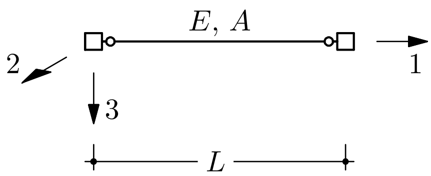


Matriz de Rigidez

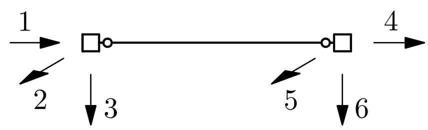
$$\mathbf{K}_m = \left[\frac{E\,A}{L} \right]$$

Tabela 7.22: Esforços e deformações independentes em elemento de treliça.

Características



Forças e Deslocamentos Nodais

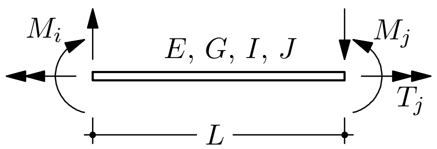


Matriz de Rigidez

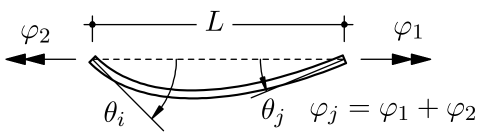
$$\mathbf{K}_* = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\,A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -\frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & \frac{E\,A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tabela 7.23: Elemento de treliça.

Esforços Independentes



Deformações Independentes

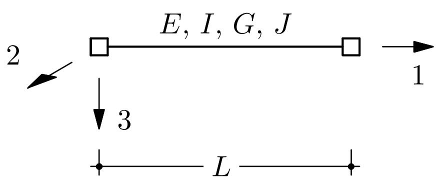


Matriz de Rigidez

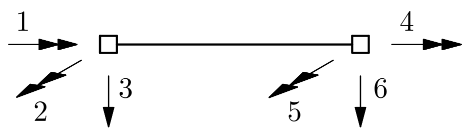
$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{4\,E\,I}{L} & -\frac{2\,E\,I}{L} & 0 \\ -\frac{2\,E\,I}{L} & \frac{4\,E\,I}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G\,J}{L} \end{bmatrix}$$

Tabela 7.24: Esforços e deformações independentes em elemento de grelha.

Características



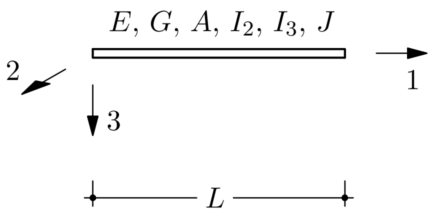
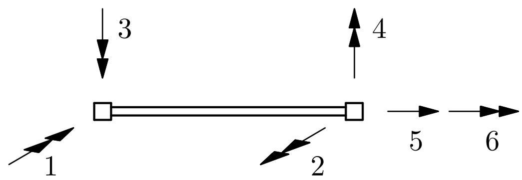
Forças e Deslocamentos Nodais



Matriz de Rigidez

$$\mathbf{K}_* = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{G\,J}{L} & 0 & 0 & -\frac{G\,J}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\,E\,I}{L} & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & 0 & \frac{2\,E\,I}{L} & \frac{6\,E\,I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{12\,E\,I}{L^3} & 0 & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & -\frac{12\,E\,I}{L^3} \\ \hdashline -\frac{G\,J}{L} & 0 & 0 & \frac{G\,J}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\,E\,I}{L} & -\frac{6\,E\,I}{L^2} & 0 & \frac{4\,E\,I}{L} & \frac{6\,E\,I}{L^2} \\ 0 & \frac{6\,E\,I}{L^2} & -\frac{12\,E\,I}{L^3} & 0 & \frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{12\,E\,I}{L^3} \end{array}\right]$$

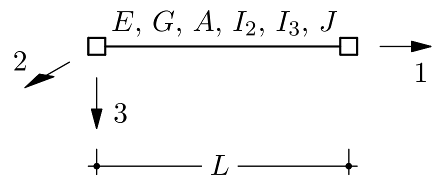
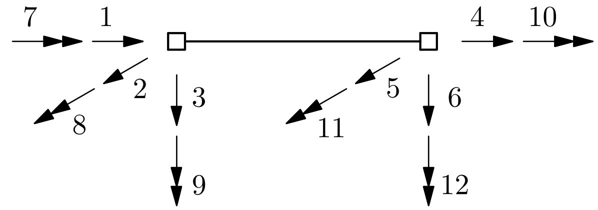
Tabela 7.25: Elemento de grelha.

Características	Esforços e Deformações Independentes
	

Matriz de Rigidez

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{4\,E\,I_2}{L} & -\frac{2\,E\,I_2}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\,E\,I_2}{L} & \frac{4\,E\,I_2}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\,E\,I_3}{L} & -\frac{2\,E\,I_3}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\,E\,I_3}{L} & \frac{4\,E\,I_3}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E\,A}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G\,J}{L} \end{bmatrix}$$

Tabela 7.26: Esforços e deformações independentes em elemento de pórtico tridimensional.

Características	Forças e Deslocamentos Nodais
	

Matriz de Rigidez

$$
\mathbf{K}_* = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 \\
\hline
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_2}{L^3} & 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 & 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L} & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L}
\end{array}\right]
$$

Tabela 7.27: Elemento de pórtico tridimensional.

Capítulo 8

Indeterminação Cinemática

8.1 Introdução

Ao analisar o comportamento de uma estrutura sujeita a uma determinada solicitação, as incógnitas de natureza cinemática presentes no problema são os *deslocamentos* que se verificam nos nós de discretização da estrutura e as *descontinuidades* que se instalam nos aparelhos de libertação que nela possam existir. A estrutura diz-se ser *cinematicamente determinada* quando todos os deslocamentos nodais e todas as descontinuidades são conhecidos.

Os elementos-base analisados no capítulo anterior são os sistemas estruturais cinematicamente determinados mais simples de que neste momento se dispõe. Nas tabelas anteriormente apresentadas estão definidos os deslocamentos nodais e as descontinuidades que neles se desenvolvem quando são actuados pelas cargas de vão ou sujeitos aos deslocamentos impostos que aí se consideram.

Entre os elementos-base que então foram analisados, os que estão associados a estruturas planas solicitadas no próprio plano são os representados na figura 8.1. Qualquer combinação dos elementos-base aí indicados gera sistemas estruturais planos que também

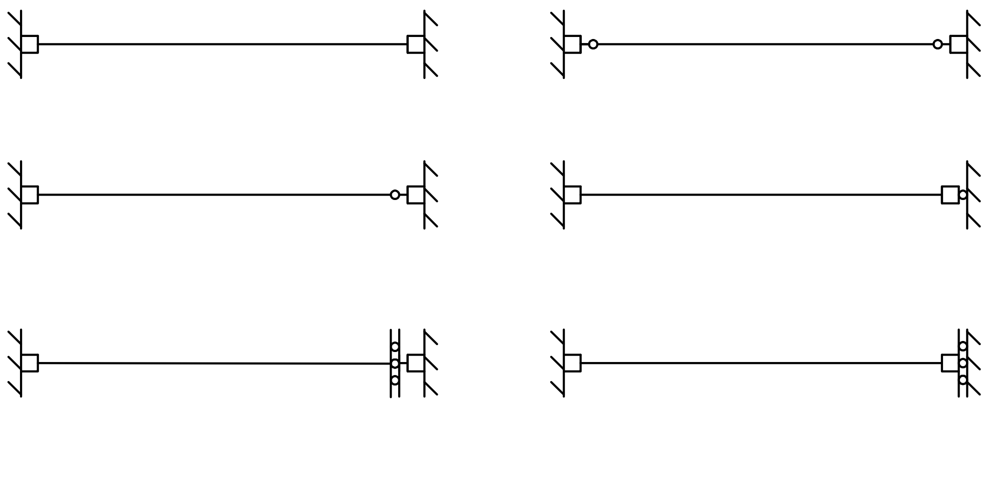


Figura 8.1: Barras cinematicamente determinadas.

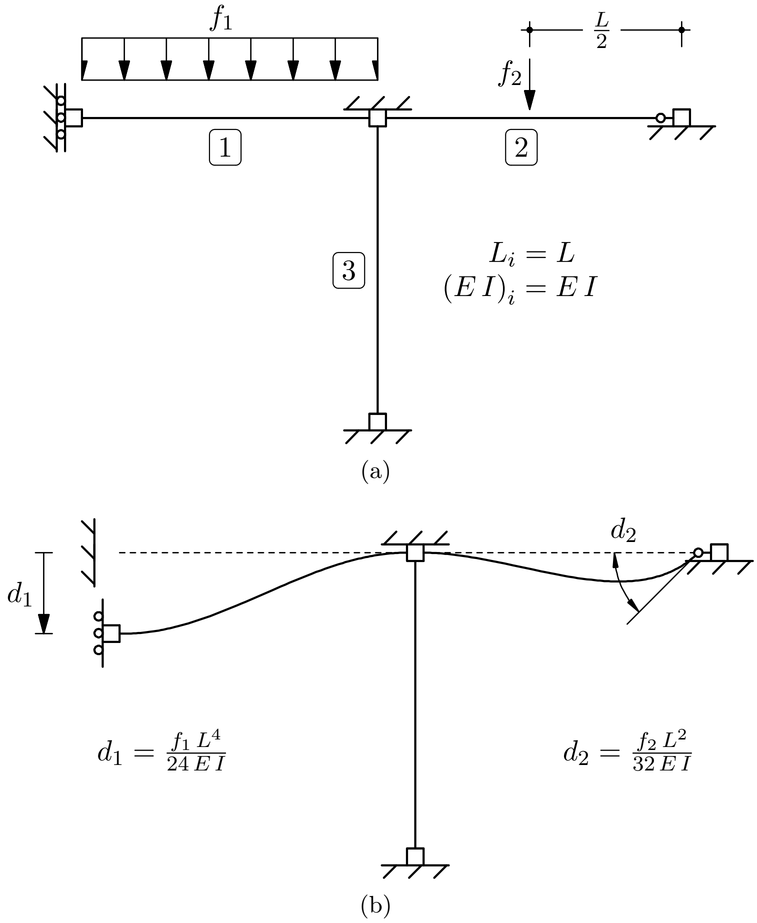


Figura 8.2: Estrutura cinematicamente determinada.

são cinematicamente determinados.

Na figura 8.2a representa-se um sistema desse tipo. A estrutura é cinematicamente determinada, por ser possível calcular os deslocamentos que se desenvolvem nos nós usando directamente os resultados resumidos nas tabelas 7.6 a 7.8, onde se caracteriza o comportamento dos elementos-base que a compõem.

Como se ilustra na figura 8.2b, o que caracteriza o comportamento das estruturas cinematicamente determinadas é o facto de não existir interacção entre os elementos que as constituem. Os esforços, as deformações e os deslocamentos que se desenvolvem num elemento dependem exclusivamente das suas propriedades, geométricas e mecânicas, e da solicitação que sobre ele directamente actua.

Este tipo de comportamento deve-se ao facto de estar encastrado ao meio de fundação o único nó da estrutura que é comum aos elementos que a constituem. O encastramento permite que cada barra transmita directamente para a fundação, sob a forma de reacções de apoio, os esforços que nela se desenvolvem.

Como se ilustra na figura 8.3, a independência do comportamento dos elementos da estrutura termina assim que se introduz uma libertação ao exterior no nó por eles partilhado. Se, como aí se indica, essa libertação for uma articulação, os elementos 1 e 2 deixam de poder transmitir directamente para a fundação os momentos flectores que se desenvolvem nas secções que os ligam ao nó que partilham. Consequentemente, estabelece-se um

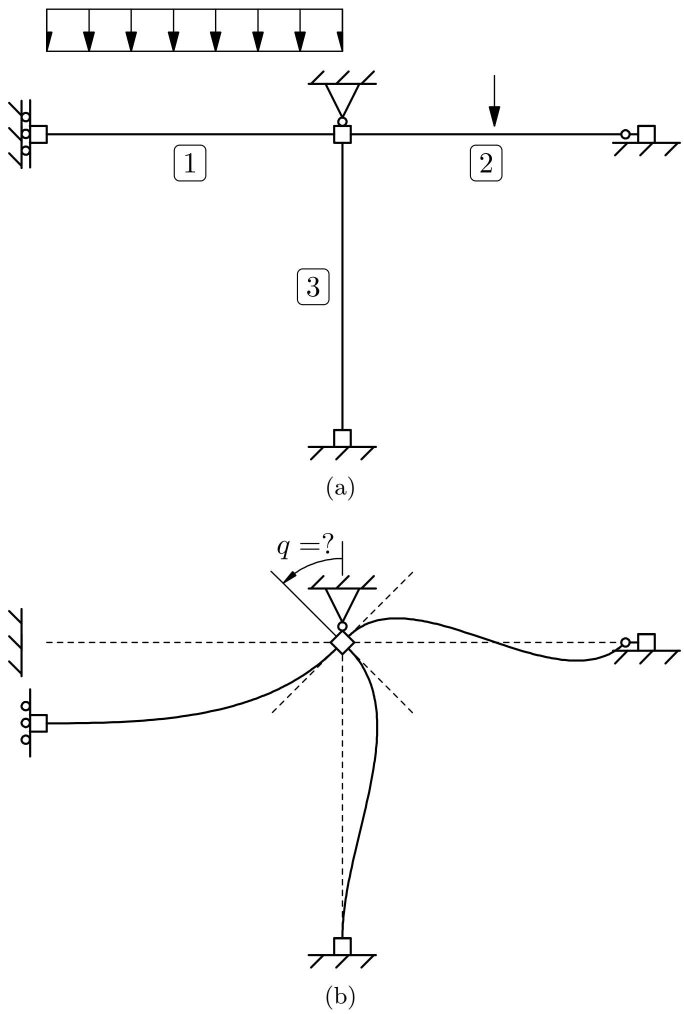


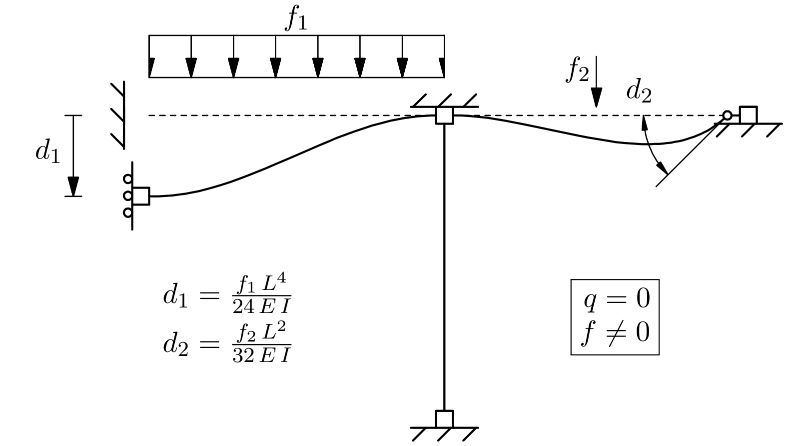
Figura 8.3: Estrutura cinematicamente indeterminada.

fluxo de esforços entre os vários elementos, que se traduz na alteração da deformada da estrutura. A deformação que agora se verifica no elemento 3 resulta dos esforços que lhe são transmitidos pelos restantes elementos.

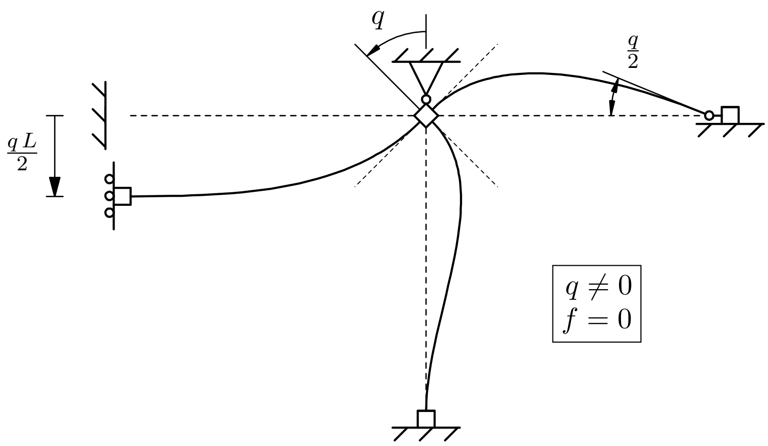
Como os deslocamentos que se desenvolvem nos nós da estrutura não podem ser calculados directamente a partir dos resultados resumidos nas tabelas que caracterizam o comportamento de cada elemento estrutural, diz-se que a estrutura se tornou *cinematicamente indeterminada*. O que caracteriza o comportamento das estruturas cinematicamente indeterminadas é pois a interacção que se manifesta entre os elementos que a compõem. O comportamento de cada elemento influencia e é influenciado pelo dos restantes elementos da estrutura.

Como se ilustra na figura 8.4, a deformada representada na figura 8.3a pode ser obtida sobrepondo a da estrutura cinematicamente determinada, indicada na figura 8.2b, com a que se obtém quando se impõe a rotação nodal q na ausência das solicitações de vão. Os deslocamentos definidos na figura 8.4b foram obtidos a partir das tabelas 7.13 e 7.17.

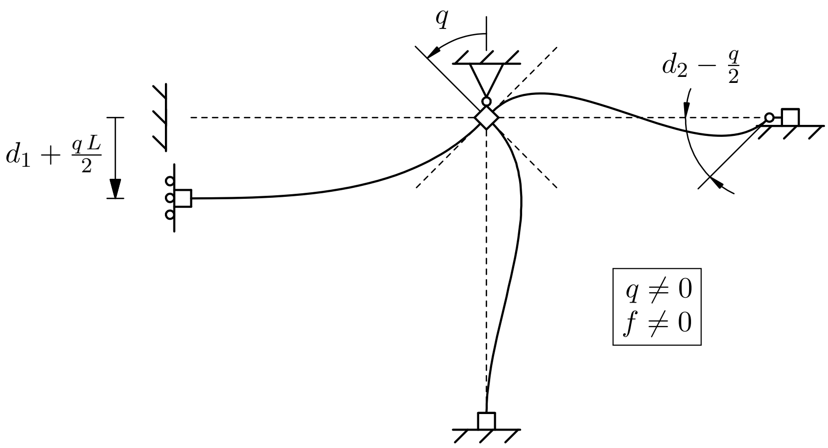
Os resultados apresentados na figura 8.4c mostram que só é possível determinar os deslocamentos em todos os nós e a descontinuidade angular na articulação, quando se conhecer a rotação q. Diz-se por isso que a estrutura é *uma vez* cinematicamente indeterminada.



(a) Solução particular (estado 0).



(b) Solução Complementar (estado 1).



(c) Solução completa.

Figura 8.4: Sobreposição de efeitos.

No caso geral, define-se como *grau de indeterminação cinemática* de uma estrutura, β, o número de deslocamentos nodais e de descontinuidades que é necessário e suficiente conhecer para determinar univocamente os deslocamentos em todos os nós e as descontinuidades em todas as libertações da estrutura. Por outras palavras, é o menor número de deslocamentos nodais e de descontinuidades que é necessário impedir na estrutura para a reduzir a um sistema de elementos-base cinematicamente determinados.

Esta definição mostra que, contrariamente ao que sucedia com o grau de hiperestatia, α, o grau de indeterminação cinemática não é um invariante da estrutura, pois depende da discretização adoptada e, fundamentalmente, dos elementos-base disponíveis.

Se, para analisar a estrutura representada na figura 8.3a, se dispuser apenas do elemento biencastrado representado na figura 8.1, o grau de indeterminação cinemática da estrutura cresce para $\beta = 3$. Como se ilustra na figura 8.5a, torna-se agora necessário bloquear 2 deslocamentos nodais e a descontinuidade na articulação para reduzir a estrutura a uma combinação de elementos biencastrados.

Admita-se novamente que para analisar a estrutura em causa, se dispõe de todos os elementos indicados na figura 8.1. Suponha-se todavia que sob a carga concentrada que actua sobre a estrutura se introduz também um nó de discretização. Se assim se fizer, a indeterminação cinemática cresce em 3 graus, pois passa a ser necessário bloquear 4 deslocamentos para transformar a estrutura num sistema de elementos cinematicamente determinados, como se ilustra na figura 8.5b.

Note-se que a introdução desse nó adicional seria de facto necessária se o elemento fosse composto por dois troços com propriedades geométricas e/ou mecânicas distintas, pois a análise das peças cinematicamente determinadas, realizada no capítulo anterior, baseou-se na hipótese dos elementos serem uniformes.

Mesmo que os elementos da estrutura em causa sejam uniformes se, como se ilustra na figura 8.5c, a articulação for elástica, e não perfeita, a descontinuidade angular que aí se desenvolve tem de ser considerada como independente, pois não se dispõe de nenhum elemento-base com essas características.

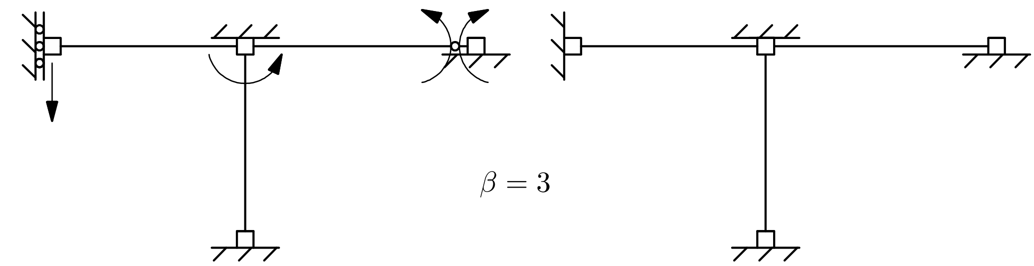
Uma situação análoga é a representada na figura 8.5d. O deslocamento no encastramento deslizante tem de ser considerado como independente por este ser oblíquo em relação ao eixo da peça. Nenhum dos elementos analisados apresenta esta condição apoio.

Exercício 8.1. Determine os graus de indeterminação cinemática do pórtico plano representado na figura 8.6, quando se admite que se dispõe dos seguintes elementos-base:
(i) elementos biarticulados e biencastrados;
(ii) elemento encastrado-articulado, para além dos anteriores.

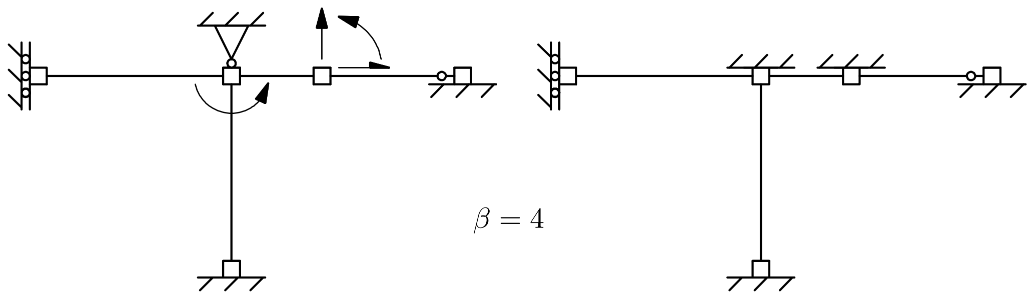
8.2 Estruturas sem Libertações

Numa estrutura reticulada sem aparelhos de libertação, os nós de discretização estão encastrados às barras que a constituem, sendo também por encastramento total que se realizam as ligações ao meio de fundação que nela possam existir. Neste tipo de estruturas, as únicas incógnitas cinemáticas são, portanto, os deslocamentos nos nós livres, isto é nos nós que não são de fundação.

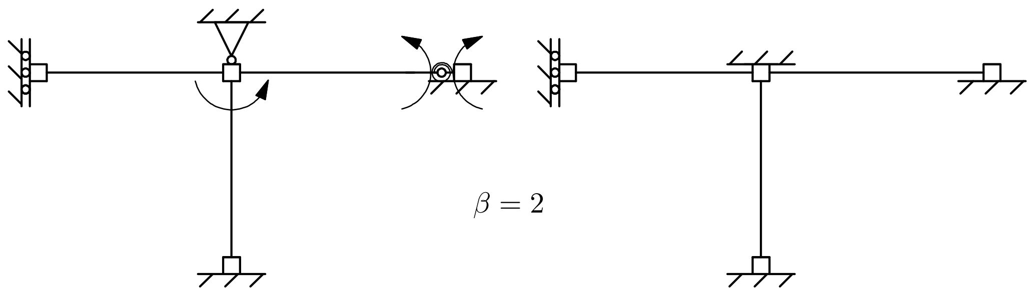
Como o número de graus de liberdade por nó é de 3 ou 6, consoante se trate de uma estrutura plana ou tridimensional, é a seguinte a definição do grau de indeterminação



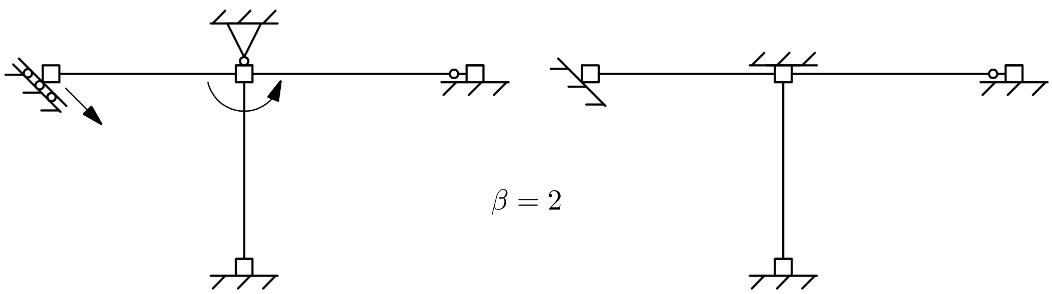
(a) Usando apenas o elemento-base biencastrado.



(b) Discretização com nó adicional.



(c) Substituição da articulação livre por uma articulação elástica.



(d) Rotação do encastramento-deslizante.

Figura 8.5: Indeterminação cinemática para diferentes condições.

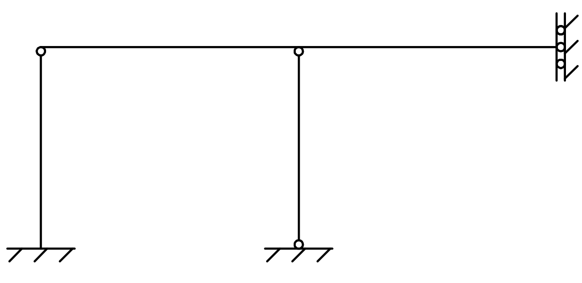


Figura 8.6: Pórtico plano.

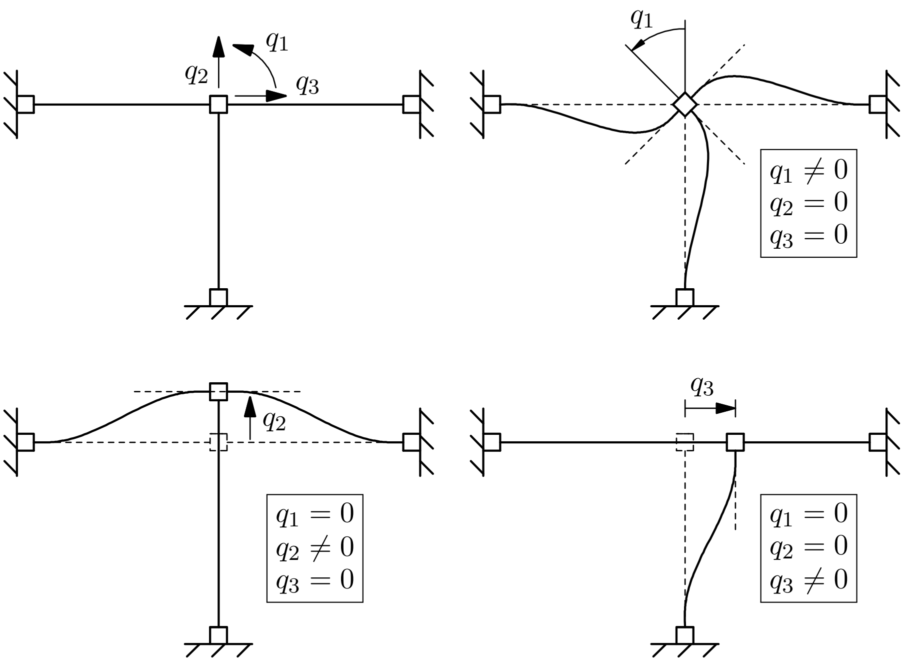


Figura 8.7: Estrutura sem libertações.

cinemática de uma estrutura com N nós livres:

$$\beta = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array} \right\} N. \tag{8.1}$$

Na figura 8.7 indicam-se os graus de liberdade da estrutura aí representada, assim como os modos de deformação associados a cada um dos três deslocamentos independentes.

8.3 Estruturas com Libertações

As estruturas articuladas solicitadas por forças aplicadas nos nós, constituem um caso muito particular de estruturas com libertações. Estas estruturas podem ser representadas, sem perda de generalidade, usando um único tipo de elemento-base, a peça biarticulada indicada na figura 8.1.

Como nas treliças os únicos deslocamentos independentes são as translações dos nós, o grau de indeterminação cinemática é definido por,

$$\beta = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right\} N + L'_e, \tag{8.2}$$

em que L'_e representa o número de translações permitidas nos nós de fundação. Para o exemplo ilustrado na figura 8.8, tem-se:

$$\beta = 2 \cdot 6 + 2.$$

Já anteriormente se referiu que quando o único elemento-base disponível é a peça bien-castrada, tem de se considerar como deslocamentos independentes todos os deslocamentos

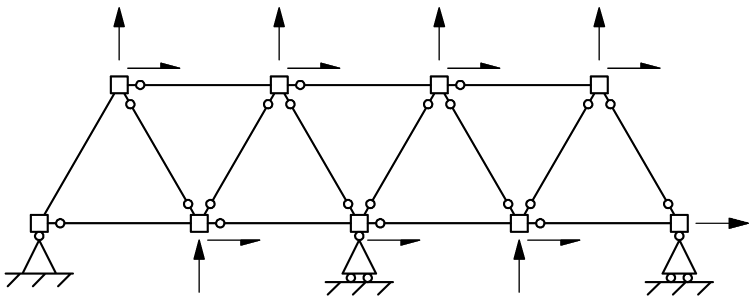


Figura 8.8: Deslocamentos nodais de uma treliça.

nodais possíveis, assim como as descontinuidades em todas as libertações. Esta situação foi ilustrada na figura 8.5a.

Quando assim é, se na estrutura existirem L_e libertações externas e L_i libertações internas, o grau de indeterminação cinemática tem a seguinte expressão:

$$\beta = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array} \right\} N + L_e + L_i. \tag{8.3}$$

Para o caso da estrutura representada na figura 8.5a, tem-se:

$$\beta = 3 \cdot 0 + 2 + 1.$$

A quantificação do grau de indeterminação cinemática de estruturas com libertações só é imediata quando para a análise da estrutura se dispõe apenas de um elemento-base. Caso contrário, torna-se necessário recorrer a um procedimento geral, por não ser possível estabelecer uma fórmula para o grau de indeterminação cinemática válida para todas as aplicações.

O procedimento que se sugere consiste em introduzir sequencialmente ligações na estrutura até a transformar numa combinação dos elementos-base disponíveis para realizar a sua análise. Cada ligação introduzida corresponde a um grau de liberdade que é retirado à estrutura, pelo que o seu grau de indeterminação cinemática se identifica com o número total de bloqueamentos realizados. Para sistematizar este procedimento, deve-se começar pelos elementos com ligações ao meio de fundação, de maneira a transferir os bloqueamentos para o interior da estrutura. Em cada fase, para o nó a analisar deve ser escolhido aquele a que ligam o menor número de elementos.

Como exemplo de aplicação, considere-se a estrutura representada na figura 8.9a e admita-se que para a sua análise estão disponíveis os elementos-base representados na figura 8.1. Esta estrutura é 9 vezes indeterminada cinematicamente, estando a sequência de bloqueamentos ilustrada nas figuras 8.9b a 8.9d.

O nó 5 é o nó de fundação a que liga o menor número de elementos. O deslocamento que é aí permitido deve ser impedido por não se dispor de um elemento-base com um encastramento deslizante oblíquo em relação ao eixo da peça. Como se indica na figura 8.9b, para transformar o elemento 6 numa peça encastrada-articulada, é necessário bloquear o nó 4.

O nó 1 é agora o nó com o maior número de bloqueamentos em que incide o menor número de elementos. Para impedir a interacção entre os elementos 1 e 4, torna-se necessário bloquear a rotação nesse nó, transformando o elemento 1 numa peça biencastrada. Como se ilustra na figura 8.9c, para reduzir o elemento 4 a uma peça do mesmo tipo, o nó 2

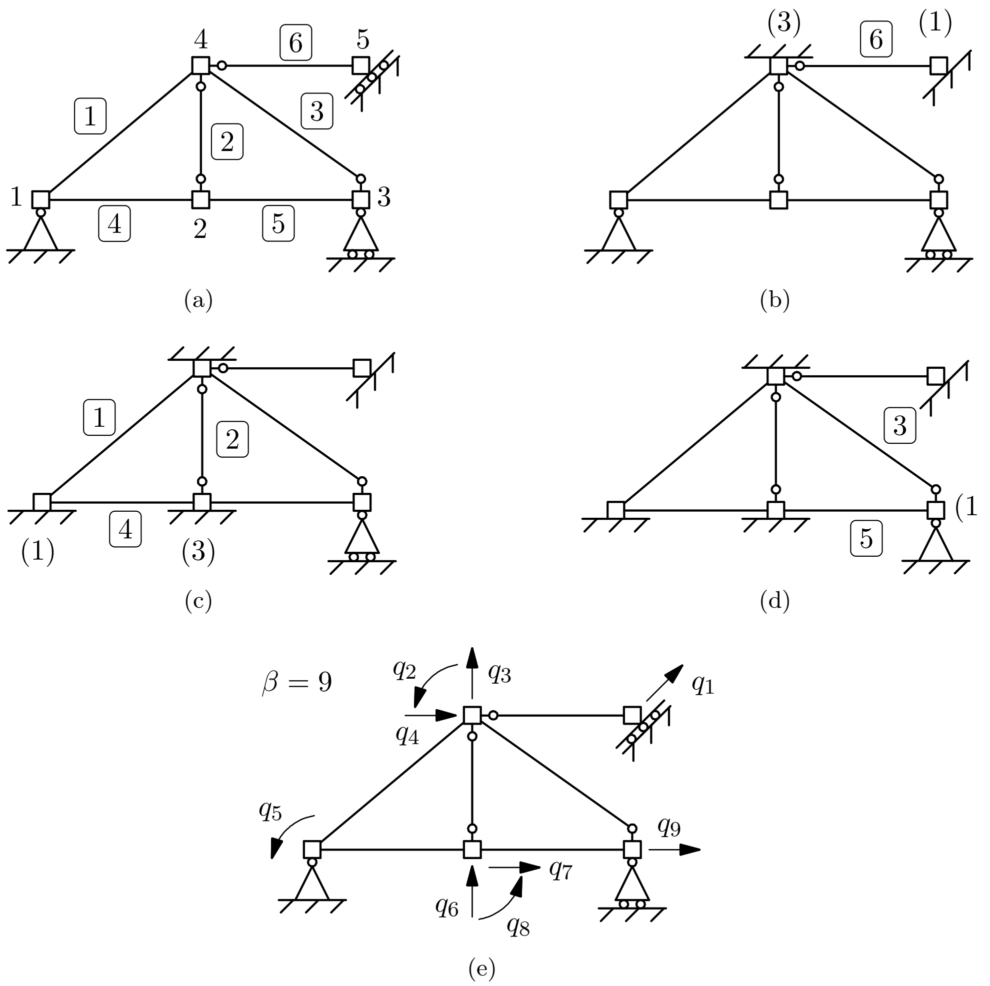


Figura 8.9: Identificação dos deslocamentos independentes.

tem de ser encastrado. O elemento 2 fica simultaneamente transformado numa peça biarticulada. Para transformar a estrutura numa combinação dos elementos-base disponíveis, basta agora impedir a translação do nó 3, como se ilustra na figura 8.9d.

Os 9 deslocamentos independentes da estrutura estão indicados na figura 8.9e.

O procedimento anteriormente descrito pode ser resumido nos seguintes passos:

Definição do Grau de Indeterminação Cinemática

1. discretize a estrutura usando o número necessário e suficiente de nós;
2. seleccione para movimentos independentes da estrutura os permitidos pelas libertações elásticas que nela possam existir. Bloqueie essas libertações para impedir que esses movimentos voltem a ocorrer;
3. entre os nós de fundação, seleccione aquele que tem o maior número de ligações ao exterior e no qual está incidente o menor número de elementos;
4. introduza nos nós de extremidade dos elementos assim definidos o número de ligações necessário e suficiente para o transformar num dos elementos-base disponíveis para a análise da estrutura. Passe a interpretar esses nós como nós de fundação da estrutura modificada;

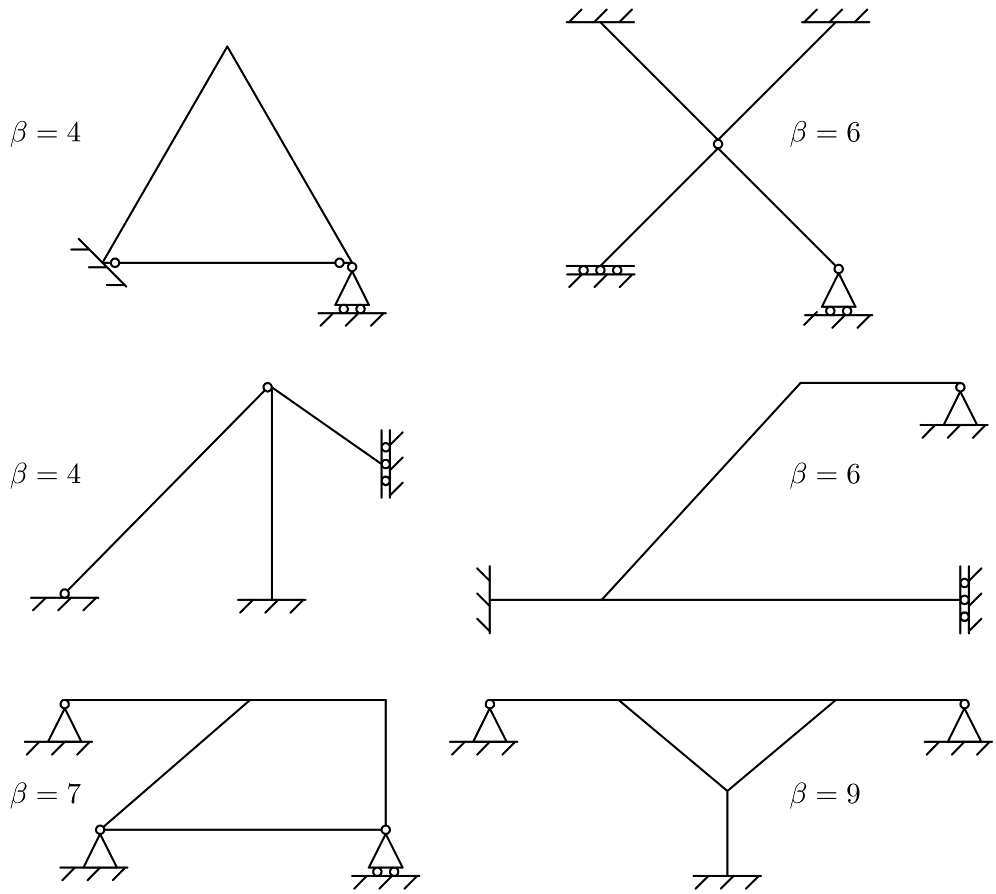


Figura 8.10: Estruturas reticuladas planas.

5. regresse ao passo 3 e repita o processo até transformar a estrutura numa combinação dos elementos-base disponíveis;
6. o número de bloqueamentos realizados representa o grau de indeterminação cinemática da estrutura, β.

Exercício 8.2. Com base no procedimento anteriormente sugerido, verifique os graus de indeterminação cinemática indicados na figura 8.10 para as estruturas aí representadas.

8.4 Traçado de Deformadas

Quando se bloqueiam os β deslocamentos independentes de uma estrutura reticulada, a estrutura resultante é, por definição, cinematicamente determinada. Esta é a estrutura-base da análise do método dos deslocamentos, cuja equação resolvente é estabelecida sobrepondo o efeito de cada um dos deslocamentos nodais da estrutura, quando são nulas as cargas aplicadas, ao efeito dessas cargas quando se bloqueiam os deslocamentos independentes.

Nestas condições, é simples determinar as deformadas provocadas por cada uma das $\beta + 1$ acções, os deslocamentos nodais e o conjunto das cargas aplicadas à estrutura.

Cada uma dessas deformadas deve ser cinematicamente admissível, isto é, satisfazer a condição de continuidade dos deslocamentos e das rotações em cada barra e respeitar as condições de ligação de cada barra aos nós de extremidade e de ligação desses nós ao meio de fundação, como se ilustra na figura 8.4. Para além disso, cada deformada é cinematicamente determinada, isto é, são calculáveis os deslocamentos em todos os nós e as descontinuidades em todas as libertações recorrendo apenas a considerações geométricas e à informação disponível sobre a deformação de cada peça da estrutura-base.

O procedimento a adoptar no traçado de deformadas cinematicamente admissíveis provocadas pelos deslocamentos independentes pode ser resumido nos seguintes passos, após a identificação da estrutura-base:

Traçado de deformadas compatíveis

1. libertar na estrutura-base a ligação que impede o deslocamento independente q_i e impor esse movimento;
2. definir, por tangentes aos nós, as condições de ligação de cada barra a cada nó, permitindo os movimentos relativos nos aparelhos de libertação que possam existir;
3. traçar, para cada barra, a linha mais simples que satisfaz as condições de ligação assim definidas e assegurar a continuidade dos deslocamentos e das rotações em cada peça.

é imediata a adaptação deste procedimento ao traçado da deformada causada pelas cargas aplicadas à estrutura-base, devendo-se apenas atender ao andamento que cada carga de vão pode induzir nas peças a que estão aplicadas. As barras livres de cargas de vão permanecem indeformadas.

Exercício 8.3. Trace as deformadas associadas aos deslocamentos independentes da estrutura representada na figura 8.10.

8.5 Estruturas com Elementos Rígidos

As fórmulas anteriormente definidas para o cálculo do grau de indeterminação cinemática das estruturas, assim como o procedimento que foi sugerido, pressupõem que os elementos que formam a estrutura podem sofrer qualquer tipo de deformação.

Casos existem, todavia, em que se sabe de antemão serem nulas certas deformações, como será o caso da flexão em barras solicitadas axialmente, ou tão pequenas que devem ser supostas nulas no caso da análise geometricamente linear, como sucede à deformação axial em peças solicitadas transversalmente ao seu eixo.

Em geral, e como adiante se poderá verificar, nem todas as componentes de deformação que se admite serem nulas são linearmente independentes entre si. Se numa estrutura δ' componentes de deformação são nulas, das quais,

$$\delta \leq \delta'$$

são linearmente independentes, o seu grau de indeterminação cinemática reduz-se para,

$$\beta' = \beta - \delta, \tag{8.4}$$

em que β representa o grau de indeterminação cinemática da estrutura quando se admite serem possíveis todos os tipos de deformação. O parâmetro δ representa pois os modos

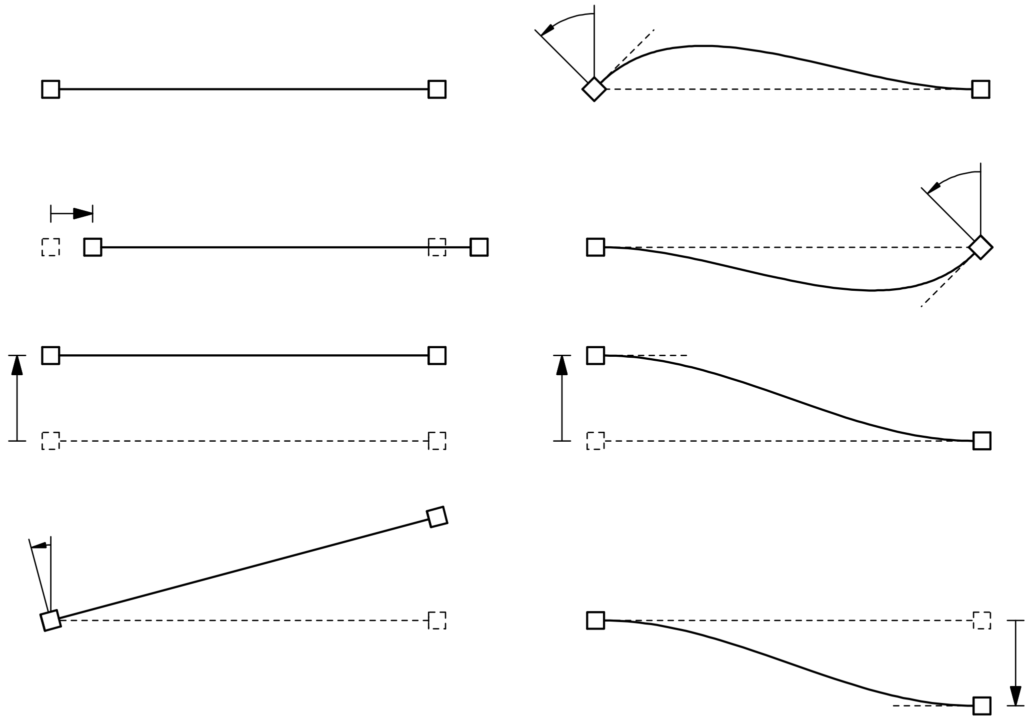


Figura 8.11: Movimentos possíveis em barras axialmente indeformáveis.

de deformação independentes que as δ' deformações nulas impedem que se desenvolvam na estrutura. Como só em casos particulares se torna possível exprimir o parâmetro δ em função do número de deformações nulas, δ', a utilidade prática da definição (8.4) é muito limitada.

Na análise de estruturas porticadas pelo método dos deslocamentos, é frequente admitir-se a hipótese de ser desprezável a deformação axial em determinados elementos da estrutura. Como adiante se poderá verificar, esta hipótese permite reduzir substancialmente o grau de indeterminação cinemática da estrutura ($\beta' \ll \beta$) sem que o rigor dos resultados fornecidos pela análise estrutural seja significativamente afectado. Interessa, pois, analisar com um certo pormenor o problema da definição do grau de indeterminação cinemática de estruturas com elementos axialmente rígidos.

Como se ilustra na figura 8.11, para além dos deslocamentos de corpo rígido, na hipótese da linearidade geométrica, as rotações nos nós de um elemento não provocam o aparecimento de deformações axiais, o mesmo sucedendo quando nos nós se provocam deslocamentos perpendiculares ao eixo da peça. Qualquer combinação destes movimentos é também possível em elementos axialmente rígidos. Na hipótese da linearidade geométrica, a deformação axial de um elemento só pode ser causada pelo deslocamento relativo dos nós no sentido do eixo do elemento.

A existência de componentes de deformação linearmente dependentes é facilmente ilustrada com o sistema representado na figura 8.12. A estrutura tem $\beta = 3$ graus de liberdade quando se admite a deformabilidade axial das barras. Quando se admite que as barras são axialmente rígidas ($\delta' = 2$), verifica-se que dos 3 deslocamentos nodais apenas 2 são possíveis. Ao impôr o deslocamento q_3, introduz-se nas barras deformações axiais iguais mas de sinal contrário, pelo que apenas uma delas é linearmente independente ($\delta = 1$).

Considere-se agora o caso mais geral representado na figura 8.13a. Se todas as com-

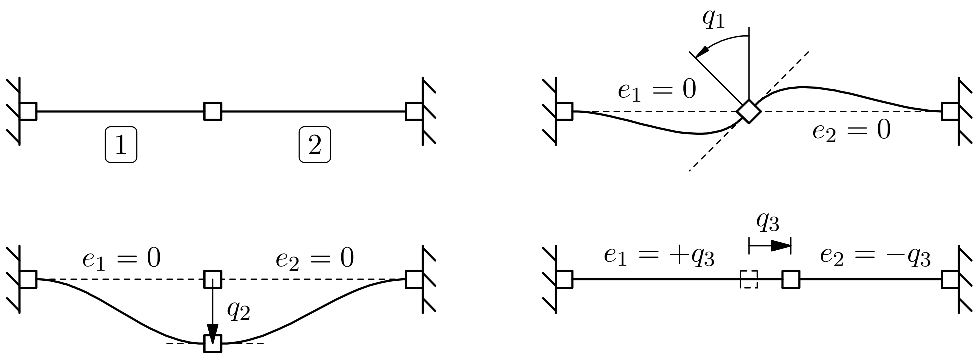


Figura 8.12: Dependência das deformações axiais.

ponentes de deformação no plano da estrutura forem possíveis, o pórtico tem $\beta = 6$ graus de indeterminação cinemática, estando nas figuras 8.13b representadas as deformadas que lhes estão associadas.

Suponha-se agora que as três barras da estrutura são axialmente rígidas, como se indica na figura 8.14a. Com elementos deste tipo, os modos de deformação linearmente independentes que se podem instalar na estrutura são os aí representados. Para determinar esses modos de deformação, utilizou-se o procedimento que a seguir se descreve.

Numa primeira fase, procurou-se entre os 6 deslocamentos nodais q_i aqueles que de antemão se sabe continuarem a ser possíveis na estrutura com barras axialmente rígidas. São eles as rotações nodais indicadas na figura 8.13a, as quais passam a ser designadas na estrutura modificada por d_1 e d_2 nas figuras 8.14b e 8.14c. As deformadas representadas nessa figura mostram que estas rotações provocam os seguintes deslocamentos nodais:

$$q_1 = d_1, \qquad q_i = 0 \cdot d_1 \qquad i \neq 1, \tag{8.5a}$$

$$q_4 = d_2, \qquad q_i = 0 \cdot d_1 \qquad i \neq 4. \tag{8.5b}$$

Para que os modos de deformação associados a estas rotações não possam tornar a ocorrer, introduzem-se na estrutura as ligações correspondentes, como se ilustra na figura 8.14d.

Numa segunda fase devem-se procurar os movimentos de translação que se sabe terem de ser nulos. São eles os deslocamentos nodais no sentido do eixo das peças em que o outro nó de extremidade esteja fixo. Da figura 8.13a conclui-se que $q_3 = 0$.

Esta informação é introduzida na estrutura de barras axialmente rígidas ao transformar a ligação do nó 2 num encastramento deslizante horizontal. Como se sugere na figura 8.14e, deixa de ser necessário indicar que o elemento 1 é axialmente indeformável, pois agora só pode sofrer deslocamentos perpendiculares ao eixo.

A terceira fase da análise consiste em determinar, entre os deslocamentos de translação ainda possíveis, quais são os que não provocam o aparecimento de deformações axiais nos elementos da estrutura. Nesta fase deve dar-se prioridade aos nós da estrutura que, em cada instante, têm o menor número de translações possíveis e a que ligue pelo menos um elemento com o outro nó de extremidade fixo.

Na estrutura em análise, é o nó 2 que está nestas condições, mostrando-se a deformada definida na figura 8.14f. é aí que se provoca o deslocamento d_3, desligando-se simultaneamente a barra 2 do resto da estrutura para facilitar o estudo do movimento, como se ilustra na figura 8.15a. Para recuperar a continuidade da estrutura, é necessário tornar a ligar as barras 2 e 3. As extremidades destas barras têm de se deslocar perpendicularmente ao eixo, de modo a garantir que durante o movimento não se desenvolvem deformações axiais.

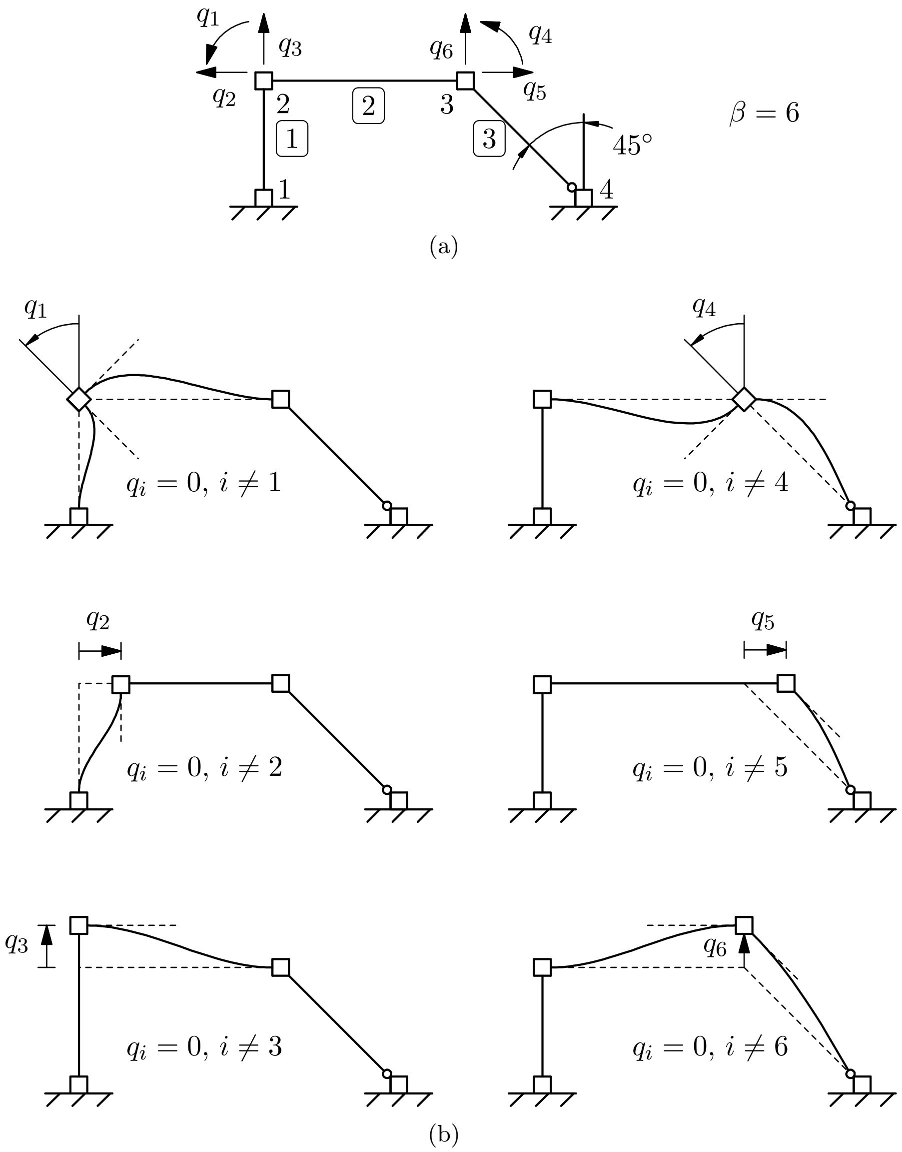


Figura 8.13: Pórtico com barras axialmente deformáveis.

A deformada que se obtém está também representada na figura 8.15b, concluindo-se que:

$$q_1 = q_3 = q_4 = 0 \cdot d_3, \; q_2 = q_5 = q_6 = d_3. \tag{8.6}$$

Para garantir que o modo de deformação d_3 não toma a ocorrer, basta transformar o nó 2 num encastramento total, como se ilustra na figura 8.16a.

O nó 3 é o único nó da estrutura que ainda se pode mover. As barras que aí incidem só podem sofrer deslocamentos perpendiculares ao eixo, verificando-se que a posição inicial do nó 3 é a única que satisfaz simultaneamente essas restrições. O facto de todos os nós estarem bloqueados, indica que estão esgotados os modos de deformação linearmente independentes da estrutura com elementos axialmente indeformáveis, como se ilustra na figura 8.16b.

O grau de indeterminação cinemática da estrutura desce pois de $\beta = 6$ para $\beta' = 3$. Verifica-se neste exemplo que o número de componentes de deformação nulas, $\delta' = 3$, iguala

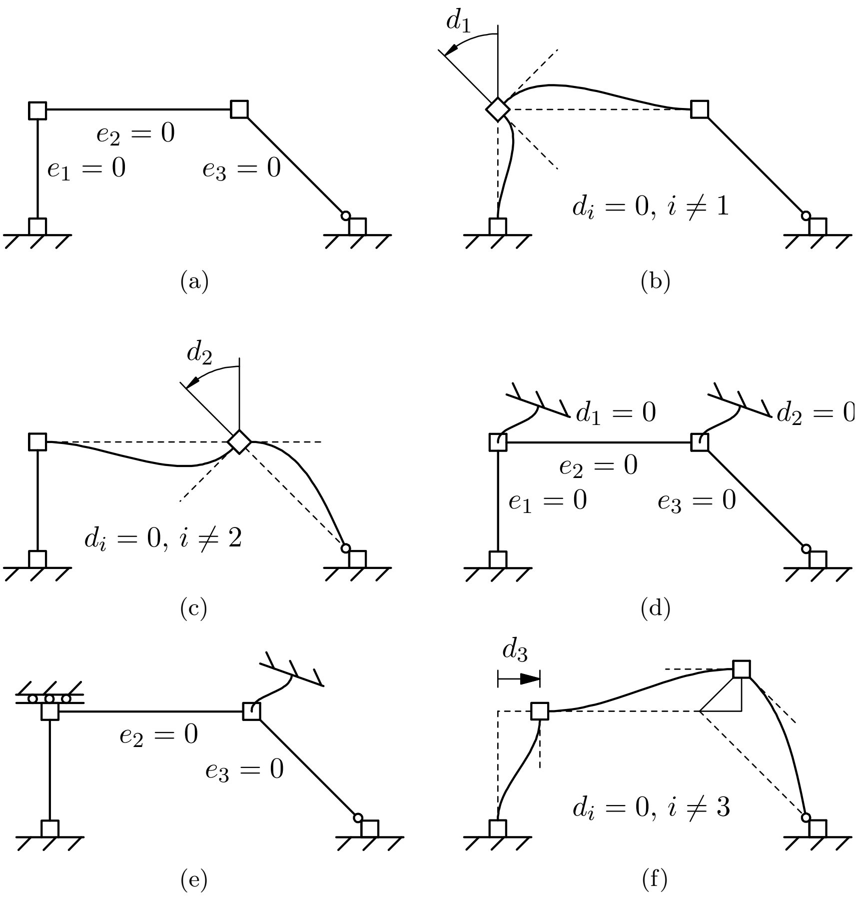


Figura 8.14: Pórtico com barras axialmente indeformáveis.

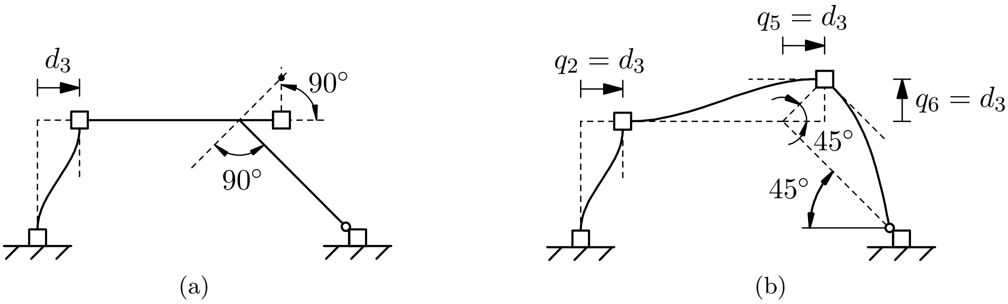


Figura 8.15: Construção do modo de translação.

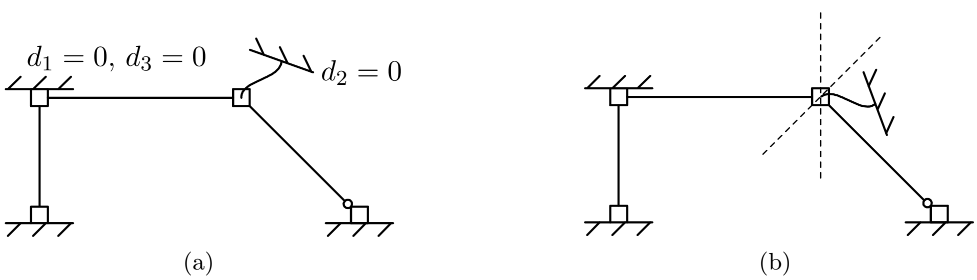


Figura 8.16: Definição da estrutura-base.

o dos modos de deformação impedidos, $\delta = 3$.

Se se agruparem nos vectores $\mathbf{q}$ e $\mathbf{d}$ os parâmetros q_i e d_i, que descrevem os modos de deformação anteriormente analisados, as relações (8.5) e (8.6) tomam a seguinte expressão

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \hdashline q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}. \tag{8.7}$$

No caso geral, esta expressão toma a forma:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\,\mathbf{d} \tag{8.8}$$

A *matriz de dependência dos deslocamentos*, $\mathbf{T}$, define pois a relação que se estabelece entre os deslocamentos nodais e os deslocamentos independentes da estrutura quando se passa a admitir serem nulas determinadas componentes de deformação nos elementos que a constituem.

O procedimento anteriormente utilizado para estabelecer o grau de indeterminação cinemática de estruturas com elementos rígidos, pode ser resumido nos seguintes passos:

Definição do Grau de Indeterminação Cinemática em Estruturas com Elementos Rígidos

1. determine o grau de indeterminação cinemática da estrutura admitindo que todas as componentes de deformação são possíveis. Identifique os deslocamentos independentes correspondentes, q_i;
2. seleccione para movimentos independentes da estrutura as descontinuidades nas libertações elásticas que não estejam associadas a modos de deformação nulos. Bloqueie essas descontinuidades;
3. seleccione para rotações independentes todas as rotações q_i em nós em que incidam no máximo uma peça rígida à flexão. Bloqueie essas rotações;
4. identifique e bloqueie os movimentos q_i que se sabe de antemão serem nulos. São eles:
   (a) os deslocamentos no sentido do eixo de peças axialmente rígidas, em que o outro nó de extremidade esteja fixo;
   (b) as rotações em nós a que ligam peças rígidas à flexão, em que o outro nó de extremidade esteja impedido de rodar;
5. passe a interpretar como nós de fundação da estrutura modificada todos aqueles que têm movimentos de translação impedidos;
6. seleccione entre os nós de fundação aquele que tem o menor número de translações ainda livres e em que incida pelo menos uma barra com o outro nó de extremidade fixo. Desligue da estrutura todos os outros elementos que incidem nesse nó e provoque aí uma translação. Compatibilize a deformada de modo a não provocar as componentes de deformação impedidos nos elementos rígidos. Bloqueie um deslocamento que tenha ocorrido no modo de deformação encontrado;
7. regresse ao passo 5 e repita o processo até fixar completamente a estrutura;

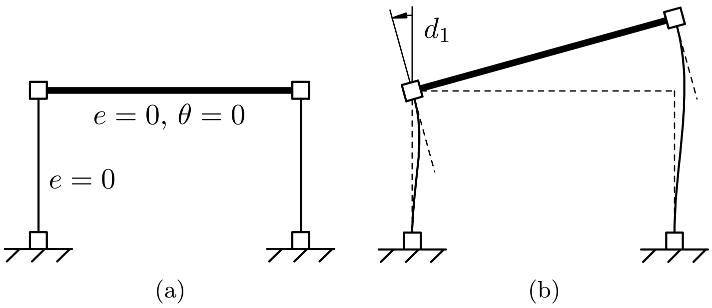


Figura 8.17: Pórtico com piso rígido.

8. o número de bloqueamentos realizados, à excepção dos implementados no passo 4, representa o grau de indeterminação cinemática da estrutura, β'.

Exercício 8.4. Verifique, com base no procedimento anteriormente descrito, se a estrutura representada na figura 8.17 tem apenas os graus de liberdade ilustrados nas figuras 8.17b e 8.17c, quando se admite que um elemento é axialmente rígido e outro também o é à flexão.

Exercício 8.5. Com base no procedimento anteriormente descrito, verifique os graus de indeterminação cinemática indicados na figura 8.18 para as estruturas aí representadas.

Exercício 8.6. Trace as deformadas associadas aos deslocamentos independentes das estruturas representadas na figura 8.18 e estabeleça, para cada uma, a matriz de dependência dos deslocamentos, **T**.

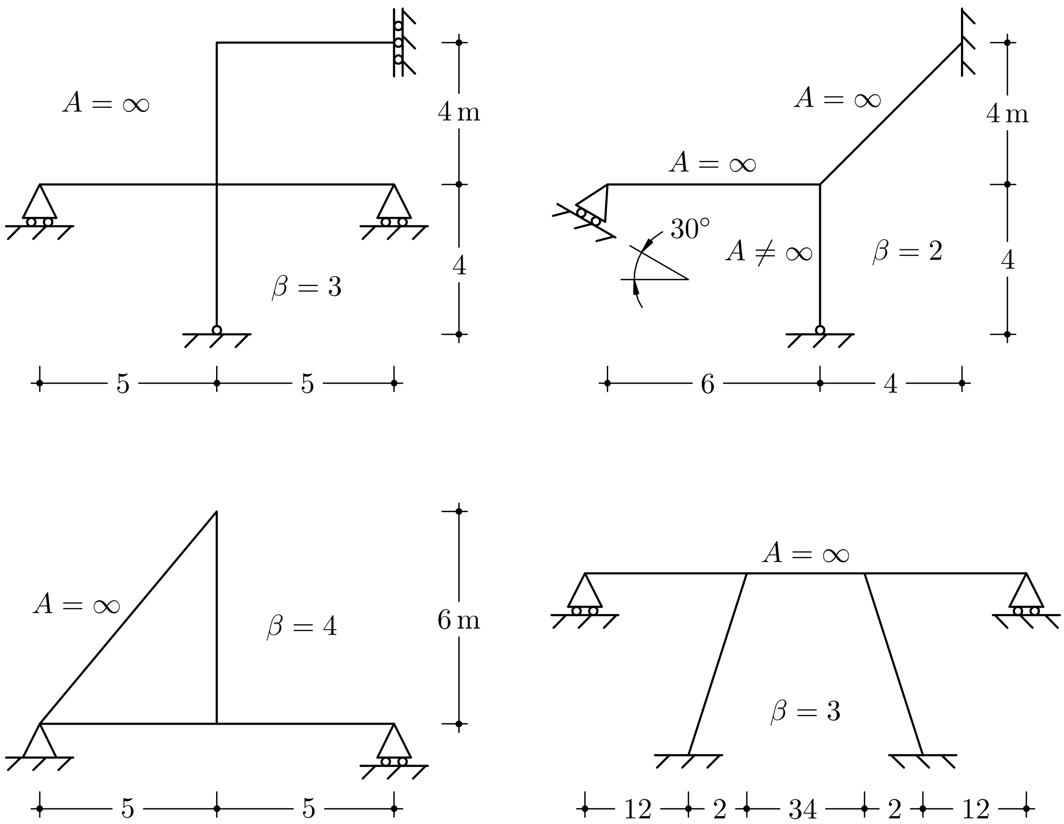


Figura 8.18: Indeterminação cinemática de estruturas reticuladas planas.

Capítulo 9

Método dos Deslocamentos

9.1 Introdução

A ideia em que o método dos deslocamentos se baseia consiste, essencialmente, em substituir a estrutura a analisar por um sistema de elementos cinematicamente determinados, designado por *estrutura-base*. As incógnitas do problema são agora os deslocamentos independentes da estrutura a analisar, os quais são calculados obrigando a estrutura-base a tornar-se estática e cinematicamente equivalente à estrutura em análise.

A estrutura representada na figura 9.1 vai ser utilizada para introduzir os conceitos em que o método dos deslocamentos se fundamenta.

Na figura 9.2 está representada uma deformada admissível para a estrutura em causa. Essa deformada satisfaz todas as condições de apoio, de continuidade das deformações nos elementos e da sua ligação aos nós que os limitam.

Dos dois deslocamentos nodais aí assinalados, é possível seleccionar apenas a rotação q como deslocamento independente. De facto, como se ilustra na figura 9.3, quando essa rotação é bloqueada, a estrutura transforma-se numa combinação de elementos-base já

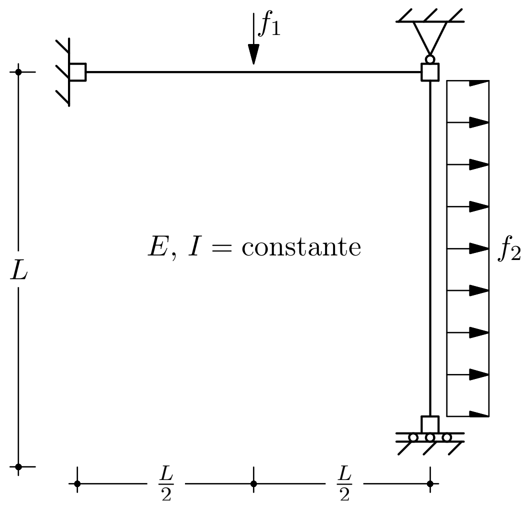


Figura 9.1: Pórtico plano.

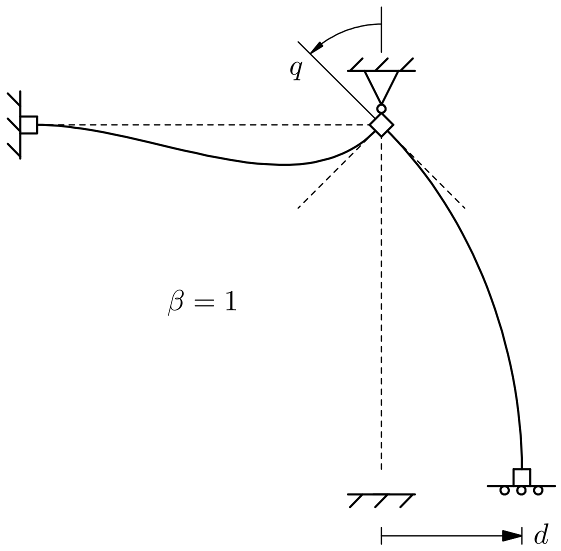


Figura 9.2: Deformada cinematicamente admissível.

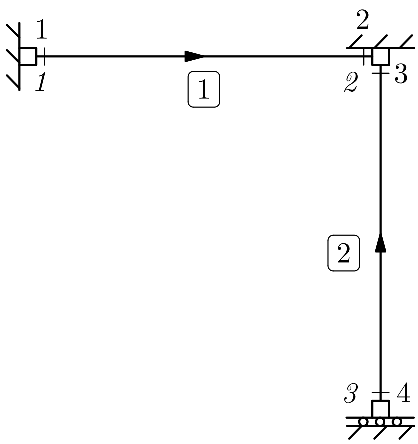


Figura 9.3: Estrutura-base.

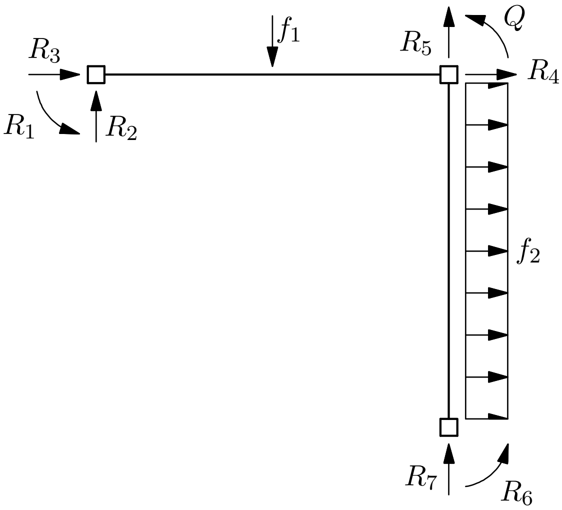


Figura 9.4: Diagrama de corpo livre.

analisados. A estrutura em análise tem, portanto, 1 grau de indeterminação cinemática, sendo o sistema representado na figura 9.3 a estrutura-base que lhe está associada.

Na figura 9.4 está representado o diagrama de corpo livre da estrutura. Para além da solicitação estão também indicadas as reacções que os apoios da estrutura são capazes de mobilizar. Na mesma figura está ainda assinalada a força correspondente ao deslocamento indeterminado, o momento nodal Q. Para o carregamento em análise, definido na figura 9.1, o momento Q é nulo:

$$Q = 0. \tag{9.1}$$

é o facto de se conhecer a força, momento Q, correspondente ao deslocamento tomado como incógnita, a rotação q, que vai sustentar a estratégia de análise da estrutura pelo método dos deslocamentos.

Na concepção do método dos deslocamentos, a resposta da estrutura é consequência da acção simultânea de dois grupos de solicitações, nomeadamente o deslocamento independente q e o carregamento f.

Suponha-se agora que cada uma dessas solicitações é aplicada à estrutura-base, na ausência da outra, como se ilustra nas figuras 9.5 e 9.6. Por analogia com a nomenclatura utilizada no método das forças, a componente associada à incógnita do problema, que agora é a rotação q, é designada por *solução complementar*, enquanto a componente associada ao carregamento é designada por *solução particular*. Interessa salientar que tanto a solução complementar como a solução particular satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura em análise.

Se se compararem as deformadas representadas nas figuras 9.5 e 9.6 com a dada na figura 9.2, conclui-se que as condições de continuidade das deformações nos elementos estruturais e a da sua ligação aos nós que os limitam, continuam a ser respeitadas. Relativamente às condições de apoio, pode também verificar-se que não existe nenhum movimento que esteja impedido na estrutura em análise que seja permitido em qualquer das soluções, particular ou complementar.

Como o deslocamento que está impedido na solução particular ($q = 0$), é permitido na solução complementar, conclui-se que ao combinar as deformadas que lhes estão associadas, se obtém uma que é *cinematicamente equivalente* à da estrutura em análise. Em particular, o deslocamento dependente, d, no encastramento deslizante, pode ser determinado

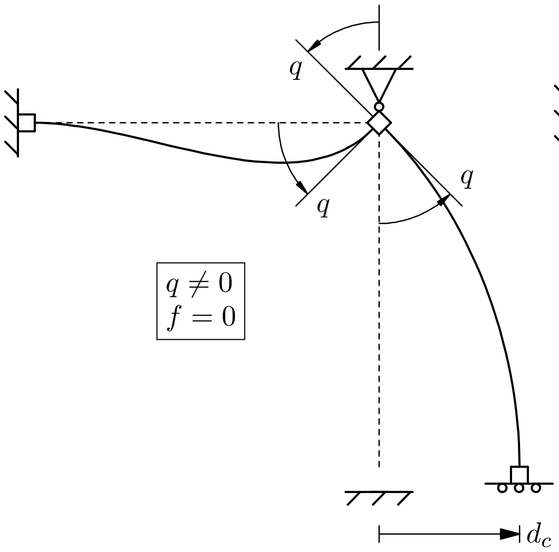


Figura 9.5: Acção do deslocamento nodal q.

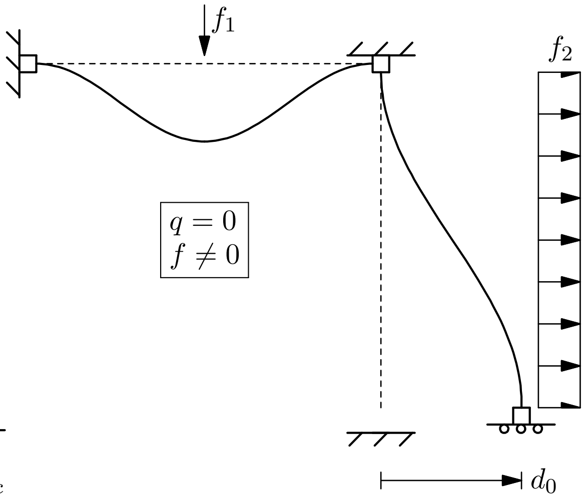


Figura 9.6: Acção das cargas de vão.

combinando as parcelas que estão associadas às soluções complementar e particular:

$$d = d_c + d_0. \tag{9.2}$$

Interessa agora analisar o que se passa do ponto de vista estático, isto é das condições de equilíbrio da estrutura.

Na figura 9.7a representa-se o sistema de forças que é necessário aplicar a cada elemento estrutural, quando suposto isolado no espaço, para introduzir as deformadas causadas pela rotação independente q. As forças aí indicadas foram determinadas recorrendo às tabelas 7.9 e 7.17. Para reconstruir a estrutura, torna-se a ligar os elementos pelo nó que partilham, indicando-se na figura 9.7b as resultantes das forças nodais que se desenvolvem na deformada associada à solução complementar. é fácil verificar que esse sistema de forças está em equilíbrio.

Como se ilustra na figura 9.7c, quando no diagrama de corpo livre se introduzem as condições de ligação ao exterior da estrutura em análise, conclui-se que todas as forças nodais são absorvidas como reacções de apoio, já identificadas na figura 9.4, excepto aquela que corresponde ao deslocamento independente. Por outras palavras, para introduzir a rotação nodal q, na ausência de qualquer outra solicitação, é necessário aplicar à estrutura o momento correspondente, com o valor:

$$Q_c = \left(\frac{5\,E\,I}{L} \right) q. \tag{9.3}$$

Considere-se agora a solução particular, representada na figura 9.6. Em consequência das condições de apoio da estrutura-base, cada elemento do sistema responde directa e exclusivamente à solicitação que lhe está aplicada. Como os elementos se comportam independentemente um do outro, torna-se possível desligá-los e determinar as forças que é necessário aplicar aos nós para, por um lado, equilibrar a solicitação e, por outro, manter as condições de apoio dos nós de extremidade. Os valores tomados por essas forças estão representados na figura 9.8a e foram determinados usando as tabelas 7.6 e 7.14.

Como se ilustra na figura 9.8b, para reconstruir a estrutura, basta ligar os elementos pelo nó que partilham, somando todas as forças nodais que aí se desenvolvem. Como

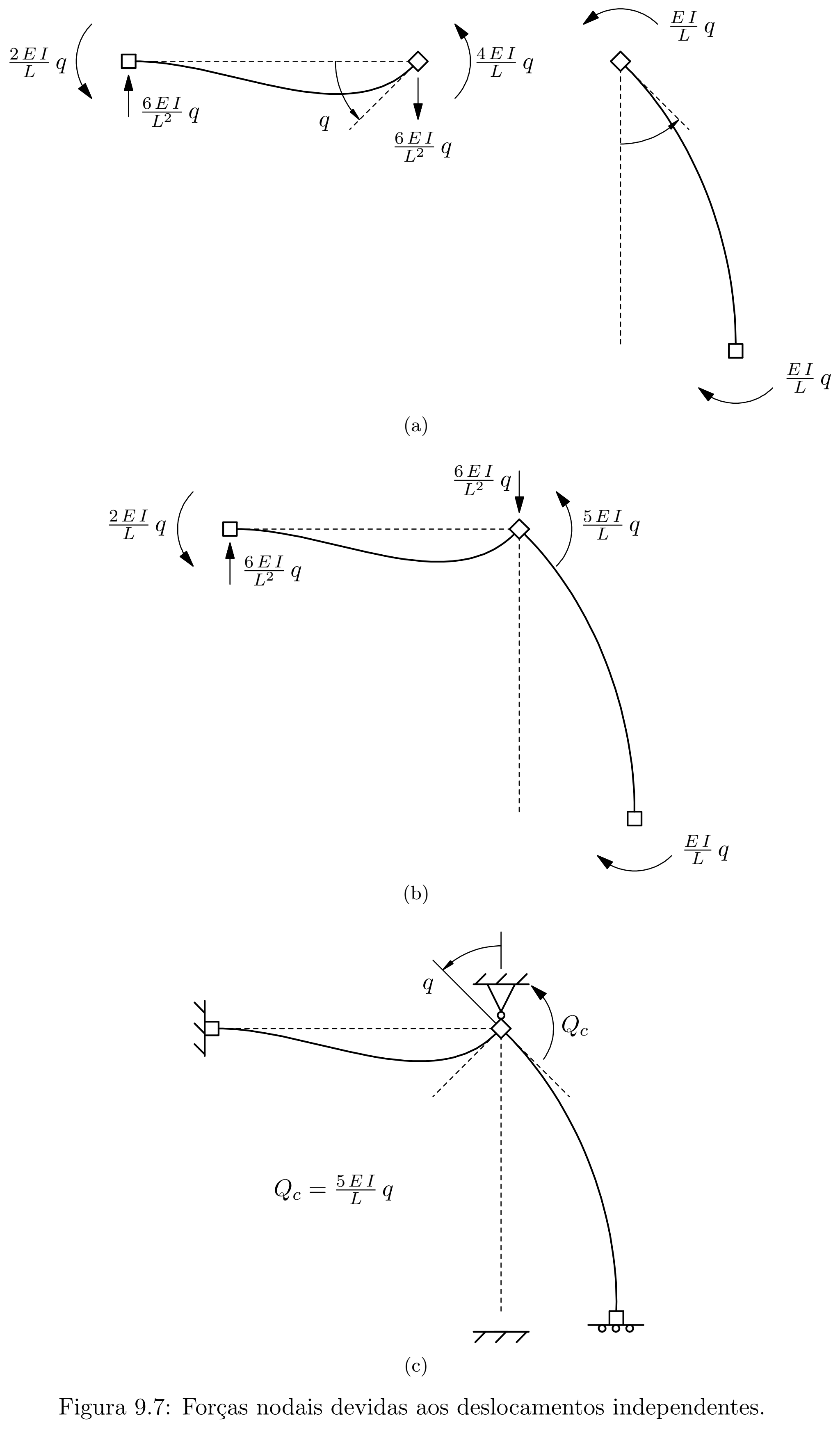


Figura 9.7: Forças nodais devidas aos deslocamentos independentes.

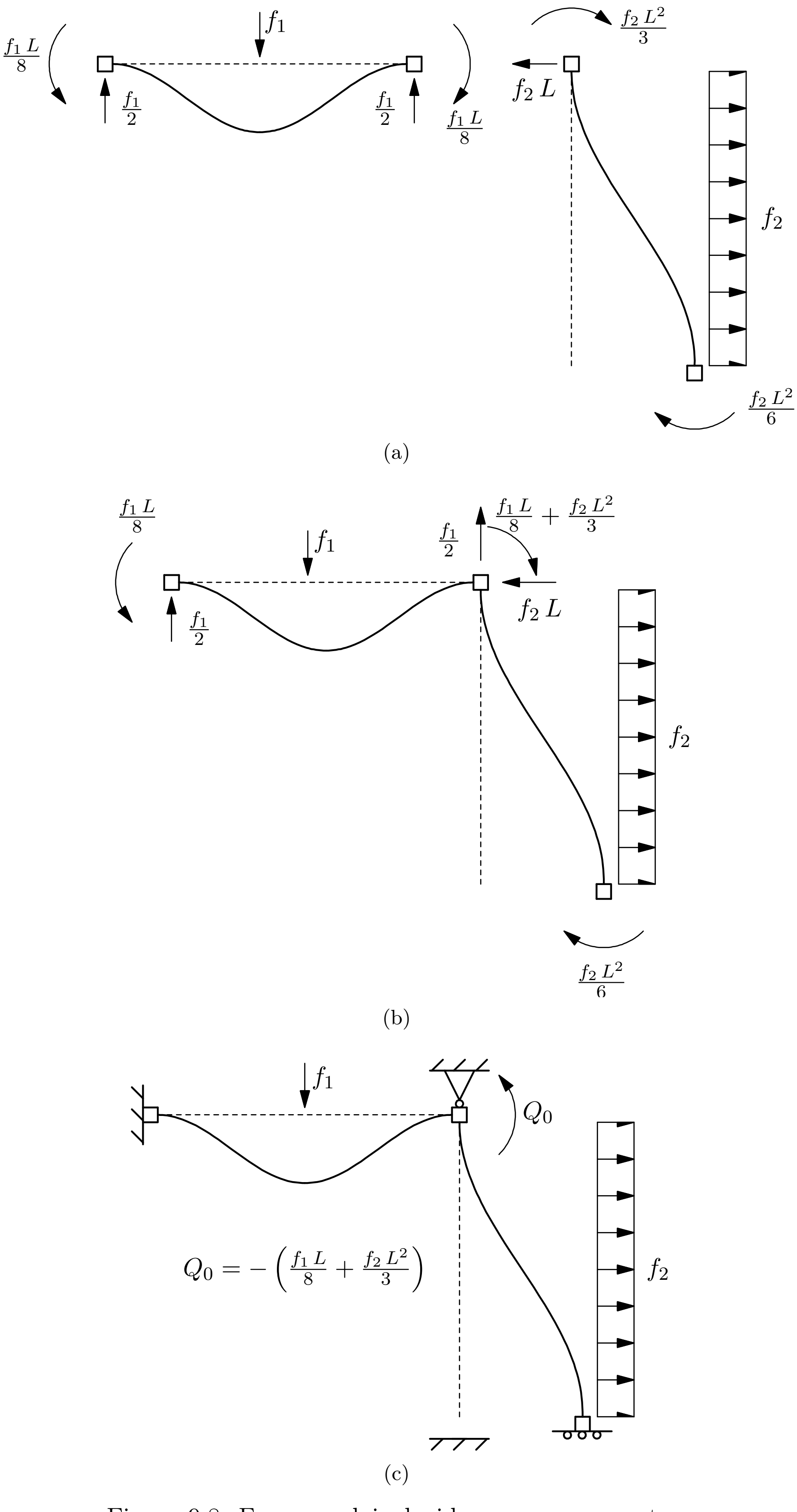


Figura 9.8: Forças nodais devidas ao carregamento.

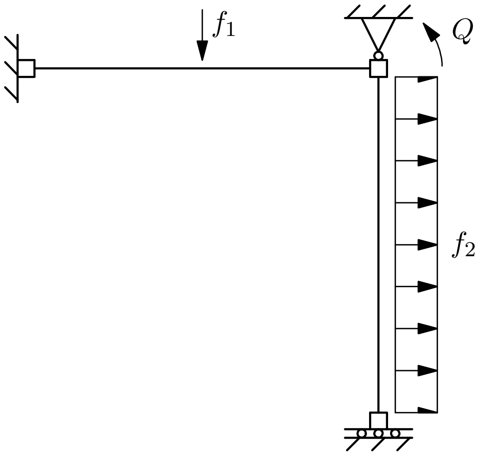


Figura 9.9: Sobreposição das soluções complementar e particular.

qualquer dos elementos representados na figura 9.8a está em equilíbrio, também o está o sistema de forças resultantes da sua ligação. Analogamente ao que sucedera com a solução complementar, quando no diagrama de corpo livre associado à solução particular se introduzem as condições de apoio da estrutura em análise, todas as forças nodais se identificam como reacções, excepto aquela que corresponde ao deslocamento independente.

A figura 9.8c ilustra qual é agora a função do momento nodal:

$$Q_0 = -\frac{f_1\,L}{8} - \frac{f_2\,L^2}{3}. \tag{9.4}$$

é o momento que é necessário aplicar à estrutura para impedir o deslocamento independente quanto actua a solicitação de vão. Por outras palavras, é uma força de fixação.

Na figura 9.9 representa-se o resultado da sobreposição das solicitações associadas às soluções complementar e particular, identificadas nas figuras 9.7c e 9.8c, respectivamente. O momento nodal, Q, aí indicado é obtido sobrepondo os resultados (9.3) e (9.4):

$$Q = \left(\frac{5\,E\,I}{L}\right)\,q + \left(-\frac{f_1\,L}{8} - \frac{f_2\,L^2}{3}\right). \tag{9.5}$$

Para que o sistema representado na figura 9.9 se torne *estaticamente equivalente* ao problema em análise, definido na figura 9.1, basta impor a condição (9.1) que exige ser nulo o momento (9.5) aplicado à estrutura:

$$\left(\frac{5\,E\,I}{L}\right)\,q + \left(-\frac{f_1\,L}{8} - \frac{f_2\,L^2}{3}\right) = 0. \tag{9.6}$$

Esta equação pode ser resolvida para o deslocamento independente,

$$q = \frac{(3\,f_1 + 8\,f_2\,L)\;L^2}{120\,E\,I}, \tag{9.7}$$

ficando deste modo levantada a indeterminação cinemática da estrutura em estudo. Conhecido o valor do deslocamento independente da estrutura, torna-se possível determinar todas as variáveis do problema, nomeadamente reacções e esforços, deformações e deslocamentos.

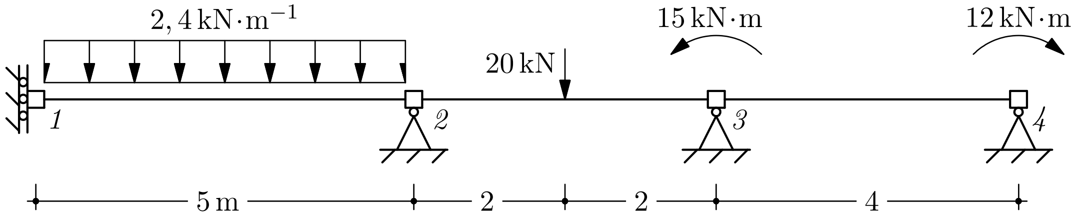


Figura 9.10: Viga contínua.

Por exemplo, de acordo com os resultados associados às soluções complementar e particular, definidos nas figuras 9.7b e 9.8b, a reacção vertical no nó 1 tem a seguinte expressão,

$$R_2 = +\frac{6\,E\,I}{L^2}\,q + \frac{f_1}{2},$$

ou, se se usar o resultado (9.7):

$$R_2 = \frac{13\,f_1 + 8\,f_2\,L}{20}.$$

Analogamente, dos resultados resumidos nas mesmas figuras, encontra-se a seguinte expressão para o momento flector na secção 4:

$$M_4 = \frac{E\,I}{L}\,q + \frac{f_2\,L^2}{6} = \frac{3\,f_1 + 28\,f_2\,L}{120}\,L.$$

Exercício 9.1. Com base na expressão (9.2) e no resultado (9.7) verifique se, na estrutura em análise, o deslocamento nodal dependente tem o seguinte valor:

$$d = \frac{(f_1 + 6\,f_2\,L)\;L^3}{80\,E\,I}.$$

Baseie os cálculos na informação obtida nas tabelas 7.14 e 7.17.

Como, no caso geral, as incógnitas da equação resolvente (9.6) são deslocamentos generalizados, este método de análise de estruturas é correntemente designado por *método dos deslocamentos*. A designação alternativa, menos frequente, de *método da equação de equilíbrio*, resulta da equação resolvente ser estabelecida igualando as forças correspondentes aos deslocamentos indeterminados que se desenvolvem na estrutura-base, com as que se verificam existir na estrutura em análise.

9.2 Equação do Método dos Deslocamentos

O objectivo do estudo que a seguir se inicia é o de definir um processo geral que permita sistematizar a montagem da equação do método dos deslocamentos, assim como o cálculo dos esforços, das deformações e dos deslocamentos que se desenvolvem numa estrutura sujeita a uma determinada solicitação.

Como exemplo de aplicação, considere-se a viga contínua representada na figura 9.10. Esta estrutura tem 2 graus de indeterminação cinemática pois, para a transformar num sistema de elementos-base disponíveis, basta bloquear as rotações nos nós intermédios, como se ilustra na figura 9.11.

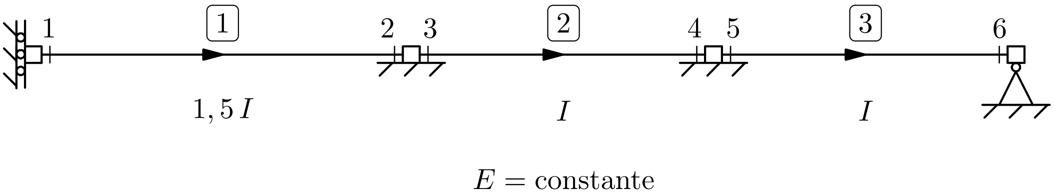


Figura 9.11: Estrutura-base.

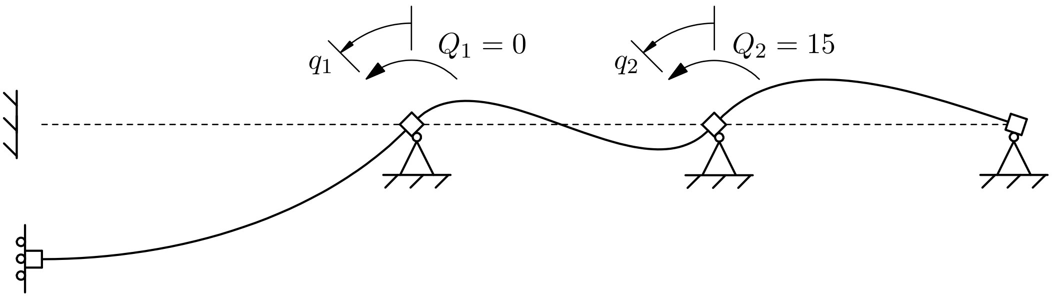


Figura 9.12: Deslocamentos e forças nodais.

Os dois graus de indeterminação cinemática são representados pelos deslocamentos nodais independentes q_1 e q_2, indicados na figura 9.12. Na mesma figura estão assinaladas as forças correspondentes aos deslocamentos independentes. São os momentos nodais Q_1 e Q_2, os quais para o problema em análise tomam os seguintes valores:

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 15 \end{cases}. \tag{9.8}$$

Por simplicidade, de aqui em diante os deslocamentos nodais independentes são designados por *deslocamentos nodais* e as forças correspondentes por *forças nodais*. Todas as restantes solicitações a que a estrutura esteja sujeita serão designadas por *solicitações de vão*. Para o exemplo em questão, o momento aplicado no nó 4, por estar associado a um deslocamento dependente, será interpretado como uma solicitação de vão.

Suponha-se agora que a solicitação de vão é aplicada à estrutura-base representada na figura 9.11. A acção de cada carga de vão está ilustrada na figura 9.13, indicando-se aí as reacções de apoio que se desenvolvem na estrutura. Essas reacções foram calculadas a partir dos resultados resumidos nas tabelas 7.6, 7.10 e 7.14. Na figura 9.14 apresenta-se o efeito da sobreposição de todas as cargas de vão.

Para recuperar as condições de apoio da estrutura em análise, é necessário substituir por apoios fixos os encastramentos dos nós intermédios. Para o fazer basta aplicar a esses nós os seguintes momentos de encastramento, como se ilustra na figura 9.15:

$$\begin{cases} Q_{01} = -10 \\ Q_{02} = -16 \end{cases}. \tag{9.9}$$

A comparação do resultado (9.9) com a condição de carregamento (9.8), mostra que o sistema representado na figura 9.15 não é estaticamente equivalente ao problema em análise, definido na figura 9.10. Para recuperar a equivalência estática, torna-se necessário sobrepor a acção dos deslocamentos nodais, q_1 e q_2, ao efeito da solicitação de vão sobre a estrutura-base.

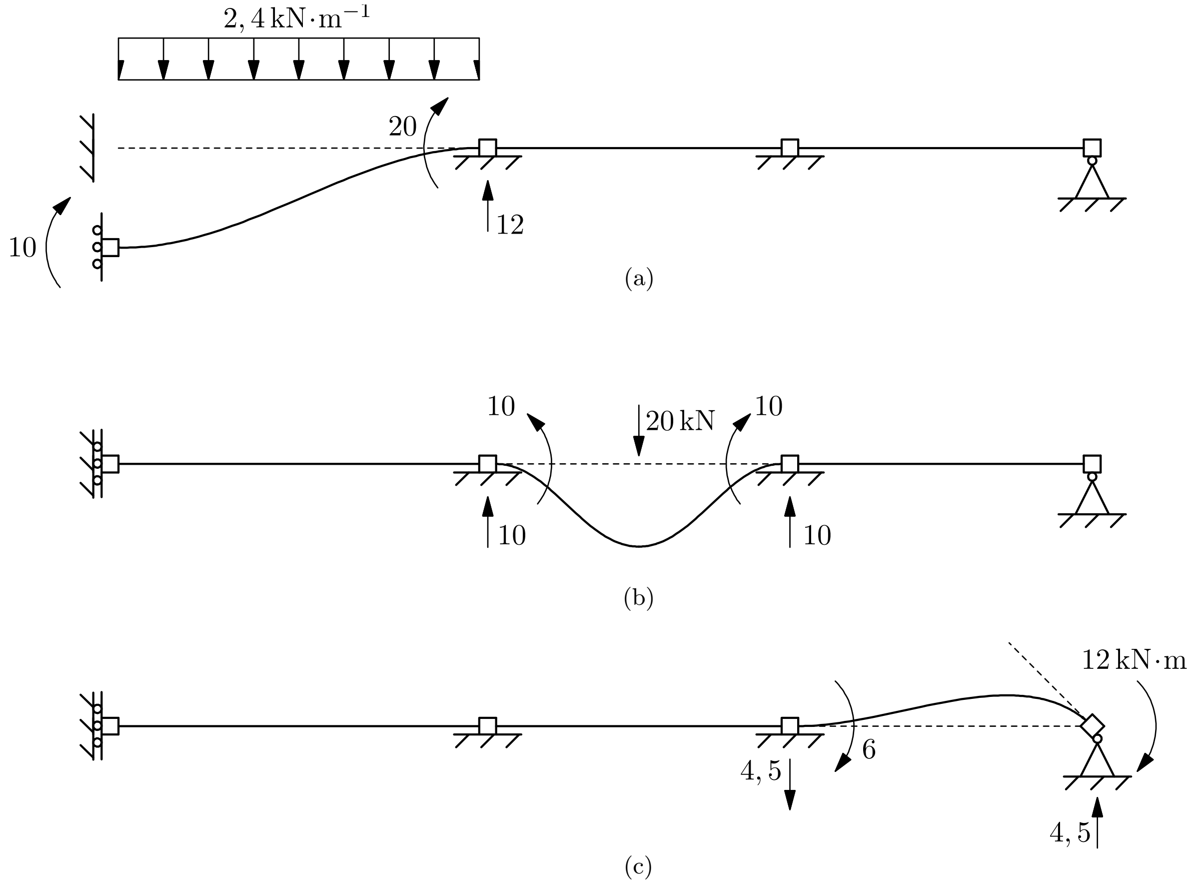


Figura 9.13: Acção das cargas de vão.

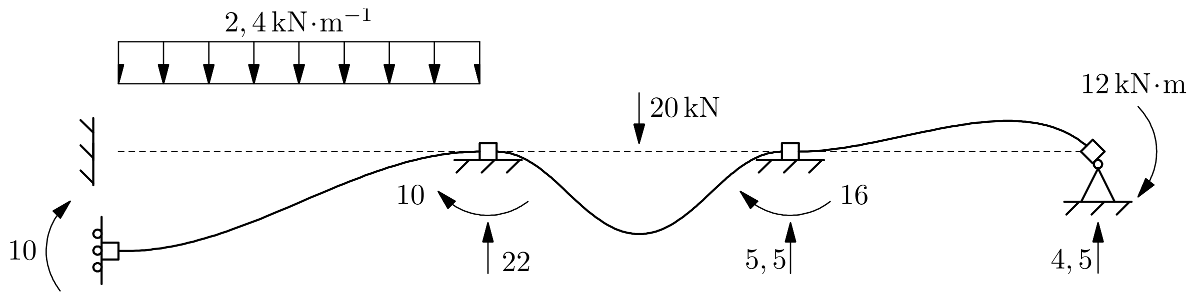


Figura 9.14: Acção combinada das cargas de vão.

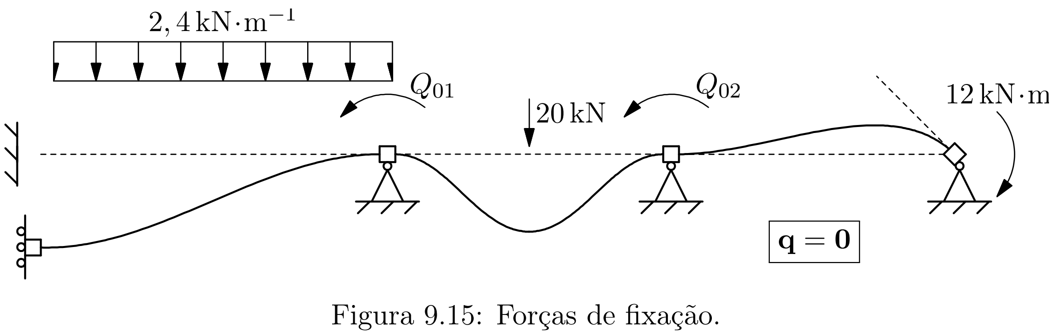
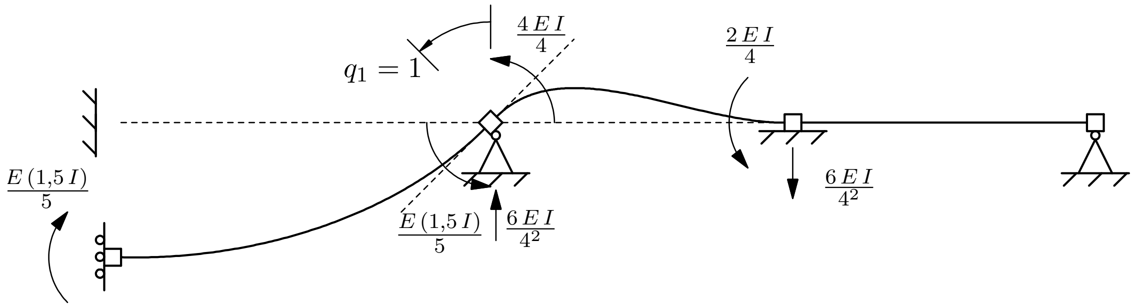
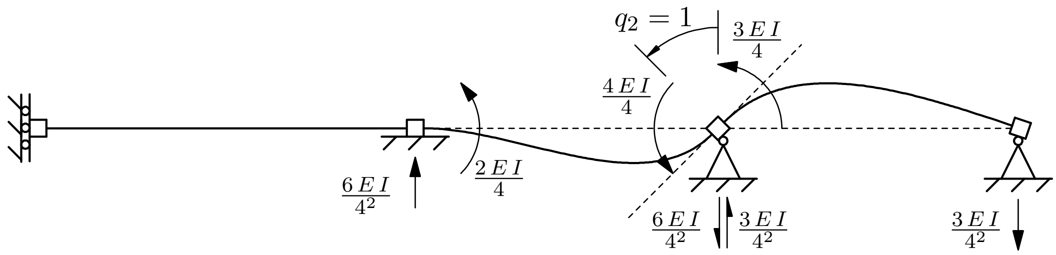


Figura 9.15: Forças de fixação.



(a) Estado 1.



(b) Estado 2.

Figura 9.16: Acção dos deslocamentos unitários nodais.

Como se ilustra nas figuras 9.16a e 9.16b, esta operação é realizada libertando na estrutura-base cada uma das ligações correspondentes aos deslocamentos nodais, de modo a permitir que sejam impostos separadamente. As forças indicadas nas figuras 9.16a e 9.16b foram determinadas recorrendo às tabelas 7.9, 7.13 e 7.17.

Tal como se fez no caso da solicitação de vão, para recuperar as condições de apoio da estrutura em análise, os encastramentos nos nós intermédios são substituídos por apoios fixos, aplicando-se aos nós os momentos de encastramento, como se ilustra nas figuras 9.17a e 9.17b. A acção combinada dos deslocamentos nodais está representada na figura 9.18, sendo fácil concluir que as forças nodais tomam os seguintes valores:

$$\begin{cases} Q_{c1} = (1,30\,E\,I)\;q_1 + (0,50\,E\,I)\;q_2 \\ Q_{c2} = (0,50\,E\,I)\;q_1 + (1,75\,E\,I)\;q_2 \end{cases} \tag{9.10}$$

Para recuperar a configuração da estrutura em análise, representada na figura 9.12, basta sobrepor a acção da solicitação de vão à dos deslocamentos nodais, concluindo-se facilmente a partir das figuras 9.15 e 9.18 que:

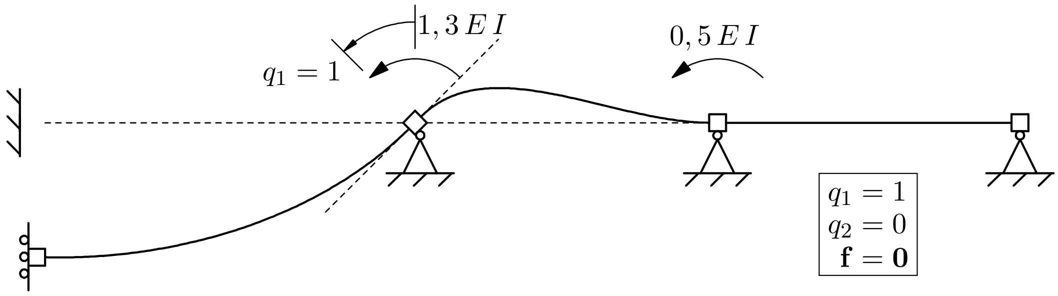
$$\begin{cases} Q_{c1} + Q_{01} = Q_1 \\ Q_{c2} + Q_{02} = Q_2 \end{cases}. \tag{9.11}$$

A equação do método dos deslocamentos é obtida substituindo em (9.11) os resultados (9.8) a (9.10),

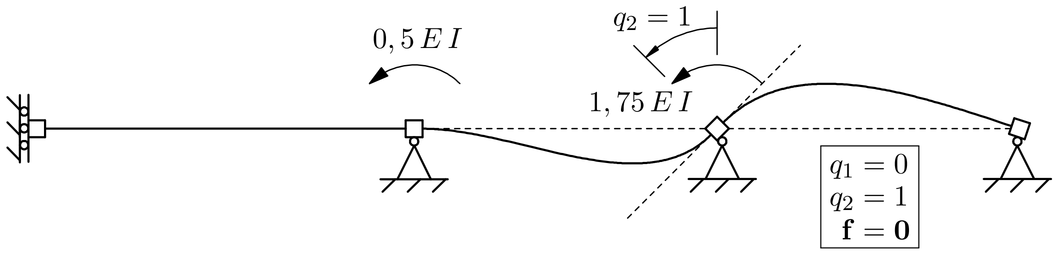
$$\begin{cases} (1,30\,E\,I)\;q_1 + (0,50\,E\,I)\;q_2 + (-10) = 0 \\ (0,50\,E\,I)\;q_1 + (1,75\,E\,I)\;q_2 + (-16) = 15 \end{cases},$$

ou, em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1,30\,E\,I & 0,50\,E\,I \\ 0,50\,E\,I & 1,75\,E\,I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -10 \\ -16 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \end{Bmatrix}. \tag{9.12}$$



(a) Estado 1.



(b) Estado 2.

Figura 9.17: Forças nodais devidas aos deslocamentos nodais unitários.

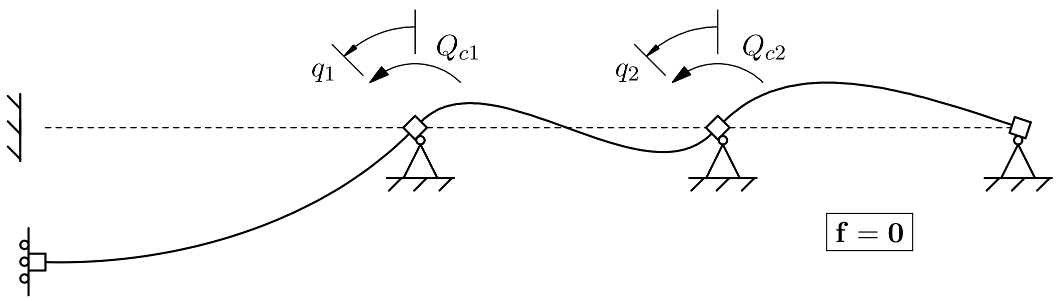


Figura 9.18: Acção combinada dos deslocamentos nodais.

No caso geral, de uma estrutura com β graus de indeterminação cinemática, o sistema de equações resolventes (9.12) do método dos deslocamentos toma a forma,

$$\mathbf{K}_* \, \mathbf{q} + \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}. \tag{9.13}$$

em que,

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_\beta \end{Bmatrix}, \tag{9.14}$$

é o *vector dos deslocamentos nodais* independentes, e

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_\beta \end{Bmatrix}, \tag{9.15}$$

é o *vector das forças nodais* correspondentes, aplicadas à estrutura.

Na expressão (9.13), a matriz $\mathbf{K}_*$, é designada por *matriz de rigidez da estrutura* e o vector $\mathbf{Q}_0$ por *vector das forças de fixação*. Estas designações resultam do significado físico dos coeficientes que intervêm nesses operadores.

Para o exemplo anteriormente analisado, os resultados (9.12) e as ilustrações apresentadas nas figuras 9.15 e 9.17, mostram que:

> **(D9.1)** O coeficiente Q_{0i}, do vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_0$, representa a força nodal Q_i que é necessário aplicar à estrutura quando ela é sujeita à solicitação de vão e se mantêm nulos todos os deslocamentos nodais independentes ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$).

> **(D9.2)** O coeficiente k_{ij} da matriz de rigidez, $\mathbf{K}_*$, representa a força nodal Q_i que é necessário aplicar à estrutura quando nela se impõe o deslocamento nodal independente $q_j = 1$ e se mantêm nulos todos os restantes ($q_k = 0, k \neq j$), assim como a solicitação de vão ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

A matriz de rigidez, $\mathbf{K}_*$, é uma matriz quadrada com dimensão igual ao grau de indeterminação cinemática da estrutura, β, e que se caracteriza por ser simétrica,

$$\mathbf{K}_* = \mathbf{K}_*^T \tag{9.16}$$

e não singular, isto é, existe a matriz inversa, $\mathbf{K}_*^{-1}$, tal que:

$$\mathbf{K}_*^{-1}\,\mathbf{K}_* = \mathbf{I}. \tag{9.17}$$

O procedimento anteriormente utilizado para estabelecer a equação do método dos deslocamentos (9.13) pode ser sistematizado nos seguintes passos:

Determinação da Equação do Método dos Deslocamentos

1. discretize a estrutura e oriente e numere sequencialmente os elementos deformáveis que a compõem;
2. resuma num quadro as constantes geométricas e elásticas que determinam o comportamento de cada elemento estrutural;
3. determine o grau de indeterminação cinemática da estrutura, β, e defina a estrutura--base associada;
4. identifique os β deslocamentos nodais $\mathbf{q}$ com uma numeração sequencial e quantifique os coeficientes do vector das forças nodais correspondentes, $\mathbf{Q}$;
5. aplique à estrutura-base a solicitação de vão e monte o vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_0$, recorrendo à definição (D9.1);
6. aplique à estrutura-base cada um dos deslocamentos nodais independentes e monte a matriz de rigidez da estrutura, $\mathbf{K}_*$, recorrendo à definição (D9.2).

Exercício 9.2. As características geométricas e elásticas dos elementos da estrutura representada na figura 9.19 são as seguintes:

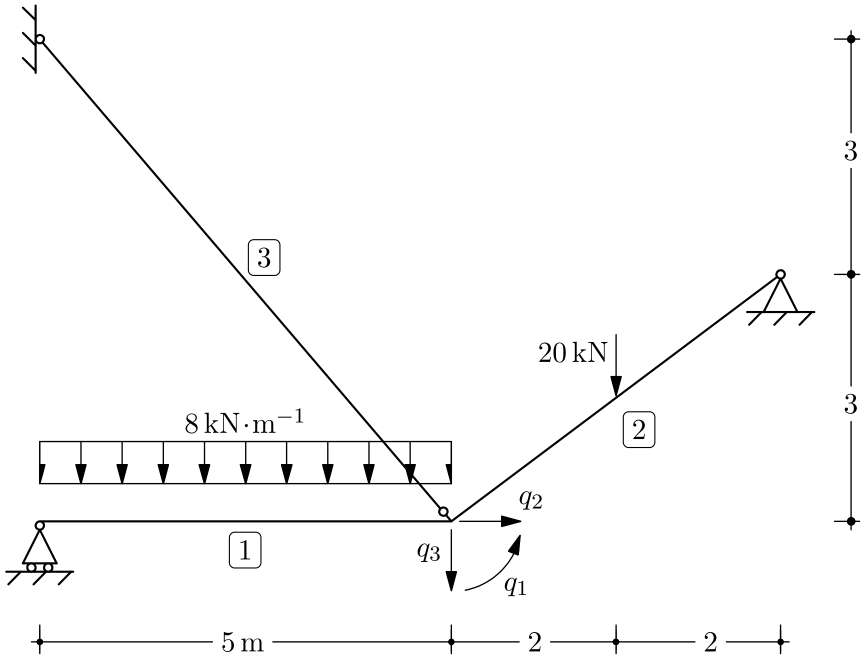


Figura 9.19: Viga atirantada.

i	E_i $\left(\mathrm{kN{\cdot}m^2}\right)$	I_i $\left(\mathrm{m^4}\right)$	A_i $\left(\mathrm{m^2}\right)$
1	E	I	$100\,I$
2	E	I	$100\,I$
3	E	—	I

Com base no procedimento anteriormente descrito, verifique se, para os deslocamentos independentes indicados na figura 9.19, a equação do método dos deslocamentos (9.13) tem a seguinte expressão:

$$E\,I\begin{bmatrix} 1,2 & -0,072 & 0,024 \\ -0,072 & 12,8611 & -9,5255 \\ 0,024 & -9,5255 & 7,3149 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} -10 \\ -1,8 \\ -37,4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

9.3 Cálculo dos Deslocamentos

Estabelecida a equação resolvente (9.13), os deslocamentos independentes da estrutura em análise são calculados recorrendo a um método de solução de sistemas de equações lineares:

$$\mathbf{q}=\mathbf{K}_*^{-1}\left(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_0\right). \tag{9.18}$$

Para o exemplo em questão, encontra-se facilmente a seguinte solução para o sistema (9.12):

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\frac{1}{E\,I}\begin{Bmatrix} 0,988 \\ 17,432 \end{Bmatrix}. \tag{9.19}$$

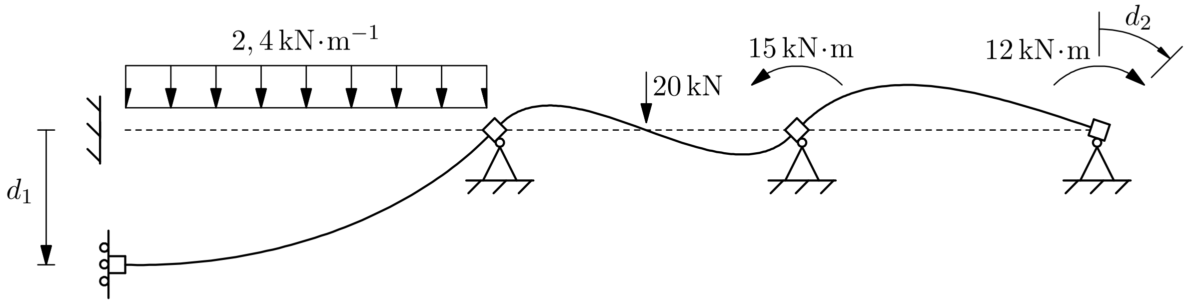


Figura 9.20: Deslocamentos nodais dependentes.

Conhecidos os deslocamentos independentes da estrutura, a determinação dos deslocamentos nodais dependentes, ou de qualquer outra quantidade, é realizada usando o processo que foi adoptado para quantificar as forças nodais (9.11), isto é, por sobreposição dos efeitos associados às soluções complementar e particular do problema.

Como exemplo de aplicação, considere-se o problema de calcular os deslocamentos nodais dependentes assinalados na figura 9.20. Com base nas deformadas representadas nas figuras 9.14 e 9.17, e usando os resultados resumidos nas tabelas anteriormente referidas encontram-se as seguintes expressões para os deslocamentos d_1 e d_2,

$$\begin{cases} d_1 = (2,5)\ q_1 + (0)\ q_2 + \dfrac{125}{3\,E\,I} \\ d_2 = (0)\ q_1 + (0,5)\ q_2 + \dfrac{12}{E\,I} \end{cases}$$

ou, matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{E\,I} \begin{Bmatrix} 41,667 \\ 12 \end{Bmatrix}. \tag{9.20}$$

Substituindo o resultado (9.19) em (9.20) vem finalmente:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E\,I} \begin{Bmatrix} 44,136 \\ 20,716 \end{Bmatrix}.$$

No caso geral, a definição (9.20) para os deslocamentos dependentes toma a seguinte expressão,

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}\,\mathbf{q} + \mathbf{d}_0. \tag{9.21}$$

concluindo-se que:

(D9.3) O coeficiente d_{0i} do vector $\mathbf{d}_0$ representa o deslocamento dependente d_i que se verifica na estrutura quando ela é sujeita à solicitação de vão e se mantêm nulos todos os deslocamentos nodais independentes ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$).

(D9.4) O coeficiente d_{ij} da matriz $\mathbf{D}$, representa o deslocamento dependente d_i que se verifica na estrutura quando nela se impõe o deslocamento nodal independente $q_j = 1$ e se mantêm nulos todos os restantes ($q_k = 0, k \neq j$), assim como a solicitação de vão ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

O procedimento a adoptar no cálculo dos deslocamentos dependentes é, pois, o seguinte:

Determinação dos Deslocamentos Dependentes

1. identifique os deslocamentos dependentes, $\mathbf{d}$, a calcular;
2. calcule a parcela dos deslocamentos dependentes associada à solução particular aplicando a definição (D9.3);
3. calcule as parcelas dos deslocamentos dependentes associadas à solução complementar recorrendo à definição (D9.4);
4. determine os deslocamentos dependentes substituindo na expressão (9.21) os valores obtidos para os deslocamentos nodais $\mathbf{q}$.

Exercício 9.3. Verifique se o deslocamento correspondente à carga concentrada aplicada à estrutura representada na figura 9.19, tem a seguinte expressão:

$$d = (-0,75)\,q_1 + (0,09)\,q_2 + (0,62)\,q_3 + \left(\frac{14,6733}{E\,I}\right).$$

9.4 Cálculo dos Esforços

Um procedimento análogo ao anteriormente descrito pode ser utilizado para determinar os esforços independentes nos elementos que constituem a estrutura a analisar.

Para a estrutura representada na figura 9.10, e de acordo com a orientação indicada na figura 9.11, encontra-se a seguinte expressão para os esforços independentes no elemento 2,

$$\begin{Bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0\,E\,I & -0,50\,E\,I \\ +0,50\,E\,I & +1,0\,E\,I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -10 \\ -10 \end{Bmatrix}, \tag{9.22}$$

se se atender à informação contida nas figuras 9.13 e 9.16. No caso geral, esta expressão toma a forma,

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{E}_m\,\mathbf{q} + \mathbf{X}_{0m}, \tag{9.23}$$

em que:

(D9.5) O vector $\mathbf{X}_{0m}$ representa os esforços independentes que se instalam no elemento m da estrutura quando ela é sujeita à solicitação de vão, e se mantêm nulos todos os deslocamentos nodais independentes ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$).

(D9.6) A coluna i da matriz $\mathbf{E}_m$, representa os esforços independentes que se instalam no elemento m da estrutura quando nela se impõe o deslocamento $q_i = 1$ e se mantêm nulos todos os restantes ($q_j = 0, j \neq i$), assim como a solicitação de vão ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

O procedimento a adoptar no cálculo dos esforços independentes pode ser resumido nos seguintes passos:

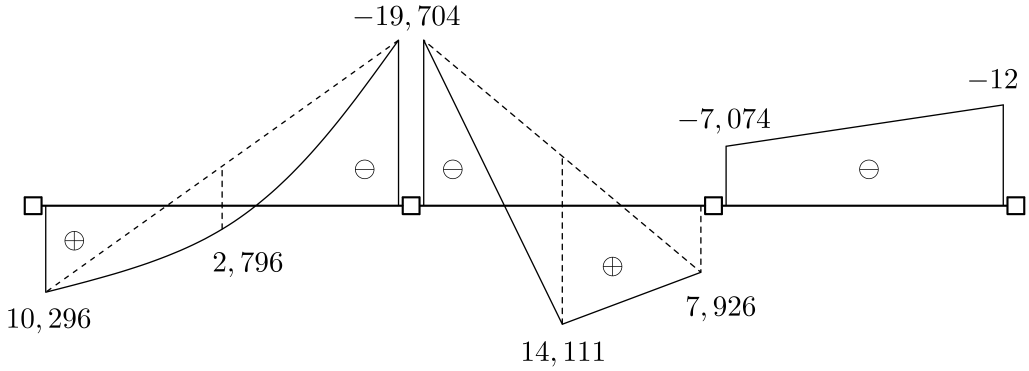


Figura 9.21: Diagrama de momentos flectores.

Determinação dos Esforços Independentes

1. identifique os esforços independentes que caracterizam o comportamento de cada elemento que constitui a estrutura;
2. calcule a parcela dos esforços independentes associada à solução particular, $\mathbf{X}_{0m}$, aplicando a definição (D9.5);
3. calcule as parcelas dos esforços independentes associadas à solução complementar, $\mathbf{E}_m$, recorrendo à definição (D9.6);
4. determine os esforços independentes substituindo na expressão (9.23) os valores obtidos para os deslocamentos nodais $\mathbf{q}$.

Conhecidos os esforços independentes e o carregamento, podem determinar-se as distribuições de esforços que sejam relevantes para a análise da estrutura.

Exercício 9.4. Utilize o procedimento anteriormente descrito para verificar se o diagrama de momentos flectores na estrutura representada na figura 9.10 é o definido na figura 9.21.

9.5 Cálculo das Reacções de Apoio

As reacções que se desenvolvem nos aparelhos de apoio da estrutura podem também ser calculadas combinando as parcelas associadas às soluções complementar e particular do problema. A definição geral que se encontra, tem a seguinte expressão,

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\,\mathbf{q} + \mathbf{R}_0. \tag{9.24}$$

concluindo-se que:

> **(D9.7)** O vector $\mathbf{R}_0$ representa as reacções que se desenvolvem nos apoios da estrutura quando ela é sujeita à solicitação de vão e se mantêm nulos todos os deslocamentos nodais independentes ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$).

> **(D9.8)** A coluna i da matriz $\mathbf{A}$ representa as reacções que se desenvolvem nos apoios da estrutura quando nela se impõe o deslocamento $q_i = 1$ e se mantêm nulos todos os restantes ($q_j = 0, j \neq i$), assim como a solicitação de vão ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

Como exemplo de aplicação, considere-se o problema definido na figura 9.1.

Se se utilizar a informação contida nas figuras 9.7b e 9.8b, para a identificação das reacções de apoio definida na figura 9.4, encontra-se:

$$\mathbf{A} = \frac{E\,I}{L^2}\begin{bmatrix} 2\,L \\ 6 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ -6 \\ \hdashline -L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_0 = \frac{1}{24}\begin{Bmatrix} 3\,f_1\,L \\ 12\,f_1 \\ 0 \\ \hdashline -24\,f_2\,L \\ 12\,f_1 \\ \hdashline -4\,f_2\,L^2 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{9.25}$$

Substituindo os resultados (9.7) e (9.25) na definição (9.24), obtém-se:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{120}\begin{Bmatrix} (21\,f_1 + 16\,f_2\,L)\;L \\ 78\,f_1 + 48\,f_2\,L \\ 0 \\ \hdashline -120\,f_2\,L \\ 42\,f_1 - 48\,f_2\,L \\ \hdashline (-3\,f_1 - 28\,f_2\,L)\;L \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

O procedimento para o cálculo das reacções de apoio resume-se, portanto, nos seguintes passos:

Determinação do Vector das Reacções de Apoio

1. identifique, usando uma numeração sequencial, as reacções que se podem desenvolver nos aparelhos de apoio da estrutura;
2. calcule a parcela das reacções associada à solução particular, $\mathbf{R}_0$, aplicando a definição (D9.7);
3. calcule a parcela das reacções associadas à solução complementar, $\mathbf{A}$, aplicando a definição (D9.8);
4. determine as reacções de apoio substituindo na expressão (9.24) os valores obtidos para os deslocamentos nodais $\mathbf{q}$.

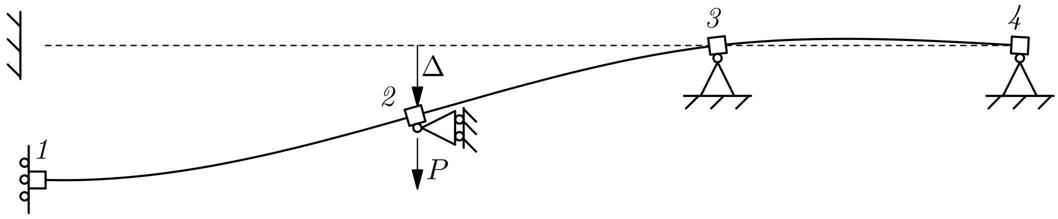


Figura 9.22: Assentamento de apoio.

Exercício 9.5. Utilize o procedimento anteriormente descrito para determinar as reacções de apoio na estrutura representada na figura 9.10, para a solicitação aí indicada.

9.6 Assentamentos de Apoio

Considere-se agora o problema de analisar o comportamento de uma estrutura quando num dos apoios se impõe um determinado assentamento. No modelo da estrutura, para implementar esta solicitação, liberta-se a ligação associada ao movimento que se pretende impor e aplica-se aí a força correspondente.

Esta operação está ilustrada na figura 9.22, em que Δ representa o assentamento vertical no nó 2 da estrutura definida na figura 9.10. A intensidade da força P não é conhecida à priori, mas o valor do deslocamento correspondente, Δ, é um dado do problema.

Para este tipo de solicitação tem-se sempre,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0}. \tag{9.26}$$

na equação (9.13) do método dos deslocamentos, pois a força correspondente a um assentamento de apoio nunca se identifica com qualquer das forças nodais correspondentes aos deslocamentos independentes da estrutura.

Os coeficientes do vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_0$, são determinados libertando na estrutura-base a ligação correspondente ao assentamento de apoio, implementando-se em seguida o deslocamento pretendido. Esta operação está ilustrada na figura 9.23a para o problema em estudo. A reconstituição das condições de apoio da estrutura está representada na figura 9.23b. Se o assentamento for de,

$$\Delta = 54\,\text{mm},$$

encontra-se a seguinte definição para o vector das forças de fixação,

$$\mathbf{Q}_0 = E\,I \begin{Bmatrix} -20,25 \cdot 10^{-3} \\ -20,25 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}, \tag{9.27}$$

de acordo com a convenção definida na figura 9.12 para as forças nodais.

Substituindo os resultados (9.26) e (9.27) na equação (9.13) encontra-se,

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12,5 \\ 8,0 \end{Bmatrix} 10^{-3},$$

se se usar a matriz de rigidez da estrutura presente na expressão (9.12). Conhecidos os deslocamentos independentes da estrutura, a aplicação dos procedimentos anteriormente

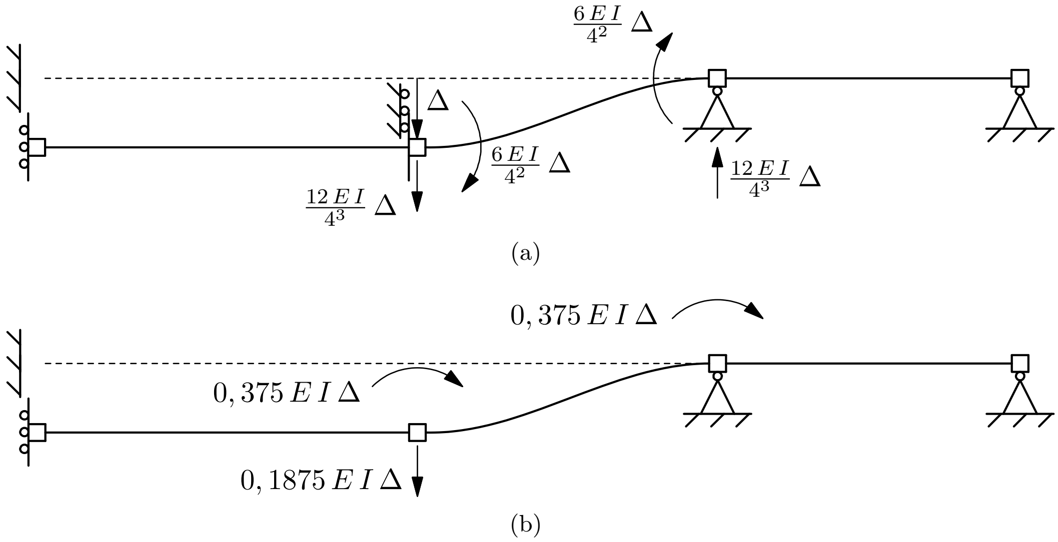


Figura 9.23: Acção de assentamento de apoio na estrutura-base.

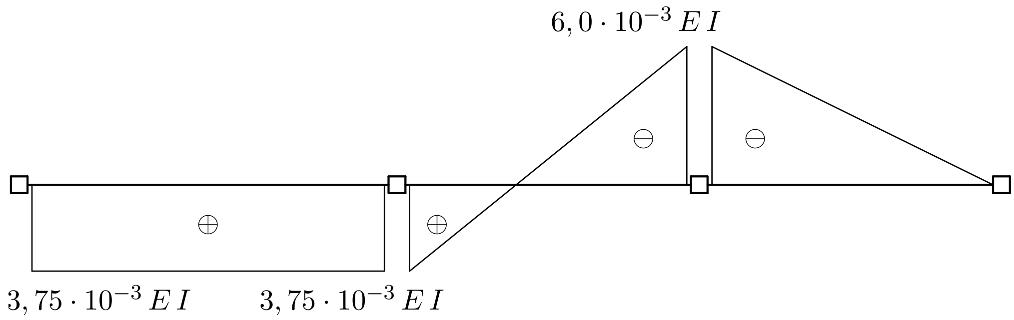


Figura 9.24: Momentos flectores devido a assentamento de apoio.

descritos permite determinar os deslocamentos dependentes, os esforços e as reacções de apoio que se desenvolvem na estrutura.

Exercício 9.6. Verifique se a solicitação representada na figura 9.22 introduz na estrutura a distribuição de momentos flectores definida na figura 9.24, quando se continua a admitir que $\Delta = 54\,\text{mm}$. Verifique também se a força associada a este assentamento é,

$$P = 2,44 \cdot 10^{-3}\,EI,$$

e se os deslocamentos dependentes assinalados na figura 9.20 tomam os seguintes valores:

$$\begin{cases} d_1 = 85,25 \cdot 10^{-3}\,\text{m}, \\ d_2 = 4,00 \cdot 10^{-3}\,\text{rad}. \end{cases}$$

9.7 Variação de Temperatura

A variação da temperatura nos elementos de uma estrutura é uma solicitação tipicamente de vão, pelo que a condição (9.26) de anulamento das forças correspondentes aos

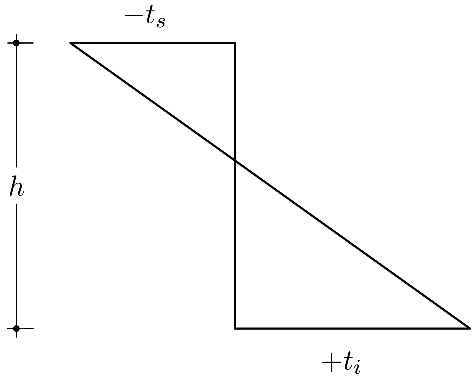


Figura 9.25: Variação de temperatura ao longo da secção.

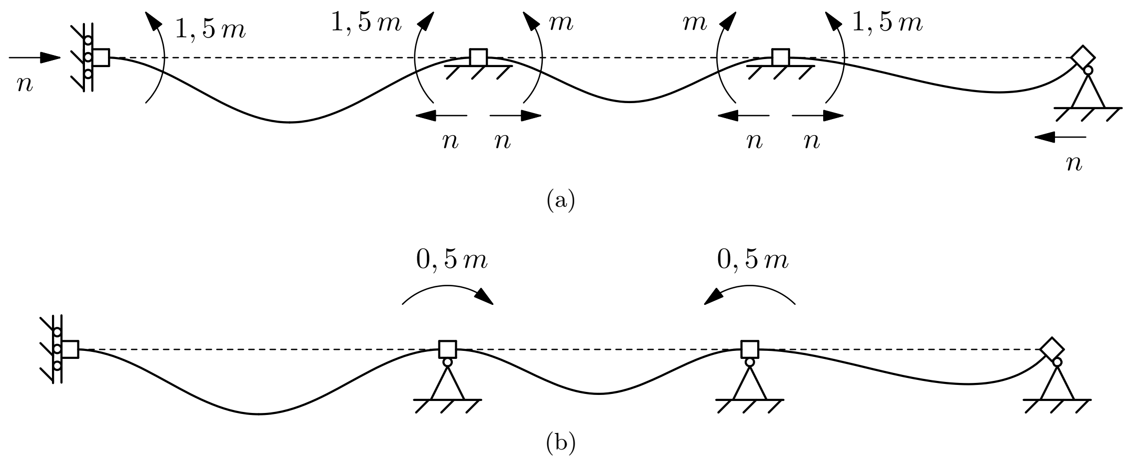


Figura 9.26: Acção da variação de temperatura na estrutura-base.

deslocamentos nodais independentes continua a ser aplicável. Para quantificar os coeficientes do vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_0$, basta introduzir na estrutura-base a variação da temperatura em causa.

Como exemplo de aplicação, considere-se de novo a viga representada na figura 9.10. Suponha-se agora que, em vez da solicitação aí indicada, se sujeita a estrutura à variação de temperatura indicada na figura 9.25, em que h representa a altura das secções transversais dos elementos estruturais.

Na figura 9.26a representa-se o efeito desta variação de temperatura sobre a estrutura-base e na figura 9.26b as forças nodais que é necessário aplicar para reconstituir as condições iniciais de apoio:

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{Bmatrix} -0,5\,m \\ +0,5\,m \end{Bmatrix}.$$

Os valores aí indicados, em que

$$\begin{aligned} m =& \alpha\ (t_i + t_s)\ \frac{E\,I}{h} \\ n =& \frac{1}{2}\,\alpha\ (t_i - t_s)\ E\,A \end{aligned}$$

foram obtidos a partir das tabelas 7.7, 7.11 e 7.15.

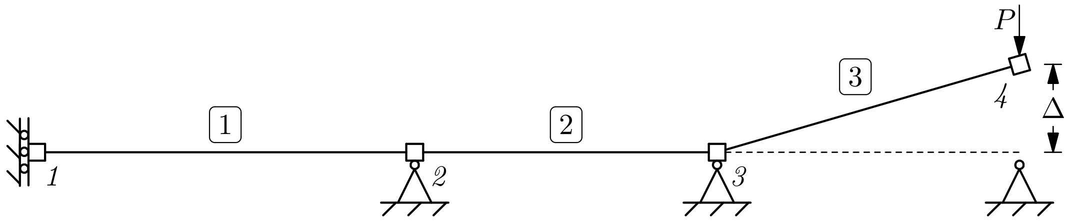


Figura 9.27: Erro de fabrico.

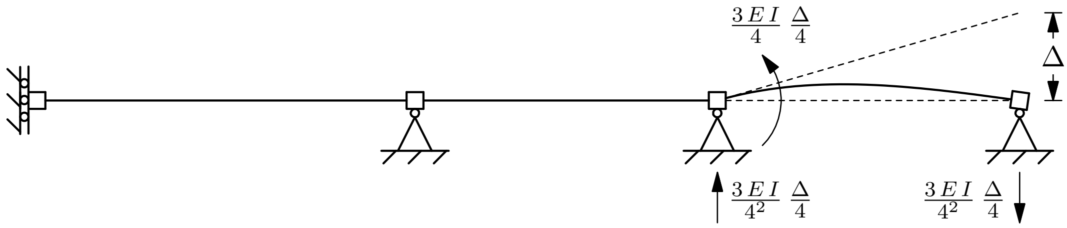


Figura 9.28: Acção do erro de fabrico na estrutura-base.

Exercício 9.7. Determine, para o exemplo anteriormente considerado, as distribuições de momento flector, esforço transverso e esforço axial na estrutura.

Exercício 9.8. Suponha que o tirante da estrutura representada na figura 9.19 sofre uma variação uniforme de temperatura, Δt. Verifique se esta solicitação provoca no elemento 2 um esforço axial de $-0.889166\,\alpha\,\Delta t\,E\,I$.

9.8 Deformações Iniciais

Admita-se agora que ao montar a estrutura representada na figura 9.10, se verifica que o nó 4 não assenta no aparelho de apoio preparado para o receber, em consequência de um erro no alinhamento do elemento 3, como se ilustra na figura 9.27.

Para estabelecer a ligação do nó 4 com o meio de fundação, é necessário aplicar a força P indicada na mesma figura. Pretende-se determinar a intensidade que essa força deve ter para realizar esta operação de montagem.

A solicitação indicada na figura 9.27 não contém forças correspondentes aos deslocamentos independentes da estrutura, definidos na figura 9.12, pelo que se mantém a validade da condição (9.26).

A realização da operação de montagem sobre a estrutura-base está representada na figura 9.28. As forças aí indicadas foram determinadas com base nos resultados resumidos na tabela 7.13. O vector das forças de fixação tem, portanto, a seguinte expressão:

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3\,E\,I\,\Delta}{16} \end{Bmatrix}. \tag{9.28}$$

Substituindo os resultados (9.26) e (9.28) na equação (9.13) e usando a matriz de rigidez

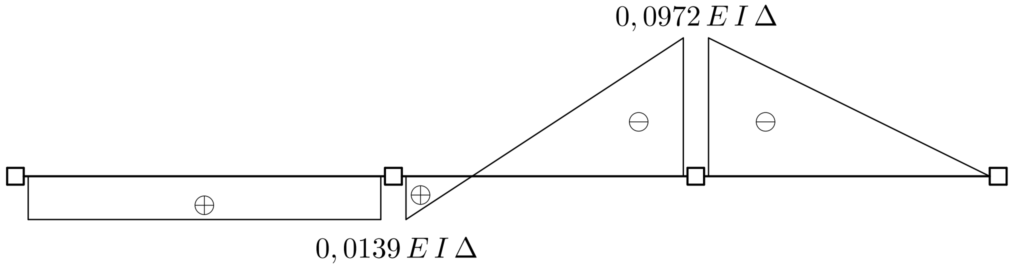


Figura 9.29: Momentos flectores devidos ao erro de fabrico.

da estrutura presente na equação (9.12), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +0,0463\,\Delta \\ -0,1204\,\Delta \end{Bmatrix}. \tag{9.29}$$

A força P, após a operação de montagem, é suportada pelo meio de fundação como uma reacção de apoio vertical no nó 4. Da informação contida nas figuras 9.16a, 9.16b e 9.28 obtém-se

$$P = (0)\,q_1 + \left(\frac{3\,E\,I}{16}\right)\,q_2 + \left(\frac{3\,E\,I\,\Delta}{64}\right) = 0,0243\,E\,I\,\Delta.$$

Exercício 9.9. Verifique se a operação de montagem anteriormente analisada introduz na estrutura a distribuição de momentos flectores definidos na figura 9.29.

Como se referiu durante o estudo da análise de estruturas hiperestáticas pelo método das forças, a acção das deformações iniciais pode ser representada por uma variação de temperatura equivalente. Esta analogia simplifica, em algumas situações, o estudo do efeito das deformações iniciais nos elementos que constituem uma estrutura.

Exercício 9.10. Ao montar a estrutura representada na figura 9.19, conclui-se que, por um erro de fabrico, o comprimento do tirante é de apenas 7 m. Determine o aumento uniforme de temperatura que é necessário introduzir nessa peça para estabelecer a ligação aos restantes elementos estruturais, assim como os esforços iniciais que esta operação introduz.

9.9 Pré-esforço

A acção do pré-esforço é uma solicitação tipicamente de vão, que equivale a introduzir na estrutura um campo de deformações iniciais, podendo por isso ser também simulada por uma variação de temperatura equivalente. Para este tipo de solicitação são nulas as forças nodais correspondentes aos deslocamentos independentes da estrutura, pelo que a condição (9.26) se continua a verificar.

Na equação do método dos deslocamentos, (9.13), a acção do pré-esforço é representada pelo vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_0$, cujos coeficientes representam agora as forças nodais que é necessário aplicar à estrutura para impedir os deslocamentos independentes causados pelo pré-esforço introduzido nos elementos que a constituem.

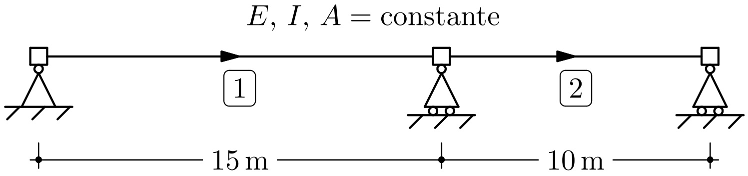


Figura 9.30: Viga contínua pré-esforçada.

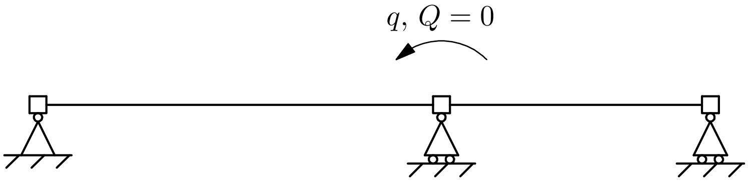


Figura 9.31: Deslocamento independente.

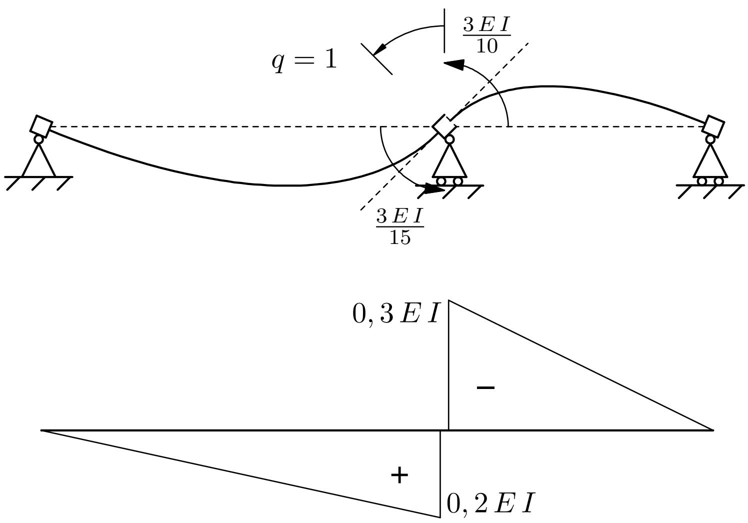


Figura 9.32: Acção do deslocamento independente.

Considere-se de novo o exemplo da viga contínua pré-esforçada, definido na figura 6.39. Como se pode verificar pelo modelo representado na figura 9.30, esta estrutura é estaticamente determinada para solicitações axiais.

A análise do comportamento da viga à flexão pode, portanto, ser realizada considerando apenas um deslocamento independente, a rotação q do nó intermédio assinalado na figura 9.31. Na mesma figura está indicada a força correspondente, o momento nodal

$$\mathbf{Q} = \left\{ 0 \right\}. \tag{9.30}$$

Na figura 9.32 está representada a acção do deslocamento independente, tendo as forças aí indicadas sido obtidas a partir da tabela 7.13. A matriz de rigidez da estrutura tem, pois, a seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_* = \left[0,5\,E\,I \right]. \tag{9.31}$$

A acção do pré-esforço sobre a estrutura-base está representada na figura 9.33. As forças aí assinaladas foram obtidas introduzindo na tabela 7.12 as características do pré-esforço em análise, definidas na figura 6.39. E fácil verificar que o vector das forças de

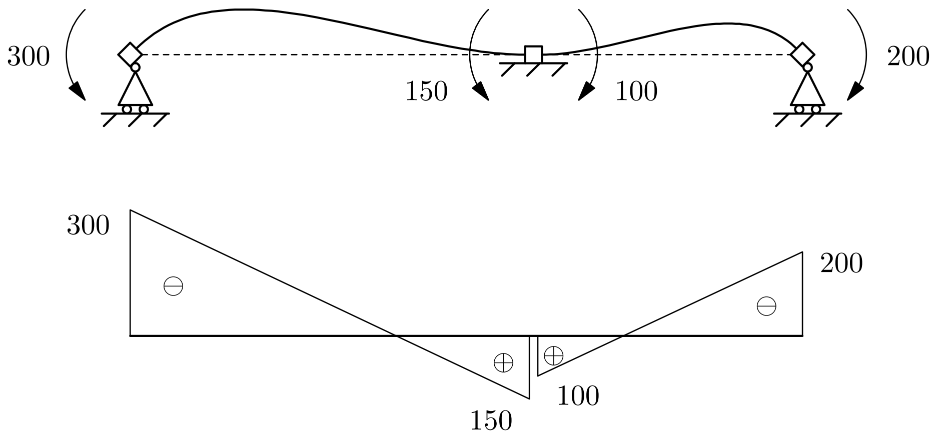


Figura 9.33: Acção do pré-esforço na estrutura-base.

fixação toma a seguinte expressão:

$$\mathbf{Q}_0 = \left\{ 50 \right\} . \tag{9.32}$$

Introduzindo os resultados (9.30), (9.31) e (9.32) na equação (9.18) e resolvendo, encontra-se o seguinte valor para o deslocamento independente:

$$q = -100\, E\, I . \tag{9.33}$$

A distribuição de momentos flectores na viga contínua, causada pela acção do pré-esforço, é obtida multiplicando pelo resultado (9.33) o diagrama representado na figura 9.32 e sobrepondo o diagrama resultante ao associado à solução particular, definido na figura 9.33. A distribuição que assim se obtém coincide, naturalmente, com a representada na figura 6.44.

Exercício 9.11. Determine o valor do pré-esforço a aplicar na travessa do pórtico representado na figura 9.34, de modo a anular o deslocamento correspondente à força aplicada.

9.10 Estruturas com Libertações Elásticas

Quando numa estrutura existem aparelhos de libertação elástica, os movimentos por eles permitidos devem ser considerados como deslocamentos independentes, por nenhum dos elementos-base anteriormente analisados incorporar aparelhos deste tipo.

Tal como as peças lineares, os aparelhos de libertação elástica devem ser interpretados como elementos resistentes da estrutura. Por essa razão, o efeito das libertações elásticas vai-se manifestar na equação do método dos deslocamentos (9.18), exclusivamente a nível da matriz de rigidez da estrutura.

De facto, quando na estrutura-base se introduzem os deslocamentos independentes, para além das forças necessárias para deformar as peças lineares, torna-se também necessário deformar as molas que intervenham no movimento, para garantir a continuidade da estrutura. Quando, por sua vez, a solicitação é aplicada à estrutura–base, os aparelhos

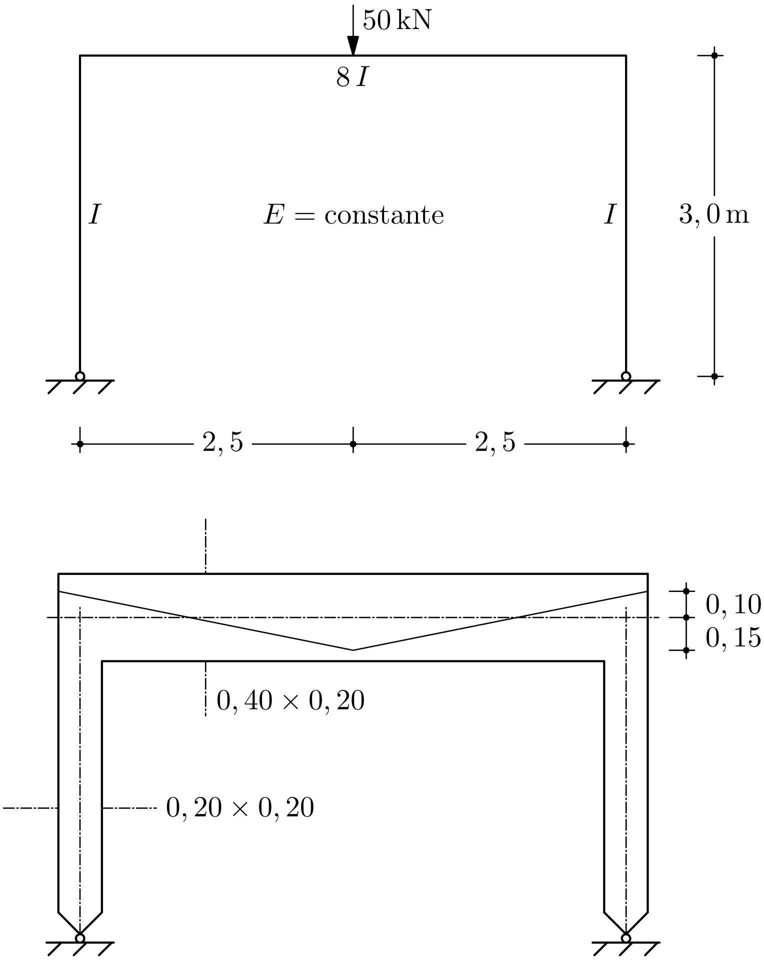


Figura 9.34: Pórtico pré-esforçado.

de libertação elástica estão bloqueados, não intervindo portanto na definição das forças de fixação.

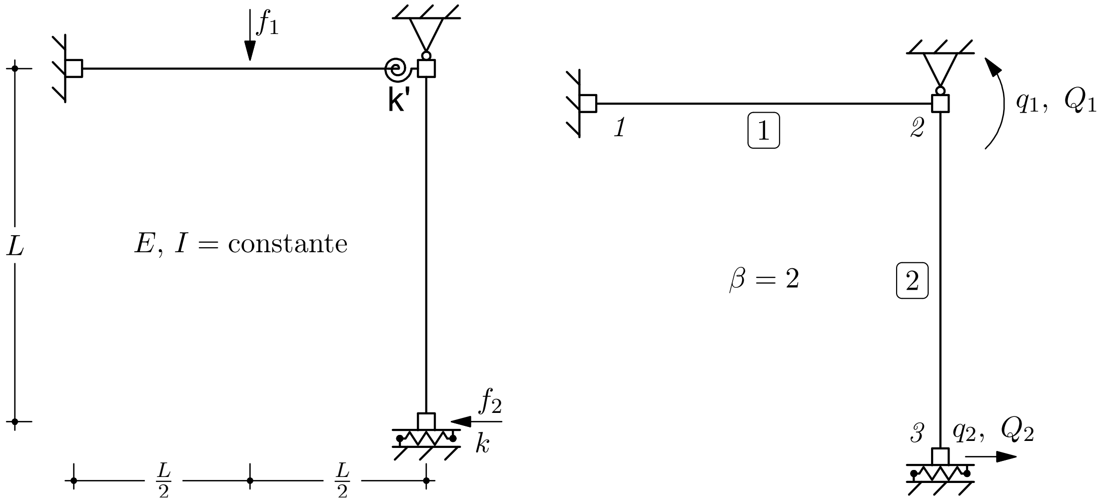
Como exemplo de aplicação, suponha-se que era elástico, com uma rigidez k, o encastramento deslizante da estrutura representada na figura 9.1. A estrutura modificada está representada na figura 9.35a. Como se indica na figura 9.35b, para além da rotação do nó 2, torna-se agora necessário considerar também como independente a translação horizontal do nó vizinho à libertação elástica.

Como não existem forças nodais aplicadas à estrutura, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Para determinar os coeficientes do vector das forças de fixação, $\mathbf{Q}_0$, deve-se aplicar à estrutura a solicitação de vão, impedindo simultaneamente os deslocamentos independentes, q_1 e q_2. Esta solicitação está representada na figura 9.36, tendo as forças aí indicadas sido determinadas a partir da tabela 7.6. Note-se que a mola não intervém nesta solicitação por estar bloqueado o deslocamento que lhe está associado, q_2.

Atendendo à convenção adoptada para as forças nodais, indicada na figura 9.35b, a partir da informação contida na figura 9.36 encontra-se a seguinte expressão para o vector



(a) Modelo estrutural. (b) Deslocamentos independentes.

Figura 9.35: Pórtico com apoio elástico.

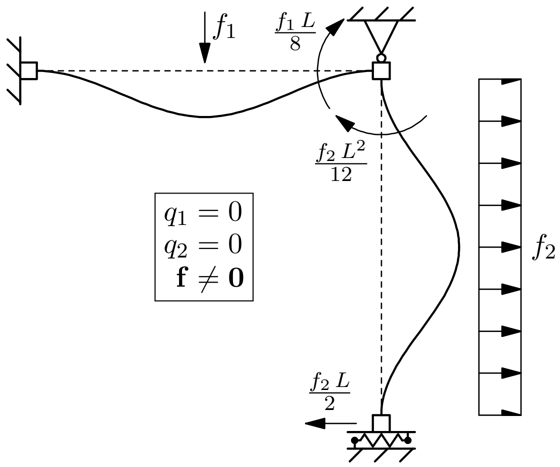


Figura 9.36: Acção das cargas de vão.

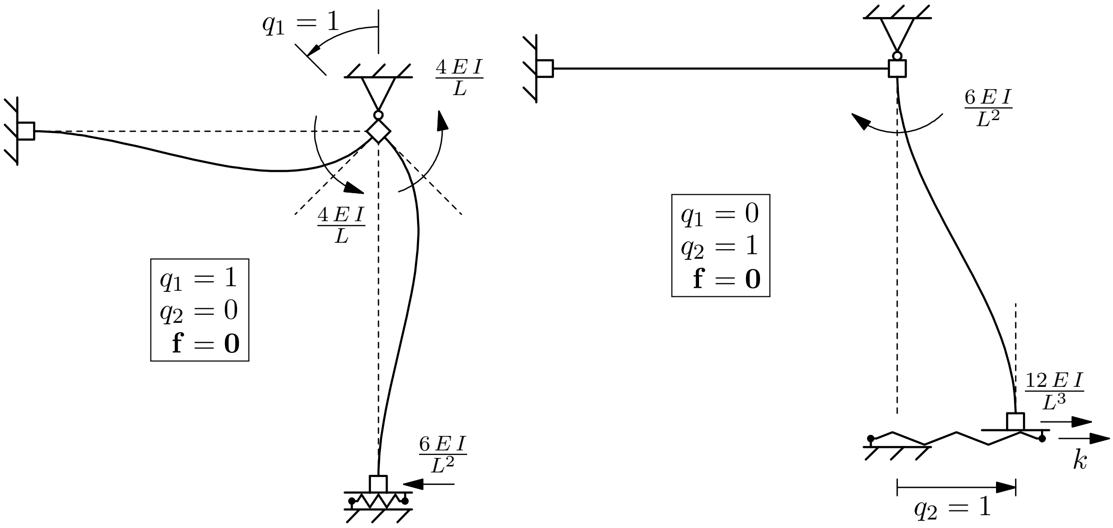
das forças de fixação:

$$\begin{Bmatrix} Q_{01} \\ Q_{02} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{f_1\,L}{8} - \frac{f_2\,L^2}{12} \\ -\frac{f_2\,L}{2} \end{Bmatrix}.$$

Na figura 9.37 representa-se o efeito dos deslocamentos independentes q_1 e q_2, respectivamente. As forças aí assinaladas foram determinadas a partir da tabela 7.9. Quando se provoca o deslocamento q_2, para além das forças necessárias para introduzir no elemento 2 a deformada desejada, é ainda necessário aplicar ao nó 3 a força que obriga a mola a acompanhar o deslocamento desse nó. Essa força iguala a rigidez da mola, k, por ser unitário o deslocamento imposto.

Com base nos resultados apresentados na figura 9.37 encontra-se a seguinte expressão para a matriz de rigidez da estrutura:

$$\mathbf{K}_* = \begin{bmatrix} \frac{8\,E\,I}{L} & -\frac{6\,E\,I}{L^2} \\ -\frac{6\,E\,I}{L^2} & \frac{12\,E\,I}{L^3} + k \end{bmatrix}.$$



(a) Estado 1. (b) Estado 2.

Figura 9.37: Acção dos deslocamentos nodais.

Exercício 9.12. Suponha que na estrutura representada na figura 9.35a se tem:

$$L = 4\,\mathrm{m},\;\; f_1 = 20\,\mathrm{kN},\;\; f_2 = 2\,\mathrm{kN{\cdot}m^{-1}}.$$

Dimensione a mola, isto é, determine a rigidez k, de modo a garantir que $q_2 = 2\,\mathrm{cm}$.

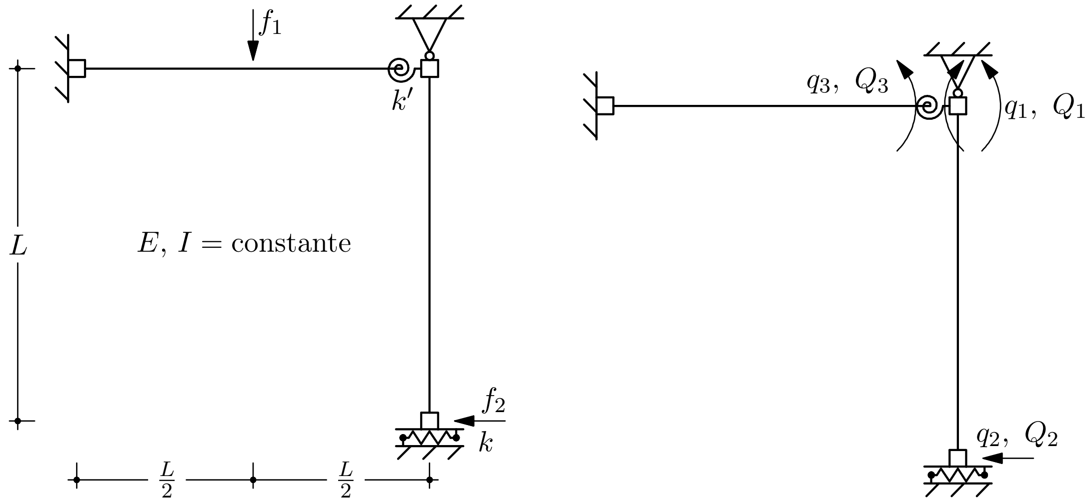
Um procedimento análogo ao anteriormente descrito pode ser utilizado para realizar a análise de estruturas com libertações elásticas interiores. Os deslocamentos independentes correspondentes passam agora a ser as descontinuidades permitidas por esses aparelhos de libertação. As quantidades estáticas associadas a essas descontinuidades são os esforços mobilizados pelos aparelhos de libertação em causa.

Exercício 9.13. Considere a estrutura representada na figura 9.38a. Verifique se, para a ordenação dos deslocamentos independentes definida na figura 9.38b, a equação do método dos deslocamentos toma a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & k + \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ \frac{4EI}{L} & 0 & k' + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{f_1 L}{8} \\ 0 \\ -\frac{f_1 L}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -f_2 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

9.11 Trabalho das Forças e dos Deslocamentos Nodais

Nos exemplos anteriormente resolvidos, os deslocamentos independentes e as forças nodais correspondentes coincidem sempre com o referencial de cada barra da estrutura, o que facilita o uso dos resultados resumidos nas tabelas apresentadas no Capítulo 7, todos eles escritos no referencial da barra.



(a) Modelo estrutural. (b) Deslocamentos independentes.

Figura 9.38: Pórtico com libertações elásticas.

Quando tal não sucede, torna-se necessário decompor os deslocamentos e as forças nodais recorrendo explícita ou implicitamente à mudança de coordenadas apresentada na Secção 7.9, o que pode ser bastante trabalhoso em cálculo manual. Foi certamente necessário recorrer a essa decomposição na resolução do exercício 9.2.

Na figura 9.39, para além de identificar o deslocamento independente, q, e a força nodal correspondente, Q, apresentam-se as soluções particular e complementar do problema. A força nodal é obtida determinando a componente da força aplicada no nó, F, segundo o deslocamento nodal:

$$Q = -\mathrm{sen}(\alpha)\, F.$$

As forças de extremidade devidas à carga de vão são determinadas recorrendo à tabela 7.6, encontrando-se o seguinte valor para a força de fixação:

$$Q_0 = +\mathrm{sen}(\alpha)\, P.$$

O deslocamento nodal unitário provoca um deslocamento axial, $\cos(\alpha)$, e um deslocamento transversal, $\mathrm{sen}(\alpha)$, recorrendo-se à tabela 7.9 para determinar o sistema de forças que é necessário aplicar à barra. A força nodal correspondente, K, define o único coeficiente da matriz de rigidez da estrutura, e é obtida determinando as componentes das forças de extremidade segundo o deslocamento imposto:

$$K = \left(\frac{E\,A}{L}\cos(\alpha)\right)\cos(\alpha) + \left(\frac{12\,E\,I}{L^3}\,\mathrm{sen}(\alpha)\right)\mathrm{sen}(\alpha).$$

Apresenta-se a seguir uma reinterpretação dos coeficientes da equação do método dos deslocamentos (9.13) que simplifica substancialmente a aplicação manual do processo de mudança de coordenadas, usando-se para isso o exemplo simples definido na figura 9.39.

Admita-se que a estrutura tem β deslocamentos independentes e defina-se o produto interno entre o vector dos deslocamentos nodais e o vector das forças nodais correspondentes, isto é, o trabalho realizada pelos deslocamentos nodais sobre as forças correspondentes:

$$W = \mathbf{q}^T\,\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{\beta} q_k\, Q_k.$$

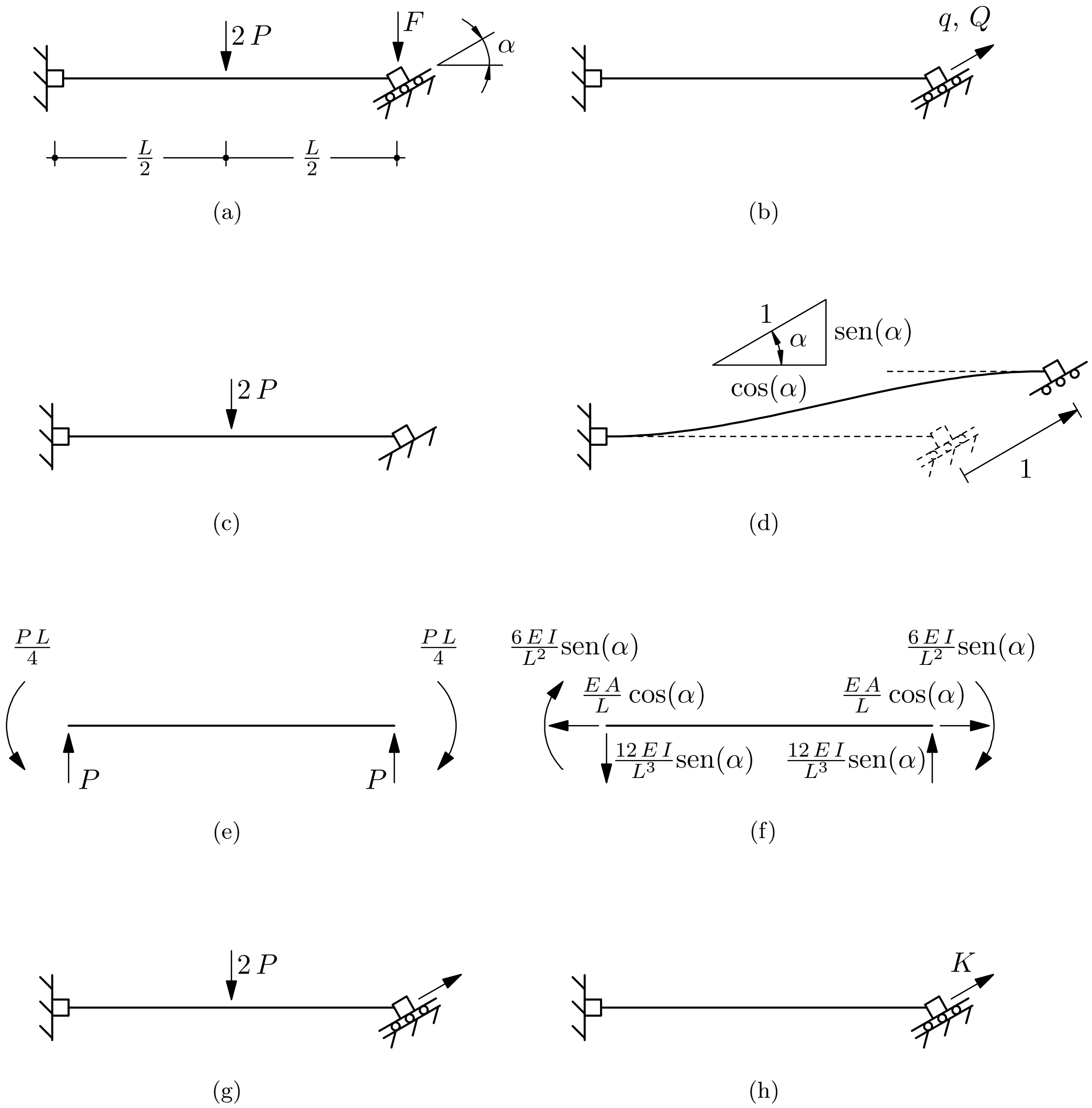


Figura 9.39: Viga com encastramento deslizante.

Este resultado mostra que,

> **(D9.9)** A força nodal Q_i representa o trabalho realizado pelas forças nodais na deformada da estrutura-base devida ao deslocamento nodal $q_i = 1$ e todos os restantes deslocamentos nodais ($q_j = 0,\ j \neq i$) são nulos, assim como a solicitação de vão ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

e é imediatamente generalizável para a definição das forças de fixação:

> **(D9.10)** A força nodal Q_{0i} representa o trabalho realizado pelas forças nodais de fixação na deformada da estrutura-base devida ao deslocamento

> nodal $q_i = 1$ e todos os restantes deslocamentos nodais ($q_j = 0,\ j \neq i$) são nulos, assim como a solicitação de vão ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

Para aplicar a definição (D9.9) e recuperar o resultado (9.11) basta realizar o trabalho da força nodal F (figura 9.39a) sobre a deformada devida a $q = 1$ (figura 9.39d). De acordo com a definição (D9.10), o resultado (9.11) é recuperado realizando o trabalho das forças de fixação definidas na figura 9.39e na deformada definida na figura 9.39d.

De acordo com a equação (9.13) do método dos deslocamentos, as forças nodais devidas aos deslocamentos nodais, na ausência das cargas de vão, são definidas pela expressão,

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{K}_* \, \mathbf{q},$$

sendo a seguinte a expressão do trabalho que elas realizam:

$$W = \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{Q}_c = \mathbf{q}^T \, \mathbf{K}_* \, \mathbf{q} = \sum_{i=1}^{\beta} q_i \sum_{j=1}^{\beta} k_{ij} \, q_j .$$

Este resultado permite estabelecer a seguinte conclusão, ou a sua simétrica, em consequência da simetria da matriz de rigidez:

> **(D9.11)** A força nodal k_{ij} representa o trabalho realizado pelas forças nodais devidas ao deslocamento nodal $q_j = 1$ na deformada da estrutura-base devida ao deslocamento nodal $q_i = 1$.

O resultado (9.11) é recuperado realizando o trabalho das forças nodais definidas na figura 9.39f na deformada 9.39d.

Exercício 9.14. Prove que os coeficientes diagonais da matriz de rigidez são necessariamente positivos, $k_{ii} > 0$.

O processo anteriormente descrito para determinar os coeficientes da equação resolvente do método dos deslocamentos pode, portanto, ser reformulado da seguinte maneira:

Determinação da Equação do Método dos Deslocamentos

1. discretize a estrutura e oriente e numere sequencialmente os elementos deformáveis que a compõem;
2. resuma num quadro as constantes geométricas e elásticas que determinam o comportamento de cada elemento estrutural;
3. determine o grau de indeterminação cinemática da estrutura, β, e defina a estrutura-base associada;
4. identifique os β deslocamentos nodais $\mathbf{q}$ com uma numeração sequencial e trace as deformadas cinematicamente admissíveis correspondentes;
5. seleccione as forças aplicadas nos nós onde se identificaram os deslocamentos independentes e aplique a definição (D9.9) para obter o vector das forças nodais, $\mathbf{Q}$.
6. equilibre o carregamento dado na estrutura-base e aplique a definição (D9.10) para obter o vector das forças nodais de fixação, $\mathbf{Q}_0$.

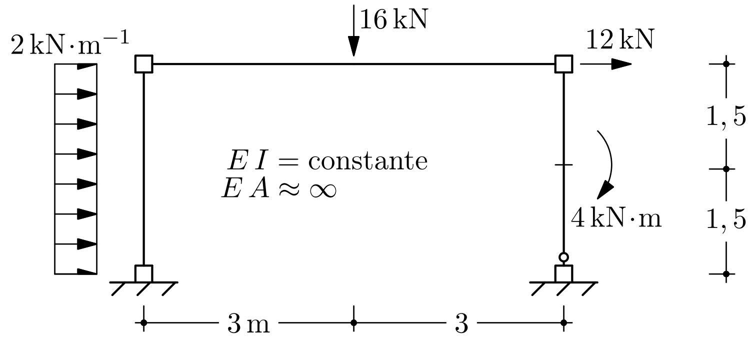


Figura 9.40: Pórtico rectangular com barras axialmente rígidas.

7. determine as forças nodais na estrutura-base devidas a cada um dos deslocamentos independentes e aplique sequencialmente a definição (D9.11) para obter a matriz de rigidez da estrutura, $\mathbf{K}_*$.

Este procedimento mantém-se válido para as acções consideradas anteriormente (Secções 9.6 a 9.9) e para estruturas com libertações elásticas (Secção 9.10). é complementado pelo recurso à sobreposição de efeitos para determinar os deslocamentos dependentes, os esforços e as reacções de apoio na estrutura analisada (Secções 9.3 a 9.5).

Exercício 9.15. Recupere os resultados do Exercício 9.2 recorrendo ao procedimento acima descrito.

9.12 Estruturas com Elementos Rígidos

Os problemas anteriormente estudados, foram formulados admitindo que não havia restrições relativamente aos modos de deformação dos elementos estruturais. Todavia, por vezes é vantajoso, ou mesmo necessário, admitir que a estrutura a analisar contém elementos resistentes que não são capazes de absorver determinados modos de deformação. Como adiante se mostra, este tipo de comportamento reflecte-se num aspecto central da formulação da equação do método dos deslocamentos: a identificação das forças correspondentes aos deslocamentos independentes.

9.12.1 Forças nodais equivalentes

Como exemplo de introdução, admita-se que os elementos de pórtico plano caracterizado na figura 9.40 são axialmente rígidos. Na figura 9.41 estão indicados os deslocamentos independentes, q_i, que se deveriam considerar na análise da estrutura se as barras que as constituem fossem axialmente deformáveis. Na mesma figura estão indicadas as forças nodais correspondentes, Q_i.

Ao introduzir a hipótese da indeformabilidade axial das barras, verifica-se que o grau de indeterminação cinemática da estrutura desce de 6 para 3. Os três modos de deformação linearmente independentes estão representados na figura 9.42, estando também aí definida a estrutura-base correspondente.

Como a estrutura com barras axialmente rígidas tem apenas 3 graus de indeterminação cinemática, o sistema resolvente do método dos deslocamentos vai envolver apenas 3

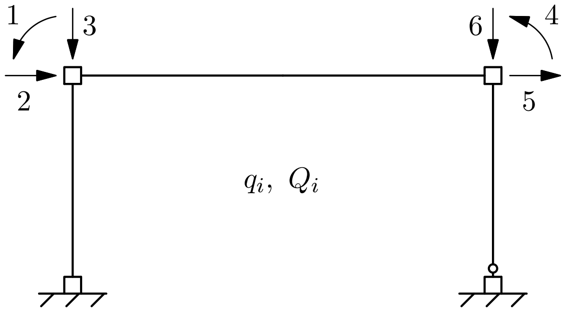


Figura 9.41: Deslocamentos independentes para barras axialmente deformáveis.

equações a 3 incógnitas, os deslocamentos δ_i. Esse sistema vai ser expresso na forma seguinte, para o distinguir do sistema (9.13) que resolveria a estrutura com barras axialmente deformáveis:

$$\mathbf{S}\,\boldsymbol{\delta} + \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}. \tag{9.34}$$

Para a estrutura em análise, o sistema (9.34) toma o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \tag{9.35}$$

As interpretações (D9.1) e (D9.2) para as constantes presentes no sistema (9.13) podem ser adaptadas para o sistema (9.34), se em vez de deslocamento nodal independente q_i e força nodal correspondente Q_i, se ler o modo de deformação independente δ_i e a força correspondente F_i. O problema que obviamente se põe ao tentar implementar estas definições é o de saber que quantidades de facto as forças F_i representam.

No exemplo em consideração este problema põe-se especificamente na identificação da força nodal correspondente ao deslocamento de translação, o modo δ_3 na figura 9.42d, o qual pode ser identificado tanto com o deslocamento nodal q_2 como com o deslocamento nodal q_5, assim como com qualquer deslocamento horizontal da viga do pórtico com barras axialmente indeformáveis. A força F_3 não pode, portanto, ser identificada com a força nodal Q_2 ou com a força nodal Q_5, identificadas na figura 9.41.

Se se aplicar o procedimento descrito na secção anterior para definir as forças nodais F_i, realizando o trabalho das forças nodais Q_i sobre as deformadas traçadas na figura 9.42, obtêm-se as seguintes identificações:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_4 \\ Q_2 + Q_5 \end{Bmatrix} \tag{9.36}$$

Este resultado, ilustrado na figura 9.43, mostra que a força nodal força equivalente, F_3, é a soma das forças nodais Q_2 e Q_5, traduzindo o facto que a deformada $\delta_3 = 1$ ser a soma das deformadas $q_2 = 1$ e $q_5 = 1$. Mostra também que as forças nodais Q_3 e Q_6 não vão intervir na equação (9.13) do método dos deslocamentos, pois não realizam trabalho na estrutura com barras axialmente indeformáveis. Como adiante se mostra, este facto obriga ao recurso a um método indirecto para determinar os esforços associados a modos indeformáveis, os quais podem permanecer hiperestáticos.

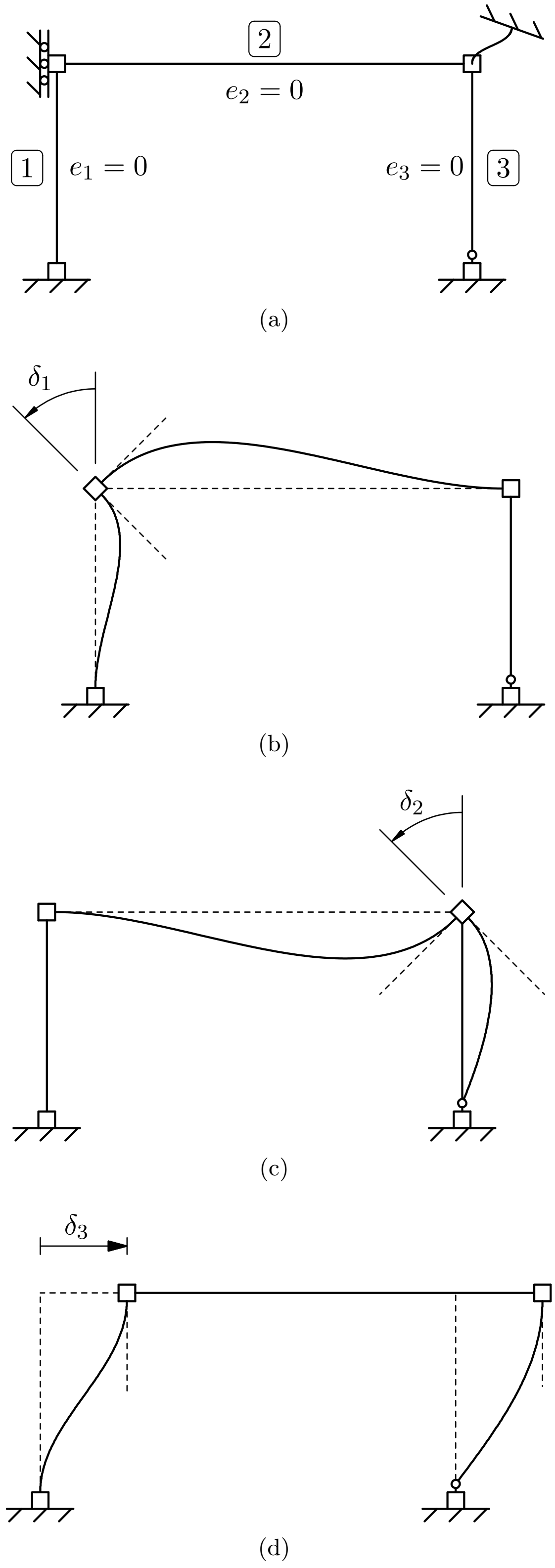


Figura 9.42: Deslocamentos independentes para barras axialmente rígidas.

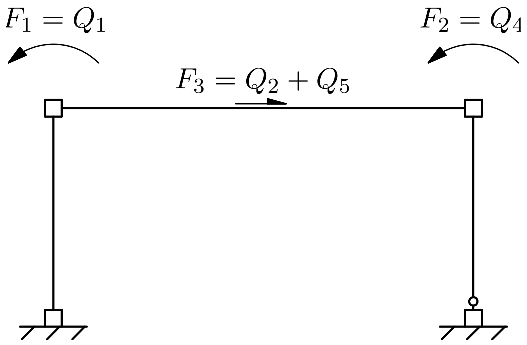


Figura 9.43: Forças nodais equivalentes.

Para formular de maneira geral o resultado (9.36) começa-se por definir os deslocamentos nodais q_i em função dos modos de deformação δ_i da estruturas com modos rígidos, obtendo-se a seguinte relação para o exemplo em estudo, utilizando as identificações e as deformadas definidas nas figuras 9.41 e 9.42 , respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdots \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}, \tag{9.37}$$

ou, se se usar a notação matricial (8.8):

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{\delta}. \tag{9.38}$$

Esta relação mostra que é suficiente (mas não estritamente necessário) definir as forças nodais equivalentes pela relação,

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T\,\mathbf{Q} \tag{9.39}$$

para assegurar que o trabalho dos deslocamentos nodais $\mathbf{q}$ sobre as forças nodais, $\mathbf{Q}$, sempre facilmente identificáveis, iguala o trabalho dos modos de deformação $\boldsymbol{\delta}$ sobre as forças nodais equivalentes, $\mathbf{F}$, que se pretendia identificar:

$$W = \mathbf{q}^T\,\mathbf{Q} = (\mathbf{T}\,\boldsymbol{\delta})^T\;\mathbf{Q} = \boldsymbol{\delta}^T\mathbf{T}^T\,\mathbf{Q} = \boldsymbol{\delta}^T\,\mathbf{F}.$$

Para o exemplo em análise, o trabalho das forças nodais é definido por,

$$W = \sum_{i=1}^{6} q_i\,Q_i. \tag{9.40}$$

bastando introduzir as relações (9.37) para obter o trabalho realizável na estrutura com barras axialmente rígidas, obtendo-se a seguinte expressão depois de agrupar as variáveis:

$$W = \delta_1\,Q_i + \delta_2\,Q_4 + \delta_3\,(Q_2 + Q_5)\,. \tag{9.41}$$

Recupera-se o resultado (9.36) igualando esta expressão à definição do trabalho expresso em termos das forças nodais equivalentes:

$$W = \sum_{i=1}^{3} \delta_i \, F_i. \tag{9.42}$$

Exercício 9.16. Recupere o resultado (9.36) usando a definição (9.39) e a matriz de dependência dos deslocamentos presente na expressão (9.38).

9.12.2 Formulação da equação do método dos deslocamentos

Face ao anteriormente exposto, o procedimento descrito na Secção 9.11 pode ser directamente aplicado para determinar a equação do método dos deslocamentos na forma (9.34). A informação necessária para o fazer para o exemplo em análise está resumida na figura 9.44, encontrando-se as seguintes expressões para o vector das forças nodais equivalentes,

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 + 12 \end{Bmatrix}, \tag{9.43}$$

para o vector das forças nodais de fixação equivalentes,

$$\mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} 12 - 1,5 \\ -12 - 0,5 \\ -3 - 1,5 \end{Bmatrix}, \tag{9.44}$$

e para a matriz de rigidez da estrutura:

$$\mathbf{S} = E\,I \begin{bmatrix} \frac{4}{6} + \frac{4}{3} & \frac{2}{6} & \frac{6}{9} \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{6} + \frac{3}{3} & \frac{3}{9} \\ \frac{6}{9} + 0 & 0 + \frac{3}{9} & \frac{12}{27} + \frac{3}{27} \end{bmatrix}. \tag{9.45}$$

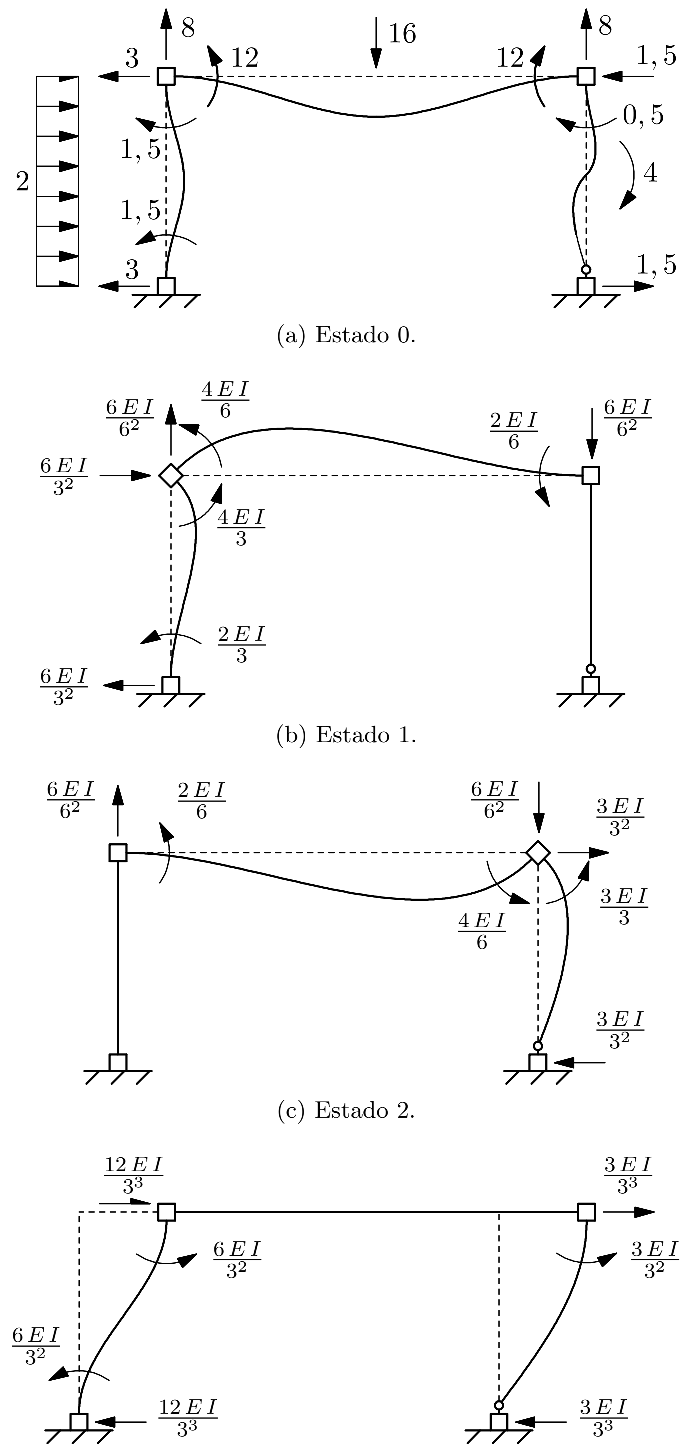
Este procedimento é o mais prático para cálculo manual, mas é dificilmente programável. Neste contexto, é mais fácil determinar a equação do método dos deslocamentos na forma (9.13) admitindo que todos os modos são deformáveis (com constantes mecânicas finitas mas arbitrárias) e estabelecer a equação resolvente na forma (9.34) recorrendo às relações (9.38) e (9.39):

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T\,\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\,(\mathbf{K}_*\,\mathbf{q} + \mathbf{Q}_0) = \mathbf{T}^T\,\mathbf{K}_*\,\mathbf{T}\,\boldsymbol{\delta} + \mathbf{T}^T\,\mathbf{Q}_0. \tag{9.46}$$

Para além da definição (9.39) para o vector das forças nodais equivalentes, o resultado anterior estabelece as seguintes definições para o vector das forças nodais de fixação equivalentes e para a matriz de rigidez da estrutura com modos indeformáveis em função da matriz de rigidez da estrutura deformável:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{T}^T\,\mathbf{Q}_0, \tag{9.47a}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^T\,\mathbf{K}_*\,\mathbf{T}. \tag{9.47b}$$



(a) Estado 0.

(b) Estado 1.

(c) Estado 2.

(d) Estado 3.

Figura 9.44: Forças nodais devidas às cargas de vão e aos deslocamentos independentes.

Exercício 9.17. Recupere os resultados (9.44) e (9.45) usando as definições (9.47) e a matriz de dependência dos deslocamentos presente na expressão (9.37). Note que primeiro é necessário montar a equação do método dos deslocamentos para a estrutura representada na figura 9.40, supondo que todos os elementos são axialmente deformáveis.

As interpretações (D9.1) e (D9.2) podem ser imediatamente adaptadas para o sistema (9.34):

> **(D9.12)** O coeficiente F_{0i}, do vector das forças de fixação $\mathbf{F}_0$, representa a força nodal F_i, correspondente ao modo de deformação d_i, que é necessário aplicar à estrutura quando ela é sujeita à solicitação de vão e se mantêm nulos todos os modos de deformação independentes ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$).

> **(D9.13)** O coeficiente s_{ij} da matriz de rigidez, $\mathbf{S}$, representa a força nodal F_i, correspondente ao modo de deformação d_i, quando nela se impõe o modo de deformação $d_j = 1$ e se mantêm nulos todos os restantes ($d_k = 0, k \neq j$), assim como a solicitação de vão ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

O procedimento para a montagem da equação do método dos deslocamentos (9.34) para estruturas com elementos rígidos, pode ser sistematizado nos seguintes passos:

Montagem da Equação do Método dos Deslocamentos

1. discretize a estrutura e oriente e numere sequencialmente os elementos deformáveis que a compõem;
2. resuma, num quadro, as constantes elásticas e geométricas que determinam o comportamento de cada elemento estrutural;
3. determine o grau de indeterminação cinemática da estrutura, β, admitindo que todos os elementos são deformáveis;
4. determine o grau de indeterminação cinemática da estrutura com elementos rígidos, β', e defina a estrutura-base associada;
5. estabeleça a relação (9.38) de dependência entre os β deslocamentos nodais $\mathbf{q}$ e os β' modos de deformação independentes $\mathbf{d}$;
6. quantifique o efeito das forças nodais aplicadas à estrutura recorrendo à definição (9.39);
7. aplique à estrutura-base a solicitação de vão e monte o vector das forças de fixação, $\mathbf{F}_0$, usando as definições (D9.12) e (9.39);
8. introduza na estrutura-base cada um dos modos de deformação independentes e monte a matriz de rigidez da estrutura, $\mathbf{S}$, recorrendo às definições (D9.13) e (9.39).

Uma dúvida que pode surgir é se uma força aplicada num nó deve ser considerada como força nodal, e contribuir para o vector $\mathbf{F}$, na equação (9.34), ou como carga de vão, e contribuir para o vector das forças de fixação, o vector $\mathbf{F}_0$ na mesma equação. Qualquer das opções é válida, se for aplicada coerentemente.

No entanto, para sistematizar o cálculo, interessa definir um critério que seja sempre válido, independentemente das condições de deformabilidade dos elementos estruturais.

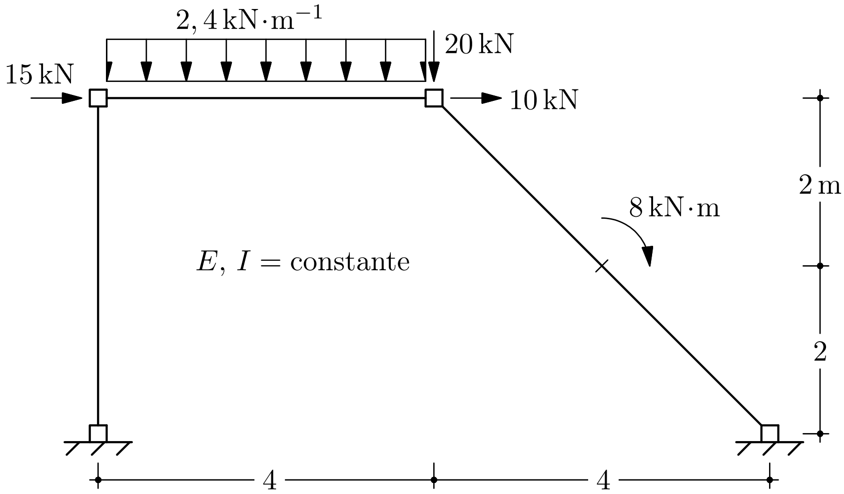


Figura 9.45: Pórtico com barras axialmente rígidas.

Esse critério consiste em aplicar a força à estrutura-base e verificar se é equilibrada directamente como reacção de apoio ou se deforma alguma peça e é por ela transmitida para os apoios da estrutura-base. No primeiro caso a força é tratada como força nodal e no segundo como carga de vão.

Exercício 9.18. Usando o procedimento anteriormente descrito, verifique se quando se admite que todos os elementos da estrutura representada na figura 9.45 são axialmente rígidos, a equação do método dos deslocamentos toma o seguinte aspecto:

$$E\,I\begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1,7071 & -0,1098 \\ 0 & -0,1098 & 0,5076 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 3,2 \\ -5,2 \\ 1,8 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix}.$$

Baseie-se no resultado (8.7), utilizando os modos de deformação correspondentes.

Apesar de ter sido ilustrado para estruturas com elementos axialmente indeformáveis, o procedimento anteriormente descrito é aplicável à análise de estruturas com quaisquer outros modos de deformação impedidos, sujeitas a qualquer uma das solicitações já consideradas.

Como exemplo de aplicação, considere-se o pórtico plano com pisos rígidos representado na figura 9.46. Na figura 9.47a estão indicados os deslocamentos nodais que se deveriam considerar como independentes, se não houvesse restrições sobre os modos de deformação dos elementos estruturais.

Se, para além dos pisos serem rígidos, se admitir ainda que os pilares são axialmente indeformáveis, o grau de indeterminação cinemática da estrutura desce de 12 para 2. Os dois movimentos possíveis são as translações dos andares, as quais são caracterizadas pelos deslocamentos indicados na figura 9.47b. Na figura 9.48 está representada a estrutura-base correspondente.

Os modos de deformação estão representados nas figuras 9.49, sendo fácil concluir que é a seguinte a expressão da matriz de dependência dos deslocamentos:

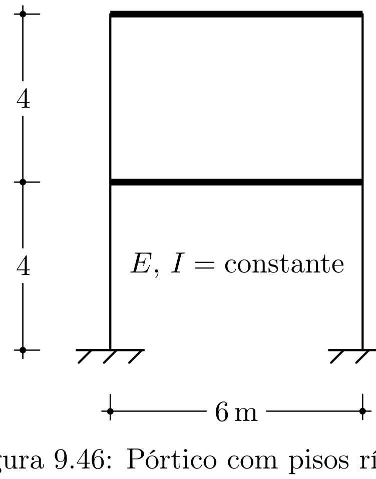
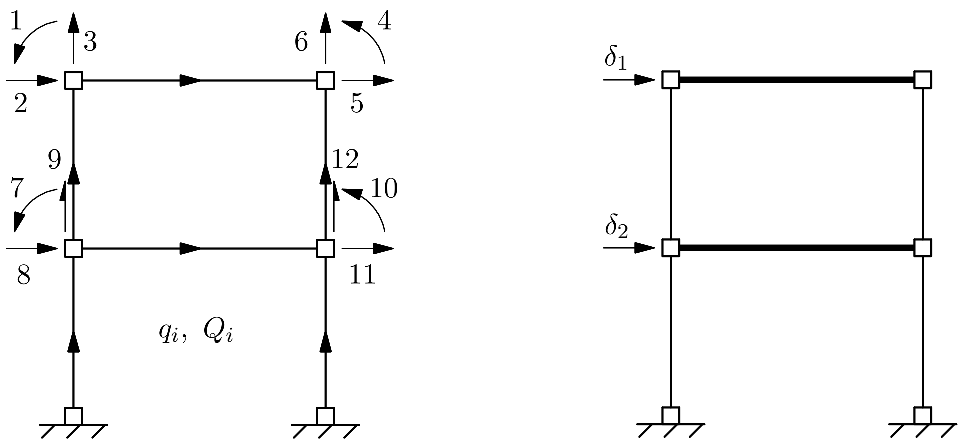


Figura 9.46: Pórtico com pisos rígidos.



(a) Deslocamentos nodais. (b) Deslocamentos independentes.

Figura 9.47: Deslocamentos em pórtico com pisos rígidos.

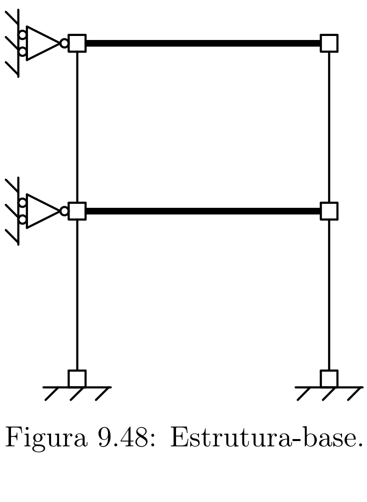
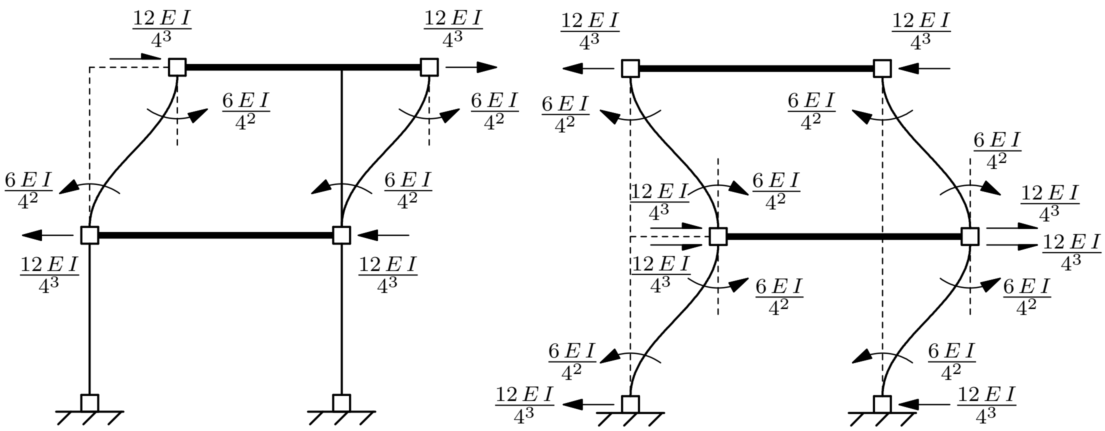


Figura 9.48: Estrutura-base.



(a) Estado 1. (b) Estado 2.

Figura 9.49: Acção dos deslocamentos nodais.

$$\mathbf{T}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

As forças correspondentes aos modos de deformação independentes têm, pois, as seguintes definições:

$$\begin{cases} F_1 = Q_2 + Q_5 \\ F_2 = Q_8 + Q_{11} \end{cases}. \tag{9.48}$$

Aplicando as definições (D9.13) e (9.48) à informação contida nas figuras 9.49a e 9.49b, encontra-se para a matriz de rigidez da estrutura a seguinte expressão:

$$\mathbf{S} = E\,I \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}. \tag{9.49}$$

Considere-se agora o efeito de um assentamento vertical, Δ, no apoio da esquerda. Na figura 9.50 representa-se a deformada que se instala na estrutura-base quando esta solicitação é introduzida. Nas figuras 9.51a e 9.51b estão definidas as forças nodais que é necessário aplicar aos pilares dos andares inferior e superior, respectivamente, para provocar as deformações que apresentam na estrutura-base.

A partir dessa informação, e utilizando as definições (D9.12) e (9.48) encontra-se a seguinte expressão para o vector das forças de fixação:

$$\mathbf{F}_0 = E\,I\,\Delta \begin{Bmatrix} +\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} \end{Bmatrix}. \tag{9.50}$$

Substituindo os resultados (9.49) e (9.50) na equação (9.34), e atendendo a que esta solicitação não está associada a forças nodais aplicadas,

$$\mathbf{F} = \mathbf{0},$$

encontra-se a seguinte solução para os deslocamentos independentes:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} -\Delta \\ -\frac{\Delta}{3} \end{Bmatrix}. \tag{9.51}$$

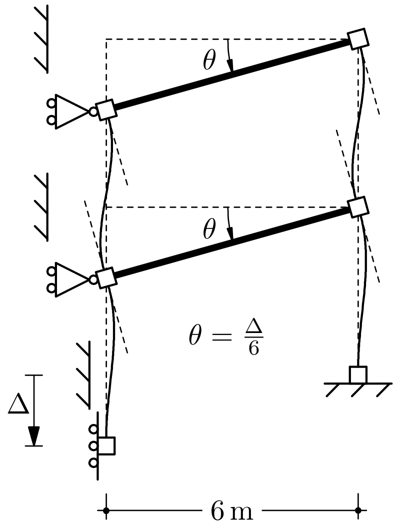
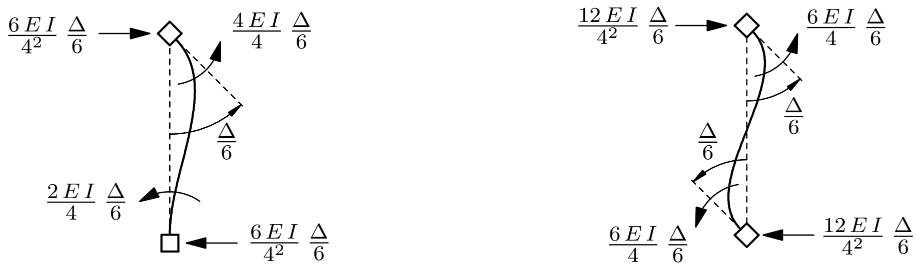


Figura 9.50: Acção do assentamento de apoio.



(a) Andar inferior. (b) Andar superior.

Figura 9.51: Forças nodais devidas ao assentamento de apoio.

A deformada que se instala na estrutura devido ao assentamento de apoio está representada na figura 9.52a. O andar superior limita-se a sofrer um deslocamento de corpo rígido, devendo por isso estar livre de esforços. Esta é de facto a situação que se verifica quando se determina o diagrama de momentos flectores final na estrutura, representado na figura 9.52b.

9.12.3 Cálculo de deslocamentos, esforços e reacções

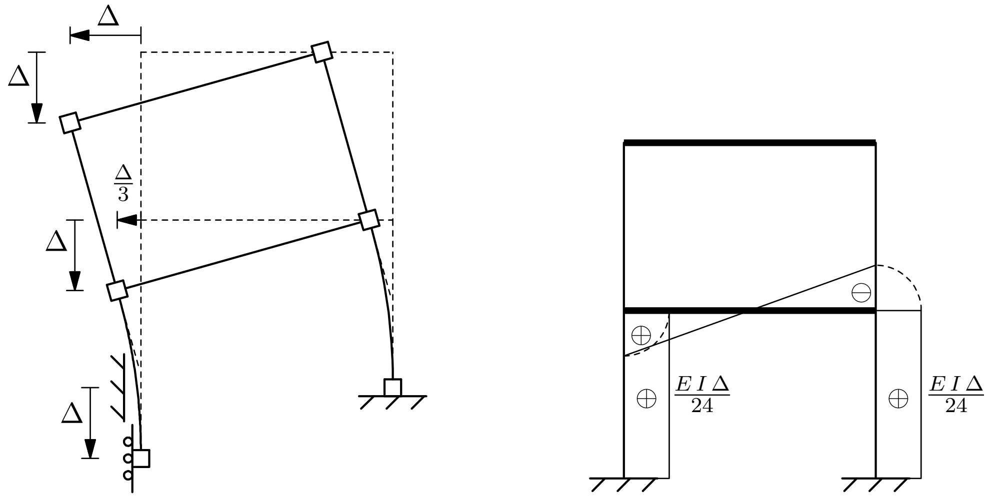
A sobreposição de efeitos descrita nas Secções 9.3 a 9.5 continua a ser aplicável para determinar os deslocamentos, os esforços e as reacções de apoio após a resolução da equação (9.34) na análise de estruturas com modos indeformáveis.

Como todas as deformadas envolvidas no cálculo, designadamente as deformadas devidas aos deslocamentos independentes e a deformada da estrutura base devida às cargas aplicadas, são determinadas, a expressão equivalente à equação (9.21) define de maneira única os deslocamentos dependentes da estrutura:

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta} + \mathbf{d}_0. \tag{9.52}$$

No entanto, quando se estabelece a sobreposição de efeitos (9.23) para os esforços independentes,

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{E}_m\,\boldsymbol{\delta} + \mathbf{X}_{0m}, \tag{9.53}$$



(a) Deformada. (b) Diagrama de momentos flectores.

Figura 9.52: Efeitos do assentamento de apoio.

verifica-se que os esforços associados aos modos indeformáveis são nulos, em consequência de se ter impedido essa deformação na construção das soluções complementares e particulares. Todavia, quando estas soluções são sobrepostas, para obter a solução da análise estrutural, verifica-se também que não está assegurado o equilíbrio dos nós móveis da estrutura nem, portanto, dos esforços das barras que neles incidem. O desequilíbrio local dos nós móveis decorre da definição das forças nodais equivalentes (9.39), a qual pode eliminar algumas forças nodais da equação resolvente (9.34) e explicitar o equilíbrio de combinações de outras.

Os esforços associados aos modos indeformáveis são calculados de modo a repor essa condição de equilíbrio, podendo isso ser feito na definição das soluções complementares e particulares ou após a determinação dos deslocamentos independentes. É possível, no entanto, que as condições de equilíbrio disponíveis não sejam suficientes, obtendo-se uma solução estaticamente indeterminada.

Para o exemplo representado na figura 9.40, os resultados definidos na figura 9.44 mostram que a definição (9.53) não permitiria determinar o esforço axial na viga e nos pilares, os quais foram considerados axialmente indeformáveis. Esses resultados mostram, também, que se poderia aplicar forças nodais que só introduzissem esforço axial nessas peças sem que isso afectasse as soluções cinematicamente admissíveis aí definidas.

Para este exemplo, da definição (9.36) para as forças nodais equivalentes decorre que as forças nodais Q_3 e Q_6 estão ausentes da equação de equilíbrio (9.35), a qual não impõe explicitamente o equilíbrio das forças nodais Q_2 e Q_5 mas apenas da sua resultante. A solução que se obtém, representada na figura 9.53, é obtida combinado os resultados definidos na figura 9.44:

$$\begin{aligned}
Q_2 &= -\,3 + \frac{6\,E\,I}{3^2}\,\delta_1 + \frac{12\,E\,I}{3^3}\,\delta_3 \\
Q_3 &= -\,8 - \frac{6\,E\,I}{6^2}\,\delta_1 - \frac{6\,E\,I}{6^2}\,\delta_2 \\
Q_6 &= -\,8 + \frac{6\,E\,I}{6^2}\,\delta_1 + \frac{6\,E\,I}{6^2}\,\delta_2
\end{aligned}$$

O equilíbrio nodal, face ao carregamento dado, é estabelecido redistribuindo estas forças

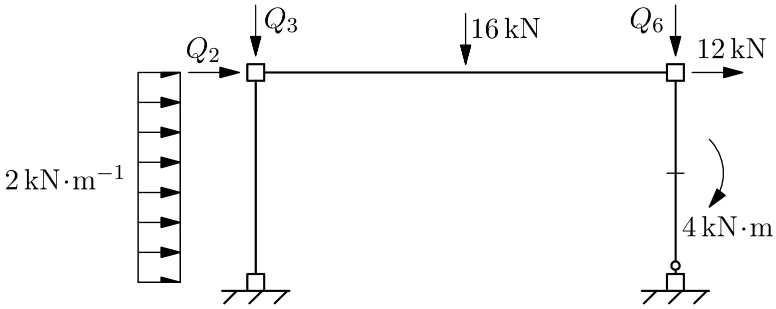


Figura 9.53: Desequilíbrio das forças nodais.

como esforços axiais nas barras axialmente indeformáveis. Essa redistribuição está ilustrada na figura 9.54 para cada uma das soluções, mas pode ser imposta apenas para a combinação dessas soluções, após o cálculo dos deslocamentos independentes.

Exercício 9.19. Determine os diagramas de esforços no pórtico com barras axialmente rígidas representado na figura 9.40.

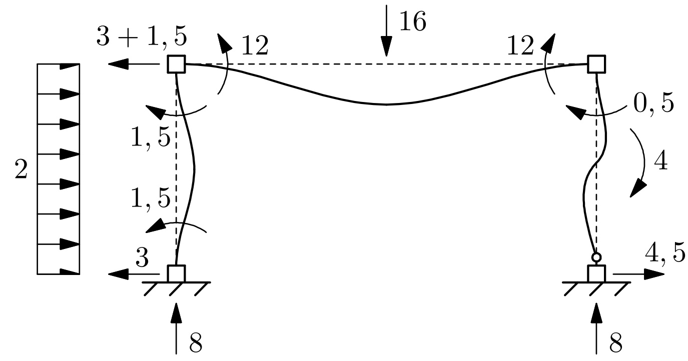
Exercício 9.20. Resolva o exercício 6.27 recorrendo ao método dos deslocamentos. Confirme que a solução é cinematicamente determinada (a deformada da estrutura é única) e uma vez estaticamente indeterminada (as reacções de apoio e os diagramas de esforços dependem de uma variável livre).

9.13 Generalização da Formulação

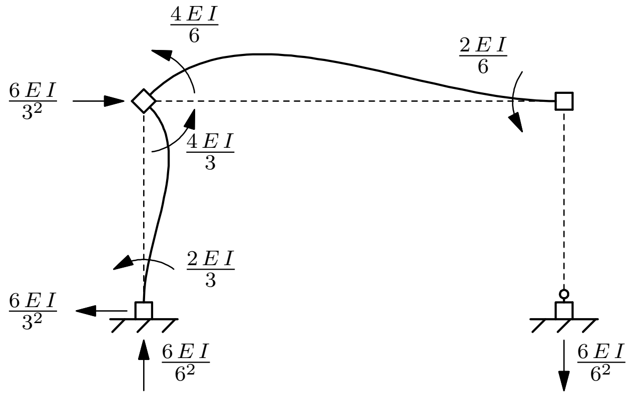
O método dos deslocamentos foi introduzido admitindo que todos os elementos estruturais eram deformáveis para facilitar a interpretação da equação resolvente (9.13), a qual define nesse contexto um conjunto de condições de equilíbrio nodal das forças correspondentes aos deslocamentos tomados como incógnitas. A redefinição dos coeficientes dessa equação recorrendo ao conceito de trabalho enfraquece a interpretação física da equação resolvente do método mas facilita a sua aplicação em cálculo manual, e está implícita na definição das forças correspondentes aos deslocamentos independentes de estruturas com peças indeformáveis.

Em qualquer dessas fases sublinhou-se que a aplicação do método se baseia na combinação de soluções cinematicamente admissíveis, garantindo que a deformada de cada elemento e da estrutura satisfazem as condições de equilíbrio. As forças necessárias para impor essa deformada decorrem da aplicação das relações de elasticidade e asseguram o equilíbrio de cada elemento estrutural e, portanto, a condição de equilíbrio global da estrutura. Mostra-se a seguir como cada uma dessas condições fundamentais, de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade, pode ser imposta a nível de cada elemento estrutural para obter a generalização da equação fundamental do método dos deslocamentos, definida no Capítulo 7, na qual se baseia a automatização do método.

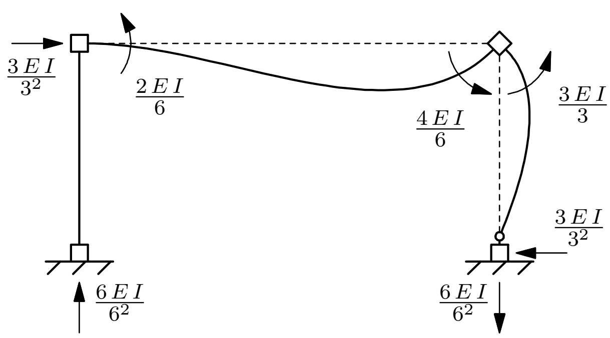
Essa generalização é feita para as várias situações que foram entretanto analisadas, designadamente a modelação de peças com libertações, troços rígidos ou modos indefor-



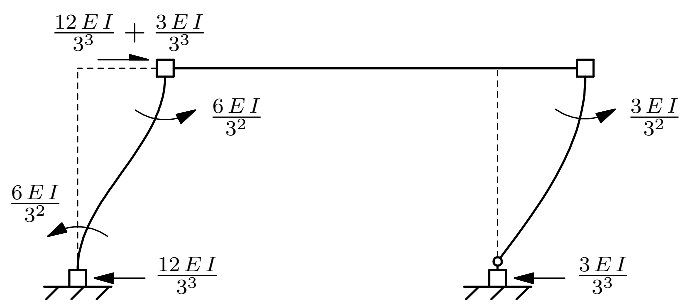
(a) Estado 0.



(b) Estado 1.



(c) Estado 2.



(d) Estado 3.

Figura 9.54: Redistribuição das forças nodais.

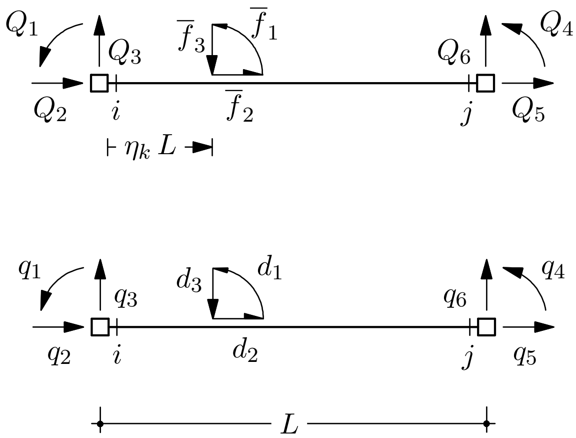


Figura 9.55: Forças e deslocamentos correspondentes.

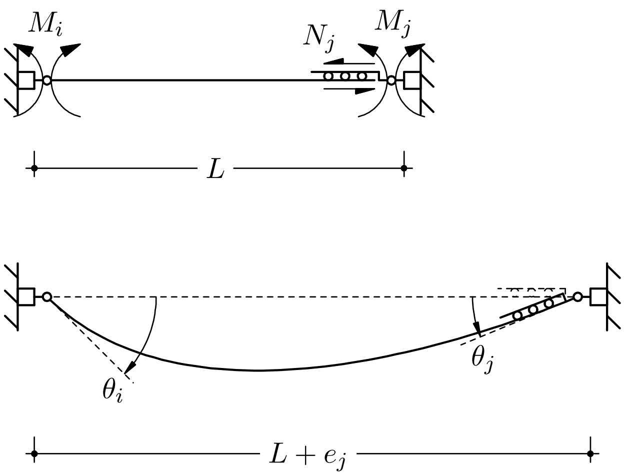


Figura 9.56: Esforços e deformações independentes.

máveis. é ilustrada para o elemento de pórtico plano, sendo os resultados generalizáveis para outros tipos de elemento estrutural.

9.14 Equilíbrio, Compatibilidade e Elasticidade

Na representação definida na figura 9.55, as forças (impostas) $\overline{f}_k$ definem as resultantes das cargas de vão e as distâncias $\eta_k\, L$ as suas posições, sendo L o comprimento da peça deformável. Os deslocamentos (generalizados) d_k definem os deslocamentos correspondentes, medidos em relação à corda do elemento, como adiante se mostra. Como elemento-base toma-se a barra biencastrada com as libertações associadas aos esforços e deformações independentes, como se ilustra na figura 9.56. Esta representação permite estabelecer as condições de equilíbrio e de compatibilidade independentemente das relações constitutivas (7.13), as quais se mantêm válidas a nível do elemento.

A condição de compatibilidade do elemento é escrita na forma,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\delta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uN} \\ \mathbf{A}_{\delta N} \end{bmatrix} \mathbf{q}_N \tag{9.54}$$

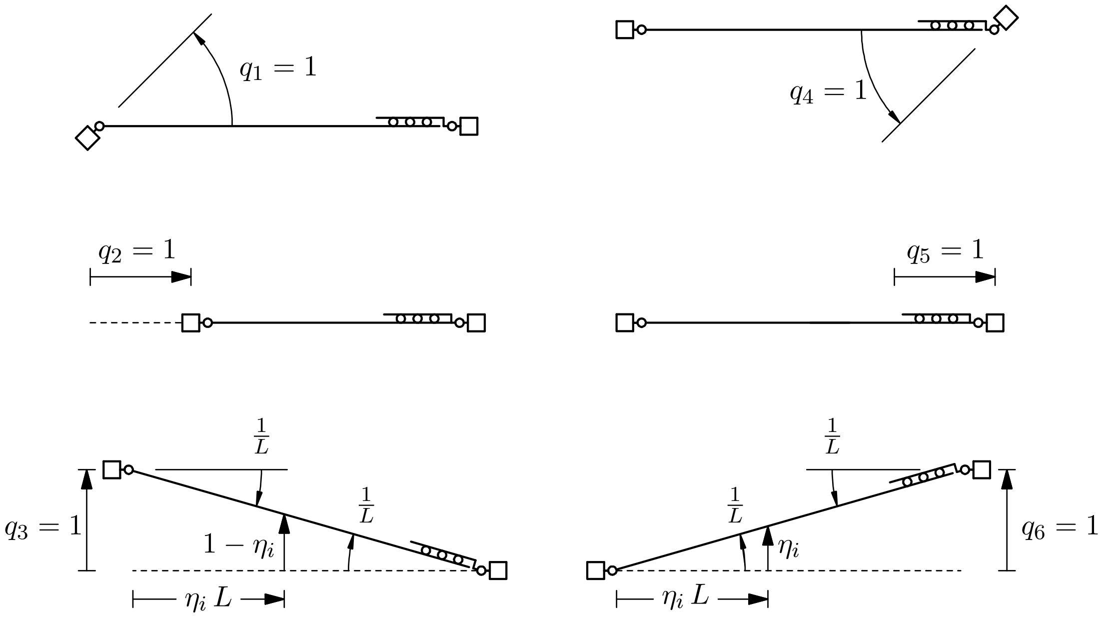


Figura 9.57: Elemento-base sujeito a deslocamentos nodais.

definindo as deformações independentes e os deslocamentos, medidos em relação à corda, compatíveis com os deslocamentos nodais. As expressões que se obtêm para as matrizes de compatibilidade estão ilustradas na figura 9.57:

$$\mathbf{A}_{uN} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & -1/L & 0 & 0 & +1/L \\ 0 & 0 & +1/L & +1 & 0 & -1/L \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \end{array}\right] \tag{9.55a}$$

$$\mathbf{A}_{\delta N} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & +1/L \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 - 1 & 0 & 0 & -\eta_3 \end{array}\right] \tag{9.55b}$$

O índice N é utilizado para distinguir o vector dos deslocamentos nodais, $\mathbf{q}_N$, e os termos a ele associados, do vector dos deslocamentos relativos nas libertações, $\mathbf{q}_L$, adiante utilizado.

A transformação dual da condição de compatibilidade (9.54) estabelece a condição de equilíbrio entre as forças nodais, $\mathbf{Q}_N$, os esforços independentes, $\mathbf{X}$, e as resultantes das cargas de vão, $\overline{\mathbf{f}}$:

$$\mathbf{Q}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uN}^T & \mathbf{A}_{\delta N}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ -\overline{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \tag{9.56}$$

Exercício 9.21. Verifique a condição de equilíbrio nodal (9.56) para as definições (9.55) aplicando separadamente os esforços independentes, M_i, M_j e N_j, e as forças $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$ e $\overline{f}_3$ ao elemento-base, $\mathbf{q}_N = \mathbf{0}$.

Exercício 9.22. Verifique se a condição de equilíbrio nodal (9.56) garante as condições de equilíbrio global do elemento base:

$$
\begin{aligned}
Q_{2N} + Q_{5N} + \overline{f}_2 &= 0, \\
Q_{3N} + Q_{6N} - \overline{f}_3 &= 0, \\
Q_{1N} + Q_{4N} - L\, Q_{3N} + \overline{f}_1 + (1 - \eta_3)\, L\, \overline{f}_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

A equação fundamental do método dos deslocamentos (7.9), escrita agora na forma,

$$\mathbf{K}_{NN}\, \mathbf{q}_N + \mathbf{Q}_{N0} = \mathbf{Q}_N. \tag{9.57}$$

é recuperada eliminando os esforços independentes na condição de equilíbrio nodal (9.56) através das relações de elasticidade (7.13) e eliminando depois as deformações independentes recorrendo à condição de compatibilidade (9.54). São as seguintes as expressões que se obtêm para a matriz de rigidez do elemento e para o vector das forças nodais de fixação:

$$\mathbf{K}_{NN} = \mathbf{A}_{uN}^T\, \mathbf{K}\, \mathbf{A}_{uN} \tag{9.58a}$$

$$\mathbf{Q}_{N0} = \mathbf{A}_{uN}^T\, \overline{\mathbf{X}} - \mathbf{A}_{\delta N}^T\, \overline{\mathbf{f}} \tag{9.58b}$$

Exercício 9.23. Verifique a expressão (7.19) para a matriz de rigidez do elemento aplicando a definição (9.58a) e o resultado (7.15).

Exercício 9.24. Verifique a expressão (7.17) para o vector das forças de fixação devidas a uma carga uniforme transversal aplicando a definição (9.58b) e o resultado (7.15).

9.15 Trabalho e Energia

O resultado seguinte é obtido fazendo o produto interno das condições de compatibilidade (9.54) e de equilíbrio (9.56), servindo os índices C e E para identificar os grupos de variáveis compatíveis e equilibradas, respectivamente:

$$\mathbf{q}_{NC}^T\, \mathbf{Q}_{NE} + \boldsymbol{\delta}_C^T\, \overline{\mathbf{f}}_E = \mathbf{u}_C^T\, \mathbf{X}_E$$

Esta equação, obtida sem se recorrer às relações de elasticidade (7.13), recupera o teorema dos trabalhos virtuais, igualando o trabalho das forças exteriores ao das forças interiores. Quando se toma esta equação como ponto de partida, a equação fundamental do método dos deslocamentos (9.57) é obtida impondo a relação de elasticidade, para exprimir os esforços em função das deformações, e definindo os deslocamentos $\boldsymbol{\delta}$ e as deformações $\mathbf{u}$ compatíveis com os deslocamentos virtuais, $\mathbf{q}_{NC}$:

$$\mathbf{q}_{NC}^T\, \left(\mathbf{Q}_{NE} + \mathbf{A}_{\delta N}^T\, \overline{\mathbf{f}}\right) = \mathbf{q}_{NC}^T\, \mathbf{A}_{uN}^T\, (\mathbf{K}\, \mathbf{A}_{uN}\, \mathbf{q}_{NE} + \mathbf{X})\,.$$

A equação (9.57) é recuperada assegurando que esta equação escalar é válida para qualquer deslocamento virtual.

A minimização da energia potencial é outro processo frequentemente utilizado para deduzir a equação fundamental do método dos deslocamentos. Da definição do trabalho das forças exteriores e da energia de deformação,

$$W = \mathbf{q}_N^T \, \mathbf{Q}_N + \boldsymbol{\delta}^T \, \overline{\mathbf{f}} \tag{9.59}$$

$$E = \frac{1}{2} \, \mathbf{u}^T \, \left(\mathbf{X} + \overline{\mathbf{X}}\right) \tag{9.60}$$

obtém-se a seguinte definição para a energia potencial,

$$\Pi = \frac{1}{2} \, \mathbf{u}^T \, \left(\mathbf{X} + \overline{\mathbf{X}}\right) - \mathbf{q}_N^T \, \mathbf{Q}_N - \boldsymbol{\delta}^T \, \overline{\mathbf{f}}$$

ou, recorrendo às condições de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade e às definições (9.58) para a matriz de rigidez e para o vector das forças de fixação:

$$\Pi = \frac{1}{2} \, \mathbf{q}_N^T \, \mathbf{K}_{NN} \, \mathbf{q}_N - \mathbf{q}_N^T \, (\mathbf{Q}_N - \mathbf{Q}_{N0}) \, .$$

9.16 Barras Indeformáveis

Para generalizar o resultado (9.54) para barras com modos indeformáveis basta adicionar as condições necessárias e suficientes para que essa indeformabilidade seja garantida independentemente das relações constitutivas utilizadas, designadamente as relações de elasticidade (7.13).

As condições de compatibilidade tomam a seguinte forma,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\delta} \\ \overline{\mathbf{u}}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uN} \\ \mathbf{A}_{\delta N} \\ \mathbf{A}_{rN} \end{bmatrix} \, \mathbf{q}_N \tag{9.61}$$

em que o vector $\overline{\mathbf{u}}_r$ define os modos indeformáveis (impostos) e a transformação dual generaliza a condição de equilíbrio nodal (9.56),

$$\mathbf{Q}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uN}^T & \mathbf{A}_{\delta N}^T & \mathbf{A}_{rN}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ -\overline{\mathbf{f}} \\ \mathbf{X}_r \end{Bmatrix} \tag{9.62}$$

em que o vector $\mathbf{X}_r$ define os esforços generalizados correspondentes, os quais podem permanecer total ou parcialmente indeterminados após a análise da estrutura, como se ilustrou anteriormente.

Por exemplo, e de acordo com a definição (9.55a), para as condições de indeformabilidade axial e de indeformabilidade à flexão,

$$\overline{\mathbf{u}}_r = \left\{ e = 0 \right\}$$

$$\overline{\mathbf{u}}_r = \begin{Bmatrix} \theta_i = 0 \\ \theta_j = 0 \end{Bmatrix}$$

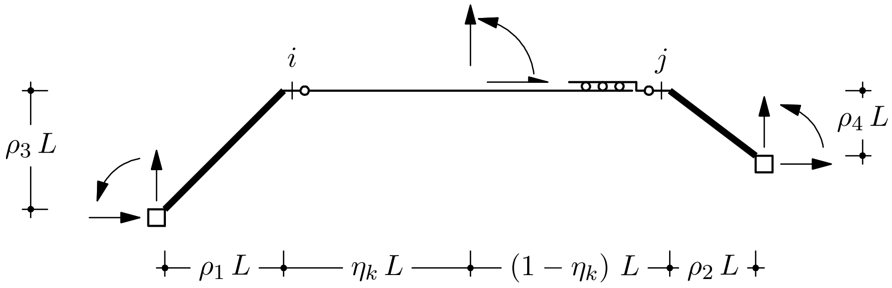


Figura 9.58: Barra com troços rígidos.

obtêm-se as seguintes definições para a matriz de compatibilidade associada aos modos rígidos, respectivamente:

$$\mathbf{A}_{rN} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}_{rN} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1/L & 0 & 0 & +1/L \\ 0 & 0 & +1/L & +1 & 0 & -1/L \end{array}\right]$$

O comportamento de barras rígidas é simulado combinando estas duas condições, mostrando a condição de compatibilidade (9.61) que, no caso plano, apenas 3 dos 6 deslocamentos nodais permanecem independentes (ou 6 em 12, no caso tridimensional).

A equação fundamental do método dos deslocamentos continua a ser obtida combinando as condições de compatibilidade (9.61)) e de equilíbrio (9.62) com as relações de elasticidade, sendo os esforços associados aos modos indeformáveis agora tratados como variáveis independentes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{A}_{rN}^T \\ \mathbf{A}_{rN} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_N \\ \mathbf{X}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_N - \mathbf{Q}_{N0} \\ \bar{\mathbf{u}}_r \end{Bmatrix} \tag{9.63}$$

Exercício 9.25. Generalize a equação dos trabalhos virtuais e a definição da energia potencial para incluir o efeito de modos indeformáveis e de deformações independentes impostas.

9.17 Barras com Troços Rígidos

Os resultados anteriormente obtidos permanecem válidos para barras com troços rígidos, sendo no entanto necessário actualizar as definições (9.55) das matrizes de compatibilidade para incluir o efeito das excentricidades em relação ao referencial da peça deformável. Deixa-se para exercício verificar, por compatibilidade e por equilíbrio, que são os seguintes os resultados que se obtêm para a geometria indicada na figura (9.58), quando os deslocamentos e as forças são medidos no referencial do troço deformável da barra:

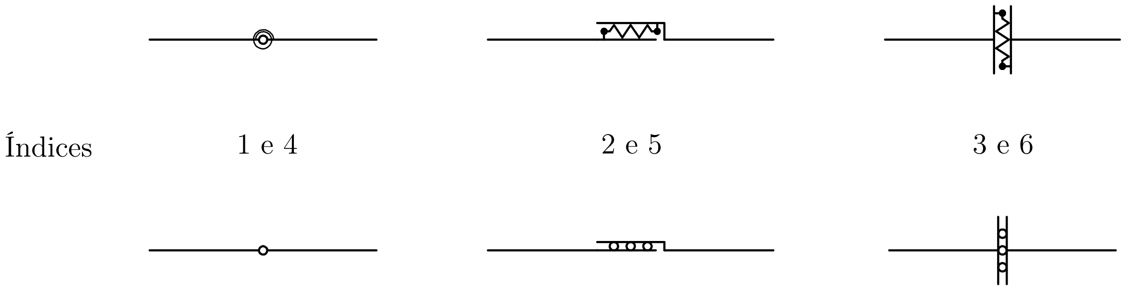


Figura 9.59: Aparelhos de libertação.

$$\mathbf{A}_{uN} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -(1+\rho_1) & 0 & -1/L & -\rho_2 & 0 & +1/L \\ \rho_1 & 0 & +1/L & 1+\rho_2 & 0 & -1/L \\ [\rho_1\,(\rho_4-\rho_3)+\rho_3]\,L & -1 & \rho_4-\rho_3 & [\rho_2\,(\rho_4-\rho_3)-\rho_4]\,L & +1 & \rho_3-\rho_4 \end{array}\right] \tag{9.64a}$$

$$\mathbf{A}_{\delta N} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -\rho_1 & 0 & -1/L & -\rho_2 & 0 & +1/L \\ [\rho_1\,(\rho_4-\rho_3)+\rho_3]\,L & +1 & \rho_4-\rho_3 & \rho_2\,(\rho_4-\rho_3)\,L & 0 & \rho_3-\rho_4 \\ (1-\eta_3)\,\rho_2\,L & 0 & 1-\eta_3 & -\eta_3\,\rho_2\,L & 0 & +\eta_3 \end{array}\right] \tag{9.64b}$$

Se se pretender simular a existência de modos rígidos continua-se a recorrer à matriz de compatibilidade (9.64a) para extrair os termos relevantes para a condição de indeformabilidade, definida pela matriz $\mathbf{A}_{rN}$ na definição (9.61) para a condição de compatibilidade da barra.

9.18 Barras com Libertações

A presença de aparelhos de libertação perfeitos pode ser simulada modificando a matriz de rigidez e o vector dos esforços de fixação presentes nas relações de elasticidade, tal como se fez no Capítulo 7 para representar barras articuladas e com libertações de esforço transverso. O processo alternativo que a seguir se apresenta é equivalente mas tem a vantagem de permitir também a modelação de libertações elásticas.

No contexto das peças de pórticos planos, podem existir as três libertações representadas na figura 9.59, ou uma qualquer combinação dessas libertações, em qualquer uma das duas secções extremas. Os deslocamentos relativos nessas libertações são reunidos no vector $\mathbf{q}_L$ e os pares de forças correspondentes no vector $\mathbf{Q}_L$. Como se indica na figura 9.59, os índices 1 a 3 (4 a 6) identificam libertações de momento flector, esforço axial e esforço transverso na secção inicial (final) da peça.

Quando se introduz o efeito dos deslocamentos relativos nas libertações, a condição de compatibilidade (9.61) toma a seguinte expressão,

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\delta} \\ \overline{\mathbf{u}}_r \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uN} & \mathbf{A}_{uL} \\ \mathbf{A}_{\delta N} & \mathbf{A}_{\delta L} \\ \mathbf{A}_{rN} & \mathbf{A}_{rL} \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} \mathbf{q}_N \\ \mathbf{q}_L \end{array}\right\} \tag{9.65}$$

e a transformação dual substitui a condição de equilíbrio (9.62),

$$\left\{\begin{matrix} \mathbf{Q}_N \\ -\mathbf{Q}_L \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uN}^T & \mathbf{A}_{\delta N}^T & \mathbf{A}_{rN}^T \\ \mathbf{A}_{uL}^T & \mathbf{A}_{\delta L}^T & \mathbf{A}_{rL}^T \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} \mathbf{X} \\ -\bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{X}_r \end{matrix}\right\} \tag{9.66}$$

definindo as forças nas libertações que equilibram os esforços independentes e as resultantes das carga de vão, em que:

$$\mathbf{A}_{uL} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & +1/L & 0 & 0 & +1/L \\ 0 & 0 & -1/L & -1 & 0 & -1/L \\ 0 & -1 & \rho_3-\rho_4 & 0 & -1 & \rho_3-\rho_4 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}_{\delta L} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & +1/L & 0 & 0 & +1/L \\ 0 & +1 & +\rho_4 & 0 & 0 & +\rho_4 \\ 0 & 0 & -1-\rho_3 & 0 & 0 & +\rho_3 \end{array}\right]$$

é necessário distinguir três possibilidades na generalização da equação fundamental do método dos deslocamentos (9.63), designadamente: existirem deslocamentos relativos impostos nas libertações, sendo livres as forças correspondentes; existirem (pares de) forças impostas nas libertações, sendo livres os deslocamentos relativos correspondentes; existirem libertações elásticas, caso em que as relações de elasticidade (7.13) são escritas também para estes aparelhos, na forma seguinte:

$$\mathbf{Q}_L = \mathbf{K}_L\,\mathbf{q}_L + \overline{\mathbf{Q}}_L \tag{9.67}$$

Estas situações podem coexistir, isto é, pode-se modelar uma peça com libertações elásticas e com outras libertações onde existam deslocamentos relativos ou pares de forças impostas. No entanto, definem-se separadamente cada um dos casos para simplificar a apresentação, designadamente quando existem deslocamentos relativos impostos nas libertações,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{A}_{rN}^T \\ \mathbf{A}_{rN} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} \mathbf{q}_N \\ \mathbf{X}_r \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{Q}_N - \mathbf{Q}_{N0} - \mathbf{Q}_{NL} \\ \bar{\mathbf{u}}_r - \bar{\mathbf{u}}_{rL} \end{matrix}\right\} \tag{9.68}$$

sendo,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{NL} &= \mathbf{K}_{NL}\,\mathbf{q}_L \\ \bar{\mathbf{u}}_{rL} &= \mathbf{A}_{rL}^T\,\mathbf{q}_L \\ \mathbf{K}_{NL} &= \mathbf{A}_{uN}^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{A}_{uL} \end{aligned}$$

quando existem pares de forças impostos nas libertações, devendo os deslocamentos relativos correspondentes ser tratados como variáveis livres,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NL} & \mathbf{A}_{rN}^T \\ \mathbf{K}_{NL}^T & \mathbf{K}_{LL} & \mathbf{A}_{rL}^T \\ \mathbf{A}_{rN} & \mathbf{A}_{rL} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} \mathbf{q}_N \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{X}_r \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{Q}_N - \mathbf{Q}_{N0} \\ -\mathbf{Q}_L - \mathbf{Q}_{L0} \\ \bar{\mathbf{u}}_{rL} \end{matrix}\right\} \tag{9.69}$$

sendo,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{LL} &= \mathbf{A}_{uL}^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{A}_{uL} \\ \mathbf{Q}_{L0} &= \mathbf{A}_{uL}^T\,\overline{\mathbf{X}} - \mathbf{A}_{\delta L}^T\,\bar{\mathbf{f}} \end{aligned}$$

e encontrando-se os seguintes resultados para a simulação de libertações elásticas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NL} & \mathbf{A}_{rN}^T \\ \mathbf{K}_{NL}^T & \mathbf{K}_{LL} + \mathbf{K}_L & \mathbf{A}_{rL}^T \\ \mathbf{A}_{rN} & \mathbf{A}_{rL} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_N \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{X}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_N - \mathbf{Q}_{N0} \\ -\overline{\mathbf{Q}}_L - \mathbf{Q}_{L0} \\ \overline{\mathbf{u}}_{rL} \end{Bmatrix} \tag{9.70}$$

é conveniente condensar localmente os sistemas (9.69) e (9.70) nos deslocamentos relativos nas libertações para obter sistemas com o formato (9.63) para todas as situações.

Exercício 9.26. Generalize a equação dos trabalhos virtuais e a definição da energia potencial para incluir o efeito de libertações em cada uma das situações anteriormente analisadas.